Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
факультет Вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Смирнов Илья Николаевич

Управление процессом, описываемым телеграфным уравнением

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена *на кафедре общей математики Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, Ильин Владимир Александрович*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук, профессор, Васильев Федор Павлович*
	доктор физико-математических наук, профессор, Гольдман Михаил Львович
Ведущая организация:	*Институт Системного Анализа РАН*

Защита состоится «____» ____________ 2011 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д.501.001.43* при *Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова*, расположенном по адресу: *119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор *Е.В. ЗАХАРОВ*

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Одномерное телеграфное уравнение является математической моделью большого числа физических процессов, имеющих важное практическое значение. Телеграфное уравнение описывает давление нефти или газа в трубопроводе, характеризует динамику силы тока при распространении электромагнитных волн в длинных линиях, свободные колебания геологической среды (пластовые давления и смещения).

Исследованию решений задач управления распределенными системами и их оптимизации посвящены работы многих математиков. Основной целью исследований является изучение условий, при которых процесс колебаний распределенной системы под воздействием некоторого граничного локального или нелокального управления может быть переведен из одного состояния, заданного начальными смещениями и скоростями системы, в наперед заданное финальное.
В математическом плане такие задачи граничного управления формируются в терминах краевых задач для уравнения, описывающего процесс колебаний. Во многих работах доказывается существование промежутка времени, который, следуя литературе, мы будем называть критическим (T_k),например, для уравнений колебаний струны было показано, что если промежуток времени, за который проводится управление, не превосходит T_k, то задача граничного управления не имеет решения для произвольных начальных и финальных условий. При промежутках, строго больших T_k, существует бесконечно много решений задачи граничного управления при любых начальных и финальных условиях.

Одним из первых задачу об управлении колебаниями в форме смешанных задач для волнового уравнения рассмотрел в цикле своих работ Ж.Л.Лионс (1988г.). В его работах изучалась задача успокоения с граничными условиями типа смещения. Им же в работе[1] была доказана неединственность решения полученной задачи при $T_k > C * 2l$.

В работе E. Zuazua[2] гильбертов метод единственности был обобщен на случай квазилинейного волнового уравнения с асимптотически линейной нелинейностью. Частным случаем этой задачи является задача граничного управления для телеграфного уравнения. Таким образом, метод Лионса оказался достаточно удобным инструментом для доказательства существования решения задачи о граничном управлении процессом колебаний.

В работе А.Г. Бутковского[3] задача граничного управления была исследована с помощью метода Фурье и метода моментов, который был применен для построения искомого граничного управления в виде ряда Фурье, а в работе А.И. Егорова[4] для конструктивного решения задачи был использован метод падающих и отраженных волн.

В статье Ф.П. Васильева[5] была предложена трактовка основ теории двойственности в линейных задачах управления и наблюдения. Конструктивному решению задачи о граничном управлении процессом колебаний посвящены также его совместные с учениками работы[6], в которых построены эффективные

---

[1] J.L.Lions,Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems // SIAM Review, Vol. 30, No. 1. (Mar., 1988), pp. 1-68.

[2] Zuazua E. Exact Controllability for the Semilinear Wave Equation.// J. Math. pures et appl., 69, 1990, pp. 1-31

[3] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., 1985.

[4] Егоров А.И. Управление упругими колебаниями. // ДАН УССР, серия физ-мат. и техн. наук. 1986. №5 с. 60-63

[5] Васильев Ф. П., О двойственности в линейных задчах управления и наблюдения// Дифференц. уравнения. 1995. Т 31, № 11. С. 1893 - 1900

[6] Васильев Ф. П., Куржанский М.А., Потапов М.М. Метод прямых в задчах граничного управления и наблюдения для уравнений колебаний струны.// Вестник МГУ, сер.15, вычисл. матем. и киберн. 1993. №3. С. 8 - 15

Васильев Ф. П., Куржанский М.А., Разгулин А.В. О методе Фурье для решения одной задачи управления колебанием струны. // Вестник МГУ, сер.15, вычисл. матем. и киберн. 1993. №2. С. 3 - 8

численные алгоритмы нахождения искомого граничного управления. Первая работа основана на
использовании конечномерной аппроксимации задачи граничного управления в виде ряда Фурье, а вторая, — использует метод Фурье. Отметим, однако, что обе эти работы существенно опираются на развитый Лионсом гильбертов метод единственности.

В работе В.А. Ильина и Е.И. Моисеева[7] для процесса колебаний, описываемых телеграфным уравнением, в случае однородной системы, был получен явный аналитический вид решений задачи об управлении смещением на одном конце при закрепленном другом для критического промежутка времени $T_k = 2l$.

Затем, в работе В.А. Ильина и Е.И. Моисеева[8] для процесса колебаний, описываемых телеграфным уравнением, в случае однородной системы, был получен явный аналитический вид решений задачи об управлении смещением на обоих концах для критического промежутка времени $T_k = l$.

В работах В.А. Ильина 2009 года для системы, состоящей из двух разнородных участков, т.е. участков разной плотности и разной упругости, разработана теория управления процессом колебаний, описываемых волновым уравнением. В своих работах[9] В.А. Ильин вывел формулы типа Даламбера для бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости в случаях продольных и поперечных колебаний, а в последующих работах[10] для системы,

---

[7] Ильин. В.А. Моисеев Е.И. О Граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением. // Доклады Академии Наук. 2002. Т.387, № 5. С.600-603.

[8] Ильин. В.А. Моисеев Е.И. О Граничном управлении на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением. // Доклады Академии Наук. 2004. Т.394, № 2. Стр.154-158.

[9] Ильин В.А. Формула типа Даламбера для продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости. //Доклады РАН. 2009. Том 427. № 4. Стр.466-468.

Ильин В.А. Формула типа Даламбера для поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности. //Доклады РАН. 2009. Том 427. № 5. Стр.609-611.

[10] Ильин В.А., Луференко П.В.. Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня,

состоящей из двух разнородных участков, были получены формулы для решения смешанных начально-краевых задач а также аналитический вид оптимальных граничных управлений (т.е. доставляющих минимум интегралу граничной энергии) для большого промежутка времени $T > T_k$.

Цель диссертационной работы

В диссертационной работе построена теория управления процессом колебаний, описываемых телеграфным уравнением Клейна-Гордона-Фока, в случае системы, состоящей из двух участков разной плотности и упругости. Цель работы — получить явный аналитический вид решений для всех рассматриваемых задач.

Научная новизна

В диссертации впервые получены следующие основные результаты:

1. Получены формулы типа Даламбера для бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости, колебания которого описываются телеграфным уравнением Клейна-Гордона-Фока. Рассмотрены случаи продольных и поперечных колебаний такой системы.

2. Решены 7 смешанных начально-краевых задач в случае граничного управления упругой силой и смещением для процесса, описываемого уравнением Клейна-Гордона-Фока, в терминах обобщенного решения телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0$$

состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. // Доклады Академии Наук. 2009. Т.428, № 1. С.12-15.

Ильин В.А., Луференко П.В. Обобщенные решения смешанных задач, для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов. // Доклады Академии Наук. 2009. Т.429, № 3. С.317-321.

Ильин В.А., П.В. Луференко П.В. Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы. // Доклады Академии Наук. 2009. Т.429, № 4. С.455-458.

Ильин В.А. О продольных колебаниях стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, в случае совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков. // Доклады Академии Наук. 2009. Т.429, № 6. С.742-745.

с конечной энергией для любого промежутка времени T. Для любого промежутка времени T получен явный аналитический вид решения $u(x,t)$.

3. Получены актуальные для проведения оптимизации граничных управлений выражения через функции, входящие в граничные условия первого и второго родов, решений семи смешанных задач, которые описывают продольные колебания системы, задаваемые телеграфным уравнением, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. На левом конце рассматривается управление силой или смещением, при условии, что правый конец либо закреплен, либо свободен, либо управляется силой или смещением.

4. Решена задача о граничном управлении на двух концах смещением процессом колебаний, описываемым уравнением Клейна-Гордона-Фока, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы.

Практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Учитывая, что телеграфным уравнением описывается давление нефти или газа в трубопроводе, сила тока при распространении электромагнитных волн в длинных линиях, явный аналитический вид решений, полученных в диссертации, может быть использован для моделирования указанных выше процессов, с целью существенного сокращения объемов вычислений.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Формулы типа Даламбера для бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости, колебания которого описываются телеграфным уравнением Клейна-Гордона-Фока. Рассмотрены случаи продольных и поперечных колебаний такой системы.

2. В терминах обобщенного решения телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0$$

с конечной энергией для любого промежутка времени T решены 7 задач граничного управления упругой силой и смещением для процесса, описываемого уравнением Клейна-Гордона-Фока. Для любого промежутка времени T получен явный аналитический вид решения $u(x,t)$.

3. Получены актуальные для проведения оптимизации граничных управлений выражения через функции, входящие в граничные условия первого и второго родов, решений семи смешанных задач, которые описывают продольные колебания системы, задаваемые телеграфным уравнением, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. На левом конце рассматривается управление силой или смещением, при условии, что правый конец либо закреплен, либо свободен, либо управляется силой или смещением.

4. Решена задача о граничном управлении на двух концах смещением процессом колебаний, описываемым уравнением Клейна-Гордона-Фока, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Молодежном симпозиуме с международным участием "Теория управления: новые методы и приложения Переславль, сентябрь 2009 г.;
- конференции Ломоносов-2010 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова,Москва, июль 2010 г.;
- конференции Тихонов-2010 в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова,Москва, октябрь 2010 г.;

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах, из них 3 работы - в ведущих математических журналах (Доклады РАН, Дифференциальные уравнения) и 1 работа — тезисы докладов. Список основных публикаций помещен в конце автореферата.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из 4 глав. Главы разбиты на разделы. Нумерация утверждений, теорем, лемм, замечаний, примеров и формул - сквозная по каждой главе. В конце приведена библиография из 25 наименований. Общий объем диссертации 76 страниц.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе устанавливаются формулы типа Даламбера для поперечных и продольных колебаний, описываемых телеграфным уравнением, для бесконечного стержня, состоящего из двух участков:
участка $x \leqslant 0$, имеющего линейную плотность $\rho_1 = const$,
и участка $x \geqslant 0$, имеющего линейную плотность $\rho_2 = \ const$.

В случае поперечных колебаний, математически задача сводится к отысканию при $a_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}}$ и $a_2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$, где T — натяжение, являющееся постоянным вдоль всего бесконечного стержня, решения $u(x,t)$ задачи Коши для разрывного телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x,t) = \begin{cases} a_1^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) & \text{в квадранте} \quad \{x \leqslant 0, t \geqslant 0\}, \\ a_2^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) & \text{в квадранте} \quad \{x \geqslant 0, t \geqslant 0\}, \end{cases} \tag{1}$$

принадлежащего классу $W^2_{2,loc}$ в каждом из квадрантов $\{x \leqslant 0, t \geqslant 0\}$, $\{x \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ и удовлетворяющего при всех $t \geqslant 0$ условиям сопряжения

$$u(0-0,t) = u(0+0,t), \qquad u_x(0-0,t) = u_x(0+0,t) \tag{2}$$

и при всех x начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

При этом функция $\varphi(x)$ предполагается принадлежащей классу $W^2_{2,loc}$ на каждой из полупрямых $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$ и удовлетворяющей условиям сопряжения

$$\varphi(0-0) = \varphi(0+0), \qquad \varphi'(0-0) = \varphi'(0+0), \tag{4}$$

а функция $\psi(x)$ предполагается принадлежащей классу $W^1_{2,loc}$ на каждой из полупрямых $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$ и удовлетворяющей условию сопряжения

$$\psi(0-0) = \psi(0+0). \tag{5}$$

В случае продольных колебаний, математически задача сводится к отысканию при $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$ и $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$, где $k_1 = const$ — модуль Юнга участка $x \leqslant 0$, $k_2 = const$ — модуль Юнга участка $x \geqslant 0$, решения $u(x,t)$ задачи Коши для разрывного телеграфного уравнения, того же, что и в случае поперечных колебаний:

$$u_{tt}(x,t) = \begin{cases} a_1^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) & \text{в квадранте} \quad \{x \leqslant 0, t \geqslant 0\}, \\ a_2^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) & \text{в квадранте} \quad \{x \geqslant 0, t \geqslant 0\}, \end{cases} \tag{1^1}$$

принадлежащего классу $W^2_{2,loc}$ в каждом из квадрантов $\{x \leqslant 0, t \geqslant 0\}$, $\{x \geqslant 0, t \geqslant 0\}$, однако удовлетворяющего при всех $t \geqslant 0$ условиям сопряжения

$$u(0-0,t) = u(0+0,t), \qquad k_1 u_x(0-0,t) = k_2 u_x(0+0,t) \tag{2^1}$$

и при всех x начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{3^1}$$

При этом функция $\varphi(x)$ предполагается принадлежащей классу $W^2_{2,loc}$ на каждой из полупрямых $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$ и удовлетворяющей условиям сопряжения

$$\varphi(0-0) = \varphi(0+0), \qquad k_1\varphi'(0-0) = k_2\varphi'(0+0), \tag{4^1}$$

а функция $\psi(x)$ предполагается принадлежащей классу $W^1_{2,loc}$ на каждой из полупрямых $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 0$ и удовлетворяющей условию сопряжения

$$\psi(0-0) = \psi(0+0). \tag{5^1}$$

Результаты первой главы опубликованы в работе [1].

Во второй главе

в терминах обобщенного решения телеграфного уравнения

$$\mathcal{L}u(x,t) = u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2u(x,t) = 0$$

с конечной энергией для любого промежутка времени T рассмотрены 7 задач граничного управления упругой силой и смещением для процесса, описываемого уравнением Клейна-Гордона-Фока. Для любого промежутка времени T получен явный вид решения $u(x,t)$.

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ состояние изучаемого процесса имеет вид $\{u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)\}$, где $\varphi(x) \equiv 0$ на сегменте $[0,l]$, а $\psi(x)$ является нулевым элементом пространства $L_2[0,l]$.

Решение задачи в случае управления упругой силой на одном конце при закрепленном другом

Обозначим символом Q_T прямоугольник $Q_T = [0 \leqslant x \leq l] \times [0 \leqslant t \leq T]$. Будем искать решение в классе функций $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, введенном в работе В. А. Ильина[11].

Определение 2.1. *Будем говорить, что функция двух переменных $u(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если функция $u(x,t)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\bar{Q}_T$ и имеет в нем обе обобщенные частные производные u_x и u_t, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2([0 \leqslant x \leqslant l])$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2([0 \leqslant t \leqslant T])$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.*

Для любого $T > 0$ рассмотрим следующую задачу I:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0 \text{ в } Q_T, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

$$u_t(x,0) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{8}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$u(l,t) = 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

где $\mu(t) \in L_2[0,T]$.

Определение 2.2. *Решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\mathcal{L}\Phi(x,t)]dxdt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt = 0 \tag{11}$$

[11] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией.// Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36, № 11 С. 1513-1528

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса $C^2(\bar{Q}_T)$, подчиненной условиям $\Phi(x,T)\equiv 0$, $\Phi_t(x,T)\equiv 0$ при $0\leqslant x\leqslant l$, $\Phi(l,t)\equiv 0$, $\Phi_x(0,t)\equiv 0$ при $0\leqslant t\leqslant T$.

Теорема 2.1. *Для любого T, удовлетворяющего неравенству $T\leqslant 4l(n+1)$, где n=1,2,3..., единственное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I определяется равенством*

$$u(x,t)=-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\mu}(\tau)J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau-$$

$$-\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\mu}(\tau)J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau, \qquad (12)$$

где $\underline{\mu}(t)=0$ при $t\leqslant 0$.

Решение задачи в случае управления упругой силой на одном конце при свободном другом

Для любого $T>0$ рассмотрим следующую задачу II:

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)+c^2u(x,t)=0 \text{ в } Q_T, \qquad (13)$$

$$u(x,0)=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \qquad (14)$$

$$u_t(x,0)=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \qquad (15)$$

$$u_x(0,t)=\mu(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (16)$$

$$u_x(l,t)=0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T, \qquad (17)$$

где $\mu(t)\in L_2[0,T]$.

Определение 2.3. *Решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи II назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T u(x,t)[\mathcal{L}\Phi(x,t)]dxdt+\int\limits_0^T\mu(t)\Phi(0,t)dt=0 \qquad (18)$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ *из класса* $C^2(\bar{Q}_T)$*, подчиненной условиям* $\Phi(x,T) \equiv 0$*,* $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant l$*,* $\Phi_x(l,t) \equiv 0$*,* $\Phi_x(0,t) \equiv 0$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$*.*

Теорема 2.2. *Для любого* T*, удовлетворяющего неравенству* $T \leqslant 2l(n+1)$*, где n=1,2,3..., единственное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* II *определяется равенством*

$$u(x,t) = -\sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t-x-2kl} \underline{\mu}(\tau) J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})d\tau -$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{t+x-2kl} \underline{\mu}(\tau) J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2 - x^2})d\tau, \tag{19}$$

где $\underline{\mu}(t) \equiv 0$ *при* $t \leqslant 0$*.*

Решение задачи в случае, управления упругими силами на обоих концах Для любого $T > 0$ рассмотрим следующую задачу III:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0 \text{ в } Q_T, \tag{20}$$

$$u(x,0) \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{21}$$

$$u_t(x,0) \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{22}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{23}$$

$$u_x(l,t) = \nu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{24}$$

где $\mu(t), \nu(t) \in L_2[0,T]$.

Определение 2.4. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* III *назовем функцию* $u(x,t)$ *из этого класса, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int\limits_0^l \int\limits_0^T u(x,t)[\mathcal{L}\Phi(x,t)]dxdt + \int\limits_0^T \mu(t)\Phi(0,t)dt - \int\limits_0^T \nu(t)\Phi(0,t)dt = 0 \tag{25}$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса $C^2(\bar{Q}_T)$, подчиненной условиям $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $\Phi_x(l,t) \equiv 0$, $\Phi_x(0,t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 2.3. *Для любого T, удовлетворяющего неравенству $T \leqslant 2l(n+1)$, где n=1,2,3..., единственное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W_2^1}(Q_T)$ смешанной задачи III определяется равенством*

$$u(x,t) = -\sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t-x-2kl} \underline{\mu}(\tau) J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau -$$
$$-\sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{t+x-2kl} \underline{\mu}(\tau) J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau +$$
$$+\sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{t+x-2kl-l} \underline{\nu}(\tau) J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau +$$
$$+\sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{t-x-2kl+l} \underline{\nu}(\tau) J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau, \qquad (26)$$

где $\underline{\mu}(t) = 0$, $\underline{\nu}(t) = 0$ при $t \leqslant 0$.

Решение задачи в случае управления смещением на одном конце при закрепленном другом

Для любого $T > 0$ рассмотрим следующую задачу IV:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t) = 0 \text{ в } Q_T, \qquad (27)$$

$$u(x,0) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (28)$$

$$u_t(x,0) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (29)$$

$$u(0,t) = \mu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (30)$$

$$u(l,t) = 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (31)$$

где $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$.

Определение 2.5. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* IV *назовем функцию* $u(x,t)$ *из этого класса, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T u(x,t)[\mathcal{L}\Phi(x,t)]dxdt - \int\limits_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt = 0 \tag{32}$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ *из класса* $C^2(\bar{Q}_T)$*, подчиненной условиям* $\Phi(x,T)\equiv 0$, $\Phi_t(x,T)\equiv 0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$, $\Phi(l,t)\equiv 0$, $\Phi(0,t)\equiv 0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$.

Теорема 2.4. *Для любого* T*, удовлетворяющего неравенству* $T\leqslant 2l(n+1)$*, где n=1,2,3..., единственное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* IV *определяется равенством*

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n}\Big\{\underline{\mu}(t-x-2kl) - cx\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}}d\tau\Big\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1}\Big\{\underline{\mu}(t+x-2kl) - cx\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}}d\tau\Big\}, \tag{33}$$

где $\underline{\mu}(t) = 0$ *при* $t\leqslant 0$.

Решение задачи в случае управления смещением на одном конце при свободном другом

Для любого $T>0$ рассмотрим следующую задачу V:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2u(x,t) = 0 \text{ в } Q_T, \tag{34}$$

$$u(x,0) = 0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \tag{35}$$

$$u_t(x,0) = 0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \tag{36}$$

$$u(0,t) = \mu(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T, \tag{37}$$

$$u_x(l,t) = 0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T, \tag{38}$$

где $\mu(t)\in W_2^1[0,T]$.

Определение 2.6. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* V *назовем функцию* $u(x,t)$ *из этого класса, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T u(x,t)[\mathcal{L}\Phi(x,t)]dxdt - \int\limits_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt = 0 \qquad (39)$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ *из класса* $C^2(\bar{Q}_T)$, *подчиненной условиям* $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant l$, $\Phi_x(l,t) \equiv 0$, $\Phi(0,t) \equiv 0$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 2.5. *Для любого* T, *удовлетворяющего неравенству* $T \leqslant 4l(n+1)$, *где n=1,2,3..., единственное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* V *определяется равенством*

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\Big\{\underline{\mu}(t-x-2kl) - cx\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}}d\tau\Big\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\Big\{\underline{\mu}(t+x-2kl) - cx\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}}d\tau\Big\}, \qquad (40)$$

где $\underline{\mu}(t) = 0$ *при* $t \leqslant 0$.

Решение задачи в случае управления смещением на двух концах

Для любого $T > 0$ рассмотрим следующую задачу VI:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2u(x,t) = 0 \text{ в } Q_T, \qquad (41)$$

$$u(x,0) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (42)$$

$$u_t(x,0) = 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (43)$$

$$u(0,t) = \mu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (44)$$

$$u(l,t) = \nu(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (45)$$

где $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$.

Определение 2.7. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* V *назовем функцию* $u(x,t)$ *из этого класса, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int_0^l\int_0^T u(x,t)[\mathcal{L}\Phi(x,t)]dxdt - \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt + \int_0^T \nu(t)\Phi_x(l,t)dt = 0 \qquad (46)$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ *из класса* $C^2(\bar{Q}_T)$*, подчиненной условиям* $\Phi(x,T) \equiv 0, \Phi_t(x,T) \equiv 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant l$*,* $\Phi(0,t) \equiv 0$*,* $\Phi(l,t) \equiv 0$ *при* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 2.6. *Для любого* T*, удовлетворяющего неравенству* $T \leqslant 2l(n+1)$*, где n=1,2,3..., единственное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* V *определяется равенством*

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n}\Big\{\underline{\mu}(t-x-2kl) - cx\int_0^{t-x-2kl}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}}d\tau\Big\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1}\Big\{\underline{\mu}(t+x-2kl) - cx\int_0^{t+x-2kl}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}}d\tau\Big\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\Big\{\underline{\mu}(t+x-2kl-l) - c(l-x)\int_0^{t+x-2kl-l}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2}}d\tau\Big\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1}\Big\{\underline{\mu}(t-x-2kl+l) - c(l-x)\int_0^{t-x-2kl+l}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2}}d\tau\Big\}, \qquad (47)$$

где $\underline{\mu}(t) = 0$ *при* $t \leqslant 0$.

Решение задачи в случае управления смещением на одном конце и упругой силой на другом

Для любого $T > 0$ рассмотрим следующую задачу VII:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + c^2u(x,t) = 0 \text{ в } Q_T, \qquad (48)$$

$$u(x,0)=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \tag{49}$$

$$u_t(x,0)=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \tag{50}$$

$$u_x(0,t)=\mu(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T, \tag{51}$$

$$u(l,t)=\nu(t) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant T, \tag{52}$$

где $\mu(t)\in W_2^1[0,T]$.

Определение 2.8. *Решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи VI назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству*

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T u(x,t)[\mathcal{L}\Phi(x,t)]dxdt+\int\limits_0^T\mu(t)\Phi(0,t)dt+\int\limits_0^T\nu(t)\Phi_x(l,t)dt=0 \tag{53}$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса $C^2(\bar{Q}_T)$, подчиненной условиям $\Phi(x,T)\equiv 0$, $\Phi_t(x,T)\equiv 0$ при $0\leqslant x\leqslant l$, $\Phi_x(0,t)\equiv 0$,$\Phi(l,t)\equiv 0$ при $0\leqslant t\leqslant T$.

Теорема 2.7. *Для любого T, удовлетворяющего неравенству $T\leqslant 4l(n+1)$, где n=1,2,3..., единственное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи VII определяется равенством*

$$u(x,t)=-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\mu}(\tau)J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau-$$

$$-\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\mu}(\tau)J_0(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})d\tau-$$

$$-\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\Big\{\underline{\mu}(t-x-2kl+l)-c(l-x)\int\limits_0^{t-x-2kl+l}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2}}d\tau\Big\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\Big\{\underline{\mu}(t+x-2kl-l)-c(l-x)\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\mu}(\tau)\frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-(l-x)^2}}d\tau\Big\}, \tag{54}$$

где $\underline{\mu}(t)=0$ при $t\leqslant 0$.

Далее получены актуальные для проведения оптимизации граничных управлений выражения через функции, входящие в граничные условия первого и второго родов, решений семи смешанных задач, которые описывают задаваемые телеграфным уравнением, продольные колебания
стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. Рассматривается управление силой или смещением на обоих концах.

Пусть расположенный на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ первоначально покоящийся стержень имеет на участке $0 \leqslant x \leqslant \overset{\circ}{x}$ линейную плотность $\rho_1 = const$ и модуль Юнга $k_1 = const$, а на участке $\overset{\circ}{x} \leqslant x \leqslant l$ линейную плотность $\rho_2 = const$ и модуль Юнга $k_2 = const$, но при этом импедансы указанных двух участков равны друг другу. Изучение колебаний такого стержня, происходящих под воздействием тех или иных граничных условий на его концах, сводится к отысканию при $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$ и $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$ решения $u(x,t)$ смешанной задачи для разрывного телеграфного уравнения

$$u_{tt} = \begin{cases} a_1^2 u_{xx}\,(x,t) - c^2 u(x,t) & \text{в прямоугольнике } Q_1 = [0 \leqslant x \leqslant \overset{\circ}{x}] \times [0 \leqslant t \leqslant T], \\ a_2^2 u_{xx}\,(x,t) - c^2 u(x,t) & \text{в прямоугольнике } Q_2 = [\overset{\circ}{x} \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T], \end{cases} \tag{55}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u\,(x,0) = 0, \quad u_t\,(x,0) = 0, \tag{56}$$

с условиями сопряжения в точке $\overset{\circ}{x}$ стыка участков

$$u\left(\overset{\circ}{x} - 0, t\right) = u\left(\overset{\circ}{x} + 0, t\right), \tag{57}$$

$$k_1 u_x\left(\overset{\circ}{x} - 0, t\right) = k_2 u_x\left(\overset{\circ}{x} + 0, t\right) \tag{58}$$

и одной из следующих семи пар граничных условий:

$$u\,(0,t) = \mu(t), \quad u\,(l,t) = 0, \tag{59}$$

(смещение на одном конце при закрепленном втором конце),

$$u\,(0,t)=\mu(t), \quad u_x\,(l,t)=0, \tag{60}$$

(смещение на одном конце при свободном втором конце),

$$u_x\,(0,t)=\mu(t), \quad u\,(l,t)=0, \tag{61}$$

(упругая сила на одном конце при закрепленном втором конце),

$$u_x\,(0,t)=\mu(t), \quad u_x\,(l,t)=0, \tag{62}$$

(упругая сила на одном конце при свободном втором конце).

$$u\,(0,t)=\mu(t), \quad u\,(l,t)=\nu(t), \tag{63}$$

(смещение на двух концах),

$$u_x\,(0,t)=\mu(t), \quad u_x\,(l,t)=\nu(t), \tag{64}$$

(упругая сила на двух концах),

$$u_x\,(0,t)=\mu(t), \quad u\,(l,t)=\nu(t), \tag{65}$$

(упругая сила на одном конце и смещение втором конце).

Результаты второй главы опубликованы в работах [2], [3].

В третьей главе в терминах, обеспечивающих существование конечной энергии обобщенных решений, изучаются смешанные задачи для разрывного телеграфного уравнения, описывающего продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные линейные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы.

Получены выражения для обобщенных решений всех рассматриваемых четырех смешанных задач через установленные ранее во второй главе обобщенные решения соответствующих смешанных задач для простейшего телеграфного уравнения $\widehat{u}_{tt}(x,t) - \widehat{u}_{xx}(x,t) + c^2\widehat{u}(x,t) = 0$.

Если расположенный вдоль отрезка $[0 \le x \le l]$ стержень имеет на участке $0 \le x \le \mathring{x}$, где $0 < \mathring{x} < l$, линейную плотность $\rho_1 = const$ и модуль Юнга $k_1 = const$, а на участке $\mathring{x} \le x \le l$ – линейную плотность $\rho_2 = const$ и модуль Юнга $k_2 = const$, причем импедансы этих участков $\sqrt{\rho_1 k_1}$ и $\sqrt{\rho_2 k_2}$ равны друг другу, то математическая задача сводится к отысканию при $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$ и $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$ обобщенного решения разрывного телеграфного уравнения

$$u_{tt}(x,t) = \begin{cases} a_1^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t), & \text{в прямоугольнике } Q_1 = [0 \le x \le \mathring{x}] \times [0 \le t \le T], \\ a_2^2 u_{xx}(x,t) + c^2 u(x,t), & \text{в прямоугольнике } Q_2 = [\mathring{x} \le x \le l] \times [0 \le t \le T], \end{cases} \tag{66}$$

с условиями сопряжения на прямой $x = \mathring{x}$

$$u(\mathring{x} - 0, t) = u(\mathring{x} + 0, t), \quad a_1 u_x(\mathring{x} - 0, t) = a_2 u_x(\mathring{x} + 0, t), \tag{67}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{68}$$

и с одной из следующих четырех пар граничных условий

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \tag{69}$$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(l,t) = \nu_1(t), \tag{70}$$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \tag{71}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = \nu_1(t). \tag{72}$$

Замечание 3.1. *Отметим, что второе условие сопряжения (67), являющееся равенством элементов $L_2[0 \le t \le T]$, из физических соображений определяется соотношением $k_1 u_x(\mathring{x} - 0, t) = k_2 u_x(\mathring{x} + 0, t)$, но при равенстве импедансов это соотношение переходит в $a_1 u_x(\mathring{x} - 0, t) = a_2 u_x(\mathring{x} + 0, t)$.*

Определение 3.1. *Обобщенным из класса* $\widehat{W}_2^1$ *в каждом из прямоугольников* $Q_1 = [0 \le x \le \overset{\circ}{x}] \times [0 \le t \le T]$ *и* $Q_2 = [\overset{\circ}{x} \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ *решением смешанной задачи для разрывного телеграфного уравнения (66) с условиями сопряжения (67), с начальными условиями (68) и с одной из четырех пар граничных условий* (69) *–* (72) *называется функция* $u(x,t)$*, принадлежащая классу* $\widehat{W}_2^1$ *в каждом из прямоугольников* Q_1 *и* Q_2 *и удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int\limits_0^{\overset{\circ}{x}}\int\limits_0^T u(x,t)\left[\Phi_{tt}(x,t) - a_1^2\Phi_{xx}(x,t) + c^2\Phi(x,t)\right]dxdt +$$

$$+\int\limits_{\overset{\circ}{x}}^{l}\int\limits_0^T u(x,t)\left[\Phi_{tt}(x,t) - a_2^2\Phi_{xx}(x,t) + c^2\Phi(x,t)\right]dxdt =$$

$$= -\int\limits_0^{\overset{\circ}{x}} u(x,0)\Phi_t(x,0)dx - \int\limits_{\overset{\circ}{x}}^{l} u(x,0)\Phi_t(x,0)dx +$$

$$+\int\limits_0^{\overset{\circ}{x}} u_t(x,0)\Phi(x,0)dx + \int\limits_{\overset{\circ}{x}}^{l} u_t(x,0)\Phi(x,0)dx +$$

$$+\begin{cases} a_1^2\int\limits_0^T u(0,t)\Phi_x(0,t)dt - a_2^2\int\limits_0^T u(l,t)\Phi_x(l,t)dt & \text{для условия (69)},\\ -a_1^2\int\limits_0^T u_x(0,t)\Phi(0,t)dt + a_2^2\int\limits_0^T u_x(l,t)\Phi(l,t)dt & \text{для условия (70)},\\ -a_1^2\int\limits_0^T u_x(0,t)\Phi(0,t)dt - a_2^2\int\limits_0^T u(l,t)\Phi_x(l,t)dt & \text{для условия (71)},\\ a_1^2\int\limits_0^T u(0,t)\Phi_x(0,t)dt + a_2^2\int\limits_0^T u_x(l,t)\Phi(l,t)dt & \text{для условия (72)}\end{cases} \tag{73}$$

для любой пробной функции $\Phi(x,t)$*, принадлежащей классу* $C^{(2)}$ *в каждом из замкнутых прямоугольников* Q_1 *и* Q_2*, удовлетворяющей условиям сопряжения*

$$a_1\Phi(\overset{\circ}{x}-0,t) = a_2\Phi(\overset{\circ}{x}+0,t), \quad a_1^2\Phi_x(\overset{\circ}{x}-0,t) = a_2^2\Phi_x(\overset{\circ}{x}+0,t), \tag{74}$$

нулевым финальным условиям $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ *и однородным граничным условиям*

$$\begin{aligned} &\Phi(0,t) \equiv 0, \quad \Phi(l,t) \equiv 0 \quad &&\text{для условий (69)},\\ &\Phi_x(0,t) \equiv 0, \quad \Phi_x(l,t) \equiv 0 \quad &&\text{для условий (70)},\\ &\Phi_x(0,t) \equiv 0, \quad \Phi(l,t) \equiv 0 \quad &&\text{для условий (71)},\\ &\Phi(0,t) \equiv 0, \quad \Phi_x(l,t) \equiv 0 \quad &&\text{для условий (72)}. \end{aligned}$$

Вводимые определением 3.1 обобщенные решения $u(x,t)$ смешанных задач для разрывного телеграфного уравнения (1) сведем к изученным во второй главе обобщенным решениям $\widehat{u}(y,t)$ рассматриваемых на прямоугольнике $\widehat{Q} = [0 \le y \le \widehat{l}] \times [0 \le t \le T]$ при $\widehat{l} = \frac{\mathring{x}}{a_1} + \frac{l-\mathring{x}}{a_2}$ смешанных задач для простейшего телеграфного уравнения

$$\widehat{u}_{tt}(y,t) = \widehat{u}_{yy}(y,t) + c^2\widehat{u}(y,t) \tag{75}$$

с начальными условиями

$$\widehat{u}(y,0) = \widehat{\varphi}(y), \quad \widehat{u}_t(y,0) = \widehat{\psi}(y) \tag{76}$$

и с одной из четырех пар граничных условий

$$\widehat{u}(0,t) = \widehat{\mu}(t), \quad \widehat{u}(\widehat{l},t) = \widehat{\nu}(t), \tag{77}$$

$$\widehat{u}_y(0,t) = \widehat{\mu}_1(t), \quad \widehat{u}_y(\widehat{l},t) = \widehat{\nu}_1(t), \tag{78}$$

$$\widehat{u}_y(0,t) = \widehat{\mu}_1(t), \quad \widehat{u}(\widehat{l},t) = \widehat{\nu}(t), \tag{79}$$

$$\widehat{u}(0,t) = \widehat{\mu}(t), \quad \widehat{u}_y(\widehat{l},t) = \widehat{\nu}_1(t). \tag{80}$$

Обобщенные из класса $\widehat{W_2^1}(\widehat{Q})$ решения указанных смешанных задач вводятся следующим определением.

Определение 3.2. *Обобщенным из класса* $\widehat{W_2^1}(\widehat{Q})$ *в прямоугольнике* $\widehat{Q} = [0 \le y \le \widehat{l}] \times [0 \le t \le T]$ *решением смешанной задачи для телеграфного* *уравнения* (75) *с начальными условиями* (76) *и с одной из четырех пар граничных условий* (77) *–* (80) *называется функция* $\widehat{u}(y,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(\widehat{Q})$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int_0^{\widehat{l}}\int_0^T \widehat{u}(y,t)\left[\widehat{\Phi}_{tt}(y,t)-\widehat{\Phi}_{yy}(y,t)+c^2\widehat{\Phi}(y,t)\right]dydt=$$

$$=-\int_0^{\widehat{l}}\widehat{u}(y,0)\widehat{\Phi}_t(y,0)dy+\int_0^{\widehat{l}}\widehat{u}_t(y,0)\widehat{\Phi}(y,0)dy+$$

$$+\begin{cases}\int\limits_0^T\widehat{u}(0,t)\widehat{\Phi}_y(0,t)dt-\int\limits_0^T\widehat{u}(\widehat{l},t)\widehat{\Phi}_y(\widehat{l},t)dt & \textit{для условия } (77),\\ -\int\limits_0^T\widehat{u}_y(0,t)\widehat{\Phi}(0,t)dt+\int\limits_0^T\widehat{u}_y(\widehat{l},t)\widehat{\Phi}(\widehat{l},t)dt & \textit{для условия } (78),\\ -\int\limits_0^T\widehat{u}_y(0,t)\widehat{\Phi}(0,t)dt-\int\limits_0^T\widehat{u}(\widehat{l},t)\widehat{\Phi}_y(\widehat{l},t)dt & \textit{для условия } (79),\\ \int\limits_0^T\widehat{u}(0,t)\widehat{\Phi}_y(0,t)dt+\int\limits_0^T\widehat{u}_y(\widehat{l},t)\widehat{\Phi}(\widehat{l},t)dt & \textit{для условия } (80)\end{cases}$$

для любой пробной функции $\widehat{\Phi}(y,t)$ *из класса* $C^{(2)}(\overline{\widehat{Q}})$, *удовлетворяющей нулевым финальным условиям* $\widehat{\Phi}(y,T)\equiv 0$, $\widehat{\Phi}_t(y,T)\equiv 0$ *и однородным граничным условиям*

$$\begin{aligned}&\widehat{\Phi}(0,t)\equiv 0, \quad \widehat{\Phi}(\widehat{l},t)\equiv 0 && \textit{для условий } (77),\\ &\widehat{\Phi}_y(0,t)\equiv 0, \quad \widehat{\Phi}_y(\widehat{l},t)\equiv 0 && \textit{для условий } (78),\\ &\widehat{\Phi}_y(0,t)\equiv 0, \quad \widehat{\Phi}(\widehat{l},t)\equiv 0 && \textit{для условий } (79),\\ &\widehat{\Phi}(0,t)\equiv 0, \quad \widehat{\Phi}_y(\widehat{l},t)\equiv 0 && \textit{для условий } (80).\end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет тождеству* (73) *для любой пробной функции* $\Phi(x,t)$, *удовлетворяющей всем условиям определения 3.1, тогда и только тогда, когда при* $\widehat{l}=\frac{\mathring{x}}{a_1}+\frac{l-\mathring{x}}{a_2}$ *функция* $\widehat{u}(y,t)$, *определяемая соотношением*

$$\widehat{u}(y,t)=\begin{cases}u(a_1y,t) & \textit{при } [0\le y\le \frac{\mathring{x}}{a_1}]\times[0\le t\le T],\\ u(a_2y+\mathring{x}-\frac{a_2}{a_1}\mathring{x},t) & \textit{при } [\frac{\mathring{x}}{a_1}\le y\le \widehat{l}]\times[0\le t\le T],\end{cases}$$

удовлетворяет тождеству из определения 3.2 для любой пробной функции $\widehat{\Phi}(y,t)$*, удовлетворяющей всем условиям определения 3.2.*

В четвертой главе для стержня, состоящего из двух разнородных участков, имеющих одинаковые импедансы, установлен явный аналитический вид граничного управления смещением на обоих концах этого стержня, которое за минимально возможный промежуток времени переводит процесс его колебаний из произвольно заданного начального состояния в финальное состояние покоя.

Для произвольных положительных чисел l_1 и l_2 рассмотрим стержень, расположенный вдоль отрезка $-l_1 \leqslant x \leqslant l_2$ и состоящий из двух участков: участка $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$, имеющего линейную плотность $\rho_1 = const$ и коэффициент упругости $k_1 = const$, и участка $0 \leqslant x \leqslant l_2$, имеющего линейную плотность $\rho_2 = const$ и коэффициент упругости $k_2 = const$.

Если обозначить через $u(x,t)$ смещение точки стержня x в момент времени t, то процесс колебаний такого стержня, протекающий за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant T$, описывается разрывным телеграфным уравнением

$$u_{tt}(x,t) = \begin{cases} a_1^2 u_{xx}(x,t) - c^2 u(x,t) & \text{в прямоугольнике} \quad [-l_1 \leqslant x \leqslant 0] \times [0 \leqslant t \leqslant T], \\ a_2^2 u_{xx}(x,t) - c^2 u(x,t) & \text{в прямоугольнике} \quad [0 \leqslant x \leqslant l_2] \times [0 \leqslant t \leqslant T], \end{cases} \tag{81}$$

в котором $a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}}$, $a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}}$. Пусть управление процессом колебаний ведется посредством смещения левого конца $x = -l_1$ и правого конца $x = l_2$

$$u(l_2, t) = \nu(t), \tag{82}$$

$$u(-l_1, t) = \mu(t). \tag{83}$$

При этом, поскольку в финальный момент $t = T$ стержень покоится, то заданы нулевые финальные условия

$$u(x,T) = 0, \quad u_t(x,T) = 0, \tag{84}$$

а в точке $x = 0$ стыка двух участков выполнены условия сопряжения

$$u(0-0,t) = u(0+0,t), \tag{85^1}$$

$$k_1 u_x(0-0,t) = k_2 u_x(0+0,t). \qquad (85^2)$$

Поскольку импеданс левого участка стержня $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$ по определению равен $\rho_1 a_1 = \rho_1 \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}} = \sqrt{\rho_1 k_1}$, а импеданс правого участка стержня $0 \leqslant x \leqslant l_2$ равен $\rho_2 a_2 = \rho_2 \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}} = \sqrt{\rho_2 k_2}$, и эти импедансы предполагаются равными, то $\rho_1 k_1 = \rho_2 k_2$. Это равенство позволяет нам переписать условие сопряжения (85^2) в виде

$$a_1 u_x\left(0-0,t\right) = a_2 u_x\left(0+0,t\right). \qquad (85^3)$$

Затем при произвольных l_1, l_2, ρ_1, ρ_2, k_1, k_2, за минимально возможный промежуток времени T найден явный аналитический вид граничных управлений (82),(83), обеспечивающих перевод колеблющегося стержня из начального состояния

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad (86)$$

в финальное состояние покоя

$$u(x,T) = 0, \quad u_t(x,T) = 0. \qquad (87)$$

Результаты четвертой главы опубликованы в работе [4].

Публикации автора по теме диссертации.

1. Смирнов И.Н. Формула типа Даламбера для колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности, описываемых телеграфным уравнением // Доклады Академии Наук, 2010, том 433, № 1, С. 25–29.

2. Смирнов И.Н. Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. Одностороннее управление. Доклады Академии Наук, 2010, том 435, № 1, С. 22–25.

3. Смирнов И.Н. Смешанные задачи для телеграфного уравнения, в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. Доклады Академии Наук, 2010, том 435, № 2, С. 172-177

4. Смирнов И.Н. Решение задачи успокоения для системы, состоящей из двух разнородных участков, колебания которой описываются телеграфным уравнением. Тезисы конференции Тихонов-2010. – Москва: Изд-во МГУ, 2010. С. 28-29.