

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи  
УДК: 519.713

Мыррин Вячеслав Валерьевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Институте математического моделирования РАН

Научный руководитель      доктор физико-математических наук  
Кулешов Андрей Александрович

Официальные оппоненты:    доктор физико-математических наук,  
профессор Галкин Валерий Алексеевич,  
  
доктор физико-математических наук,  
профессор Гулин Алексей Владимирович

Ведущая организация:        Московский энергетический институт  
(Технический университет)

Защита диссертации состоится 7 октября 2009г. в 15.30 на заседании Диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, 2-ой учебный корпус, факультет ВМиК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова

Автореферат разослан 4 сентября 2009г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Е.В.Захаров

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Рассмотренная в диссертации задача малых поперечных колебаний тонких упругих пластин, описываемая двумерным нестационарным дифференциальным уравнением второго порядка по времени и четвертого порядка по пространственным переменным, представляет большой интерес как с точки зрения развития теоретических аспектов математического моделирования – разработки численных методов и их обоснования, так и с точки зрения практических приложений. В рассматриваемой задаче все коэффициенты в уравнении являются либо бесконечно дифференцируемыми функциями, либо постоянными, однако, правая часть уравнения, описывающая действие сил на поверхности пластины, может быть разрывной функцией, например, во многих прикладных задачах нагрузка на поверхности пластины действует локально. В силу этого, решения исходной задачи рассматриваются как обобщенные решения из соответствующих функциональных пространств.

Говоря о разработке численных методов для решения уравнения поперечных колебаний тонких упругих пластин, следует отметить, что до недавнего времени были разработаны численные методы решения лишь для стационарной задачи с краевыми условиями первого и второго рода. Разностные аппроксимации для стационарных уравнений четвертого порядка рассмотрены, например, в монографиях А.А.Самарского, В.Б.Андреева [1] и А.А.Самарского, Р.Д.Лазарова, В.Л.Макарова [2]. В последнее время А.А.Кулешовым [3,4] был разработан новый разностный метод решения нестационарной задачи для уравнения поперечных колебаний тонких упругих пластин с переменными коэффициентами и с общими граничными условиями на контуре пластины. Этот разностный метод и был применен в настоящей работе.

Одними из самых трудных задач при обосновании численных методов решения задач математической физики являются доказательство устойчивости построенных аппроксимаций и доказательство их сходимости к обобщенному решению исходной задачи с оценкой скорости сходимости. Устойчивости разностных схем посвящены работы А.А.Самарского и его учеников В.Б.Андреева, А.В.Гулина [2,5-7] и других. Для применяемого в настоящей работе разностного метода ранее [3,4] была доказана устойчивость разностной схемы относительно прогиба пластины и его разностных производных первого порядка по времени и до второго порядка по пространственным переменным и слабая сходимость разностных аппроксимаций к обобщенному решению исходной начально-краевой задачи, однако, сильная сходимость не была доказана. Дальнейшему обоснованию этого метода и посвящена первая часть настоящей работы.

К области практических приложений математической модели малых поперечных колебаний тонких упругих пластин, лежащих на упругом основании, следует прежде всего отнести широкий круг задач о распространении поперечных колебаний в плавающем на поверхности воды ледяном покрове, например, при воздействии на ледяной покров различных техногенных нагрузок: движущегося автотранспорта, приземляющегося самолета и так далее. Актуальным в этих задачах является, как изучение волновой динамики, так и исследование прочности льда на растяжение и сжатие. Изучению волновой динамики сплошного ледяного покрова на поверхности воды под действием динамической техногенной нагрузки на основе математической модели тонкой упругой пластины в отечественной и зарубежной литературе посвящен ряд работ. В качестве математического аппарата исследования в этих работах применялся аналитический метод решения и изучались в основном полученные дисперсионные соотношения, характер зависимости волновой

амплитуды от скорости движения техногенной нагрузки и вопрос существования критических скоростей. Лишь в некоторых из этих работ полученное аналитически решение в виде интегралов затем аппроксимировалось квадратурными формулами и рассчитывалось численно. На основании изученной научной литературы можно сделать вывод о том, что численные методы с непосредственной аппроксимацией уравнения поперечных колебаний тонких упругих пластин для решения рассмотренных выше прикладных задач не применялись. Численному моделированию волновой динамики в плавающем на поверхности воды ледяном покрове при воздействии на него различных техногенных нагрузок и посвящена вторая часть настоящей работы.

Таким образом, тема диссертации является актуальной как в теоретическом, так и в прикладном аспектах.

**Целью работы** является математическое моделирование малых поперечных колебаний тонких упругих пластин, включая исследование устойчивости и сходимости применяемого в работе разностного метода решения начально-краевой задачи и численное моделирование прикладных задач о колебаниях ледяного покрова на поверхности воды под действием различных техногенных динамических нагрузок.

### **Научная новизна, теоретическое и прикладное значение**

В диссертации доказаны устойчивость применяемого разностного метода относительно скорости колебаний и ее производных и сильная сходимость разностных аппроксимаций к обобщенному решению исходной начально-краевой задачи с оценкой скорости сходимости.

В диссертации проведено численное моделирование прикладных задач о колебаниях ледяного покрова на поверхности воды под действием различных техногенных динамических нагрузок. Тем самым, продемонстрирована применимость использованного в работе численного

метода и созданного программного обеспечения для решения практических задач, описываемых рассматриваемой математической моделью малых поперечных колебаний тонких упругих пластин.

### **Апробация диссертации**

Результаты работ по диссертации докладывались на научно-исследовательских семинарах: Института математического моделирования РАН, кафедры вычислительных методов факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова, на международном конгрессе: 8th World Congress on Computational Mechanics - 5th Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, June 30 - July 5, 2008, Venice, Italy, на IV международной конференции «Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания», Обнинск, 14-18 мая 2008г., на IV Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», пос. Дюрсо, 15-21 сентября 2008г., на международной конференции «Тихонов и современная математика», Москва 19-25 июня 2006г., на XI Всероссийской школе-семинаре «Современные проблемы математического моделирования», пос. Дюрсо, 5-10 сентября 2005г.

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 7 работ, список которых приведен в конце автореферата.

### **Структура работы**

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 113 наименований. Полный объем диссертации составляет 131 страницу.

## ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

**Во введении** сформулирована цель работы, обоснованы актуальность темы и научная новизна, кратко описано содержание работы.

**Первая глава** посвящена обоснованию применяемого в работе разностного метода решения задачи малых поперечных колебаний тонких упругих пластин.

В §1 главы 1 приведена постановка начально-краевой задачи малых поперечных колебаний тонких упругих пластин. Уравнение поперечных колебаний тонкой упругой пластины, лежащей на упругом винклеровском основании, имеет вид [8,9]

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta W) - (1 - \sigma)(D_{yy}W_{xx} - 2D_{xy}W_{xy} + D_{xx}W_{yy}) + aW = F, \quad (x, y) \in \Omega,$$

где  $W$  – поперечный прогиб пластины, отсчитываемый по оси  $OZ$ , направленной вниз от срединной плоскости, совмещенной с плоскостью  $XY$  и разделяющей толщину пластины  $h = h(x, y)$  пополам,  $\rho$  – плотность материала пластины,  $D = Eh^3 / [12(1 - \sigma^2)]$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  $0 < \sigma < 1$ ,  $E$  – модуль упругости.

Граничные условия

$$B_1 W = M_\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$B_2 W = N_\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где дифференциальный оператор  $B_1 W$  описывает изгибающий момент, а дифференциальный оператор  $B_2 W$  – перерезывающую силу на криволинейном контуре пластины.

$$\text{Начальные условия} \quad W|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad W_t|_{t=0} = \psi(x, y).$$

Далее в §1 описан разностный метод [3,4], примененный для решения поставленной задачи. С помощью известного приема с заменой переменных вместо исходного дифференциального уравнения, записанного в виде моментов

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F,$$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = (1 - \sigma) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

была получена система уравнений с производными первого порядка по  $t$  для естественных переменных механики: прогиба пластины, скорости прогиба и изгибающих моментов

$$\rho h \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \sigma D \frac{\partial^2 S}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\sigma D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - D \frac{\partial^2 S}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = S,$$

для которой была построена разностная схема с полусуммой по времени. Двумерная область с криволинейным контуром, в которой рассматривается исходная краевая задача, была аппроксимирована ступенчатой областью, состоящей из прямоугольных ячеек четырех типов (внутренняя, краевая, угловая и внутренняя угловая), и была введена сетка с узлами в центрах этих ячеек. Разностная аппроксимация полученной системы уравнений была построена балансным методом с помощью интегрирования каждого из уравнений системы по площади ячеек. В результате была получена

неявная двухслойная разностная схема. Приведем для примера аппроксимацию для одной ячейки каждого из четырех типов:

– *внутренняя ячейка*

$$\rho h_{ij} s_{t,ij}^n = u_{\bar{x}\bar{x},ij}^{n+1/2} - 2r_{o\ o}^{n+1/2} + v_{\bar{y}\bar{y},ij}^{n+1/2} - aw_{ij}^{n+1/2} + f_{ij}^{n+1/2},$$

$$u_{t,ij}^n = -D_{ij} s_{\bar{x}\bar{x},ij}^{n+1/2} - \sigma D_{ij} s_{\bar{y}\bar{y},ij}^{n+1/2},$$

$$v_{t,ij}^n = -\sigma D_{ij} s_{\bar{x}\bar{x},ij}^{n+1/2} - D_{ij} s_{\bar{y}\bar{y},ij}^{n+1/2},$$

$$w_{t,ij}^n = s_{ij}^{n+1/2};$$

– *краевая левая ячейка*

$$\rho h_{i_1 j} s_{t,i_1 j}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,i_1 j}^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta x} r_{o\ o}^{n+1/2} + v_{\bar{y}\bar{y},i_1 j}^{n+1/2} - aw_{i_1 j}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_l j}^{n+1/2}}{\Delta x} + f_{i_1 j}^{n+1/2},$$

$$u_{i_1 j}^{n+1} = M_{\Gamma_l j}^{n+1}, \quad v_{t,i_1 j}^n = -(1 - \sigma^2) D_{i_1 j} s_{\bar{y}\bar{y},i_1 j}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_l t, j}^n, \quad w_{t,i_1 j}^n = s_{ij}^{n+1/2};$$

– *угловая верхняя левая ячейка*

$$\rho h_{i_1 j_1} s_{t,i_1 j_1}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,i_1 j_1}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} v_{y,i_1 j_1}^{n+1/2} - aw_{i_1 j_1}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_l j_1}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\epsilon} i_1}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{i_1 j_1}^{n+1/2},$$

$$u_{i_1 j_1}^{n+1} = M_{\Gamma_l j_1}^{n+1}, \quad v_{i_1 j_1}^{n+1} = M_{\Gamma_{\epsilon} i_1}^{n+1}, \quad w_{t,i_1 j_1}^n = s_{ij}^{n+1/2};$$

– *внутренняя угловая верхняя левая ячейка*

$$\rho h_{ij} s_{t,ij}^n = u_{\bar{x}\bar{x},ij}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta x} r_{o\ o}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} r_{o\ o}^{n+1/2} + v_{\bar{y}\bar{y},ij}^{n+1/2} - aw_{ij}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_l j-1}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\epsilon} i-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} + f_{ij}^{n+1/2}$$

(остальные уравнения для этой ячейки такие же, как для внутренней),

где используются стандартные обозначения разностных производных [10],

$$\Phi_{ij}^{n+1/2} = \frac{\Phi_{ij}^{n+1} + \Phi_{ij}^n}{2}, \quad \Phi_{ij}^n = (w_{ij}^n, s_{ij}^n, u_{ij}^n, v_{ij}^n, r_{ij}^n)^T,$$

$[w_{ij}^n], [s_{ij}^n], [u_{ij}^n], [v_{ij}^n], [r_{ij}^n]$  – разностные аналоги функций  $W, S, M_x, M_y, M_{xy}$ .

Эта разностная схема и была использована в настоящей работе.

Как было сказано выше, решения исходной задачи рассматриваются как обобщенные решения из соответствующих функциональных пространств. В §2 главы 1 приведены условия гладкости входных данных и условия согласования граничных и начальных значений, обеспечивающие, согласно [11], существование и единственность обобщенного решения исходной дифференциальной задачи из класса  $L_2(0,T;H^4(\Omega)) \cap H^2(0,T;L_2(\Omega))$  и приведен вывод этой оценки.

В §3 главы 1 доказана теорема об устойчивости по входным данным решения разностной задачи относительно скорости колебаний и ее производных с оценкой

$$\begin{aligned} & \left\| [s_{t,ij}^n] \right\|_{L_2(L_2(\omega_h))} + \left\| [s_{ij}^n] \right\|_{L_2(H^2(\omega_h))} \leq \\ & \leq \tilde{C} \left\{ \left\| [f_{ij}^n] \right\|_{H^1(L_2(\omega_h))} + \left\| [M_{\Gamma ij}^n] \right\|_{H^2(L_2(\Gamma_h))} + \left\| [N_{\Gamma ij}^n] \right\|_{H^2(L_2(\Gamma_h))} + \right. \\ & \left. + \left\| [u_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [v_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [r_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [w_{ij}^0] \right\|_{L_2(\omega_h)} + \left\| [s_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} \right\}. \end{aligned}$$

В §4 главы 3 доказана теорема о сильной сходимости разностных аппроксимаций к обобщенному решению исходной начально-краевой задачи для уравнения колебания тонких упругих пластин с оценкой скорости сходимости

$$\begin{aligned} & \left\| [s_{ij}^n - W_{t,ij}^n] \right\|_{L_2(L_2(\omega_h))} + \left\| [w_{ij}^n - W_{ij}^n] \right\|_{L_2(H^2(\omega_h))} \leq \\ & \leq (\Delta t + \Delta x + \Delta y)^{1/2} \tilde{C}_1 \left( \left\| [s_{t,ij}^n] \right\|_{L_2(L_2(\omega_h))} + \left\| [s_{ij}^n] \right\|_{L_2(H^2(\omega_h))} + \left\| [w_{ij}^n] \right\|_{L_2(H^2(\omega_h))} + \right. \\ & \left. + \left\| W_{tt} \right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \left\| W_t \right\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega))} + \left\| W \right\|_{L_2(0,T;H^4(\Omega))} \right) + \\ & + \tilde{C}_2 \left\{ \left\| [f_{ij}^n - F_{ij}^n] \right\|_{L_2(L_2(\omega_h))} + \left\| [M_{\Gamma,ij}^n - \hat{Q}(B_1 W)_{ij}^n] \right\|_{H^1(L_2(\Gamma_h))} + \right. \\ & \left. + \left\| [N_{\Gamma,ij}^n - \hat{Q}(B_2 W)_{ij}^n] \right\|_{H^1(L_2(\Gamma_h))} \right\}, \end{aligned}$$

где  $W_{ij}^n$  – дискретизация решения  $W$  исходной задачи на сетке  $\omega_h$ ,  $[\hat{Q}(B_k W)_{ij}^n]$ ,  $k=1,2$  – дискретизация значений граничных операторов на границе ступенчатой области, аппроксимирующей область  $\Omega$ .

Доказательство основано на методике, примененной в работе [3] при доказательстве слабой сходимости разностных аппроксимаций для рассматриваемой задачи. Эта методика в свою очередь основана на работах А.А.Самарского, Р.Д.Лазарова, В.Л.Макарова (см. [2]).

**Вторая глава** посвящена численному моделированию с помощью созданного автором программного комплекса на языке C++ ряда прикладных задач о колебаниях ледяного покрова на поверхности воды под действием различных техногенных динамических нагрузок.

В §1 главы 2 приведен метод расщепления по пространственным переменным, примененный для решения рассмотренной выше системы разностных уравнений, и методы решения возникающих при расщеплении подсистем линейных алгебраических уравнений.

В §2 главы 2 приведено уравнение, описывающее малые поперечные колебания ледяного покрова на поверхности воды под действием динамической нагрузки

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta W) - (1 - \sigma)(D_{yy}W_{xx} - 2D_{xy}W_{xy} + D_{xx}W_{yy}) = F - \rho_g g W,$$

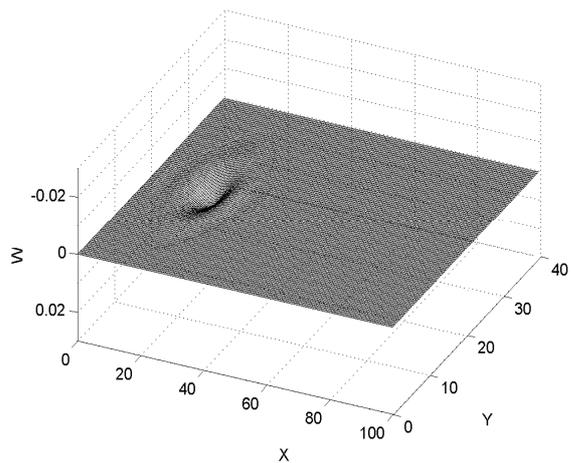
где член  $\rho_g g W$  описывает действие выталкивающей архимедовой силы на нижнюю поверхность ледяного покрова.

Приведен метод определения прочности ледяного покрова на растяжение и сжатие, основанный на вычислении компонент тензора плоских напряжений на каждом временном шаге работы компьютерной программы. При достижении растягивающих или сжимающих напряжений экспериментально установленных предельных значений прочности льда на растяжение или сжатие соответственно, можно сделать вывод о том, что

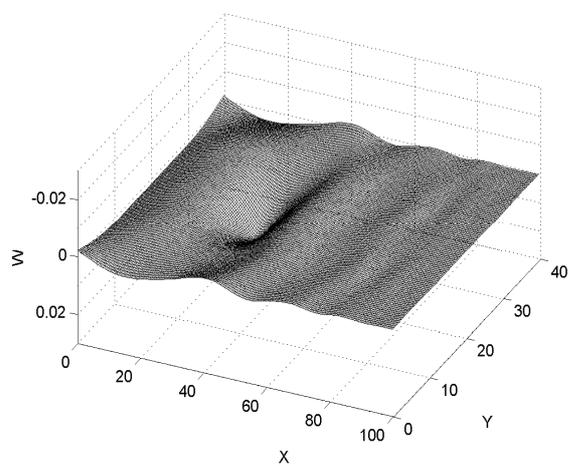
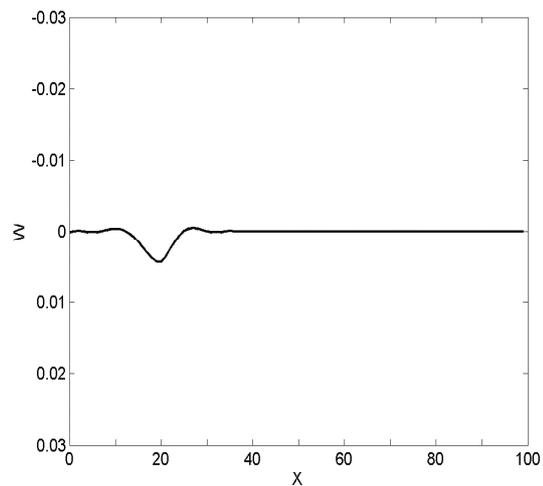
на  $n$ -ом временном шаге произойдет необратимая деформация и лед будет разрушаться.

Далее в этом параграфе приведены результаты численного моделирования движения по ледяному покрову на поверхности воды одного автомобиля (см. рис.1) и двух автомобилей одновременно (см. рис.2). При первом эксперименте разрушения ледяного покрова толщиной 0.26м не происходит. Во втором эксперименте при одновременном движении двух автомобилей друг за другом, после того как волна от движения первого автомобиля достигает второго автомобиля, наблюдается увеличение амплитуды колебаний (см. рис.2с), рассчитываемые в программе максимальные напряжения превышают минимальное значение прочности льда на растяжение (0.5 МПа) и происходит разрушение ледяного покрова толщиной 0.29м.

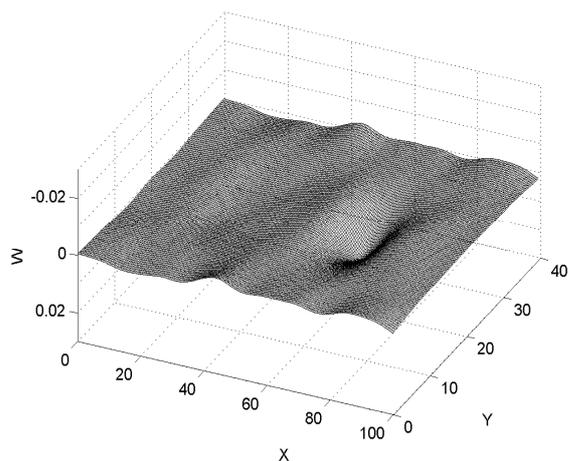
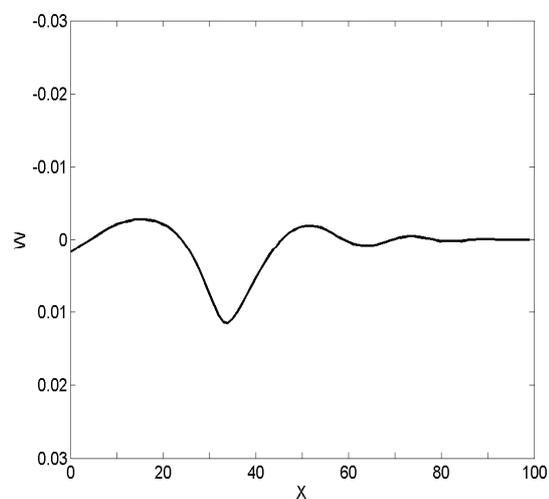
В §3 главы 2 приведены результаты численных экспериментов, моделирующих посадку тяжелых транспортных самолетов на ледовые аэродромы в Антарктиде. В ходе этих экспериментов было проведено исследование предельной толщины ледяного покрова, при которой не происходит его разрушения. Для самолета ИЛ-76 массой 151,5т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности льда на растяжение и сжатие не достигались, равна 4,2м. Для самолета С-130 «Геркулес» массой 50т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности льда на растяжение и сжатие не достигались, равна 1,7м. На рис.3 представлены результаты численного моделирования посадки самолета С130 «Геркулес» массой 50т со скоростью 50 м/с на ледовый аэродром McMurdo Sound в Антарктиде с толщиной льда 2.5 м. Результаты расчета по максимальным значениям величины прогиба сопоставимы с результатами моделирования посадки самолета С130, полученными в работе канадских ученых [12] на основе



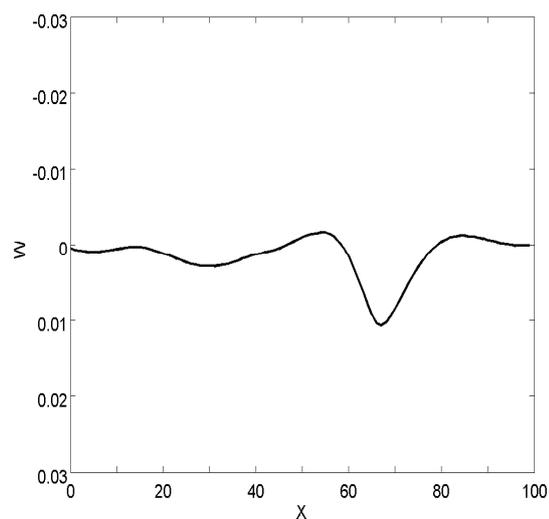
a)  $n = 1000$



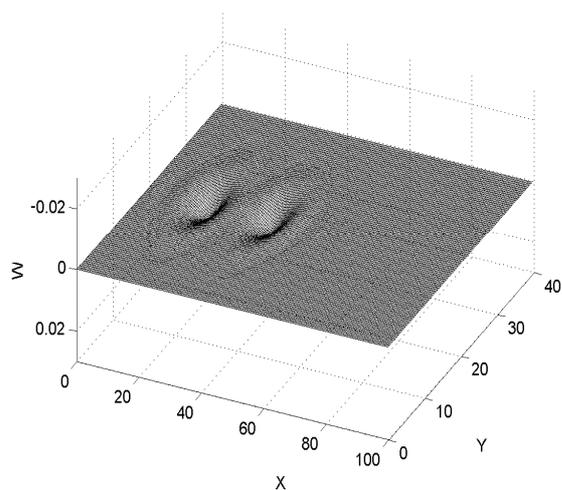
b)  $n = 10000$



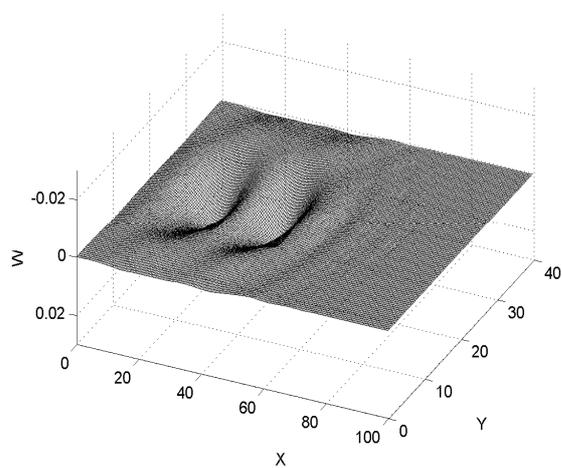
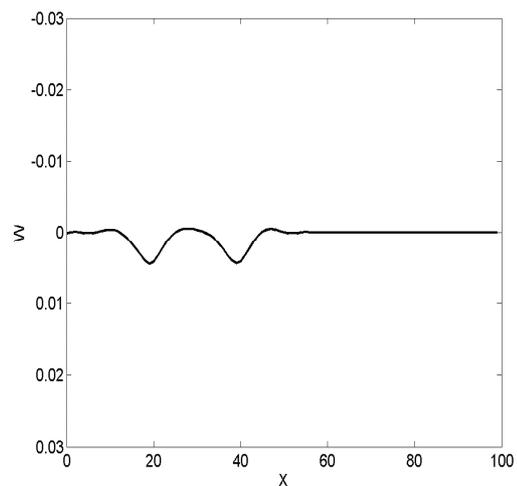
c)  $n = 32000$



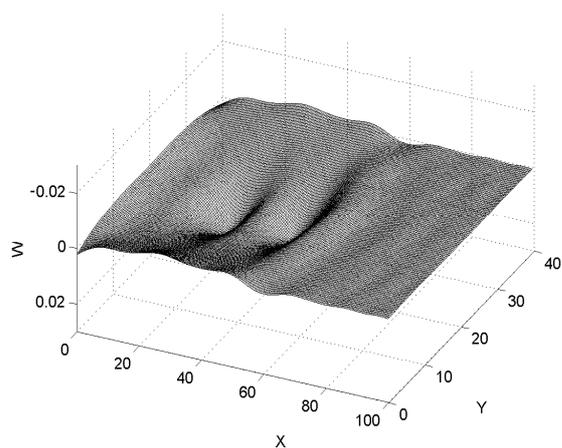
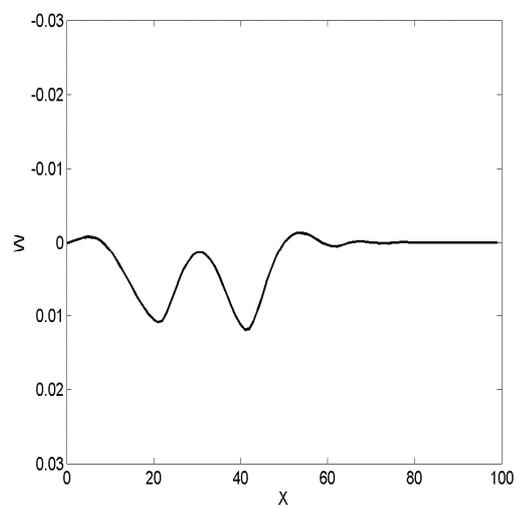
**Рис.1.** Значения величины поперечных прогибов при движении одного автомобиля по ледяному покрову на поверхности воды. Параметры эксперимента: масса автомобиля – 2,2т; скорость – 15м/с; толщина льда – 0,26м.



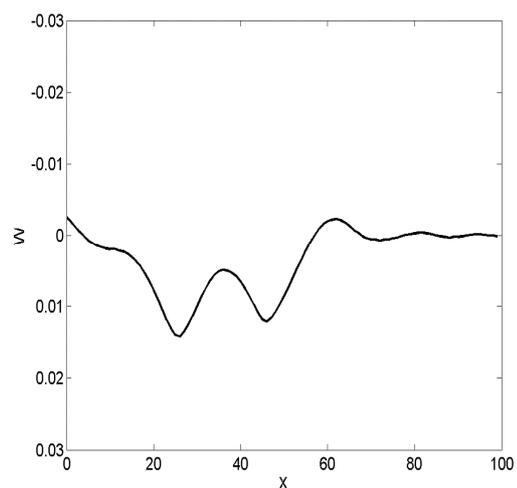
a)  $n = 1000$



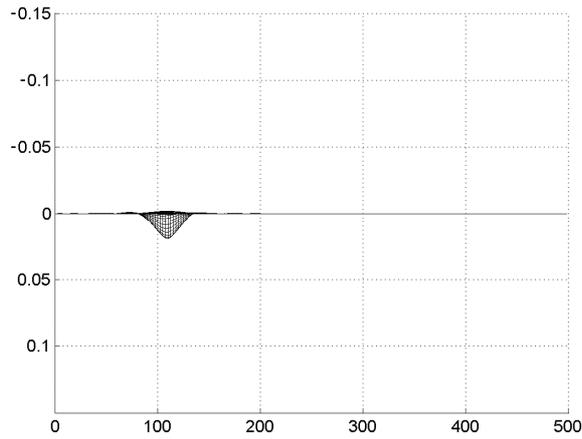
b)  $n = 3000$



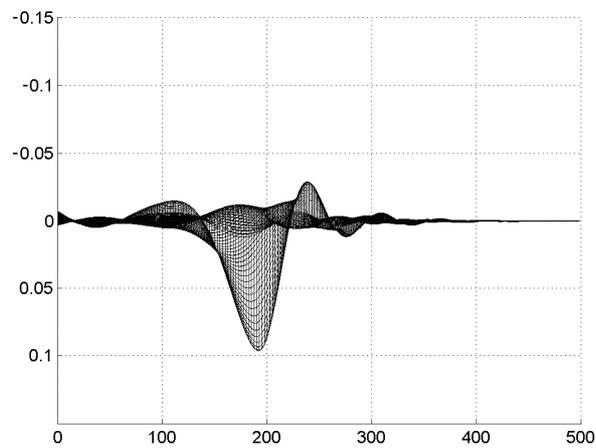
c)  $n = 6000$



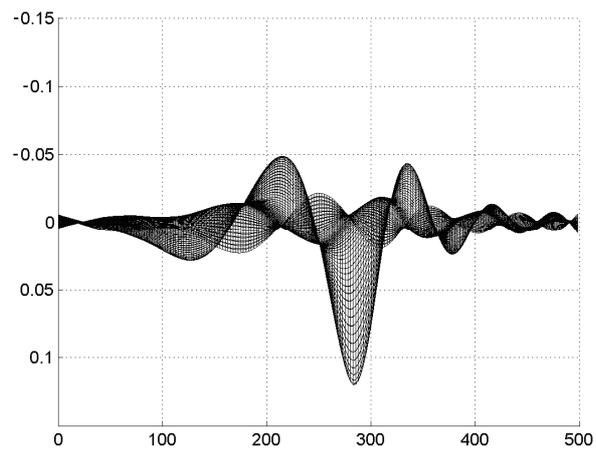
**Рис.2.** Значения величины поперечных прогибов при движении двух автомобилей по ледяному покрову на поверхности воды. Параметры эксперимента: масса каждого автомобиля – 2,2т; скорость – 15м/с; толщина льда – 0,29м; расстояние между автомобилями – 20м.



a)  $n = 2000$



b)  $n = 20000$



c)  $n = 40000$

**Рис.3.** Значения поперечных прогибов при посадке самолета С130 на плавающий лед. Параметры эксперимента: масса самолета –50т; начальная скорость – 50м/с; толщина льда – 2.5м.

аналитического метода решения с последующей аппроксимацией полученного решения.

Таким образом, с помощью созданного программного комплекса можно не только изучать распространение поперечных колебаний в ледяном покрове на поверхности воды под действием техногенных динамических нагрузок, но и делать вывод о возможности его разрушения, что имеет практическую ценность при прокладке автомобильных дорог по льду или устройстве ледовых аэродромов. Созданный программный комплекс может быть применен и к решению других важных прикладных задач: для моделирования крупных плавучих структур понтонного типа, моделирования различных технических платформ и ряда других задач.

### **Основные результаты работы**

1. Для применяемого в работе численного метода решения задачи о малых поперечных колебаниях тонких упругих пластин доказана устойчивость разностной схемы относительно скорости колебаний и ее производных.
2. Доказана сильная сходимость разностных аппроксимаций к обобщенному решению исходной начально-краевой задачи о поперечных колебаниях тонких упругих пластин и получена оценка скорости сходимости.
3. Создан программный комплекс и проведено численное моделирование колебаний ледяного покрова под действием различных техногенных динамических нагрузок с определением пределов прочности ледяного покрова на растяжение и изгиб, в том числе проведено моделирование важной прикладной задачи о посадке тяжелых транспортных самолетов на ледовые аэродромы в Антарктиде.

## Публикации по теме диссертации

1. Кулешов А.А., Мымрин В.В., Разгулин А.В. О сильной сходимости разностных аппроксимаций в задаче поперечных колебаний тонких упругих пластин // ЖВМ и МФ, 2009, т.49, №1, с.152-177.
2. Кулешов А.А., Мымрин В.В. Моделирование колебаний плавающего льда в приближении тонкой упругой пластины // Матем. моделирование, 2009, т.21, №6, с.28-40.
3. Kuleshov A.A., Mymrin V.V. Numerical method for the problem bending vibration of a thin elastic plate and its application in the problem of a floating ice vibration // In CDrom proceeding 8th World Congress on Computational Mechanics - 5th Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, June 30 - July 5, 2008, Venice, Italy.
4. Кулешов А.А., Мымрин В.В., Разгулин А.В. Сходимость разностных аппроксимаций в задаче поперечных колебаний тонких упругих пластин // Тезисы докладов IV международной конференции «Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания», Обнинск, 14-18 мая 2008г., 2с.
5. Кулешов А.А., Мымрин В.В., Разгулин А.В. Сходимость разностных аппроксимаций начально-краевой задачи для уравнения тонкой упругой пластины // Тезисы докладов IV Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», пос. Дюрсо, 15-21 сентября 2008г. Изд-во ИММ УрО РАН, 2008. 2с.
6. Кулешов А.А., Кулешов Ал.А., Мымрин В.В. Математическое моделирование в задачах экологии, описываемых моделью поперечных колебаний тонких упругих пластин // Тезисы докладов международной конференции «Гихонов и современная математика», Москва 19-25 июня 2006г. Москва, 2006, 2с.
7. Кулешов А.А., Кулешов Ал.А., Мымрин В.В. Математическое моделирование колебаний ледяного покрова под действием техногенных динамических нагрузок // Сб. трудов XI Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы математического моделирования», пос. Дюрсо, 5-10 сентября 2005г. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. гос. ун-та, 2005, с.236-241.

## Список цитированной литературы

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
2. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987.
3. Кулешов А.А. О разностной аппроксимации задачи поперечных колебаний тонких упругих пластин // ЖВМ и МФ, 2005, т.45, №4, с.718-740.
4. Кулешов А.А. О численном методе решения задачи поперечных колебаний тонких упругих пластин // Матем. моделирование, 2005, т.17, №4, с.10-26.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
6. Андреев В.Б. Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений по граничным условиям Дирихле // ЖВМ и МФ, 1972, т.12, №3, с.598-611.
7. Андреев В.Б. Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений четвертого порядка в прямоугольнике по граничным условиям первого рода // Сб. работ НИВЦ МГУ "Вычислительные методы и программирование" М.:Изд. Моск. ун-та, 1977, с.116-166.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963.
9. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. М. Наука, 1987.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
11. Lions J.L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications. v.2. Springer-Verlag, 1972.
12. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load // J. Fluid Mech., 1995, v.287, pp.173-197.