На правах рукописи

Терехова Лидия Павловна

Версии почти наверное предельных теорем для случайных сумм

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2010

Работа выполнена в отделе теории вероятностей и математической статистики Научно–исследовательского института математики и механики имени Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук **Чупрунов Алексей Николаевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор **Колчин Валентин Федорович**, кандидат физико–математических наук, доцент **Шашкин Алексей Павлович**
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов

Защита состоится 14 мая 2010 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 2-ой учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова: http://cs.msu.su в разделе "Наука" — "Работа диссертационных советов" — "Д 501.001.44".

Автореферат разослан 13 апреля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н.П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Версии почти наверное предельных теорем для сумм независимых случайных величин являются новой и интенсивно развивающейся областью теории вероятностей. Впервые такие теоремы появились в статьях G. Brosamler[1] и P. Schatte[2] в 1988 г. В последующие десятилетия это направление развивалось в работах M. Lacey, W. Philipp, И.А. Ибрагимова, М.А. Лифшица, I. Berkes, E. Csáki, I. Fazekas, Z. Rychlik, А.Н. Чупрунова и других ученых.

В последние 50 лет интенсивно развивалась теория предельных теорем для сумм случайного числа случайных величин. Отметим монографии В.М. Круглова и В.Ю. Королева, А. Гута, В.В. Калашникова, Д.С. Сильвестрова, а также статьи Г. Роббинса, Р.Л. Добрушина, А.Н. Колмогорова и Ю.В. Прохорова, А. Реньи, Б.В. Гнеденко и Х. Фахима, В.М. Круглова.

В диссертационной работе получены версии почти наверное предельных теорем для сумм независимых случайных величин со случайным индексом суммирования. Результаты диссертации являются обобщением версий почти наверное предельных теорем со случая неслучайного индекса суммирования на ситуацию, в которой индекс суммирования является случайной величиной.

Пусть ζ_n, $n \in \mathbf{N}$, — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Рассмотрим меры:

$$Q_n(\omega) = Q_n((\zeta_n))(\omega) = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ \delta_{\zeta_k(\omega)},$$

где $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$ и δ_x - мера единичной массы, сосредоточенной в

[1] *Brosamler G.* An almost everywhere central limit theorem // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1988. – Vol. 104. – P. 561–574.

[2] *Schatte P.* On strong versions of the central limit theorem // *Math. Nachr.* – 1988. – Vol. 137. – P. 249–256.

точке x.

Классические предельные теоремы имеют дело со сходимостью по распределению случайных величин: $\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta$, при $n \to \infty$. Во многих случаях сходимость $\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta$, при $n \to \infty$, влечет слабую сходимость мер $Q_n(\omega) \xrightarrow{w} \mu_\zeta$, при $n \to \infty$, для почти всех $\omega \in \Omega$. Такие предельные теоремы называются версиями почти наверное обычных предельных теорем. Если же справедлива сходимость $Q_n(\omega) \xrightarrow{w} \mu_\zeta$, при $n \to \infty$, для почти всех $\omega \in \Omega$, и при этом не существует сходимости $\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta$, при $n \to \infty$, то говорят о почти наверное предельных теоремах.

Здесь и далее $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_d)$, $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_d)$, ... $\in \mathbf{N}^d$. Выражение $\mathbf{n} \to \infty$ означает, что $n_i \to \infty$ для каждого $i = 1, ..., d$. Пусть $\log_+ x = \log x$, если $x \geq e$, и $\log_+ x = 1$, если $x < e$. Пусть $|\mathbf{n}| = \prod_{i=1}^d n_i$ и $|\log \mathbf{n}| = \prod_{i=1}^d \log_+ n_i$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$.

Пусть $\zeta_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Рассмотрим меры

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((\zeta_{\mathbf{n}}))(\omega) = \frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)},$$

где $\omega \in \Omega$ и δ_x - мера единичной массы, сосредоточенной в точке x.

Версия почти наверное мультииндексной предельной теоремы имеет вид: $Q_{\mathbf{n}}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_\zeta$, при $\mathbf{n} \to \infty$, для почти всех $\omega \in \Omega$.

В работах G. Brosamler и P. Schatte была получена версия почти наверное центральной предельной теоремы. Впоследствии I. Berkes и И.А. Ибрагимов обобщили эти результаты на нормированные суммы одинаково распределенных независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона. Случай нормированных сумм независимых случайных величин рассматривался в статьях М.А. Лифшица, И.А. Ибрагимова, M. Atlagh, M. Peligrad, P. Révész, B. Rodzik, Z. Rychlik. В диссертационной работе получено обобщение результата I. Berkes и И.А. Ибрагимова на случай нормированных случайных сумм одинаково распределенных независимых мультииндексных случайных величин.

В ряде работ изучались версии почти наверное функциональных предельных теорем (см. работы M. Lacey, W. Phillip, P. Schatte, P. Major, А.Н. Чупрунова, I. Fazekas, E.B. Czerebak–Morozowicz, Z. Rychlik, M. Urbanek). Была получена версия почти наверное теоремы Донскера–Прохорова (M. Atlagh) и ее обобщение на случай мультииндексных последовательностей (I. Fazekas и Z. Rychlik), функциональные почти наверное предельные теоремы для сумм случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона (I. Berkes и H. Dehling) и полуустойчивого закона (I. Fazekas и А.Н. Чупрунов). В диссертационной работе получена версия почти наверное функциональной предельной теоремы для случайных сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения гауссовского закона.

Изучение полуустойчивых распределений началось с работ П. Леви. В.М. Круглов получил полное описание полуустойчивых распределений в терминах их мер Леви. В работах S. Chörgő и Z. Megyesi дано описание полуустойчивых распределений с помощью вероятностного подхода, предложенного S. Chörgő. И.В. Гриневич и Ю.С. Хохлов дали описание областей притяжения полуустойчивых законов аналогичное описанию областей притяжения устойчивых распределений, полученному в классических работах Б.В. Гнеденко и В. Деблина. I. Berkes, E. Csáki, S. Chörgő и Z. Megyesi получили почти наверное предельную теорему для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения полуустойчивого закона. А.Н. Чупрунов и I. Fazekas обобщили этот результат на функциональный случай. В диссертационной работе получено обобщение почти наверное предельной теоремы I. Berkes, E. Csáki, S. Chörgő и Z. Megyesi на случайные индексы суммирования.

А.Н. Чупрунов и I. Fazekas получили версии почти наверное предельных теорем для числа пустых ячеек при размещении различимых частиц по ячейкам. В диссертационной работе получены обощения этих результатов на случай неполного комплекта ячеек и в ситуации, когда число ячеек случайно.

Цель работы. Целью диссертационной работы является получение версий почти наверное предельных теорем для случайных сумм, а также для случайных размещений в случаях неполного и случайного числа ячеек.

Методы исследования. В работе используются классические методы теории вероятностей. Доказательства версий почти наверное предельных теорем опираются на критерии почти наверное предельных теорем (см. I. Fazekas и Z. Rychlik[3], I. Fazekas и А.Н. Чупрунов[4]).

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Доказана версия почти наверное предельной теоремы для случайных сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения p–устойчивого закона.

2. Доказана версия почти наверное функциональной предельной теоремы для случайных сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения гауссовского закона.

3. Доказана почти наверное предельная теорема для случайных сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения p–полуустойчивого закона.

4. Доказаны версии почти наверное предельных теорем для числа пустых ячеек при размещении различимых частиц в неполном комплекте ячеек и в случае, когда число ячеек — случайная величина.

---

[3] *Fazekas I., Rychlik Z.* Almost sure central limit theorems for random fields // *Math. Nachr.* – 2003. – Vol. 259. – P. 12–18.

[4] *Fazekas I., Chuprunov A.* Almost sure limit theorems for random allocations // *Studia Sci. Math. Hungar.* – 2005. – Vol. 42. – P. 173–194.; *Fazekas I., Chuprunov A.* An almost sure functional limit theorem for the domain of geometrical partial attraction of semistable laws // *Journal of Theoretical Probability.* – 2007. – Vol. 20(2). – P. 339–353.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней фундаментальные результаты могут найти применение в дальнейших научных исследованиях в данном направлении, а также при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов в Московском государственном университете, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН (ПОМИ РАН), Казанском государственном университете, Новосибирском государственном университете.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертации были изложены на 8-ой международной конференции "Computer Data Analysis and Modeling" (Минск, 2007), Седьмой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения - 2008" (Казань, 2008), Восьмой молодежной научной школе-конференции "Лобачевские чтения - 2009" (Казань, 2009), итоговых научных конференциях Казанского государственного университета в 2007, 2008, 2009 гг. Также результаты работы докладывались и обсуждались на научном семинаре ВМиК МГУ "Теория риска и смежные вопросы" (руководители: д.ф.-м.н., профессор В.Е. Бенинг, д.ф.-м.н., профессор В.Ю. Королев), научном семинаре мехмата МГУ "Асимптотический анализ случайных процессов и полей" (руководители: д.ф.-м.н., профессор А.В. Булинский; к.ф.-м.н., доцент А.П. Шашкин).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех тезисах [4]–[7] и трех статьях в рецензируемых журналах [1]–[3], включая две статьи в журналах из списка ВАК [1]–[2].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, списка условных обозначений, трех глав и списка литературы. Работа набрана в системе LaTeX и содержит 114 страниц. Список литературы насчитывает 75 наименований.

Содержание работы

Во введении дан обзор литературы по теме диссертации, обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цели, представлены выносимые на защиту научные положения и кратко изложено содержание работы.

Глава 1 носит предварительный характер. В ней приведены предельные теоремы, версии почти наверное которых получены в главе 2.

Рассмотрим мультииндексную последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d$, принадлежащих области притяжения p–устойчивого закона. Пусть $\xi_{\mathbf{k}}$ имеет такое же распределение, как и случайная величина ξ.

Пусть $\nu_{\mathbf{n}} = (\nu_{1\mathbf{n}}, \nu_{2\mathbf{n}}, ..., \nu_{d\mathbf{n}})$, где $\nu_{1\mathbf{n}},\ \nu_{2\mathbf{n}}, ..., \nu_{d\mathbf{n}} : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbf{N}}$, – мультииндексная последовательность неотрицательных целочисленных случайных векторов. Рассмотрим мультииндексную последовательность двумерных случайных векторов $V_{\mathbf{n}}^{(\nu)} = \left(S_{\mathbf{n}}^{(\nu)}, W_{\mathbf{n}}^{(\nu)}\right)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, где

$$S_{\mathbf{n}}^{(\nu)} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \le \nu_{\mathbf{n}}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}), \quad W_{\mathbf{n}}^{(\nu)} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}^2} \sum_{\mathbf{i} \le \nu_{\mathbf{n}}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2.$$

Обозначим через $\tau_{\mathbf{n}}$ и τ распределения случайных векторов $\nu_{\mathbf{n}} = \left(\frac{\nu_{1\mathbf{n}}}{n_1}, \frac{\nu_{2\mathbf{n}}}{n_2}, ..., \frac{\nu_{d\mathbf{n}}}{n_d}\right)$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_d)$, соответственно.

Теорема 1.1.1. *Предположим, что* $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$, *при* $\mathbf{n} \to \infty$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, $S_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \gamma_p$, *при* $\mathbf{n} \to \infty$, *где* γ_p *—* p*–устойчивая случайная величина. Пусть семейства* $\{\nu_{\mathbf{n}}\}$ *и* $\{\xi_{\mathbf{n}}\}$ *независимы. Тогда*

$$V_{\mathbf{n}}^{(\nu)} \xrightarrow{d} V^{(\nu)},$$

при $\mathbf{n} \to \infty$, *где* $V^{(\nu)}$ *— случайный вектор с характеристической функ-*

цией

$$f^{(\nu)}(s,t) = \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t) d\tau(\mathbf{u}), \ s,t \in \mathbf{R}, \tag{1.1.3}$$

и характеристическая функция $f(s,t)$ *определяется формулой*

$$f(s,t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{0} \left(e^{isx+itx^2} - 1 - is\frac{x}{1+x^2}\right) d\left(\frac{c_1}{|x|^p}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} \left(e^{isx+itx^2} - 1 - is\frac{x}{1+x^2}\right) d\left(-\frac{c_2}{x^p}\right)\right\}, \quad (s,t) \in \mathbf{R}^2.$$

где $c_1, c_2 \geq 0, \ c_1 + c_2 > 0$.

Рассмотрим метрику

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n},$$

где $x, y : \mathbf{R}_+^d \longrightarrow \mathbf{R}^r$ – функции, ограниченные на каждом компактном множестве, $x(t) = (x_1(t), ..., x_r(t))$, $y(t) = (y_1(t), ..., y_r(t))$, и

$$\|x-y\|_n = \sup_{1 \leq i \leq r} \sup_{0 \leq t \leq \bar{N}} |x_i(t) - y_i(t)|, \ t \in \mathbf{R}_+^d,$$

где $\bar{N} = (n, ..., n) \in \mathbf{N}^d$.

Пусть $\mathcal{D}$ – множество индикаторов вида

$$C = (I_{[a_1,b_1)^d}, \ I_{[a_2,b_2)^d}, ..., I_{[a_r,b_r)^d}),$$

где $a_i < b_i, \ a_i, b_i \in \mathbf{Q}_+, \ 1 \leq i \leq r$. Замыкание линейной оболочки множества $\mathcal{D}$ в метрике ρ будем обозначать с помощью $B^r(\mathbf{R}_+^d)$. Заметим, что пространство непрерывных функций содержится в пространстве $(B^r(\mathbf{R}_+^d), \rho)$ как замкнутое подпространство.

Рассмотрим мультииндексную последовательность случайных векторов $V_{\mathbf{n}}^{(\nu)} = (S_{\mathbf{n}}^{(\nu)}, W_{\mathbf{n}}^{(\nu)})$, компоненты которых имеют вид:

$$S_{\mathbf{n}}^{(\nu)}(t_1, t_2, ..., t_d) = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{k_i \leq [\nu_{i\mathbf{n}} t_i], \, 1 \leq i \leq d} (\xi_{\mathbf{k}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})$$

и

$$W_{\mathbf{n}}^{(\nu)} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}^2} \sum_{\mathbf{k} \le \nu_{\mathbf{n}}} (\xi_{\mathbf{k}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2,$$

где $(t_1, t_2, ..., t_d) \in \mathbf{R}_+^d$. Здесь $B_{|\mathbf{n}|}$ и $\alpha_{|\mathbf{n}|}$ – соответствующие элементы последовательностей B_n и α_n, при $\alpha_n = E\xi \cdot I_{\{\xi < B_n\}}$.

Доказательство следующей теоремы основано на мультииндексном обобщении теоремы Скорохода (Теорема 1.2.1).

Теорема 1.3.2. *Пусть* $S_n \xrightarrow{d} \gamma(\sigma^2)$, $n \to \infty$. *Предположим, что* $\{\nu_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}^d\}$, *— независимые случайные вектора, семейства* $\{\nu_{\mathbf{n}}\}$ *и* $\{S_{\mathbf{n}}\}$ *независимы, и* $\frac{\nu_{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \nu$, *при* $\mathbf{n} \to \infty$. *Тогда*

$$V_{\mathbf{n}}^{(\nu)} \xrightarrow{d} V,$$

при $\mathbf{n} \to \infty$, *в* $B(\mathbf{R}_+^d) \times B(\mathbf{R}_+^d)$, *где* $V = (\sqrt{|\nu|} \cdot \mathcal{W}, |\nu| \cdot \sigma^2)$, $\mathcal{W}$ *–* d*-параметрический винеровский процесс на* $\mathbf{R}_+^d$, *и* $|\nu| = \nu_1 \nu_2 ... \nu_d$.

Глава 2 посвящена версиям почти наверное предельных теорем для случайных сумм независимых случайных величин.

В § 2.2 доказываются версии почти наверное предельных теорем для случайных сумм мультииндексных случаных величин, принадлежащих области притяжения p–устойчивого закона.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $S_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \gamma_p$ *при* $\mathbf{n} \to \infty$, *где* γ_p *—* p*–устойчивая случайная величина. Предположим, что* $\nu_{\mathbf{n}}$ *— независимые случайные вектора, семейства* $\{\nu_{\mathbf{n}}\}$ *и* $\{\xi_{\mathbf{n}}\}$ *независимы,* $i = \overline{1, d}$, *и* $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$, *при* $\mathbf{n} \to \infty$.

Пусть $Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((V_{\mathbf{n}}^{(\nu)}))(\omega)$. *Тогда для почти всех* $\omega \in \Omega$ *имеет место сходимость*

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_{V^{(\nu)}} \quad \textit{при } \mathbf{n} \to \infty,$$

где $V^{(\nu)}$ *— случайный вектор с характеристической функцией (1.1.3).*

Рассмотрим последовательность случайных самонормированных сумм:

$$T_{\mathbf{n}}^{(\nu)} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{\mathbf{i}\le\nu_{\mathbf{n}}}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})}{\sqrt{\sum_{\mathbf{i}\le\nu_{\mathbf{n}}}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2}}, & \text{если } \sum_{\mathbf{i}\le\nu_{\mathbf{n}}}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } \sum_{\mathbf{i}\le\nu_{\mathbf{n}}}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 = 0. \end{cases}$$

Теорема 2.2.2. *Пусть* $P\{\omega : \nu(\omega) = 0\} = 0$. *Пусть* $Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((T_{\mathbf{n}}^{(\nu)}))(\omega)$. *Тогда при выполнении условий теоремы* 2.2.1 *для почти всех* $\omega \in \Omega$ *имеем:*

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_{T^{(\nu)}}, \text{ при } \mathbf{n} \to \infty\,,$$

где $T^{(\nu)} = \frac{S^{(\nu)}}{\sqrt{W^{(\nu)}}}$, *и* $(S^{(\nu)}, W^{(\nu)})$ *— случайный вектор с характеристической функцией (1.1.3).*

Теорема 2.2.2 является версией почти наверное мультииндексной предельной теоремы для статистики Стьюдента.

В § 2.3 получены версии почти наверное функциональных предельных теорем для случайных сумм мультииндексных случаных величин, принадлежащих области притяжения гауссовского закона.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $S_n \xrightarrow{d} \gamma(\sigma^2)$, $n \to \infty$. *Предположим, что* $\{\nu_{\mathbf{n}},\ \mathbf{n} \in \mathbf{N}^d\}$, *— независимые случайные вектора, семейства* $\{\nu_{\mathbf{n}}\}$ *и* $\{S_{\mathbf{n}}\}$ *независимы, и* $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$, *при* $\mathbf{n} \to \infty$. *Пусть* $Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((V_{\mathbf{n}}^{(\nu)}))(\omega)$. *Тогда*

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_V,$$

при $\mathbf{n} \to \infty$ *для почти всех* $\omega \in \Omega$, *где* $V = (\sqrt{|\nu|} \cdot \mathcal{W}, |\nu| \cdot \sigma^2)$, $\mathcal{W}$ *–* d*-параметрический винеровский процесс на* $\mathbf{R}_+^d$.

Рассмотрим последовательность случайных полей:

$$T_{\mathbf{n}}^{(\nu)}(\bar{t}) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{k_i\le[\nu_{i\mathbf{n}}t_i],\,1\le i\le d}(\xi_{\mathbf{k}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})}{\sqrt{\sum_{\mathbf{k}\le\nu_{\mathbf{n}}}(\xi_{\mathbf{k}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2}}, & \text{если } \sum_{\mathbf{k}\le\nu_{\mathbf{n}}}(\xi_{\mathbf{k}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } \sum_{\mathbf{k}\le\nu_{\mathbf{n}}}(\xi_{\mathbf{k}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 = 0, \end{cases}$$

где $\bar{t} = (t_1, ..., t_d)$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $P\{\omega : \nu(\omega) = 0\} = 0$, $Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((T_{\mathbf{n}}^{(\nu)}))(\omega)$. *При выполнении условий теоремы 2.3.1 для почти всех* $\omega \in \Omega$ *имеем*

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_T, \ \mathbf{n} \to \infty,$$

где $T = \frac{\mathcal{W}}{\sigma}$.

В § 2.4 доказывается почти наверное предельная теорема для случайных сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения полуустойчивого закона.

Описание полуустойчивых случайных величин в терминах мер Леви впервые было получено В.М. Кругловым, а описание областей притяжения полуустойчивого закона - И.В. Гриневич и Ю.С. Хохловым. Впоследствии Z. Megysi и S. Chörgő описали полуустойчивые случайные величины и области их притяжений на основе вероятностного подхода S. Chörgő. Приведем здесь это описание.

Пусть $\{k_n\}$ — последовательность натуральных чисел со свойством

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = c, \tag{1.4.1}$$

где $c > 1$.

Пусть ξ, ξ_n, $n \in \mathbf{N}$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, с функцией распределения F и квантилью $Q(s) = \inf\{x \in \mathbf{R} : F(x) \geq s\}, \ 0 < s < 1.$

Рассмотрим суммы

$$S_n = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - A_n),$$

где $B_n > 0$, $A_n \in \mathbf{R}$.

Невырожденный предел сумм S_{k_n}, где последовательность (k_n) удовлетворяет условию (1.4.1), называется полуустойчивой случайной величиной.

Пусть $0 < p < 2$. Рассмотрим N_j, $j = 1, 2$, — стандартные непрерывные слева независимые пуассоновские процессы. Предположим, что

$$g_j(s) = -M_j(s)s^{-1/p}, \ s > 0, \ j = 1, 2,$$

являются неубывающими функциями, где $M_1, \ M_2$ — неотрицательные, непрерывные справа на $(0, \infty)$, ограниченные на $(0, \infty)$ функции такие, что $M_1 + M_2 \neq 0$, и $M_j(cs) = M_j(s)$, $j = 1, 2$, для всех $s > 0$ и некоторого $c > 1$. Рассмотрим случайные величины

$$W_j(M_j) = W_j(M_j, p) = \int_0^1 N_j(s)\, d\left(\frac{-M_j(s)}{s^{1/p}}\right) +$$

$$+ \int_1^\infty (N_j(s) - s)\, d\left(\frac{-M_j(s)}{s^{1/p}}\right) + M_j(1), \ \ j = 1, 2.$$

Пусть

$$W(M_1, M_2) = W_2(M_2) - W_1(M_1).$$

Случайная величина W является p–полуустойчивой случайной величиной тогда и только тогда, когда для некоторых M_1, M_2 и $b \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $W \stackrel{d}{=} W(M_1, M_2) + b$.

Обозначим через $\phi(x, M_1(y), M_2(y))$ характеристическую функцию случайной величины $W(M_1, M_2)$:

$$\phi(x, M_1(y), M_2(y)) = Ee^{ixW(M_1,M_2)}, \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$, для которой выполняется условие (1.4.1). Для любого $s \in (0, s_0)$, где $s_0 \in (0, 1]$ достаточно мало, существует единственное $k_{n^*(s)}$ такое, что $k^{-1}_{n^*(s)} \leq s < k^{-1}_{n^*(s)-1}$. Пусть $\gamma(s) = sk_{n^*(s)}$, если $s \in (0, s_0)$, и $\gamma(s) = 1$, если $s \in [s_0, 1)$. Тогда $1 \leq \gamma(s) < c + \varepsilon$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$, всех $s \in (0, 1)$ и константы c из (1.4.1).

Пусть

$$Q_+(s) = -s^{-1/p} l(s)[M_1(\gamma(s)) + h_1(s)], \tag{1.4.2}$$

$$Q(1-s) = s^{-1/p} l(s)[M_2(\gamma(s)) + h_2(s)], \qquad (1.4.3)$$

для любого $s \in (0,1)$, где Q_+— непрерывная справа версия квантили Q, $l(\cdot)$— непрерывная справа, медленно меняющаяся в нуле функция, M_1, M_2 — неотрицательные, непрерывные справа на $(0,\infty)$, ограниченные на $(0,\infty)$ функции такие, что $M_1 + M_2 \neq 0$, и $M_j(cs) = M_j(s)$, $j = 1,2$, для всех $s > 0$, и константы c из (1.4.1), а h_1 и h_2 — непрерывные справа функции такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_j\left(\frac{t}{k_n}\right) = 0$ в любой точке непрерывности $t > 0$ функции M_j, $j = 1,2$.

Случайная величина ξ принадлежит области притяжения p–полуустойчивого закона тогда и только тогда, когда ее квантиль Q имеет вид (1.4.2), (1.4.3).

Мы будем использовать следующие нормирующие и центрирующие константы:

$$B_n = n^{1/p} \cdot l\left(\frac{1}{n}\right), \ A_n = \frac{1}{B_n}\int_{1/n}^{1-1/n} Q(s)ds, \quad n = 1,2,... \qquad (1.4.4)$$

Пусть ν_n – последовательность независимых целочисленных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Рассмотрим случайные суммы

$$S_n^{(\nu)} = \frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{\nu_n}(\xi_i - A_n).$$

Теорема 2.4.1. *Предположим, что* $\frac{\nu_{k_n}}{k_n} \xrightarrow{d} \nu$, $S_{k_n} \xrightarrow{d} W(M_1, M_2)$, *при* $k_n \to \infty$, *где последовательность* k_n *удовлетворяет условию (1.4.1). Пусть семейства* $\{\nu_{k_n}\}$ *и* $\{\xi_n\}$ *независимы. Тогда*

$$Q_n((S_n^{(\nu)}))(\omega) \xrightarrow{w} \mathcal{L}, \quad \text{при } n \to \infty$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, *где распределение* $\mathcal{L}$ *имеет характеристическую функцию*

$$\psi(t) = \frac{1}{\log c}\int_0^\infty \int_1^c \frac{\phi^u(t, M_1(ys), M_2(ys))}{s} ds \, d\mu_\nu(u), \ t \in \mathbf{R}$$

где константа c удовлетворяет условию (1.4.1).

В **главе 3** получены версии почти наверное предельных теорем для случайных размещений.

В § 3.2 получены версии почти наверное предельных теорем для неполного комплекта ячеек с нормировкой – среднеквадратическим отклонением.

Пусть имеется N ячеек, в которые независимо друг от друга случайным образом бросаются n различимых частиц. Вероятность попадания каждой фиксированной частицы в ячейку с номером j равна $1/N$ для любого $j = \overline{1, N}$. Мы будем рассматривать следующую реализацию этой схемы размещения.

Рассмотрим независимые случайные величины ξ_n, ξ, $n \in \mathbf{N}$, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$. Пусть $n, N \in \mathbf{N}$, $\Delta_i = \Delta_{N_i} = \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)$, $1 \le i \le N$. Введем событие A_i, которое состоит в том, что в i-ый интервал не попала ни одна частица:

$$A_i = A_i(n, N) = \bigcap_{j \in \{1, \ldots, n\}} \{\xi_j \overline{\in} \Delta_i\}.$$

Число пустых среди первых N', $N' \le N$, ячеек равно

$$\mu_0(n, N', N) = \sum_{i=1}^{N'} \prod_{j=1}^{n} I_{\{\xi_j \overline{\in} \Delta_i\}}.$$

Пусть $N' = N'(N)$. Рассмотрим суммы

$$S_{nN'N} = \frac{\mu_0(n, N', N) - E\mu_0(n, N', N)}{D_{nN'N}},$$

где $D^2_{nN'N}$ — дисперсия случайной величины $\mu_0(n, N', N)$.

Теорема 3.2.1. *Предположим, что* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, $K' = K'(K)$, *существует* K_0, *такое что* $K' > \beta K$, $0 < \beta < 1$, *для любых* $K' > K_0$.

Пусть

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{(\log\alpha_2 - \log\alpha_1)\log n}\sum_{k\le n}\sum_{\{K:\alpha_1\le\frac{k}{K}\le\alpha_2\}}\frac{1}{kK}\delta_{S_{kK'K}(\omega)}. \qquad (3.2.8)$$

Тогда при $n\to\infty$ *имеем:*

$$Q_n(\omega)\xrightarrow{w}\mu_\gamma, \quad \text{для почти всех } \omega\in\Omega\,.$$

Теорема 3.2.3. *Предположим, что* $0<\alpha_1<\alpha_2<\infty$, $K'=K'(K)$, *существует* K_0, *такое что* $K'>\beta K$, $0<\beta<1$, *для любых* $K'>K_0$. *Пусть*

$$Q_n^*(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}\right)\log n}\sum_{k\le n}\sum_{\{K:\alpha_1\le\frac{k}{K}\le\alpha_2\}}\frac{1}{k^2}\delta_{S_{kK'K}(\omega)}. \qquad (3.2.10)$$

Тогда при $n\to\infty$ *имеем:*

$$Q_n^*(\omega)\xrightarrow{w}\mu_\gamma, \quad \text{для почти всех } \omega\in\Omega\,.$$

Результаты § 3.3, полученные для нормировки $\sqrt{N}$, позволяют получить версии почти наверное предельных теорем для случайных размещений в случае, когда число ячеек — случайная величина (§ 3.4).

Пусть ν_N, ν - независимые случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega',\mathcal{A}',P')$, распределенные на отрезке $[0,1]$.

Пусть $\lceil x\rceil$ обозначает наименьшее целое, не меньше x. Рассмотрим число пустых ячеек среди первых $\lceil\nu_N N\rceil$ ячеек:

$$\mu_0(n,N) = \sum_{i=1}^{\lceil\nu_N N\rceil}\prod_{j=1}^{n} I_{\{\xi_j\overline{\in}\Delta_i\}} = \sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{n} I_{\{\xi_j\overline{\in}\Delta_i\}} I_{\{i-1<\nu_N N\le i\}}.$$

Пусть $\alpha=\frac{n}{N}$. Рассмотрим суммы

$$\widetilde{R}_{nN} = \frac{\mu_0(n,N)-E\mu_0(n,N)}{\sqrt{N}}.$$

Теорема 3.4.1. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, *семейства* $\{\xi_i\}$ *и* $\{\nu_N\}$ *независимы,* $\nu_N \xrightarrow{d} \nu$, *при* $N \to \infty$, *и*

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{(\log\alpha_2 - \log\alpha_1)\log n} \sum_{k \le n} \sum_{\{K: \alpha_1 \le \frac{k}{K} \le \alpha_2\}} \frac{1}{kK} \delta_{\widetilde{R}_{kK}(\omega)}.$$

Тогда имеет место сходимость

$$Q_n(\omega) \xrightarrow{w} \mathcal{L},$$

при $n \to \infty$, *для почти всех* $\omega \in \Omega$, *где распределение* $\mathcal{L}$ *имеет следующую характеристическую функцию:*

$$\varphi(t) = \frac{1}{(\log\alpha_2 - \log\alpha_1)} \int_0^1 \int_{\log\alpha_1}^{\log\alpha_2} e^{-\frac{t^2}{2} \cdot \frac{z\left(1 - e^{-e^y}(1 + z e^y)\right)}{e^{e^y}}} \, dy \, d\mu_\nu(z), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3.4.1}$$

Теорема 3.4.3. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, *семейства* $\{\xi_i\}$ *и* $\{\nu_N\}$ *независимы,* $\nu_N \xrightarrow{d} \nu$, *при* $N \to \infty$, *и*

$$Q_n^*(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right)\log n} \sum_{k \le n} \sum_{\{K: \alpha_1 \le \frac{k}{K} \le \alpha_2\}} \frac{1}{k^2} \delta_{\widetilde{R}_{kK}(\omega)}.$$

Тогда при $n \to \infty$ *имеет место сходимость*

$$Q_n^*(\omega) \xrightarrow{w} \mathcal{L},$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, *где* $\mathcal{L}$ *имеет следующую характеристическую функцию:*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right)} \int_0^1 \int_{\frac{1}{\alpha_2}}^{\frac{1}{\alpha_1}} e^{-\frac{t^2}{2} \cdot \frac{\beta\left(1 - e^{-z/x}(1 + z/x)\right)}{e^{1/x}}} \, dx \, d\mu_\nu(z), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3.4.3}$$

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико–математических наук А.Н. Чупрунову за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. *Терехова Л.П., Чупрунов А.Н.* Версии почти наверное предельных теорем для случайных сумм мультииндексных случайных величин // *Известия вузов. Математика.* – 2010. – №2. – С. 86—96.

2. *Терехова Л.П., Чупрунов А.Н.* Почти наверное предельная теорема для случайных сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения полуустойчивого закона // *Известия вузов. Математика.* – 2009. – №11. – С. 85—88.

Научные статьи и материалы научных конференций:

3. *Terekhova L.P.* Almost sure limit theorems for random sums of multiindex random variables // *Lithuanian Mathematical Journal.* – 2009. – Vol. 49. – Issue 3. – P. 318—330.

4. *Терехова Л.П.* Версии почти наверное предельных теорем для случайных размещений со случайным числом ячеек // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.39. Лобачевские чтения — 2009: материалы Восьмой молодеж. науч. шк.-конф., Казань, 1–6 ноября 2009 г. – Казань, 2009. – С. 359—361.

5. *Терехова Л.П.* Версии почти наверное предельных теорем для случайных размещений со случайным числом частиц // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.37. Лобачевские чтения — 2008: материалы Седьмой молодеж. науч. шк.-конф., Казань, 1–3 декабря 2008 г. – Казань, 2008. – С. 174—176.

6. *Chuprunov A.N., Terekhova L.P.* Almost sure versions of limit theorems for random sums of multiindex random variables // Computer Data Analysis and Modeling. Proceedings of the 8th International Conference, Minsk, September 11–15, 2007. – Minsk, 2007. – P. 10—13.

7. *Terekhova L.* The class of limit distributions in multiindex almost sure limit theorems // 9th international Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Abstracts of Communications, June 25-30, 2006. – Vilnius, 2006. – P. 311.

Во всех совместных работах А.Н. Чупрунову принадлежит постановка задач и выбор метода, а Л.П. Тереховой — поиск и разработка доказательств.