МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Шеина Елена Анатольевна

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^N$ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ К МОДЕЛЯМ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре автоматизации научных исследований
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент Смирнов Александр Павлович

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук, профессор Амосов Андрей Авенирович

доктор физико-математических наук, доцент Потапов Михаил Михайлович

Ведущая организация — Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН

Защита состоится 27 октября 2010 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМиК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики.

Автореферат разослан 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
профессор Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Последнее время в различных областях физики ведется активное изучение нелинейных волновых процессов. Выявлен ряд нелинейных уравнений, имеющих частное решение в виде уединенной бегущей волны. Под уединенным или локализованным решением понимается классическое решение, стремящееся к нулю на бесконечности.

В 1964 г. N. Zabusky, M. Kruskal ввели понятие солитона – локализованной нелинейной волны, асимптотически восстанавливающей свою форму и скорость при взаимодействии с произвольным локальным возмущением. Это свойство может использоваться для передачи данных на большие расстояния без помех.

В связи с изучением солитонных решений возникает задача о поиске физических моделей, для которых описывающие их уравнения допускают существование решения такого типа. В ряде случаев профиль волны может быть решением квазилинейного эллиптического уравнения, убывающим до нуля на бесконечности. Для простейших уравнений с однородной нелинейностью и постоянными коэффициентами такое решение может быть выписано явно. Например, Буссинеском была получена форма положительного и экспоненциально убывающего на бесконечности одномерного солитона как частного решения уравнения Кортевега – де Фриза, описывающего распространение волн на мелкой воде. В более сложных случаях, в том числе многомерных, утверждение о существовании нетривиального уединенного решения требует математического обоснования.

Необходимо выяснить условия, при которых существует нетривиальное решение уравнения

$$-\Delta u + b(x)u = f(x,u)\,,\ x \in \mathbb{R}^N\,, \tag{0.1}$$

такое, что

$$u \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

(0.2)

Здесь нелинейность f удовлетворяет условию $f(x,0)\equiv 0$, и задача (0.1), (0.2) имеет по крайней мере тривиальное решение. Поэтому многие из известных методов, гарантирующих существование решения, такие как вариации метода сжимающих отображений, для данной ситуации неприменимы. Для поиска нетривиального решения используются два основных вариационных подхода – метод условного экстремума и метод перевала (Mountain Pass Theorem), предложенный A. Ambrosetti и P. Rabinowitz[1] в 1973 г.

Вопрос нетривиальной разрешимости задачи Дирихле для уравнения (0.1) в ограниченной области изучен к настоящему времени достаточно хорошо для нелинейных функций f из определенного класса, что отражено в основополагающей статье С.И. Похожаева[2] 1965 г. и современных монографиях. Однако многие из разработанных методов не переносятся на случай всего пространства $\mathbb{R}^N$. Это связано, в частности, с тем, что оператор вложения Соболева $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)\subset L^q(\mathbb{R}^N)$, $2\le q<q^*$, не является компактным. Здесь q^* – критический показатель Соболева: $q^*=2N/(N-2)$ при $N>2$, $q^*=\infty$ при $N\le 2$. Действительно, рассмотрим последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$: $u_n(x)=u_0(x+\mathbf{e}n)$, где $x\in\mathbb{R}^N$, $\mathbf{e}\in\mathbb{R}^N$, $u_0\in D(\mathbb{R}^N)$. Она не имеет подпоследовательности, сходящейся к нулю в $L^q(\mathbb{R}^N)$, хотя $u_n\to 0$ слабо в $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, и $u_n\to 0$ в $W^{1,2}(B_R)$ для любого $R>0$.

Приемы, применяемые для преодоления отмеченной трудности, накладывают определенные ограничения на функции b и f. Это, например, оценка $0\le f(x,u)\le a(x)u|u|^{q-2}$, $u\ge 0$, с функцией a, стремящейся к нулю при $|x|\to\infty$ либо принадлежащей классу $L^\gamma(\mathbb{R}^N)$, $\gamma=q^*/(q^*-q)$ [3]. P.L. Lions[4] в 1984 г. разработал метод концентрированной компактности. Он основан на сравнении

---

[1] Ambrosetti M., Rabinowitz P.H. J. Funct. Anal. 1973. V. 14. P. 349–381.
[2] Похожаев С.И. Доклады АН СССР. 1965. Т. 165. №1. С. 36–39.
[3] Drabek P., Pohozaev S.I. Proc. Roy. Soc. Edinburg. 1997. V. 127A. P. 703–726.
[4] Lions P.L. Ann. Inst. Poincare. 1984. V.1. Part 1, P. 109-145; Part 2, P. 223-283.

исходной задачи в $\mathbb{R}^N$ с так называемой “задачей на бесконечности”, что требует существования равномерных пределов функций b и f при $|x| \to \infty$.

Указанные условия являются завышенными для ряда задач, таких как задача о вихре в поле зонального потока, где имеется анизотропия. Это приводит к необходимости разработки новых методов исследования вопроса нетривиальной разрешимости соответствующего квазилинейного уравнения.

Среди квазилинейных эллиптических уравнений существуют не имеющие нетривиального уединенного решения при наличии тривиального. Такое решение не существует, например, если в (0.1) коэффициент b является монотонной функцией одной переменной. При этом для любой ограниченной области задача Дирихле для данного уравнения нетривиально разрешима, но при увеличении размера области последовательность решений расходится. Поэтому задачу в $\mathbb{R}^N$ в общем случае нельзя заменить на задачу в сколь угодно большой ограниченной области. При этом важную роль в вопросе существования решения задачи играет поведение коэффициентов уравнения.

Уравнение Эмдена-Фаулера (Emden-Fowler) [5]

$$-\Delta u = |u|^{q-2} u \qquad (0.3)$$

при $N \geq 3$ показывает пример отличия задач в ограниченной и неограниченной областях. Это уравнение при $2 < q < q^*$ имеет положительное и счетное множество знакопеременных решений задачи Дирихле. При $q \geq q^*$ для «звездных» областей нетривиальное решение не существует, что следует из известного тождества Похожаева. Уравнение (0.3) в $\mathbb{R}^N$ с условием (0.2) при $2 < q < q^*$ имеет знакопеременное решение при отсутствии положительного. При $q \geq q^*$ имеется континуальное множество медленно сходящихся к нулю при $|x| \to \infty$ положительных решений.

Таким образом, чтобы определить условия существования уединенных бегущих волн в различных средах, необходимо исследовать вопрос

---

[5] *Veron L.* Singularities of solutions of second order quasilinear equations. Pitman Research Notes. V. 353. Longman, Harlow, 1996.

разрешимости квазилинейного эллиптического уравнения в ограниченной области и пространстве $\mathbb{R}^N$ и свойства его решений, такие как гладкость, положительность, скорость убывания к нулю на бесконечности.

Одной из возникающих в связи с этим задач является проблема существования локализованного решения уравнения с параметром, находящимся в окрестности минимального собственного значения линейной задачи. Начиная с работы S. Alamo, G. Tarantello[6] при значении параметра в сверхкритической области рассматривается случай знакопеременного b, не включающий простейший случай постоянных коэффициентов. В данной работе задача решается при более слабых ограничениях. Это стало возможным благодаря использованию нового вариационного подхода, состоящего в модификации метода перевала.

Цель работы. Первая часть диссертационной работы посвящена разработке методов доказательства существования нетривиальных решений квазилинейных эллиптических уравнений в ограниченной области, удовлетворяющих условию Дирихле, и в пространстве $\mathbb{R}^N$, стремящихся к нулю на бесконечности, при наличии нелинейности нескольких видов. Рассматриваются задачи с параметром в окрестности первого собственного значения, а также при наличии анизотропной зависимости от переменных.

Целью второй части работы является применение полученных результатов к задаче о существовании уединенных бегущих волн в рамках ряда физических моделей, а также численному изучению свойств полученных решений.

Методы исследования. В работе для исследования вопроса существования нетривиальных решений квазилинейных эллиптических уравнений при наличии тривиального используется вариационный подход в форме метода условного экстремума и модификации метода перевала. При доказательстве существования решений в пространстве $\mathbb{R}^1$ применяется метод барьера. Идеи метода концентрированной компактности используются при решении задачи в пространстве $\mathbb{R}^N$. Свойства найденных уединенных бегущих

---

[6]Alama S., Tarantello G. J. Funct. Anal. 1973. V. 14. P. 349–381.

волн исследуются с помощью численного моделирования.

Научная новизна. В работе представлены следующие новые результаты. Доказаны теоремы о существовании нетривиального решения квазилинейного эллиптического уравнения с параметром: в ограниченной области с условием Дирихле и уединенного в пространстве $\mathbb{R}^N$, в доказательстве которых используется специальная модификация вариационного метода перевала; о существовании положительных собственных функций и положительного решения квазилинейного эллиптического уравнения с анизотропными коэффициентами и нелинейностью достаточно общего вида, удовлетворяющей определенным ограничениям, в $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрен ряд физических моделей, в рамках которых с использованием указанных теорем впервые найдены и численно исследованы уединенные бегущие волны. Изучен вопрос о существовании в сферических ферромагнетиках нерадиальных доменных стенок как уединенных стационарных решений уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты и разработанные в диссертации новые методы доказательства могут быть использованы при изучении вопроса существования нетривиальных решений квазилинейных эллиптических уравнений с нелинейностью различных видов в неограниченных областях. С помощью найденных достаточных условий нетривиальной разрешимости указанных уравнений в рамках широкого ряда физических моделей могут быть найдены уединенные бегущие волны, играющие важную роль в переносе вещества и энергии в жидкости, атмосфере планет и плазме.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научно-исследовательских семинарах:

– *конференция по физике плазмы (Берлин, Германия,1991),*
– *конференция по математическому моделированию (Дубна, 2002),*
– *симпозиум по микромагнитному моделированию (Саламанка, Испания, 2002),*
– *конференция по микромагнетизму MMM (Бостон, США, 2004),*
– *конференция, посвящённая 100-летию С.Л. Соболева (Новосибирск, 2008),*
– *семинар кафедры высшей математики Московского энергетического института (рук. д.ф.м.н., чл.-корр. РАН С.И. Похожаев, 1989),*
– *семинар кафедры математической физики факультета ВМиК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (рук. д.ф.м.н., проф. Ф.П. Васильев, 1990),*
– *семинар кафедры общей математики факультета ВМиК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (рук. академик РАН, проф. Е.И. Моисеев, 1991),*
– *семинар кафедры математического моделирования Московского энергетического института (рук. д.ф.м.н., проф. Ю.А. Дубинский, 2010),*
– *семинар кафедры автоматизации научных исследований факультета ВМиК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (рук. чл.-корр. РАН, проф. Д.П. Костомаров, 2010).*

Публикации автора. Основные результаты диссертации изложены в работах [1–16]. Из них [1–8] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения, содержащего 18 рисунков, и списка литературы, включающего 102 наименования. Текст изложен на 134 страницах.

Содержание работы.

Введение посвящено описанию проблемы, относящейся к теме диссертации. В нем обосновывается актуальность задачи, дается обзор работ по методам решения квазилинейных эллиптических уравнений, приводится краткое содержание диссертации.

В **первой главе** проводится изучение вопроса существования нетривиальных решений квазилинейных эллиптических уравнений различных видов. В разделе 1.1 рассматривается вопрос существования нетривиального решения задачи

$$-\Delta u - \lambda b(x)u = a(x)\,|\,u\,|^{q-2}\,u, \quad x \in \Omega, \tag{1.1.1}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.1.1'}$$

Здесь $q, \lambda \in \mathbb{R},\ 2 < q < q^*$, область $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ограничена. Параметр λ лежит в некоторой окрестности первого собственного значения λ_1 линейной задачи

$$-\Delta u = \lambda b(x)u, \quad x \in \Omega, \tag{1.1.2}$$

где b – положительная или знакопеременная функция.

Пусть функции $a, b \in L^\infty(\Omega)$ почти всюду в Ω удовлетворяют следующим условиям:

$$b(x) = b^+(x) + b^-(x), \quad b^+(x) \geq 0, \quad b^+(x) \not\equiv 0, \quad b^-(x) \leq 0, \tag{B}$$

$$a(x) > 0. \tag{A}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1.1. *Пусть* $2 < q < q^*$ *и выполнены условия (A), (B). Тогда задача (1.1.1), (1.1.1') при* $0 < \lambda < \lambda_1$ *имеет положительное решение.*

Теорема 1.1.2. *При* $\lambda \to \lambda_1^-$ *имеет место сходимость* $u_{\lambda,0} \to u_{\lambda_1,0}$.

Теорема 1.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.1. Тогда задача (1.1.1), (1.1.1') при* $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$ *имеет нетривиальное решение.*

Доказательства основаны на специальной модификации метода перевала, дающей возможность избежать использовавшихся в предыдущих работах завышенных требований на знакопеременность коэффициента a.

В этой постановке имеется параметр λ, который находится в окрестности минимального собственного значения. При значении параметра, большем собственного значения λ_1, линейный оператор не является положительно определенным, что влечет трудности при использовании известных подходов.

В докритической области (при $\lambda < \lambda_1$) решение можно искать как функцию, на которой достигается $\inf\{H_\lambda(u), u : A(u) = 1\}$ для функционалов

$$A(u) = \int_\Omega a(x) \mid u \mid^q dx, \quad H_\lambda(u) = \|u\|^2 - \lambda \int_\Omega b(x) u^2 dx.$$

В сверхкритической области (при $\lambda \geq \lambda_1$) такой условный минимум отсутствует, так как за счет наличия собственных функций функционал H_λ неограничен снизу. В этой ситуации предлагается расширить постановку задачи и искать критическую точку при наличии ограничения, связанного с функционалом A.

Решение оказывается условно-седловой точкой. По одному из направлений, касательных к линии уровня функционала A и связанному с собственной функцией, оно реализует локальный максимум, а по ортогональному к нему направлению – локальный минимум. Для доказательства существования нетривиального решения используется специальная модификация метода перевала с условием. Обычно указывается сферический барьер между тривиальной функцией и некоторой функцией с достаточно большой нормой. Если значение параметра λ больше первого собственного значения, применению стандартного подхода препятствует наличие собственной функции. В диссертации в качестве барьера предлагается использовать пересечение линии уровня функционала A с пространством, являющимся ортогональным дополнением к первой собственной функции.

В разделе 1.2 результаты раздела 1.1 обобщаются на случай $\Omega = \mathbb{R}^N$ при условии (0.2). Случай неограниченной области является значительно более трудным, поэтому в ситуации, когда параметр λ лежит в сверхкритической области $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$, пришлось ограничиться уравнением с симметрией.

Пусть $a, b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $b(x) \equiv \overline{b} + \widetilde{b}(x)$, $b^+(x) \equiv \max(b(x), 0)$ почти всюду в $\mathbb{R}^N$ удовлетворяют условиям

$$a(x) > 0 \tag{A_1}$$

$$\overline{b} < 0, \quad \widetilde{b}(x) > 0, \tag{B_1}$$

$$b^+(x) \not\equiv 0. \tag{B_2}$$

Чтобы использовать метод концентрированной компактности Лионса в форме сравнения с «задачей на бесконечности», вводятся условия, определяющие поведение коэффициентов при $|x|\to\infty$. Пусть

$$0=\lim_{|x|\to\infty}\widetilde{b}(x)=\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\widetilde{b}(x), \qquad (B_\infty)$$

и существует число $\overline{a}\ge 0$ такое, что

$$\overline{a}=\lim_{|x|\to\infty}a(x)=\inf_{x\in\mathbb{R}^N}a(x). \qquad (A_\infty)$$

Теорема 1.2.1. *Пусть* $N\ge 3$, $2<q<q^*$ *и выполнены условия* (A_1), (B_1), (B_2), (A_∞), (B_∞). *Тогда задача для уравнения (1.1.1) с* $\Omega=\mathbb{R}^N$ *и условием* (0.2) *при* $0<\lambda<\lambda_1$ *имеет положительное решение из* $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Теорема 1.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1, коэффициенты* a *и* b *уравнения (1.2.1) являются радиальными или четными функциями. Тогда задача (1.1.1), (0.2) с* $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2)$ *имеет нетривиальное решение из* $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Показано, что полученные решения является классическими.

В разделе 1.3 изучается вопрос существования нетривиальных решений $(u,\alpha)\in(W^{1,2}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ уравнения

$$-\Delta u+b(x)u=\alpha\, f(x,u)\,, \qquad (1.3.1)$$

с $f(x,0)\equiv 0$, и его частного случая

$$-\Delta u+b(x)u=\alpha\, a(x)|u|^{q-2}u \qquad (1.3.1')$$

в области $\Omega=\mathbb{R}^N$ с условием (0.2).

В качестве примера рассматривается уравнение с анизотропными коэффициентами $a(x)\equiv a(x_1)$, $b(x)\equiv b(x_1)$.

Доказательство использует вариационный метод условного экстремума. Проблема, связанная с отсутствием компактности вложения Соболева в случае неограниченной области, решается построением компактной минимизирующей последовательности последовательным по каждой из переменных применением процедур срезки, сдвига аргумента и нормировки.

Пусть $f=f(x,t)$ – локально гельдерова функция и при $t\ge 0$ удовлетворяет требованиям:

$$0 \le f(x,t) \le \overline{a}(t + t^{q-1}),\ x \in \mathbb{R}^N; \qquad (F_1)$$

$$0 \le F(x,t) \le \theta f(x,t)t \qquad (F_2)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^N$ с некоторой постоянной $0 < \theta < 1/2$,

$$f(x,t)/t \text{ – возрастает по } t \ge 0 \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^N. \qquad (F_3)$$

Здесь $F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau$. В частном случае функции $f(x,t) \equiv a(x)|t|^{q-2}t$ условия (F_1) – (F_3) выполнены, если функция $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ такая, что почти всюду на $\mathbb{R}^N$

$$\overline{a} \ge a(x) \ge 0. \qquad (A)$$

Пусть функция $b \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$b(x) \ge \underline{b} > 0.$$

(B)

Обозначим $\mathrm{I} = \{i \in N : 1 \le i \le N\}$. Пусть I можно представить в виде суммы множеств I_0, I_1, I_2 таких, что

$$b(x) \to +\infty \text{ при } |x_i| \to +\infty,\ i \in \mathrm{I}_1,$$

$$\alpha(x) \to 0 \text{ при } |x_i| \to +\infty,\ i \in \mathrm{I}_2,$$

для каждой из переменных $i \in \mathrm{I}_0$ существуют равномерные пределы

$$\overline{b}_i(x_1, x_{i-1}, x_{1+1}, x_N) = \lim_{|x_i| \to \infty} b(x) = \sup_{x_i \in \mathbb{R}} b(x) < +\infty, \qquad (B_\infty)$$

$$\underline{f}_i(x_1, x_{i-1}, x_{1+1}, x_N, t) = \lim_{|x_i| \to \infty} f(x,t) = \inf_{x_i \in \mathbb{R}} f(x,t) < +\infty. \qquad (F_\infty)$$

Для $f(x,t) \equiv a(x)|t|^{q-2}t$ условие (F_∞) выполнено, если существует предел

$$\overline{a}_i(x_1, x_{i-1}, x_{1+1}, x_N) = \lim_{|x_i| \to \infty} a(x) = \inf_{x_i \in \mathbb{R}} a(x) < +\infty. \qquad (A_\infty)$$

Теорема 1.3.1. *Пусть $2 < q < q^*$ и выполнены условия (F_1) – (F_3), (F_∞), (B), (B_∞). Тогда существует $\alpha \in \mathbb{R}$, при котором уравнение (1.3.1) имеет положительное решение, удовлетворяющее условию (0.2).*

В разделе 1.4 рассмотрен вопрос существования нетривиальных решений уравнения

$$-\Delta u + b(x)u = f(x,u), \qquad (1.4.1)$$

с $f(x,0)\equiv 0$, и его частного случая с однородной нелинейностью:

$$-\Delta u + b(x)u = a(x)|u|^{q-2}u\,, \tag{1.4.1'}$$

в области $\Omega = \mathbb{R}^N$ с условием (0.2).

Пусть функция f для всех $x \in \mathbb{R}^N$ удовлетворяет требованиям:

$$f(x,t) = o(t)\,, t \to 0\,; \tag{F_4}$$

$$f(x,t)/t \to \infty\,,\ t \to +\infty\,. \tag{F_5}$$

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.3.1 и условия* (F_4),(F_5)*. Тогда задача (1.4.1), (0.2) имеет положительное решение.*

В доказательстве, основанном на вариационном методе перевала (Mountain Pass Theorem), при построении компактной последовательности Пале–Смэйла последовательно по каждой из переменных применяются процедуры срезки, сдвига аргумента и нормировки.

Эта теорема является основой для решения задачи о поиске двумерной уединенной бегущей волны в поле одномерного решения (зонального потока), рассмотренной в главе 3.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1, 2, 6, 7, 13].

Во **второй главе** диссертации изучаются свойства уравнения, описывающего динамику уединенных волн в атмосфере быстровращающихся планет. Рассматривается задача для уравнения, полученного В.И. Петвиашвили[7]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \Delta u) + \frac{\partial}{\partial x_1}(u + \eta u^2) = aJ(u, \Delta u), \tag{2.1}$$

$x \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,\infty)$, $\eta > 0$, $a > 0$, $J(u,\mathrm{w}) = u_{x_1}\mathrm{w}_{x_2} - \mathrm{w}_{x_1}u_{x_2}$. Оно имеет частное решение $u(x_1 - \mathrm{v}t, x_2)$ в виде вихря, бегущего со скоростью v вдоль оси $0\mathrm{x}_1$, профиль u которого является решением двумерного квазилинейного уравнения типа (1.4.1'). В разделе 2.1 получено аналогичное уравнение с учетом неоднородности параметра Кориолиса.

В разделе 2 главы 2 исследуются численные методы решения уравнений

[7] Петвиашвили В.И. Письма в ЖЭТФ. 1980. Т.32. №11. С. 632-635.

(1.4.1) и (1.4.1') в $\mathbb{R}^N$.

В разделе 2.3 с помощью численного моделирования показывается, что указанное уединенное решение является солитоном согласно определению Забуски–Крускала, то есть демонстрирует сохранение формы и скорости после столкновения с другим вихрем.

В разделе 2.4 изучается уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта[8], описывающее динамику намагниченности ферромагнетиков. На его стационарных решениях достигается минимум энергии Гиббса среди векторных функций постоянной длины. С помощью численного моделирования с различными начальными распределениями решалась задача о поиске уединенных решений, называемых доменными стенками, не обладающих аксиальной симметрией. Такие решения были найдены в анизотропной сфере. Для изотропного случая показано, что множества аксиально-симметричных функций достаточно для решения задачи условного минимума, и не существует нерадиальной функции, обладающей меньшим значением энергии.

Результаты второй главы опубликованы в работах [8–12,14–16].

В **третьей главе** решается задача о существовании бегущих уединенных вихрей с профилем, являющимся решением квазилинейного эллиптического уравнения с зависимостью от анизотропного внешнего фактора. Эти исследования опираются на полученные в главе 1 теоремы о существовании нетривиального решения квазилинейного уравнения (1.4.1) в $\mathbb{R}^N$ с переменным коэффициентом b и правой частью f достаточно общего вида, удовлетворяющей определенным условиям монотонности, убывания и роста в нуле и на бесконечности соответственно.

В разделе 1 главы 3 рассматривается уравнение

$$\Delta u = f_2(z(x_2)+u(x)) - f_2(z(x_2)),\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

с функцией $z = z(x_2)$, являющейся решением уравнения

$$-z''(x_2) = f_1(z,x_2)\,,\ x_2\in\mathbb{R}^1. \tag{3.2}$$

[8] Aharoni *A*. Introduction to the Theory of Ferromagnetism. Oxford, 2000.

Дифференцируемые функции f_1, f_2 связаны определенным соотношением и удовлетворяют набору требований. Это позволяет методом барьера показать существование решения уравнения (3.2) в $\mathbb{R}^1$, обладающего заданной асимптотикой на бесконечности, что дает возможность применить теорему 1.4.1 о существовании нетривиального уединенного решения к уравнению (3.1). По изложенной схеме решены следующие задачи.

В разделах 3.2 и 3.3 показано, что уравнение Чарни

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \Delta u) + \frac{\partial}{\partial x_1}u = J(u, \Delta u),\ x \in \mathbb{R}^2,\ t \in [0, \infty),$$

имеет классическое решение в виде уединенной бегущей волны, если искать его на фоне зонального потока, то есть ветра, имеющего скорость, направленную вдоль широты. Получены условия существования вихря в форме дипольной пары «циклон-антициклон», по гладкости превышающее решение аналогичного вида, найденное В.Д. Ларичевым и Г.М. Резником[9]. Также найден вихрь с положительным бесконечно гладким профилем, параметры которого зависят от поведения зонального потока.

В разделе 3.4 показано существование бегущей уединенной дрейфовой волны при наличии неоднородного электрического поля в замагниченной плазме. Она имеет положительный бесконечно гладкий профиль u, удовлетворяющий условию (0.2) и уравнению (3.1), а для электрического потенциала ψ функция $z(x_2) = \psi(x_2) + \mathrm{v}x_2$ является решением уравнения (3.2). Тогда $\psi(x_2) + u(x_1 - \mathrm{v}t, x_2)$ есть решение уравнения (2.1).

В разделах 1–3 главы 3 профили вихрей и фонового одномерного решения, существование которых показано, находятся численно.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [3–5] .

[9] Ларичев В.Д., Резник Г.М. Доклады АН СССР. 1976. Т. 231. №5. С. 1077–1079.

В **заключении** формулируются основные результаты диссертационной работы.

– Доказаны теоремы:

о существовании нетривиального уединенного решения квазилинейного эллиптического уравнения с параметром в ограниченной области и в пространстве $\mathbb{R}^N$, в доказательстве которых используется специальная модификация вариационного метода перевала;

о существовании положительных собственных функций и положительного решения квазилинейного эллиптического уравнения с анизотропными коэффициентами и нелинейностью достаточно общего вида, удовлетворяющей определенным условиям, в $\mathbb{R}^N$.

– С использованием полученных теорем найдены условия существования уединенных бегущих волн в виде:

вихря типа диполя и вихря с положительным профилем в атмосфере быстровращающейся планеты на фоне зонального потока;

волны с положительным профилем в замагниченной плазме при наличии неоднородного электрического поля.

– Проведено численное моделирование динамики волн для изучения вопроса устойчивости вихрей и процесса их взаимодействия.

– С помощью численного решения уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта в сферических координатах изучен вопрос о существовании нерадиальных микромагнитных конфигураций.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доценту АП. Смирнову за постановку задач и всестороннюю поддержку.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Шеина Е.А.* О положительном решении квазилинейного эллиптического уравнения в $\mathbb{R}^N$ // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 6. С. 1063–1070.

2. *Шеина Е.А*. О собственных функциях квазилинейного эллиптического оператора в $\mathbb{R}^N$ // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1436–1442.

3. *Смирнов А.П., Шеина Е.А*. О существовании уединенных вихрей в зональном потоке // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 7. С. 1265–1271.

4. *Смирнов А.П., Шеина Е.А*. О положительном бесконечно гладком вихре в зональном потоке // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. №12. С. 116–121.

5. *Смирнов А.П., Шеина Е.А.* О существовании уединенного бегущего вихря в замагниченной плазме при наличии неоднородного электрического поля. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 7. С. 1268 –1270.

6. *Шеина Е.А.* Метод перевала в задаче о нетривиальном решении квазилинейного уравнения с параметром // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 1. С. 114–123.

7. *Шеина Е.А.* Метод перевала в задаче о нетривиальном решении квазилинейного уравнения с параметром в $\mathbb{R}^N$ // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 3. С. 305–317.

8. *Шеина Е.А., Терновский В.В., Хапаев М.М.* О возможности использования ферромагнитной сферы в запоминающих устройствах. Доклады РАН. 2005. Т. 403. №4. С. 465–470.

9. *Шеина Е.А.* Численное моделирование поведения двумерных вихрей в зональном потоке // Актуальные вопросы прикладной математики. М., Изд-во МГУ. 1989. С. 236–240.

10. *Шеина Е.А.* Численное исследование устойчивости дрейфовых волн // Методы математического моделирования и вычислительной диагностики. М., Изд-во МГУ. 1990. С. 265–269.

11. *Смирнов А.П., Шеина Е.А.* Локальные и глобальные решения уравнений

мелкой воды // Прямые и обратные задачи математической физики. М., Изд-во МГУ. 1991. С. 218–222.

12. *Sheina E.A., Smirnov A.P. //* 18 Conference on Control Fusion and Plasma Physics. Berlin. 1991. V. 4. F–27. P. 109–112.

13. *Sheina E. A. //* Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвящённая 100-летию С.Л. Соболева. Новосибирск. 2008.

14. *Sheina E.A., Ternovsky V.V., Khapaev M.M.* Numerical Modelling of Magnetization Processes in Small Ferromagnetic Sphere. V International Congress on Mathematical Modelling // Dubna. 2002. V. 1. P. 215.

15. *Sheina E.A., Ternovsky V.V., Khapaev M.M.* Numer. Modelling of Magnetization Processes in Small Ferromagnetic Sphere // 4th Intern. Symposium On Hysteresis and Micromagnetic Modelling. Salamanca, Spain. 2003.

16. *Sheina E.A., Ternovsky V.V., Lukyanchuk B.* Micromagnetic Equations for Nanomagnets // 49th Annual MMM Conference. 2004.