МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Псху Арсен Владимирович

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва — 2007

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (НИИ ПМА КБНЦ РАН).

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
академик РАН Моисеев Евгений Иванович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор,
Репин Олег Александрович,
Самарский государственный экономический университет

доктор физико-математических наук,
Попов Антон Юрьевич,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

доктор физико-математических наук, профессор,
Килбас Анатолий Александрович,
Белорусский государственный университет

Ведущая организация:

Орловский государственный университет

Защита состоится "__"___________ в 15-30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, II уч.корп., факультет ВМиК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ф-та ВМиК МГУ.

Автореферат разослан <____>_____________.

Ученый секретарь
диссертационного совета Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время наблюдается заметный рост внимания исследователей к дробному исчислению. В первую очередь это обусловлено многочисленными эффективными приложениями дробного интегро-дифференцирования при описании широкого класса физических и химических процессов, протекающих во фрактальных средах, при математическом моделировании экономических и социально-биологических явлений.

Основой большинства математических моделей, описывающих указанные явления, являются дифференциальные уравнения дробного порядка, в том числе уравнения в частных производных. Поэтому развитие аналитического аппарата теории уравнений с частными производными дробного порядка является весьма актуальной и важной задачей.

Развитие теории уравнений с производными дробного порядка стимулируется и развитием теории дифференциальных уравнений целого порядка. Хорошо известна роль дробного исчисления в теории уравнений смешанного типа, в теории задач со смещением, в теории вырождающихся уравнений. Кроме того, уравнения дробного порядка, существенно дополняя картину общей теории дифференциальных уравнений, могут обнаруживать связь между явлениями, которые, оставаясь в рамках целочисленного дифференцирования, кажутся независимыми. Например, тот факт, что для единственности решения задачи Коши в случае уравнения теплопроводности необходимо требовать ограничения на рост решения, а в случае волнового уравнения — нет, видится более согласованным после того, как становится известным, что соответствующее условие для диффузионно-волнового уравнения порядка $\alpha \leqslant 2$ при $\alpha = 1$ совпадает с условием для уравнения теплопроводности, а при $\alpha \to 2$ ограничивающая рост решения функция стремится к бесконечности.

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка изучались в работах как отечественных, так и зарубежных авторов: Кочубей А.Н., Эйдельман С.Д., Fujita Y., Schneider W.R., Wyss W., Нахушев А.М., Геккиева С.Х., Костин В.А., Глушак А.В., Clément Ph., Gripenberg G., Londen S-O., Simonett G., Килбас А.А., Репин О.А., Ворошилов А.А., El-Sayed A.M.A., Bazhlekova E., Pierantozzi T., Trujillo J.J., Vazquez L.. Engler H., Gorenflo R., Mainardi F., Luchko Yu., Buckwar E., Agrawal O.P., Нахушева В.А., Нахушева З.А., Шхануков М.Х., Шогенов В.Х., Мамчуев М.О., Кумыкова С.К., Керефов М.А., Андреев А.А., Еремин А.С., Зарубин Е.А., Ефимов А.В., Лопушанская Г.П. и др. В основном предметом исследования являлись диффузионные, диффузионно-волновые и эволюционные уравнения дробного порядка, при решении которых использовались методы интегральных преобразований, методы функционального анализа, метод разделения переменных и т.д.

Цель работы. Целью настоящей работы является развитие аналитических методов решения и анализа краевых задач для линейных уравнений в частных производных дробного и континуального порядка.

Методика исследований. Результаты работы получены с использованием методов дробного исчисления, метода функции Грина, интегральных преобразований, метода факторизации, методов теории специальных функций и т.д.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для линейного уравнения двух независимых переменных порядка меньше либо равного единице с производными Римана-Лиувилля и производными Капуто построено фундаментальное решение, решены краевые задачи в прямоугольных областях и задача Коши. Показано, что в случае задачи Коши имеет место условие, аналогичное условию А.Н. Тихонова, ограничивающее рост искомой функции в бесконечности, которое нельзя

улучшить (в смысле увеличения показателя).

2. Изучены свойства интегральных преобразований с функцией Райта, на основе которых предложен метод решения начальных задач для эволюционных уравнений дробного порядка, позволяющий редуцировать их к соответствующим задачам для уравнений целого порядка.

3. Доказано утверждение, позволяющее распространять результаты, связанные с наличием или отсутствием у функций типа Миттаг-Леффлера вещественных нулей при определенных значениях параметров, на более обширные области их изменения, в геометрических терминах даны условия на параметры функции типа Миттаг-Леффлера, при которых она имеет (не имеет) вещественные нули.

4. Методом редукции к системе уравнений меньшего порядка решены задача Коши и первая краевая задача для одномерного диффузионного уравнения. Решены основные краевые задачи в прямоугольной области и построены соответствующие функции Грина для одномерного диффузионно-волнового уравнения.

5. Развит метод функции Грина для многомерного диффузионно-волнового уравнения с производной Римана-Лиувилля и производной Капуто, построено общее представление решения, решена задача Коши и доказана единственность решения задачи Коши в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова, методом продолжения построено решение первой краевой задачи.

6. Для оператора дробного интегро-дифференцирования континуального порядка построен обратный и доказаны аналоги формулы Ньютона-Лейбница. Решена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка.

7. Для уравнения диффузии континуального порядка построено фундаментальное решение, решены основные краевые задачи в прямоугольных областях и задача Коши, доказана единственность в классе функций быст-

рого роста.

Практическая и теоретическая ценность. Работа является теоретической. Полученные результаты найдут применение в развитии теории дифференциальных уравнений дробного порядка, интегральных преобразований и теории специальных функций. Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью дробного исчисления в физике и математическом моделировании процессов переноса.

Апробация работы. Результаты работы неоднократно докладывались на международных конференциях и научно-исследовательских семинарах, в частности: на семинаре по современному анализу, информатике и физике (рук. А.М. Нахушев, НИИ ПМА КБНЦ РАН, г. Нальчик); на научно-исследовательском семинаре (рук. В.А. Ильин, Е.И. Моисеев, ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова); на научно-исследовательском семинаре (рук. Е.И. Моисеев, И.С. Ломов, ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова); на научно-исследовательском семинаре "Нелинейные дифференциальные уравнения" (рук. И.А. Шишмарев, ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова); на научно-исследовательском семинаре "Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания" (рук. В.А. Садовничий, А.И. Прилепко, мех.-мат. ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова); на семинаре по анализу и его приложениям им. акад. Ф.Д. Гахова (рук. Э.И. Зверович, А.А. Килбас, С.В. Рогозин, БГУ, Минск); на заседании объединенной научной сессии, посвященной 90-летию со дня рождения А.В. Бицадзе (НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик, 2006); на Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2001, AMADE-2006)" (Минск, 2001, 2006); на II Международной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики" (Нальчик, 2001); на Международном Российско-Узбекском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" (п. Эльбрус, 2003); на II Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные уравнения. Проблемы математического образования", посвященной 80-летию Л.Д. Кудрявцева (Москва, 2003); на Российско-Казахском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы" (п. Эльбрус, 2004); на Воронежской весенней математической школе "Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения-XV" (Воронеж, 2004); на Международной конференции "Тихонов и современная математика" (Москва, 2006); на Международной научной конференции "Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий" (Алматы, 2006); на III Международной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики" (Нальчик, 2006).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]–[27].

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, вводных сведений, четырех глав и списка литературы. Список литературы содержит 183 наименования. Объем - 190 страниц.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, дается краткий обзор состояния предмета исследования и приводятся основные результаты работы.

В вводных сведениях приведены основные положения теории дробного интегро-дифференцирования, необходимые для дальнейшего изложения.

В **первой главе** исследуются линейные уравнения двух независимых переменных порядка меньше либо равного единице.

В пунктах 1.1–1.3 рассматривается краевая задача в прямоугольной области для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}u(x,y) + \lambda D_{0y}^{\beta}u(x,y) = f(x,y), \quad 0 < \alpha,\, \beta \leqslant 1,\; \alpha\beta < 1. \tag{1}$$

Операторы интегрирования и дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля дробного порядка $\nu \in \mathbb{R}$, с началом в точке s, определяются следующим образом:

$$D_{st}^{\nu} g(t) = \frac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_{s}^{t} \frac{g(\xi)\, d\xi}{|t-\xi|^{\nu+1}}, \quad \nu < 0; \quad D_{st}^{\nu} g(t) = g(t), \quad \nu = 0;$$

$$D_{st}^{\nu} g(t) = \operatorname{sign}^{n}(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\nu-n} g(t), \quad n-1 < \nu \leqslant n, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Производная Капуто определяется с помощью равенства

$$\partial_{st}^{\nu} g(t) = D_{st}^{\nu} g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(s)}{\Gamma(k-\nu+1)} |s-t|^{k-\nu}, \quad n-1 < \nu \leqslant n, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Через D будем обозначать прямоугольную область переменных x и y: $D = \{(x,y) : \;\; 0 < x < a, \; 0 < y < b\}$, $0 < a, b \leqslant \infty$. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $x^{1-\alpha} y^{1-\beta} u(x,y) \in C(\bar{D})$, $D_{0x}^{\alpha} u$, $D_{0y}^{\beta} u \in C(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in D$.

Задача 1. *Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$, $\alpha \cdot \beta < 1$, $\lambda > 0$, в области D, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\beta-1} u(x,y) = \psi(x), \quad 0 < x < a; \tag{2}$$

$$\lim_{x \to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x,y) = \varphi(y), \quad 0 < y < b, \tag{3}$$

где φ, ψ – заданные функции.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$, $\alpha \cdot \beta < 1$, $\lambda > 0$, $x^{1-\alpha}\psi(x) \in C[0;a]$, $y^{1-\beta}\varphi(y) \in C[0;b]$, $x^{1-\nu} y^{1-\rho} f(x,y) \in C(\bar{D})$, $\nu > \alpha\theta$, $\rho > \beta(1-\theta)$, $\theta \in (0;1)$, функция $x^{1-\nu} y^{1-\rho} f(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера по крайней мере по одной из переменных равномерно относительно другой, и выполнено условие согласования $\lim\limits_{y \to 0} D_{0y}^{\beta-1} \varphi(y) = \lim\limits_{x \to 0} D_{0x}^{\alpha-1} \psi(x)$. Тогда существует* *единственное регулярное решение уравнения* (1) *в области* D, *удовлетворяющее краевым условиям* (2) *и* (3). *Решение имеет вид*

$$u(x,y)=\int\limits_0^y \varphi(t)w(x,y-t)\,dt+\lambda\int\limits_0^x \psi(s)w(x-s,y)\,ds+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)w(x-s,y-t)dtds,$$

где

$$w(x,y)=\frac{x^{\alpha-1}}{y}e^{\alpha,0}_{\alpha,\beta}\left(-\lambda\frac{x^\alpha}{y^\beta}\right).$$

В этой и следующих главах существенно используются доказанные в пункте 1.2 свойства функции типа Райта

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\,\Gamma(\delta-\beta n)}.$$

Доказаны формулы дробного интегрирования и дифференцирования этой функции, построены различные представления и формулы трансформации, получены предельные соотношения и неравенства.

В пункте 1.4 исследована задача в прямоугольной области для уравнения

$$u_x(x,y)-\lambda D^{\beta}_{0y}u(x,y)=f(x,y),\quad \lambda>0. \tag{4}$$

Задача 2. *Найти регулярное решение* $u(x,y)$ *уравнения* (4), $0<\beta<1$, *в области* D, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0}D^{\beta-1}_{0y}u(x,y)=\psi(x),\quad 0<x<a;\quad u(a,y)=\varphi(y),\quad 0<y<b. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* $0<\beta<1$, $\lambda>0$, $a<\infty$, $\psi(x)\in C[0;\,a]$, $y^{1-\beta}\varphi(y)\in C[0,\,b]$, $x^{1-\nu}y^{1-\rho}f(x,y)\in C(\bar{D})$, $\nu>\theta$, $\rho>\beta(1-\theta)$, $\theta\in(0;1)$, *функция* $x^{1-\nu}y^{1-\rho}f(x,y)$ *удовлетворяет условию Гельдера по крайней мере по одной* *из переменных равномерно относительно другой, и выполнено условие согласования* $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y) = \psi(a)$. *Тогда существует единственное регулярное решение уравнения* (4) *в области* D, *удовлетворяющее краевым условиям* (5). *Решение имеет вид*

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \frac{\varphi(t)}{y-t} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\lambda\frac{a-x}{(y-t)^\beta}\right)dt + \lambda\int\limits_x^a \frac{\psi(s)}{y} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\lambda\frac{s-x}{y^\beta}\right)ds -$$

$$-\int\limits_x^a\int\limits_0^y \frac{f(s,t)}{y-t} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\lambda\frac{s-x}{(y-t)^\beta}\right)dt\,ds.$$

В пункте 1.5 рассмотрена задача Коши. Далее будем обозначать через $D = \{(x,y):\, x<a,\ 0<y<T\}$, $a \leqslant \infty$. Рассмотрим уравнение

$$u_x(x,y) + D_{0y}^{\beta}u(x,y) = f(x,y), \quad 0<\beta<1. \tag{6}$$

Задача 3. *Найти регулярное решение* $u(x,y)$ *уравнения* (6) *в области* D, *удовлетворяющее начальному условию*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}u(x,y) = \tau(x), \quad x<a, \tag{7}$$

где $\tau(x)$ *– заданная непрерывная функция.*

Теорема 3. *Пусть* $\tau(x)\in C(-\infty;\,a]$, $y^{1-\rho}f(x,y)\in C(\bar D)$, $\rho>0$, *функция* $f_0(x,y) = y^{1-\rho}f(x,y)$ *удовлетворяет условию Гельдера по крайней мере по одной из переменных: либо по переменной* x *равномерно по* $y\in[0;T]$, *либо по переменной* y *равномерно по* $x\in[c;a]$ *для любого* $c<a$, *и существуют равномерные на множестве* $\{y\in(0;T)\}$ *пределы*

$$\lim_{x\to-\infty} y^{1-\rho}f(x,y)\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{1}{1-\beta}}\right) = 0, \lim_{x\to-\infty}\tau(x)\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{1}{1-\beta}}\right) = 0,$$

где $\sigma < (1-\beta)\,(\beta/T)^{\beta/(1-\beta)}$. *Тогда функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой*

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^x \tau(s)\frac{1}{y}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x-s}{y^\beta}\right)ds + \int\limits_0^y\int\limits_{-\infty}^x \frac{f(s,t)}{y-t}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x-s}{(y-t)^\beta}\right)ds\,dt,$$

является регулярным решением задачи (6), (7).

Теорема 4. *Существует не более одного регулярного решения $u(x,y)$ задачи* (6), (7) *в области D, для которого при некотором $k>0$ существует предел*

$$\lim_{x\to-\infty} y^{1-\beta}u(x,y)\exp\left(-k|x|^{\frac{1}{1-\beta}}\right)=0. \tag{8}$$

Аналогичные результаты получены для уравнения

$$u_x(x,y)-D_{0y}^{\beta}u(x,y)=f(x,y), \quad 0<\beta<1.$$

Показано, что показатель $1/(1-\beta)$ в условии (8) нельзя улучшить.

В п. 1.6 результаты предыдущих пунктов переносятся на уравнения с производными Капуто

$$\partial_{0x}^{\alpha}u(x,y)+\partial_{0y}^{\beta}u(x,y)=f(x,y), \quad 0<\alpha,\beta\leqslant 1, \tag{9}$$

$$u_x(x,y)+\partial_{0y}^{\beta}u(x,y)=f(x,y), \tag{10}$$

$$u_x(x,y)-\partial_{0y}^{\beta}u(x,y)=f(x,y). \tag{11}$$

Так же, как и для уравнений с производными Римана-Лиувилля, для уравнений (9)–(11) решены краевые задачи в прямоугольных областях и задачи в полосе. Решение выражается в терминах функции типа Райта и, в случае задачи Коши, имеет место условие типа (8). Однако, в отличии от уравнений с производными Римана-Лиувилля, решение ищется в классе непрерывных вплоть до границы функций и в качестве начальных и краевых условий задается значение искомой функции.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1], [2], [7], [8], [21], [27].

Во **второй главе** исследуются интегральные преобразования с функцией Райта в ядре. Для функции $v(x)$, заданной на положительной полуоси, определим интегральные преобразования

$$A^{\alpha,\mu}v(x)\equiv\left(A^{\alpha,\mu}v\right)(x)=\int\limits_0^{\infty}v(t)x^{\mu-1}e_{1,\alpha}^{1,\mu}\left(-\frac{t}{x^{\alpha}}\right)dt, \quad 0<\alpha<1, \tag{12}$$

$$B^{\beta,\delta}v(x) \equiv \left(B^{\beta,\delta}v\right)(x) = \int\limits_0^\infty v(t)t^{\delta-1}e_{1,\beta}^{1,\delta}\left(-\frac{x}{t^\beta}\right)dt, \quad 0<\beta<1. \qquad (13)$$

Далее, в случае, когда $\mu = 0$ или $\delta = 0$, будем обозначать $A^{\alpha,0}v(x) = A^\alpha v(x)$, $B^{\beta,0}v(x) = B^\beta v(x)$. Если преобразования $A^{\alpha,\mu}$ и $B^{\beta,\delta}$ применяются к функции, зависящей от нескольких переменных, то в случае необходимости с помощью нижних индексов будем обозначать переменную, по которой проводится преобразование. Например, $A_x^{\alpha,\mu}u(x,y)$, $B_y^{\beta,\delta}v(x,y)$.

В пункте 2.2 изучены свойства преобразований (12) и (13). Построены преобразования некоторых специальных функций, доказаны формулы композиции и свертки преобразований, связь с преобразованием Лапласа и с преобразованием Меллина, связь с операторами дробного интегро-дифференцирования, предельные соотношения. В частности, доказаны соотношения

$$D_{0x}^\alpha A^\alpha v(x) = A^{\alpha,0}v'(x), \quad \partial_{0x}^\alpha A^{\alpha,1-\alpha}v(x) = A^{\alpha,1-\alpha}v'(x),$$

и

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}A^\alpha v(x) = v(0), \quad \lim_{x\to 0} A^{\alpha,1-\alpha}v(x) = v(0).$$

В пункте 2.3 показаны некоторые применения к изучению свойств функции типа Райта.

В пункте 2.4 на основе свойств этих преобразований предложен метод решения начальных задач для эволюционных уравнений дробного порядка, основанный на редукции к уравнениям целого порядка.

Пусть X – множество точек x, а $y \in \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} :\ y > 0\}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}u(x,y) = \mathbf{L}_x u(x,y) + F(x,y)$$

дробного порядка $\alpha \in (0;1)$, относительно неизвестной функции $u(x,y) \in \mathcal{F}$, где через $\mathcal{F}$ обозначено множество действительнозначных функций, определенных на $X \times \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F} = \{f = f(x,y) :\ \ f : X\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\}$; $\partial^\alpha/\partial y^\alpha$

означает либо производную Римана-Лиувилля D_{0y}^{α}, либо производную в смысле Капуто ∂_{0y}^{α}. Через $\mathbf{L}_x$ обозначен линейный оператор, $\mathbf{L}_x : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, с областью определения $D(\mathbf{L}_x)$; $F(x,y) \in \mathcal{F}$.

Предположим, что функция $v(x,y) \in D(\mathbf{L}_x)$ и $v(x,y) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ для любого фиксированного $x \in X$, и $v(x,y)$ является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = \mathbf{L}_x v(x,y) + G(x,y), \quad v(x,0) = \tau(x), \quad x \in X. \tag{14}$$

Пусть выполнены следующие условия: 1) $F(x,y) = A_y^{\alpha} G(x,y)$, $x \in X$; 2) функции $v(x,y)$, $v_y(x,y)$ и $\mathbf{L}_x v(x,y)$ при любом фиксированном $x \in X$ непрерывны и растут не быстрее, чем $\exp(ky^{\varepsilon})$ и $y^{-\delta}$ ($\varepsilon < 1/(1-\alpha)$, $\delta < 1$) при $y \to \infty$ и $y \to 0$ соответственно; 3) $A_y^{\alpha} v(x,y) \in D(\mathbf{L}_x)$, и $A_y^{\alpha} \mathbf{L}_x v(x,y) = \mathbf{L}_x A_y^{\alpha} v(x,y)$, $(x,y) \in X \times \mathbb{R}_+$. Тогда функция $u(x,y)$, определенная равенством $u(x,y) = A_y^{\alpha} v(x,y)$, является решением задачи

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \mathbf{L}_x u(x,y) + F(x,y), \quad \lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \tau(x), \quad x \in X. \tag{15}$$

Аналогично, функция $u(x,y) = A_y^{\alpha,1-\alpha} v(x,y)$ будет решением задачи

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x,y) = \mathbf{L}_x u(x,y) + F(x,y), \quad u(x,0) = \tau(x), \quad x \in X. \tag{16}$$

Таким образом, вопрос о существовании и представлении решения задач (15) и (16) сводится к решению задачи (14).

В качестве примера решены задачи в прямоугольной области для уравнения

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} u(x,y) + \frac{\partial^{\beta}}{\partial y^{\beta}} u(x,y) + \lambda u(x,y) = f(x,y), \quad 0 < \alpha, \, \beta < 1.$$

Пользуясь свойствами преобразований (12) и (13), в пункте 2.5 доказывается утверждение, позволяющее распространять результаты, связанные с наличием или отсутствием у функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_{1/\alpha}(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}$$

вещественных нулей при определенных значениях α и μ, на более обширные области изменения этих параметров.

Далее будем считать $\xi > 0$, $\eta > 0$. Примем следующие обозначения:

$$B = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta > 0, \exists t \in \mathbb{R}, E_{1/\xi}(t; \eta) < 0\},$$

$$B^* = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta > 0, \forall t \in \mathbb{R}, E_{1/\xi}(t; \eta) > 0\},$$

$$B_0 = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta > 0\} \setminus (B \cup B^*),$$

$$D_{\alpha,\mu} = \{(\xi, \eta) : \alpha \leqslant \xi, 0 < \eta \leqslant \mu\xi/\alpha, (\xi, \eta) \neq (\alpha, \mu)\},$$

$$D^*_{\alpha,\mu} = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi \leqslant \alpha, \eta \geqslant \mu\xi/\alpha, (\xi, \eta) \neq (\alpha, \mu)\}.$$

Теорема 5. *1. Пусть $(\alpha, \mu) \in B^* \cup B_0$. Тогда $D^*_{\alpha,\mu} \subset B^*$.*
2. Пусть $(\alpha, \mu) \in B \cup B_0$. Тогда $D_{\alpha,\mu} \subset B$.

Теорема 6. *При $\rho \geqslant 1/2$, $\mu \geqslant 3/(2\rho)$, кроме случая, когда $\rho = 1/2$ и $\mu = 3$, функция $E_\rho(z; \mu)$ не имеет вещественных нулей.*

Теорема 7. *Пусть $(\alpha, \mu) \in B \cup B_0$ и $\mu > \varepsilon > 0$, а $z(\alpha, \mu)$ и $z(\alpha, \mu - \varepsilon)$ – наименьшие по модулю вещественные нули функции $E_{1/\alpha}(z; \mu)$ и функции $E_{1/\alpha}(z; \mu - \varepsilon)$ соответственно. Тогда $z(\alpha, \mu) < z(\alpha, \mu - \varepsilon) < 0$.*

Далее будем обозначать через $\mathbb{R}^2_+ = \{(\xi, \eta) : \xi > 0, \eta > 0\}$.

Теорема 8. *Существует кривая σ такая, что: 1) $\sigma \subset \mathbb{R}^2_+$; 2) кривую σ можно задать параметрически $\sigma = \{(\xi, \eta) : \xi = s(\eta), \eta > 0\}$, причем функция $s(\eta)$ не убывает и удовлетворяет условию Липшица, то есть, если $\eta_1 > \eta_2$, то $0 \leqslant s(\eta_1) - s(\eta_2) \leqslant \eta_1 - \eta_2$; 3) кривая σ делит $\mathbb{R}^2_+$ на две связные части, одна из которых совпадает с B, а вторая принадлежит B^*, а именно,*

$$B = \{(\xi, \eta) : s(\eta) < \xi < \infty, \eta > 0\},$$

$$B^* \cup B_0 = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi \leqslant s(\eta), \eta > 0\}, \quad B_0 \subset \sigma.$$

Результаты второй главы опубликованы в работах [1], [6], [11], [12], [18], [20], [23], [24].

В **третьей главе** исследовано диффузионно-волновое уравнение.

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}u(x,y) \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}u(x,y) - \Delta_x u(x,y) = f(x,y), \tag{17}$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ – оператор Лапласа, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$; а через $\partial^\alpha/\partial y^\alpha$ обозначена дробная производная порядка α либо в смысле Римана-Лиувилля, либо в смысле Капуто.

Уравнение (17) называется уравнением диффузии дробного порядка в случае, когда $0 < \alpha \leqslant 1$, и волновым уравнением дробного порядка, когда $1 < \alpha < 2$, или, в общем случае, диффузионно-волновым уравнением.

Будем считать, что $n = 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\beta = \alpha/2$. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}u(x,y) \equiv D_{0y}^\alpha u(x,y) - u_{xx}(x,y) = f(x,y). \tag{18}$$

Используя свойства оператора дробного дифференцирования, показывается, что функция $u(x,y)$ является решением системы

$$\begin{gathered} u_x(x,y) + D_{0y}^\beta u(x,y) = v(x,y), \\ v_x(x,y) - D_{0y}^\beta v(x,y) = -f(x,y). \end{gathered}$$

Используя результаты первой главы, в пункте 3.2 построено решение задачи Коши и решение первой краевой задачи для уравнения (18).

В пункте 3.3 построено фундаментальное решение для уравнения (17). Показано, что функция ($\beta = \alpha/2$)

$$\Gamma_{\alpha,n}(x,y) = C_n\, y^{\beta(2-n)-1} f_\beta(|x|y^{-\beta}; n-1, \beta(2-n)), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

где $C_n = 2^{-n}\pi^{(1-n)/2}$, и

$$f_\beta(z;\mu,\delta) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\Gamma(\mu/2)}\int\limits_1^\infty e_{1,\beta}^{1,\delta}(-zt)\,(t^2-1)^{\mu/2-1}dt, & \mu > 0, \\ e_{1,\beta}^{1,\delta}(-z)\,, & \mu = 0, \end{array} \right. \qquad \beta \in (0;1);$$

является фундаментальным решением уравнения (17). Изучены свойства функции $\Gamma_{\alpha,n}(x,y)$. В частности, исследована его асимптотика, доказаны соотношения

$$\frac{\partial}{\partial |x|}\Gamma_{\alpha,n}(x,y) = -2\pi |x| \Gamma_{\alpha,n+2}(x,y),$$
$$\Gamma_{\alpha,n+1}(x,y) = \mathcal{J}_{|x|}\Gamma_{\alpha,n}(x,y), \quad \Gamma_{\alpha,n}(x,y) = \mathcal{K}_{|x|}\Gamma_{\alpha,n+1}(x,y),$$

где

$$\mathcal{J}_z f(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_z^\infty \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-z^2}}, \quad \mathcal{K}_z f(z) = 2\int\limits_z^\infty \frac{tf(t)\,dt}{\sqrt{t^2-z^2}}.$$

Показано, что если $\alpha \in (0;1]$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $\Gamma_{\alpha,n}(x,y)$ положительна. Если $\alpha \in (1;2)$, то $\Gamma_{\alpha,n}(x,y) > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, при $n \leqslant 3$, а при $n \geqslant 4$ функция $\Gamma_{\alpha,n}(x,y)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. В случае, когда $\alpha = 1$ или $\alpha \to 2$, построенное фундаментальное решение переходит в соответствующие решения для диффузионного и волнового уравнений.

В пункте 3.4 построено общее представление решений многомерного диффузионно-волнового уравнения. Обозначим через $D = \{(x,y) : x \in S,\ 0 < y < T\}$ и $D_y = \{(\xi,\eta) : \xi \in S,\ 0 < \eta < y\}$, где S – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂S.

Теорема 9. *Пусть $\alpha \in (0;2)$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $m \in \{1,2\}$, и функция $v = v(x,y,\xi,\eta)$ непрерывна в $Q \times \bar{D}_y$, $Q \subset D$, вместе с производными v_{ξ_i}, $v_{\xi_i\xi_i}$, $i = \overline{1,n}$, и $(\partial^{m-k}/\partial\eta^{m-k})v$, $D_{y\eta}^{\alpha-k}v$, $k = \overline{1,m}$, $D_{y\eta}^{\alpha-1}v|_{y=\eta} = 0$, и в области D_y при любых фиксированных $(x,y) \in Q$ является решением уравнения*

$$\mathbf{L}^* v \equiv D_{y\eta}^{\alpha} v(x,y,\xi,\eta) - \Delta_\xi v(x,y,\xi,\eta) = g(x,y,\xi,\eta), \quad g \in C(Q \times \bar{D}_y).$$

Тогда:

1) если функция $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) - \Delta_x u(x,y) = f(x,y), \tag{20}$$

$u \in C^1(\bar{S} \times (0;T))$, $u_{x_i} \in L(\partial S \times (0;T))$, $i = \overline{1,n}$, и удовлетворяет условию

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha - k} u(x,y) = \tau_k(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad x \in S,$$

то для любой точки $(x,y) \in Q$ имеет место соотношение

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \int\limits_S \tau_k(\xi) \frac{\partial^{k-1}}{\partial \eta^{k-1}} w(x,y,\xi,0)\, d\xi + G(u;x,y) + F(u,f,g;x,y)$$

где $w(x,y,\xi,\eta) = v(x,y,\xi,\eta) + \Gamma_{\alpha,n}\,(x-\xi, y-\eta)$,

$$G(u;x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_{\partial S} \left[w(x,y,\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \nu} u(\xi,\eta) - u(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \nu} w(x,y,\xi,\eta) \right] ds\, d\eta, \tag{21}$$

$$F(u,f,g;x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_S \Big[w(x,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta) - u(\xi,\eta) g(x,y,\xi,\eta) \Big] d\xi\, d\eta, \tag{22}$$

$\nu = \nu(\xi)$ – направление внешней нормали к ∂S в точке $\xi \in \partial S$;
2) если функция $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) - \Delta_x u(x,y) = f(x,y),$$

$u \in C^1(\bar{S} \times (0;T))$, $u_{x_i} \in L(\partial S \times (0;T))$, и удовлетворяет условию

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial^{m-k}}{\partial y^{m-k}} u(x,y) = \tau_k(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad x \in S,$$

то для любой точки $(x,y) \in Q$, имеет место соотношение

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_S \tau_k(\xi) D_{y\eta}^{\alpha+k-m-1} w(x,y,\xi,\eta) \Big|_{\eta=0} d\xi + G(u;x,y) + F(u,f,g;x,y),$$

где $G(u;x,y)$ и $F(u,f,g;x,y)$ заданы равенствами (21) и (22), соответственно.

В пункте 3.5 построено решение задачи Коши и доказана его единственность в классе функций экспоненциального роста.

Задача 4. *Найти регулярное решение $u = u(x,y)$ уравнения* (20), $\alpha \in (0;2)$, *в области* $D = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < T\}$, *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-k}u(x,y) = \tau_k(x), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

где $m-1 < \alpha \leqslant m$, $\alpha \in (0;2)$, $m \in \{1,2\}$.

Теорема 10. *Пусть* $m-1 < \alpha \leqslant m$, $m \in \{1,2\}$, $\beta = \alpha/2$, $\tau_k(x) \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *и, в случае* $m = 2$, *производные* $(\partial/\partial x_i)\tau_2(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* $q > \frac{1-\beta}{\beta}$; $y^{1-\mu}f(x,y) \in C(\bar{D})$, $\mu > 0$, $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Гельдера по переменной* x, *и выполняются соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty} \tau_k(x)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m;$$

$$\lim_{|x|\to\infty} y^{1-\mu}f(x,y)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0,$$

где $\rho < (1-\beta)\left(\beta/T\right)^{\beta/(1-\beta)}$. *Тогда функция* $u = u(x,y)$, *определенная равенством*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tau_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}}\Gamma_{\alpha,n}(x-\xi,y)\,d\xi + \int\limits_0^y\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi,\eta)\Gamma_{\alpha,n}(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta,$$

является регулярным решением уравнения (20) *в области* D, *и удовлетворяет краевым условиям* (23).

Теорема 11. *Пусть* $0 < \alpha < 2$, $m-1 < \alpha \leqslant m$, $m \in \{1,2\}$. *Существует не более одного регулярного решения задачи* (20), (23) *в классе функций, удовлетворяющих для некоторой положительной константы* σ *условию*

$$\lim_{|x|\to\infty} y^{m-\alpha}u(x,y)\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0. \tag{24}$$

Показано, что как и в случае уравнения теплопроводности, показатель $2/(2-\alpha)$ в условии (24) увеличить нельзя.

Методом продолжения построено решение первой краевой задачи в цилиндрической области, в основании которой лежит n-мерный параллелепипед.

Аналогичные утверждения доказаны для уравнения с производной Капуто.

В пункте 3.6, используя теорему об общем представлении, решаются первая, вторая и смешанные краевые задачи для одномерного диффузионно-волнового уравнения в прямоугольных областях и строятся соответствующие функции Грина.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1], [3], [4], [8], [9], [13], [16], [19], [21], [27].

В **четвертой главе** исследуются уравнения континуального порядка.

Оператор интегро-дифференцирования континуального порядка определяется следующим образом:

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) \equiv \int\limits_{\alpha}^{\beta} D_{0x}^{t}u(x)\,dt,\ \alpha < \beta. \tag{25}$$

В пункте 4.1 исследованы свойства оператора (25). Пусть $\varphi \in L[0,a]$. Обозначим через $C_*^n[(0,a);\varphi]$ пространство функций $u(x) \in L[0,a]$ таких, что $(u * \varphi) \in C^n[0,a]$, причем $(d^n/dx^n)(u*\varphi) \in AC[0,a]$, где $AC[0,a]$ – пространство абсолютно непрерывных на $[0,a]$ функций, $(f * g)(x) = \int\limits_0^x f(t)g(x-t)dt$ – свертка Лапласа функций $f(x)$ и $g(x)$.

Обозначим через

$$\mathcal{E}_{\frac{1}{\gamma}}^{\mu}(x;\delta) = \frac{\partial}{\partial\mu} x^{\mu} E_{\frac{1}{\gamma}}(x^{\gamma};\delta+\mu),$$

где $E_{\frac{1}{\gamma}}(x;\delta)$ – функция типа Миттаг-Леффлера.

Введем оператор $D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}$, определенный следующим образом:

$$D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}v(x)=\begin{cases}-x^{\beta-1}\mathcal{E}^{0}_{\frac{1}{\beta-\alpha}}(x;\beta)*v(x), & \beta>0,\\ (d^n/dx^n)D_{0x}^{-[\alpha+n,\beta+n]}v(x), & -n<\beta\leqslant -n+1,\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Далее будем обозначать через

$$D_{00}^{-[\alpha,\beta]}u=\lim_{x\to 0}D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}u(x),\quad D_{00}^{[\alpha,\beta]}u=\lim_{x\to 0}D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x),$$

и через $C_E^k=C_*^k\left[(0,a);-x^{\beta+n-1}\mathcal{E}^{0}_{\frac{1}{\beta-\alpha}}(x;\beta+n)\right]$, где $n\in\mathbb{N}$ выбрано из условия $-n<\beta\leqslant -n+1$, $1\leqslant k\leqslant n$.

Теорема 12. *Пусть $\alpha<\beta\leqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$ и удовлетворяет условию $-n<\beta\leqslant -n+1$. Если $u(x)\in L[0,a]$, тогда $D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x)=u(x)$ и, если $u(x)\in C_E^{n-1}$, то выполняется соотношение*

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}u(x)=u(x)-\sum_{k=1}^{n}\nu(x,\alpha+k-1,\beta+k-1)D_{00}^{-[\alpha+k,\beta+k]}u.\quad (26)$$

Соотношение (26) является аналогом формулы Ньютона-Лейбница для оператора интегрирования континуального порядка.

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x)=v(x).\quad (27)$$

Теорема 13. *Пусть $v(x)\in C_E^{n-1}$, $\alpha<\beta\leqslant 0$, $-n<\beta\leqslant -n+1$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда при выполнении условий $D_{00}^{-[\alpha+k,\beta+k]}v=0$, $1\leqslant k\leqslant n$, единственное решение уравнения (27) задается формулой $u(x)=D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}v(x)$.*

Рассмотрим оператор (25) в случае $\beta>0$. Далее будем обозначать через $C_\nu^k=C_*^k\left[(0,a);\nu(x,\alpha-n,\beta-n)\right]$, где $n\in\mathbb{N}$ выбрано из условия $n-1<\beta\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant n$.

Теорема 14. *Пусть $\beta>0$, $\alpha<\beta$, $n\in\mathbb{N}$ и удовлетворяет условию $n-1<\beta\leqslant n$. Если $u(x)\in L[0,a]$, тогда $D_{0x}^{[\alpha,\beta]}D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}u(x)=u(x)$, и, если $u(x)\in C_\nu^{n-1}$, то*

$$D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x)=u(x)+\sum_{k=1}^{n}x^{\beta-k}\mathcal{E}^{0}_{\frac{1}{\beta-\alpha}}(x;\beta-k+1)\,D_{00}^{[\alpha-k,\beta-k]}u.\quad (28)$$

Равенство (28) является аналогом формулы Ньютона-Лейбница для оператора дифференцирования континуального порядка.

Соотношение (28) дает основание для корректной постановки задачи Коши для уравнения (27).

Задача 5. *Найти решение $u(x)$ уравнения* (27) *($\beta > 0$) из класса C_ν^{n-1}, удовлетворяющее начальным условиям*

$$D_{00}^{[\alpha-k,\beta-k]}u = u_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{29}$$

где $n \in \mathbb{N}$ выбрано из условия $n-1 < \beta \leqslant n$.

Теорема 15. *Пусть $n-1 < \beta \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < \beta$, $v(x) \in L[0,a]$. Тогда существует единственное решение уравнения* (27) *из класса C_ν^{n-1}, удовлетворяющее начальным условиям* (29). *Решение имеет вид*

$$u(x) = D_{0x}^{-[\alpha,\beta]}v(x) - \sum_{k=1}^{n} x^{\beta-k}\mathcal{E}^0_{\frac{1}{\beta-\alpha}}\left(x;\beta-k+1\right)u_k.$$

Причем, если $v(x) \in AC[0,a]$, то $u(x) \in C_\nu^n$.

В пункте 4.2 построено решение задачи Коши для обыкновенного уравнения континуального порядка. Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad 0 < \beta \leqslant 1. \tag{30}$$

Задача 6. *Найти решение $u = u(x)$, $x \in (0,\, a)$, $0 < a \leqslant \infty$, уравнения* (30) *такое, что $x^{1-\beta}u(x)/(1+|\ln x|) \in C[0,\, a]$, $D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) \in C(0,\, a)$, и удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{[\alpha-1,\beta-1]}u(x) = u_0, \quad 0 < \beta \leqslant 1, \quad \alpha < \beta. \tag{31}$$

Рассмотрим функцию

$$w_{\alpha,\beta}(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n w_n(x),$$

где

$$w_0(x) = -x^{\beta-1}\mathcal{E}^0_{\frac{1}{\beta-\alpha}}\left(x;\beta\right), \quad w_n(x) = (w_0 * w_{n-1})(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 16. *Пусть $f(x) \in L(0, a)$, $\beta \in (0; 1]$, $\alpha < \beta$. Существует единственное решение уравнения* (30), *удовлетворяющее условию* (31). *Решение представимо в виде*

$$u(x) = u_0 w_{\alpha,\beta}(x, \lambda) + f(x) * w_{\alpha,\beta}(x, \lambda).$$

В пункте 4.3 строится фундаментальное решение уравнения диффузии континуального порядка. Рассмотрим уравнение

$$D_{0y}^{[\alpha,\beta]} u(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y). \tag{32}$$

Далее будем предполагать, что $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$. Обозначим через

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty w_{\alpha,\beta}(y, t^2) \cos(xt)\, dt.$$

Показано, что функция $\Gamma(x - \xi, y - \eta)$ является фундаментальным решением уравнения (32).

Введем в рассмотрение функцию $\rho = \rho_{\alpha,\beta}(z, \delta)$, определенную для $z > 0$, $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$ и $\delta \in (0; 1]$ соотношением

$$\rho = z \left(\frac{\rho^\beta - \rho^\alpha}{\ln \rho} \right)^\delta. \tag{33}$$

Функция $\rho_{\alpha,\beta}(z, \delta)$ удовлетворяет соотношениям

$$\rho_{\alpha,\beta}(z, \delta) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rho_{\alpha,\beta}(z, \delta) > 0, \quad \rho_{\alpha,\beta}(0, \delta) = 0, \quad \lim_{z \to \infty} \rho_{\alpha,\beta}(z, \delta) = \infty.$$

$$c_\beta z^{1/(1-\beta\delta)} \leqslant \rho_{\alpha,\beta}(z, \delta) \leqslant c_\alpha z^{1/(1-\alpha\delta)} \quad \text{при} \quad 0 < z < (\beta - \alpha)^{-\delta},$$

$$c_\alpha z^{1/(1-\alpha\delta)} \leqslant \rho_{\alpha,\beta}(z, \delta) \leqslant c_\beta z^{1/(1-\beta\delta)} \quad \text{при} \quad z > (\beta - \alpha)^{-\delta},$$

где $c_\alpha = (\beta - \alpha)^{\delta/(1-\alpha\delta)}$, $c_\beta = (\beta - \alpha)^{\delta/(1-\beta\delta)}$.

Лемма 1. *Для любых $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\delta < \varepsilon \in \mathbb{R}$ и некоторого $k > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{|x|/y \to 0} \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} D_{0y}^{[\delta,\varepsilon]} \Gamma(x, y) \right) \exp\left[y \cdot \rho_{\alpha,\beta}(k|x|/y, 1/2) \right] = 0, \quad |x| \geqslant x_0 > 0.$$

Лемма 2. *Имеет место представление*

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\gamma(\omega\pi,\varepsilon)} [a(p)]^{-1} \exp\left(py - |x| a(p)\right) dp,$$

где $\gamma(\varepsilon,\,\omega\pi)$ *– контур Ханкеля, и* $a(p) = \left[(p^\beta - p^\alpha)/\ln p\right]^{1/2}$.

В пункте 4.4 строится общее представление решения уравнения диффузии континуального порядка. Далее будем обозначать через D прямоугольную область $D = \{(x,y) :\; 0 < x < a,\, 0 < y < b\}$, и, для фиксированной точки $(x,y) \in D$, через $D_y = \{(\xi,\eta) :\; 0 < \xi < a,\, 0 < \eta < y\}$.

Теорема 17. *Пусть: 1) функция* $u = u(x,y)$ *является решением уравнения* (32) *в области* D, *из класса:* $(y^{1-\beta}/(1 + |\ln y|))u \in C(\bar{D})$; $D_{0y}^{[\alpha,\beta]}u$, $u_{xx} \in C(D)$; u_x *непрерывна вплоть до участков* $x = 0$ *и* $x = a$, $0 < y < b$, *границы* ∂D, $u_x(0,y)$, $u_x(a,y) \in L(0;y)$; *2) функция* $v = v(x,y,\xi,\eta)$ *при фиксированных* $(x,y) \in D$ *является решением сопряженного уравнения*

$$\mathbf{L}^* v \equiv D_{y\eta}^{[\alpha,\beta]} v(x,y,\xi,\eta) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} v(x,y,\xi,\eta) = g(x,y,\xi,\eta)$$

в области D_y, $g \in C(\bar{D} \times \bar{D}_y)$, *функции* v, v_ξ, $v_{\xi\xi}$, v_η, $D_{y\eta}^{[\alpha,\beta]}v$ *непрерывны в* $D \times \bar{D}_y$. *Тогда функция* $u(x,y)$ *представима в виде*

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \Big[G(x,y,a,\eta) u_\xi(a,\eta) - G(x,y,0,\eta) u_\xi(0,\eta) -$$

$$- G_\xi(x,y,a,\eta) u(a,\eta) + G_\xi(x,y,0,\eta) u(0,\eta) \Big] d\eta + \tag{34}$$

$$+ \int\limits_0^a G(x,y,\xi,0)\tau(\xi) d\xi + \int\limits_0^y \int\limits_0^a [G(x,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta) - u(\xi,\eta) g(x,y,\xi,\eta)] d\xi d\eta,$$

где $G(x,y,\xi,\eta) = \Gamma(x-\xi, y-\eta) + v(x,y,\xi,\eta)$, $\Gamma(x,y)$ *– фундаментальное решение уравнения* (32), $\tau(x) = \lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{[\alpha-1,\beta-1]} u(x,y)$, $x \in [0,\, a]$.

В пункте 4.5, используя представление (34), получено решение первой, второй и смешанных краевых задач для уравнения (32) и построены соответствующие функции Грина.

В пункте 4.6 исследована задача Коши уравнения диффузии континуального порядка.

Обозначим через $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0, T)\}$ и $q_\delta(z) = \rho_{\alpha,\beta}(z, 1/2 - \delta)$, $\delta > 0$, $q_0(z) = \rho_{\alpha,\beta}(z, 1/2)$, где $\rho_{\alpha,\beta}(z, \delta)$ определена формулой (33).

Теорема 18. *Пусть $\tau(x) \in C(\mathbb{R})$, $f(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$ и для функций $\tau(x)$ и $f(x, y)$ найдутся положительные константы C и k, такие, что выполнены неравенства*

$$|\tau(x)| \leqslant C \exp\left[q_\delta(kx)\right], \quad |f(x, y)| \leqslant C y^{\beta-1}\left(1 + |\ln y|\right) \cdot \exp\left[y q_\delta(kx/y)\right].$$

Тогда функция $u = u(x, y)$, определяемая равенством

$$u(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x - \xi, y)\tau(\xi) d\xi + \int\limits_{0}^{y}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x - \xi, y - \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

является решением уравнения (32) и удовлетворяет условию

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{[\alpha-1,\beta-1]} u(x, y) = \tau(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Решение задачи (32), (35) единственно в классе функций, удовлетворяющих для некоторых положительных C_0 и k_0 неравенству

$$|u(x, y)| \leqslant C_0 y^{\beta-1}\left(1 + |\ln y|\right) \cdot \exp\left[q_\delta(k_0 x)\right]. \tag{36}$$

Неравенство (36) является аналогом условия А.Н. Тихонова для уравнения теплопроводности и условия (24) для диффузионно-волнового уравнения (18).

Представленные в этой главе результаты были опубликованы в работах [1], [5], [10], [14], [15], [17], [22], [25], [26].

Автор выражает глубокую признательность и благодарность Адаму Маремовичу Нахушеву и Евгению Ивановичу Моисееву за постановку задач и неоценимое внимание и поддержку.

Список основных работ по теме диссертации

1. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005. 199 с.
2. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1092–1099.
3. *Псху А.В.* Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1286–1289.
4. *Псху А.В.* Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1430–1433.
5. *Псху А.В.* К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 120–127.
6. *Псху А.В.* О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 4. С. 592–599.
7. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5, № 1. С. 45–53.
8. *Псху А.В.* Решение краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. — Нальчик: Сообщения Научно-исследовательского института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2001. 43 с.
9. *Псху А.В.* Метод функции Грина для уравнения диффузии дробного порядка // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. Минск, 2001. С. 101–111.
10. *Псху А.В.* Об операторах типа свертки и их приложении к теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2001. Т. 5, № 2. С. 49–55.
11. *Псху А.В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Изв. Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2002. № 1(8). С. 76–78.

12. *Псху А.В.* Интегральное преобразование с функцией Райта в ядре // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2002. Т. 6, № 1. С. 35–47.

13. *Псху А.В.* Условие типа Тихонова для диффузионно-волнового уравнения // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2003. Т. 6, № 2. С. 72–73.

14. *Псху А.В.* Уравнение диффузии континуального порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2004. Т. 7, № 1. С. 79–83.

15. *Псху А.В.* Задача Коши для дифференциального уравнения континуального порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7, № 2. С. 45–49.

16. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 8, № 1. С. 26–31.

17. *Псху А.В.* Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9, № 1. С. 73–78.

18. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка со спектральным параметром // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: II Международная конференция, Нальчик, 3-9 декабря 2001 г.: Тезисы докладов. С. 81-83.

19. *Псху А.В.* Функции Грина краевых задач для уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения и их приложения: Международная научная конференция, Самара, 2002 г.: Сборник трудов. С. 269-273.

20. *Псху А.В.* Интегральные преобразования с функцией типа Райта в ядре // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2003): Международная конференция, Минск, 2003 г.: Тезисы докладов. С. 139.

21. *Псху А.В.* Условие типа Тихонова для уравнений дробного порядка // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Международный Российско-Узбекский симпозиум, Нальчик-

Приэльбрусье, 2003 г.: Материалы симпозиума и Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". С. 76-78.

22. *Псху А.В.* Формулы Ньютона-Лейбница для оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Функциональные пространства. Дифференциальные уравнения. Проблемы математического образования: II Международная конференция, посвященная 80-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, 2003 г.: Тезисы докладов. С. 213-215.
23. *Псху А.В.* Краевая задача для уравнения с частными производными дробного порядка // Современные проблемы математической физики и информационные технологии: Международная научная конференция, Ташкент, 2003 г.: Труды конференции. Т. I. С. 216-217.
24. *Псху А.В.* Видоизмененная задача Коши для уравнения с частными производными дробного порядка // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы: Международная научная конференция, Стерлитамак, Башкортостан, 2003 г.: Сборник научных трудов, Т. I. С. 194-198.
25. *Псху А.В.* Задача Коши для уравнения диффузии континуального порядка // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы: Российско-Казахский симпозиум, п. Эльбрус, 2004 г.: Материалы симпозиума и Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы анализа и информатики". С. 145-147.
26. *Псху А.В.* Задача Коши для дифференциального уравнения континуального порядка // Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Международная научная конференция, Ташкент, 2004 г.: Материалы конференции. Т. 1. С. 121-124.
27. *Псху А.В.* Условие А.Н. Тихонова для уравнений дробного порядка // Тихонов и современная математика: Функциональный анализ и дифференциальные уравнения: Международная конференция, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 19-25 июня 2006 г.: Тезисы докладов секции № 1. С. 205-206.