Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Ларионов Виталий Борисович

Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций

Специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Алексеев Валерий Борисович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова Угольников Александр Борисович;
	кандидат физико-математических наук, доцент Московского энергетического института (технического университета) Мещанинов Дмитрий Германович.
Ведущая организация:	Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН.

Защита дисертации состоится 29 октября 2010 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМК МГУ. С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова http://www.cmc.msu.ru в разделе „Наука“ — „Работа диссертационных советов“ — „Д 501.001.44“.

Автореферат разослан ____ сентября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
профессор Н. П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В современной математике и технике теория булевых функций занимает важное положение. Двухзначная логика используется как во многих теоретических областях, так и в прикладных. Всевозможные цифровые устройства, системы искусственного интеллекта, управляющие системы решают сложнейшие задачи, выполняя при этом элементарные двоичные операции и храня данные в виде нулей и единиц.

До сих пор доминирующее положение занимает именно двухзначная логика. Однако сложность решаемых задач, а, следовательно, и технических устройств, постоянно возрастает. Уже подходят к своему пределу многие технологические возможности, такие как увеличение плотности элементов на схемах, повышение рабочей частоты. Применение многозначной логики является одним из путей решения указанных проблем.

Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки различных алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения задач.

Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и во множестве технических разработок. Среди них flash-память, различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т. д.

Одной из основных задач в многозначной логике является проблема выразимости функций: заданную k-значную функцию или класс функций требуется выразить, используя суперпозицию функций некоторого имеющегося множества. Указанную задачу, несколько уменьшив общность постановки, можно переформулировать в задачу описания решетки замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций k-значной логики.

Следуя авторам, будем обозначать через P_k множество всех k-значных функций.

Задача описания всех замкнутых классов функций двухзначной логики была решена Э. Постом[1,2]. Было показано, что в P_2 счетное число замкнутых классов, каждый из которых имеет конечный базис. Существует в точности

---

[1] Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. 1921. Volume 43, № 4. P. 163–165.

[2] Post E. L. Two valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1951. V. 5.

пять предполных классов, образующих критериальную систему для разрешения проблемы полноты.

Ю. И. Яновым, А. А. Мучником было показано[3], что в P_k при $k \geqslant 3$ существуют замкнутые классы со счетным базисом, а также замкнутые классы, не имеющие базиса. Следствием этого результата является континуальная мощность множества замкнутых классов k-значных функций при $k \geqslant 3$. Оказалось, что описать решетку классов в P_k для $k \geqslant 3$, как это было сделано Э. Постом для P_2, невозможно. В связи с этим важной проблемой является описание именно фрагментов решетки замкнутых классов k-значных функций.

И. Розенберг изучил[4] все предполные классы в решетке замкнутых классов k-значных функций. Указанные классы были описаны через сохраняемые отношения в виде шести семейств, два из которых, обозначаемые через $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}$, являются соответственно подмножествами всех монотонных и самодвойственных классов в P_k.

В. В. Мартынюком установлено[5], что класс монотонных функций, сохраняющих частичный порядок r, принадлежит семейству $\mathbf{M}$ (то есть является предполным) тогда и только тогда, когда r имеет в точности единственный минимальный и единственный максимальный элементы.

С. В. Яблонским доказано[6], что класс функций, самодвойственных относительно некоторой подстановки σ, принадлежит семейству $\mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда подстановка σ разлагается в произведение циклов одинаковой длины, являющейся простым числом.

Возникает вопрос о строении фрагмента решетки замкнутых классов k-значных функций над классами монотонных или классами самодвойственных функций, не являющимися предполными.

Цель диссертационной работы. Основной целью диссертации является изучение надрешеток классов монотонных функций и классов самодвойственных функций в P_k при $k \geqslant 3$.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Исследованы новые фрагменты решетки замкнутых классов в P_k.

[3] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. Доклады АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

[4] Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1965. Volume 260. P. 3817–3819.

[5] Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках. Проблемы кибернетики, вып. 3. М.: Наука, 1960. С. 49–61.

[6] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы исследования, разработанные в диссертации, могут, по мнению автора, быть применены при дальнейшем изучении решетки замкнутых классов.

Методы исследования. Результаты диссертации получены с применением методов теории предикатов и теории Галуа для алгебр Поста, а также элементов теории частично упорядоченных множеств и теории чисел.

Публикации и апробирование. По теме диссертации опубликовано 9 работ. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: XV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2—7 июня 2008 г.), XVII Международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября—1 ноября 2008 г.), VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6—9 апреля 2009 г.), VII молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18—23 мая 2009 г.), XVIII Международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О.Б.Лупанова (Пенза, 28 сентября—3 октября 2009 г.), X Международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 1—6 февраля 2010 г.).

Также результаты диссертации обсуждались на спецсеминаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ.

Структура и объем диссертации Объем диссертации 157 страниц. Работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

Краткое содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность работы, проводится обзор исследований и результатов по данной тематике, формулируется цель диссертации, приводится краткое содержание работы, а также перечисляются основные результаты.

Первая глава посвящена общим фактам о замкнутых классах функций k-значной логики и описывающих их предикатах, а также достаточным условиям для наличия бесконечной надструктуры у класса монотонных функций.

В разделе 1.1 приводятся основные определения.

Обозначим $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Определение 1. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *функцией k-значной* *логики* ($k \geqslant 2$), если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k.

Множество всех функций k-значной логики обозначим P_k. Для любого подмножества A из P_k через $[A]$ будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции.

Пусть на E_k задано некоторое отношение частичного порядка r. Возьмем два произвольных набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_n)$ из E_k^n. Будем говорить, что $\tilde{a}$ не превосходит $\tilde{b}$ относительно частичного порядка r и записывать $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, если для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ справедливо неравенство $a_i \leqslant_r b_i$.

Определение 2. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной* относительно частичного порядка r, если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ таких, что $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, выполнено $f(\tilde{a}) \leqslant_r f(\tilde{b})$. Множество всех функций из P_k, монотонных относительно r, называется классом монотонных функций M_r.

Для краткости будем задавать частичный порядок r частично упорядоченным множеством (ЧУМ) H из элементов E_k, а соответствующий монотонный класс обозначать M_H.

Определение 3. Пусть $p(x_1, \dots, x_m)$ – произвольный предикат, определенный на множестве E_k^m, $f(y_1, \dots, y_n)$ – некоторая функция из P_k. Говорят, что функция $f(y_1, \dots, y_n)$ *сохраняет предикат* $p(x_1, \dots, x_m)$, если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), удовлетворяющих предикату p, набор $f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm})$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

Будем обозначать через $\mathrm{Pol}(p)$ множество функций, сохраняющих предикат p.

Класс M_H является замкнутым классом функций, сохраняющих предикат $R(x, y) = TRUE \iff x \leqslant_r y$ [7]. Везде далее, когда будем писать, что монотонный класс задается предикатом R, будет подразумеваться именно описанный предикат $R(x, y)$.

Определение 4. Замкнутый класс A называется *предикатно-описуемым*, если существует предикат p, такой что справедливо представление $A = \mathrm{Pol}\, p$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые семейства предполных классов.

Определение 5. Класс функций B принадлежит семейству $\mathbf{C}$, если B —

[7] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. Издательский дом МЭИ, Москва, 1997.

множество функций, сохраняющих *центральный предикат* p, т.е. предикат, обладающий следующими свойствами:

1. *Абсолютная симметричность.* Для любой подстановки σ на множестве $\{1, \dots, n\}$ и любого набора $\tilde{a} \in E_k^n$ справедливо $p(a_1, \dots, a_n) = TRUE \Longleftrightarrow p(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = TRUE$.

2. *Абсолютная рефлексивность.* Предикат p истинен на любом наборе $\tilde{a}$, таком что найдутся различные номера $1 \leqslant i, j \leqslant m$ (m — местность p), удовлетворяющие $a_i = a_j$ (в $\tilde{a}$ присутствуют хотя бы две равные компоненты).

3. Существует *центр предиката* p, то есть существует элемент $h \in E_k$ такой, что для любого набора $\tilde{a} \in E_k^n$, у которого есть компонента, равная h, справедливо $p(\tilde{a}) = TRUE$.

Определим следующий предикат:

$$p_{max}(x_1, x_2) = \exists y \left(R(x_1, y) \& R(x_2, y) \right),$$

где R — предикат, задающий класс монотонных функций.

Определение 6. Конечное ЧУМ H будем называть *связным множеством*, если для любых двух элементов $a, b \in H$ существует последовательность $u_1, \dots, u_n$ из элементов H такая, что $u_1 = a$, $u_n = b$, для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ справедливо $u_i \leqslant u_{i+1}$ или $u_i \geqslant u_{i+1}$. В ином случае ЧУМ H называется несвязным. Любое ЧУМ, являющееся связным максимальным подмножеством H с сохранением отношения частичного порядка H, назовем компонентой связности множества H.

В разделе 1.1 также приводятся основные сведения о соответствии Галуа между решетками замкнутых классов функций и замкнутых классов предикатов. Доказываются вспомогательные утверждения, описывающие свойства формул над $\{R\}$, где R — предикат, задающий класс монотонных функций, а также некоторые используемые в дальнейшем свойства произвольных замкнутых классов функций и задающих их предикатов.

В разделе 1.2 вводится специальное семейство ЧУМ.

Определение 7. Пусть L — произвольное ЧУМ, $v, v_1, \dots, v_s$ — некоторые его элементы. Элемент v будем называть *максимумом элементов* $v_1, \dots, v_s$ тогда и только тогда, когда для любого $i \in \{1, \dots, s\}$ выполняется соотношение $v \geqslant v_i$.

Определение 8. Определим L_1 как множество, состоящее из всех ЧУМ H, которые содержат подмножество $\overline{H}$ из четырех элементов, изображенное

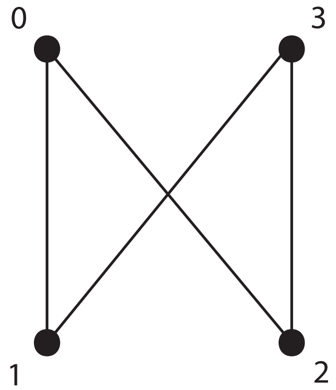

Рис. 1. Подмножество $\overline{H}$.

на рисунке 1. Причем в H не появляются пути из 0 в 3 по вершинам, являющимся максимумами 1 и 2. Уточним это понятие: не существует последовательности элементов $v_1, \ldots, v_m$ в L_1 такой, что $v_1 = 0$, $v_m = 3$, v_i сравнимо с v_{i+1} $(i \in \{1, \ldots, m-1\})$ (то есть либо $v_i \leqslant v_{i+1}$, либо $v_{i+1} \leqslant v_i$), все v_i – максимумы 1 и 2.

Пусть L_2 — множество всех ЧУМ, полученных из ЧУМ, принадлежащих множеству L_1, инвертированием, пусть $L = L_1 \bigcup L_2$.

Доказывается следующая основная теорема, формулирующая достаточные условия наличия у класса монотонных функций бесконечной надструктуры.

Теорема 1. *В решетке замкнутых классов над классом монотонных функций, сохраняющих любое ЧУМ из определенного выше множества L, находится бесконечная цепочка вложенных друг в друга различных замкнутых классов.*

В разделе 1.3 изучаются надструктуры классов монотонных функций при малых k. Доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Любой класс монотонных функций в P_k, где $k \leqslant 4$, построенный на ЧУМ с одним минимальным элементом и не являющийся предполным, строго содержится только в классе $\mathrm{Pol}\, p_{max}$, принадлежащем семейству $\boldsymbol{C}$, и во всем P_k.*

Теорема 3. *Минимальной логикой с монотонным классом с бесконечной надструктурой является P_4.*

В дальнейшем используется следующее семейство предполных классов.

Определение 9. Пусть $E_k = \bigcup\limits_{i=1}^{h} H_i$ — разбиение D множества E_k на непересекающиеся подмножества. Элементы $a, b \in E_k$ называются эквивалентными относительно указанного разбиения (обозначение $a \sim_D b$), если они принадлежат одной его компоненте H_i. Наборы $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ называются эквивалентными относительно разбиения D, если для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо $a_i \sim_D b_i$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет разбиение* D, если для любых $\tilde{a} \sim_D \tilde{b}$ выполнено $f(\tilde{a}) \sim_D f(\tilde{b})$.

Множество всех функций, сохраняющих некоторое нетривиальное разбиение множества E_k является предполным в P_k классом. Множество всех указанных классов образует семейство предполных классов $\mathbf{U}$.

Обозначим через $U_{\{H_i\}}$ класс семейства $\mathbf{U}$, все функции которого сохраняют разбиение $E_k = \bigcup\limits_{i=1}^{h} H_i$.

Известно[8], что для разбиения $D = \{H_i\}_{i=1}^{h}$ множества E_k справедливо представление $U_{\{H_i\}} = \operatorname{Pol} R_D(x_1, x_2)$, где $R_D(x_1, x_2)$ — двухместный предикат, определяемый следующим образом: $R_D(a, b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $a \sim_D b$.

Вторая глава посвящена описанию общих свойств надрешетки классов монотонных функций.

В разделе 2.1 вводится понятие невырожденного предиката. Описываются свойства тех предикатов, на основе которых разрабатывается техника описания надрешетки классов монотонных функций. Применением данной техники в разделе 2.2 доказываются основные теоремы.

Обозначим через A_H класс, равный пересечению всех предикатно-описуемых классов, строго содержащих M_H. Следующая теорема описывает верхнюю окрестность произвольного класса монотонных функций.

Теорема 4. *Справедливо включение $M_H \subset A_H$, и любой класс B, строго содержащий класс монотонных функций M_H, содержит класс A_H.*

Если ЧУМ H обладает единственным минимальным элементом, то удается получить следующие важные свойства надрешетки классов монотонных функций.

---

[8] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. Издательский дом МЭИ, Москва, 1997.

Теорема 5. *Пусть $M_H = \mathrm{Pol}\, R$ — класс монотонных функций, сохраняющих ЧУМ H с единственным минимальным элементом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Для любого предикатно-описуемого класса A такого, что $M_H \subset A$, число замкнутых классов, содержащих класс A, конечно.*

2. *Класс A_H (см. предыдущую теорему) предикатно-описуем тогда и только тогда, когда надрешетка класса M_H конечна.*

3. *Класс монотонных функций M_H содержится в предполном классе C_H семейства $\boldsymbol{C}$, представимом в виде $\mathrm{Pol}\, p_{max}$, других предполных классов, содержащих класс M_H, нет.*

В разделе 2.3 рассматривается случай несвязного ЧУМ H (см. определение 6). Пусть $H_1, \ldots, H_h$ — все компоненты связности H, $|H_i| = l_i$. Строятся классы монотонных функций M_{H_i} в P_{l_i}, порожденные ЧУМ H_i.

Теорема 6. *Если ЧУМ H несвязно, H_i — все компоненты связности H ($i \in \{1, \ldots, h\}$), то класс монотонных функций M_H содержится в предполном классе $U_{\{H_i\}}$, состоящем из функций, сохраняющих разбиение $\{H_i\}$ множества E_k, другие предполные классы не содержат M_H.*

Теорема 7. *Пусть предикат R задает класс монотонных функций, сохраняющих ЧУМ H. Все компоненты связности H суть $H_1, \ldots, H_h$, $|H_i| = l_i$. Тогда:*

1. *Если для некоторого m класс монотонных функций M_{H_m} в P_{l_m} имеет бесконечную наструктуру, то M_H в P_k также имеет бесконечную надструктуру.*

2. *Если каждое ЧУМ $H_1, \ldots, H_h$ имеет единственный минимальный или максимальный элемент, то класс M_H имеет бесконечную надструктуру тогда и только тогда, когда хотя бы один из классов $M_{H_1}, \ldots, M_{H_h}$ имеет бесконечную надструктуру.*

3. *Если каждое ЧУМ $H_1, \ldots, H_h$ имеет единственный минимальный и максимальный элемент, то класс M_H строго содержится только в классах U_{H_i} и P_k.*

В третьей главе рассматриваются необходимые и достаточные условия наличия у класса монотонных функций бесконечной надструктуры, а также некоторые их следствия.

В разделе 3.1 приводятся достаточные условия для конечности надструктуры класса монотонных функций.

Определение 10. Через $L_{i,j}$ будем обозначать множество ЧУМ, имеющих i максимальных элементов и j минимальных.

Рассмотрим произвольное ЧУМ H из элементов множества E_k, принадлежащее множеству $L_{s,1}$. Пусть $h_1, \ldots, h_s$ — все максимальные элементы множества H.

Пусть W_i — некоторое непустое подмножество множества $W = \{1, \ldots, s\}$. Обозначим через H_{W_i} ЧУМ, состоящее из элементов $d \in H$ таких, что $d \leqslant h_j$ для любого $j \in W_i$ и $d \nleqslant h_j$, если $j \notin W_i$. Для любых двух элементов $b_1, b_2 \in H_{W_i}$ выполнено $b_1 \leqslant b_2$ тогда и только тогда, когда $b_1 \leqslant b_2$ в H.

Определение 11. Множество $H \in L_{s,1}$ назовем *простым*, если выполнены следующие условия:

1. Для любого непустого подмножества W_i множества W множество H_{W_i} непусто.

2. Каждое множество H_{W_i} имеет единственный максимальный элемент M_{W_i}.

3. Если $W_i \subseteq W_j$, то $M_{W_i} \geqslant M_{W_j}$ для любых подмножеств W_i, W_j множества W.

Теорема 8. *Любой класс монотонных функций, сохраняющих простое ЧУМ, имеет конечную надструктуру.*

В разделе 3.2 устанавливается необходимое и достаточное условие наличия у классов монотонных функций из некоторых семейств бесконечной надструктуры.

Определение 12. Для произвольного k обозначим через Q_k^1 множество ЧУМ $H \in L_{21}$, составленных из элементов E_k таких, что ЧУМ H содержит подмножество $\overline{H}$ из четырех элементов (с точностью до пометок элементов), изображенное на рисунке 1, причем во множестве H пары элементов $0, 3$ и $1, 2$ остаются несравнимыми, не появляется элемента a такого, что $a \leqslant 0$, $a \leqslant 3$ и $a \geqslant 1$, $a \geqslant 2$, и элементы $0, 3$ являются максимальными в H.

Теорема 9. *Для того, чтобы в P_k класс монотонных функций M_H, где $H \in L_{2,1}$, обладал бесконечной надструктурой, необходимо и достаточно, чтобы ЧУМ H принадлежал семейству Q_k^1. В случае конечной надструктуры класс M_H содержится только в классах $\mathrm{Pol}\, p_{max} \in \boldsymbol{C}$ и P_k.*

Определение 13. Для произвольного k обозначим через Q_k^2 множество ЧУМ $H \in L_{22}$, составленных из элементов E_k, таких, что ЧУМ H содержит подмножество $\overline{H}$ из четырех элементов (с точностью до пометок элементов), изображенное на рисунке 1, причем во множестве H не появляется элемента a такого, что $a \leqslant 0$, $a \leqslant 3$ и $a \geqslant 1$, $a \geqslant 2$; элементы $0, 3$ являются максимальными в H или элементы $1, 2$ — минимальными.

Теорема 10. *Для того, чтобы в P_k класс монотонных функций M_H, где $H \in L_{22}$, обладал бесконечной надструктурой необходимо и достаточно, чтобы ЧУМ H принадлежало семейству Q_k^2.*

В разделе 3.3 доказывается неограниченность конечной надструктуры классов монотонных функций.

Теорема 11. *Для любого числа $n > 0$ существует k-значная логика P_k с монотонным классом M_H таким, что число различных классов B, удовлетворяющих $M_H \subset B \subset P_k$, конечно, но превосходит число n.*

В четвертой главе изучается надструктура замкнутых классов самодвойственных функций.

В разделе 4.1 даются необходимые определения, связанные с классами самодвойственных функций.

Определение 14. Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной относительно подстановки* σ, если выполнено следующее тождество: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma^{-1}(f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)))$, где через σ^{-1} мы обозначаем подстановку, обратную к σ. Известно [9], что множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно σ, является замкнутым классом. Обозначим этот класс через S_σ. Справедливо $S_\sigma = \mathrm{Pol}\, R_\sigma$, где предикат R_σ истинен на всех парах вида $(a, \sigma(a))$.

Доказываются основные свойства классов самодвойственных функций и задающих их предикатов. Основным результатом является следующая теорема.

[9] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.

Теорема 12. *Решетка классов S_{σ^i} изоморфна решетке делителей числа h_σ относительно свойства делимости.*

Также в разделе 4.1 вводятся семейства классов, содержащих классы самодвойственных функций.

Определение 15. Обозначим через $\mathbf{S}_\sigma$ множество классов S_{σ^i}, где i — делитель числа h_σ, $i \neq 1$, $i \neq h_\sigma$.

Определение 16. Через $M_{d,\sigma}$ будем обозначать подмножество множества E_k, состоящее из всех элементов E_k, образующих циклы подстановки σ, длины которых делят число d.

Определение 17. Пусть подстановка π определена на подмножестве $M_{d,\sigma}$ множества E_k таком, что $M_{d,\sigma} \neq \emptyset$, $M_{d,\sigma} \neq E_k$, и равна σ на указанном множестве. Классом H_{d,π^i} назовем множество функций k-значной логики, сохраняющих следующий предикат: $R_{\pi^i}(x_1, x_2) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $x_1, x_2 \in M_{d,\pi}$ и $x_2 = \pi^i(x_1)$, где i — произвольный делитель числа h_π, являющегося минимальным, удовлетворяющим $\pi^{h_\pi} = e$.

Определение 18. Через $\mathbf{T}_\sigma$ будем обозначать множество классов H_{d,π^t}, где d — наименьшее общее кратное длин циклов подстановки σ, элементы которых образуют множество $M_{d,\sigma}$, π — подстановка, определенная на множестве $M_{d,\sigma}$, где $M_{d,\sigma} \neq \emptyset$ и $M_{d,\sigma} \neq E_k$, и совпадающая с подстановкой σ на нем, t — произвольный делитель числа h_π, являющегося минимальным, удовлетворяющим $\pi^{h_\pi} = e$.

В разделе 4.2 исследуется структура формул над $\{R_\sigma\}$, где R_σ — предикат, задающий класс самодвойственных функций. Основным результатом раздела является следующая теорема, описывающая все классы, содержащие классы самодвойственных функций.

Теорема 13. *В решетке замкнутых классов k-значной логики над классом самодвойственных функций S_σ находятся только классы семейств $\boldsymbol{S}_\sigma$, $\boldsymbol{T}_\sigma$, их пересечения и P_k.*

В разделе 4.3 изучается структура надрешетки произвольного класса самодвойственных функций.

Определение 19. Рассмотрим множество $M_{j,\sigma}$ для некоторого числа j, являющегося наименьшим общим кратным длин некоторого подмножества циклов подстановки σ, причем $M_{j,\sigma} \neq \emptyset$. Пусть π — подстановка, определенная на множестве $M_{j,\sigma}$ и совпадающая с σ на указанном множестве (в случае $M_{j,\sigma} = E_k$ справедливо $\pi = \sigma$). Пусть i — делитель числа h_π, являющийся минимальным, удовлетворяющим соотношению $\pi^{h_\pi} = e$ на множестве $M_{j,\sigma}$, где e — тождественная подстановка. В случае, если $M_{j,\sigma} = E_k$, обозначим через $S_{i,j}$ класс S_{σ^i}, в противном случае (то есть, если $M_{j,\sigma} \subset E_k$) обозначим через $S_{i,j}$ класс H_{j,π^i}.

Теорема 14. *$S_{i_1,l_1} \subseteq S_{i_2,l_2}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. $M_{l_2,\sigma} \subseteq M_{l_1,\sigma}$.
2. $\text{НОД}(i_1, l_2) | i_2$.
3. *Для любого цикла C' длины l' подстановки σ на множестве $M_{l_1,\sigma} \setminus M_{l_2,\sigma}$ число l' не делит* $\text{НОК}(i_1, l_2)$.

Основные результаты диссертации

1. Найдены достаточные условия для наличия у класса монотонных функций бесконечной надструктуры.
2. Найдена минимальная логика, содержащая класс монотонных функций с бесконечной надструктурой, а также минимальная логика, содержащая класс монотонных функций с бесконечной надструктурой, порожденный ЧУМ, обладающим единственным минимальным элементом.
3. Доказано, что в случае, когда класс монотонных функций M порожден ЧУМ, обладающим единственным минимальным элементом, надструктура любого предикатно-описуемого класса A такого, что $M \subset A$, конечна.
4. Описаны основные свойства надрешетки классов монотонных функций (верхняя окрестность, предполные классы).
5. Описана связь надструктуры класса монотонных функций, сохраняющих несвязное ЧУМ, с надструктурой классов монотонных функций, сохраняющих компоненты связности ЧУМ.
6. Найдено необходимое и достаточное условие для наличия бесконечной надструктуры у класса монотонных функций, сохраняющих ЧУМ с не более чем двумя максимальными и двумя минимальными элементами.

7. Показана неограниченность конечной надструктуры у классов монотонных функций.

8. Полностью описана надструктура классов самодвойственных функций.

Публикации по теме диссертации

1. Ларионов В. Б. *О некоторых свойствах монотонных функций в многозначных логиках* // Тезисы докладов XV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2—7 июня 2008 г.), издательство «Отечество», Казань, 2008. С. 71–72.

2. Ларионов В. Б. *О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов* // Материалы XVII Международной школы-семинара «Синтез и слжность управляющих систем» имени академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября—1 ноября 2008 г.), Издательство Института математики, Новосибирск, 2008. С. 90-95.

3. Ларионов В. Б. *О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов* // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 5. С. 111–116.

4. Ларионов В. Б. *О надструктуре классов самодвойственных функций в многозначных логиках* // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6—9 апреля 2009 г.), издательский отдел факультета ВМК МГУ, Москва, 2009. С. 197–201.

5. Ларионов В. Б. *О монотонных замкнутых классах функций многозначной логики с бесконечной надструктурой* // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (18—23 мая 2009 г.), М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2009. С. 7–12.

6. Ларионов В. Б. *О положении самодвойственных k-значных функций в решетке замкнутых классов* // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, вып. 6, издательский отдел факультета ВМК МГУ, Москва, 2009. С. 90–105.

7. Ларионов В. Б. *О надструктуре некоторого семейства замкнутых классов монотонных k-значных функций* // Материалы XVIII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября—3 октября 2009 г.), изд-во механико-математического факультета МГУ, Москва, 2009. С. 56–61.

8. Ларионов В. Б. *Критерий конечности надструктуры некоторых классов монотонных k-значных функций, сохраняющих частичный порядок с единственным минимальным элементом* // Материалы X Международного научного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (1—6 февраля 2010 г.), изд-во механико-математического факультета МГУ, Москва, 2010. С. 186–189.

9. Ларионов В. Б. *О надструктуре классов монотонных функций в многозначных логиках* // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, вып. 7, издательский отдел факультета ВМК МГУ, Москва, 2010. С. 42-59.