

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова**

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Анпилов Сергей Валерьевич

**ОДНОФАЗНЫЕ И МНОГОФАЗНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ЭЛЕКТРОЛИЗА АЛЮМИНИЯ**

Специальность – 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета
ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель: Доктор физико-математических
наук Савенкова Надежда
Петровна

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических
наук Бычков Владимир Львович,
Физический факультет МГУ им.
М.В. Ломоносова

Кандидат физико-математических
наук, зам. директора по
научной работе Института
Физической Оптики
Ибраимов Нариман Смаилович

Ведущая организация: ИПМ Им. Келдыша РАН

Защита состоится “ ___ ” _____ 2011 г. в ___ час. ___ мин.
на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 при Московском
государственном университете имени М.В.Ломоносова, расположенном
по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские
горы, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Факультета ВМК
МГУ имени М.В.Ломоносова.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте
ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова <http://www.cmc.msu.ru> в разделе
«Наука» – «Работа диссертационных советов» – «Д 501.001.44».

Автореферат разослан “ ___ ” _____ 2011 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета, доктор физико-математических
наук, профессор

Е.В. Захаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Настоящая работа посвящена численному исследованию МГД-стабильности алюминиевого электролизёра в условиях промышленного производства алюминия.

Актуальность темы диссертации

Математическое моделирование фактически является единственным способом исследования, и визуализации динамических процессов на границе раздела сред электролит-алюминий. В силу высокой температуры (960°C) и химической агрессивности среды проведение экспериментальных замеров основных характеристик процесса электролиза алюминия в промышленной электролизной ванне крайне затруднено. Поэтому достаточно адекватное математическое моделирование позволяет получить достоверную информацию о форме границы раздела сред, конфигурации распределения скоростей металла и электролит, электромагнитных полей и электрических токов в средах, а также зависимости этих величин от геометрии ванны, конфигурации анодов и условий проведения процесса электролиза. Это даёт возможность выработать рекомендации по оптимальному режиму проведения процесса электролиза и выбору формы рабочего пространства ванны с целью увеличения выхода алюминия по току.

Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является:

1. разработать нестационарную трёхмерную математическую модель электролиза алюминия в промышленной ванне, описывающую гидродинамические и электромагнитные процессы в электролизной ванне во взаимосвязи, учитывающую реальную форму рабочего пространства и позволяющую исследовать МГД-стабильность ванны при различных режимах проведения электролиза алюминия;
2. разработать численный метод решения поставленной трёхмерной математической модели;
3. осуществить программную реализацию численного метода, позволяющую визуализировать полученные результаты;
4. определить границы возможного применения осреднённой двухмерной математической модели электролиза алюминия.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработана трёхмерная двухфазная математическая модель алюминиевого электролизёра, учитывающая взаимосвязь гидродинамических и электромагнитных процессов в средах алюминия и электролита, реальную геометрию ванны и конфигурацию анодов.

2. Предложен численный метод решения и осуществлена его программная реализация, позволившая провести визуализацию динамических процессов во всём объёме электролизной ванны.

3. Численно исследована МГД-стабильность ванны при замене различных пар выгоревших анодов.

4. Исследована зависимость МГД-стабильности работы электролизёра от формы рабочего пространства ванны для заданной конфигурации анодов.

Научная новизна работы

Диссертационная работа предлагает оригинальный подход к моделированию промышленного алюминиевого электролизёра. Математическая модель, описывающая магнитно-гидродинамические процессы в электролизной ванне, основана на трёхмерной системе уравнений магнитной гидродинамики – системе уравнений Навье-Стокса, записанной для сред алюминия и электролита в двухкомпонентном приближении для смеси вязких жидкостей, и на системе уравнений Максвелла. Особенность математической постановки модели заключается в том, что нестационарные гидродинамические и электромагнитные процессы в ней рассматриваются во взаимосвязи в двухкомпонентной смеси, каждой из компонент которой соответствует своё поле скоростей. Такая постановка позволяет определить границу раздела сред в зависимости от чистоты металла и учесть реальную геометрию ванны. Разработанный в диссертации численный метод решения позволил исследовать МГД-стабильность ванны в условиях выемки выгоревших анодов и предложить оптимальную форму гарнисажа электролизной ванны, для которой характерна наибольшая МГД-стабильность режима протекания электролиза для конкретной ванны.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет как теоретическую, так и практическую значимость. Теоретическая значимость заключается в применении многофазного

подхода к моделированию магнитно-гидродинамических процессов в промышленной электролизной ванне, а также в разработке численного метода решения полученной трёхмерной системы уравнений в частных производных.

Практическая ценность заключается в применении разработанного программного комплекса для решения конкретных технологических задач для реальной промышленной электролизной ванны с учётом формы рабочего пространства, конфигурации анодов и распределения подаваемых на них электрических токов. Результаты, полученные в диссертации, хорошо согласуются с экспериментально полученными данными. Численные расчёты, проведённые для конкретной ванны, позволяют предсказать динамику границы раздела сред алюминий-электролит при замене выгоревших анодов и дать рекомендации по подбору оптимальной формы гарнисажа ванны.

Апробация работы и публикации

По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ. Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры физики твёрдого тела физического факультета МГУ им. Ломоносова под руководством проф. Бушуева В.А., в Институте Прикладной Механики им. Келдыша РАН, Институте Безопасного Развития Ядерной Энергетики, на семинарах факультета ВМК и конференциях:

1. Третий международный конгресс «Цветные металлы–2011», 2011
2. Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», 2007, 2008, 2009, 2011.
3. XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов, и решение задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко, 2010.
4. Тихоновские чтения, 2007, 2008, 2011.
5. Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А.Самарского, 2009.

Личный вклад автора

Личный вклад автора состоит в разработке представленной в диссертации математической модели, разработке численного метода решения полученной системы уравнений в частных производных, разработке программного комплекса, позволяющего проводить расчёты на основе предложенного численного метода.

Основные результаты, изложенные в диссертационной работе, были впервые получены автором. Постановка и ход научных исследований осуществлялись под руководством д.ф. – м.н. Савенковой Надежды Петровны. Основное содержание диссертационной работы и её результатов полностью отражено в 12 научных публикациях автора. В материалах совместных публикаций личный вклад автора является определяющим.

Публикации

Положения диссертации отражены в 12 публикациях автора, 3 из которых в изданиях, рекомендованных ВАК [6, 7, 9].

Структура работы

Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, введения, трёх глав, заключения и списка литературы (55 наименований). Объём диссертации - 120 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю в.н.с. д.ф. – м.н. Савенковой Надежде Петровне за поддержку и постоянную помощь в работе.

Краткое содержание работы

Во введении даётся постановка задачи, приводится обзор литературы и обзор диссертации по главам. В рамках рабочей гипотезы математической модели считается, что внутри электролизной ванны располагается вязкая несжимаемая жидкость, через которую проходит ток, состоящая из двух вертикальных слоев: верхний слой – электролит и нижний слой – жидкий алюминий. Рабочая температура колеблется в пределах 940-980°C, при таких температурах плотность алюминия превосходит плотность электролита, что обуславливает их разделение на два слоя. Вдоль бортов электролизера находится слой, образованный углеродистыми соединениями – настыль. Она служит защитой от коррозии внутренней поверхности ванны электролитом. Нижняя поверхность ванны – неровная, неровности обусловлены образованием

отложений по бокам и на дне ванны (т.н. гарнисаж). Верхняя поверхность жидкости ограничена погруженными в электролит анодами прямоугольной формы. Геометрические размеры рассматриваемого электролизёра составляют 8.9м в длину, 3.7 м в ширину и 0.65 м в высоту. Под анодами расположена зона обратного окисления металла, насыщенная химически активными газами, способными окислить полученный в результате электролиза алюминий.

В первой главе приводится математическая постановка задачи, в основе которой находится система уравнений в частных производных, описывающая динамику двух жидкостей, зависящую от проходящих через них электрических токов, электромагнитного поля, формы гарнисажа и распределения анодов в алюминиевом электролизёре.

Параграф 1.1 посвящён описанию рабочей гипотезы модели. Предполагается, что в каждом малом элементарном объёме ΔV присутствует и алюминий, и электролит, при этом их смесь совокупно занимает объём целиком, а каждая из жидкостей – некоторую часть этого объёма – ΔV_1 (для алюминия) и ΔV_2 (для электролита).

Для каждой среды (компоненты смеси) вводится параметр α_m - объёмная доля фазы (или объёмное содержание фазы):

$$\alpha_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta V}, \alpha_2 = \frac{\Delta V_2}{\Delta V}, \text{ при этом } \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (1)$$

Здесь и далее переменные с индексом $m=1$ относятся к среде алюминия, с индексом 2 – к среде электролита. Каждой среде приписывается собственное поле скоростей \overline{v}_m .

Также сделаны следующие предположения: температура смеси считается постоянной, поскольку процесс электролиза рассматривается на малых временах, т.к. МГД-нестабильность развивается в течение нескольких секунд, поддержание постоянной температуры ванны является технологической задачей, плотности, коэффициенты вязкости и электропроводности сред считаются постоянными.

Основными неизвестными являются: скорости движения сред металла и электролита $\overline{v}_m = (u_m, v_m, w_m), m=1,2$; объёмные доли металла α_1 и электролита α_2 , давление p , плотность электрического тока

$\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$, напряжённость магнитного поля $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ и сила Лоренца $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$.

В параграфе 1.2 приводятся дифференциальные уравнения сохранения массы и импульса для обеих компонент смеси.

Уравнение неразрывности для m -й фазы имеет вид:

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} + \text{div}(\alpha_m \vec{v}_m) = \frac{M_{ml}}{\rho_m}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad (2)$$

где $M_{ml} = -M_{lm}$ - массовая скорость превращения глинозёма, растворённого в электролите, в алюминий в процессе электролиза, отнесенная к единице объёма, m, l - индексы фазы, \vec{v}_m - скорость m -й фазы.

Уравнение движения для m -й фазы выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \alpha_m \vec{v}_m}{\partial t} + (\vec{v}_m, \vec{\nabla})(\alpha_m \vec{v}_m) = \alpha_m \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_m} - \alpha_m \vec{g} + \alpha_m \mu_m \frac{1}{\rho_m} \Delta \vec{v}_m + \frac{\vec{P}_{ml}}{\rho_m} + \vec{f}_m, \quad (3)$$

$$\text{где } \vec{P}_{ml} = \alpha_m \alpha_l K (\vec{v}_m - \vec{v}_l), \quad \vec{f}_m = \frac{\vec{F}_e}{\rho_m}, \quad (4)$$

где p - давление, μ_l - динамическая вязкость среды,

\vec{P}_{ml} - объёмная плотность силы трения (Стоксовой силы) между компонентами смеси за счёт вязких сил, $\vec{P}_{ml} = -\vec{P}_{lm}$;

\vec{F}_e - объёмная плотность силы, обусловленной электромагнитным полем (силы Лоренца).

В параграфе 1.3 приводится математическая модель для расчета давления.

В параграфе 1.4 приведена модель расчёта электрических токов в обеих средах.

В параграфе 1.5 приводится система уравнения для расчёта электромагнитного поля, основанная на классической системе магнитной гидродинамики.

В параграфе 1.6 приведена полная математическая постановка модели.

В главе 2 предлагается численный метод решения полученной системы уравнений.

В параграфе 2.1 проводится разбиение исходной математической задачи на физические процессы. При этом выделяются следующие этапы решения:

1, 2 Этап

Для каждой из сред решается система уравнений, (2)-(4), описывающая их движение, используется конечно-разностный метод второго порядка точности - полученный по модифицированной для трёхмерного случая схеме, основанной на схеме «Кабаре»

3 Этап

Проводится пересчёт электромагнитного поля в ванне. Решается система уравнений Максвелла конечно-разностным методом второго порядка точности.

4 Этап

Пересчет нового распределения плотности электромагнитных сил во всей расчётной области.

5 Этап

На этом этапе производится расчёт давления во всей расчётной области.

6 Этап

Пересчёт электрических токов при замене выгоревших анодов. Для определения токов уравнение Лапласа на потенциал решается конечно-разностным методом второго порядка точности во всей расчётной области.

В параграфе 2.2 описываются разностные методы решения уравнений 1-6-го этапов: вводится сетка равномерная по пространству и неравномерная по времени. Приведена разработанная автором разностная схема, применяемая на на 1-3 этапах.

По известным на n-м временном слое величинам решение этапов 1-6 повторяется до тех пор, пока не выполнится следующий критерий:

$$\max_{i,j,k \in \Omega} \frac{\max_{i,j,k} |\varphi_{i,j,k}^{*n+1} - \varphi_{i,j,k}^{n+1}|}{\max_{i,j,k} |\varphi_{i,j,k}^{*n+1}|} < \varepsilon,$$

где Ω – множество узлов, принадлежащее расчётной области $\varphi_{i,j,k}^{*n+1}, \varphi_{i,j,k}^{n+1}$ - значения переменных ($u_m, v_m, w_m, p, \alpha_m; m = 1, 2$), полученные на последних двух последовательных расчётах. Далее проводится пересчёт шага по времени и происходит переход на n+1-й временной слой.

Параграф 2.3. посвящён численному исследованию свойств разностного метода решения этапов 1-2. При помощи численного эксперимента были исследованы консервативность разностного метода, его порядок точности и было получено условие выбора шага по времени. В таблице 1 приведены отклонения масс компонент смеси в процессе расчёта, обусловленные погрешностью схемы. Видно, что отклонения не превышают величины порядка шага по пространству.

t_n, c	M_1	ΔM_1	M_2	ΔM_2	$M_1 + M_2$	$\Delta M_1 + \Delta M_2$
0,0	23139,779	0,000	8623,971	0,000	31763,75	0,000
0,017	23139,538	-0,241	8623,510	-0,461	31781,548	-0,701
0,0359	23139,041	-0,738	8623,998	0,027	31763,536	-0,214
0,718	23139,924	0,145	8623,542	-0,429	31763,466	-0,284
6,462	23139,853	0,74	8623,631	-0,340	31763,484	-0,266
14,316	23139,960	0,181	8623,528	-0,443	31763,388	-0,362

Таблица 1. Изменение суммарных масс алюминия, электролита и смеси в целом со временем

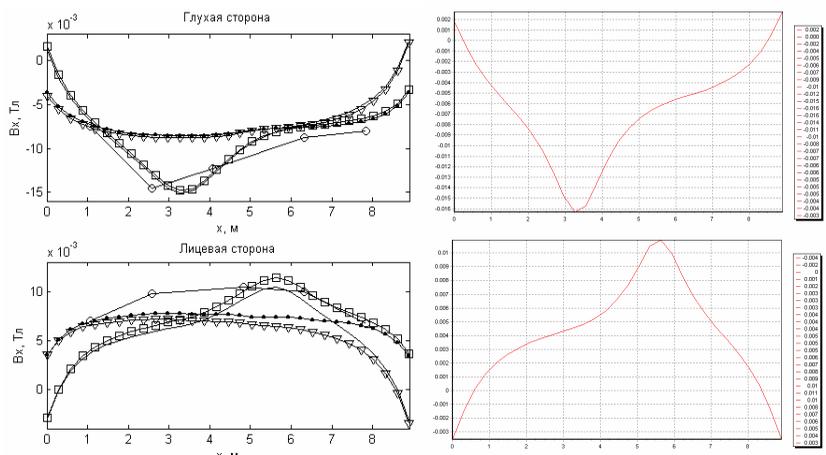
где $M_m = \Delta V \sum_{i,j,k} \alpha_m \rho_m$, ΔV – объём расчётной ячейки, $\Delta M_m = M_m^n - M_m^0$.

Численное исследование на сгущающихся сетках показало, что суммарная погрешность предложенного в диссертации численного метода имеет первый порядок точности. Экспериментально полученное в результате численных экспериментов, условие устойчивости разработанного разностного метода имеет вид:

$$\tau_{n+1} < C \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\max_{\mathbf{A} \in \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}} \left(\max_{i,j} |\mathbf{A}_{i,j}^n|, 1 \right)}, \text{ где } C \approx 0.01$$

В главе 3 приводятся результаты тестирования, а также результаты отдельных численных экспериментов, проведённых в целях верификации разработанной математической модели.

В параграфе 3.1 приведены тестовые расчёты, проведенные для искусственно заданных начальных условий, подтверждающие адекватность численной реализации каждого отдельно взятого этапа. Также приведены результаты расчётов для реальной геометрии ванны, где в качестве начальных данных были использованы данные, известные из физических экспериментов.



□ — магнитное поле от токов, текущих в ванне и в ошиновке ванны

а) экспериментальные

б) рассчитанные

Рисунок 1. x-компонента вектора индукции электромагнитного поля.

Полученные результаты расчётов хорошо согласуются с экспериментально замеренными значениями, что подтверждает адекватность математической модели. На рисунке 1 приведена x-компонента вектора индукции электромагнитного поля, измеренная на т.н. «глухой» и «лицевой» сторонах электролизёра, что соответствует сторонам с $y=0$ и $y=L_y$. Остальные две рассчитанные компоненты индукции электромагнитного поля также согласуются с экспериментально замеренными.

В параграфе 3.2 приводятся результаты моделирования выемки анодных блоков в электролизной ванне, оценка вклада индуцированных токов и результаты исследования влияния формы настлы на МГД-стабильность ванны.

Технология электролиза с обожженными анодами подразумевает периодическую замену анодов, в процессе чего могут происходить нежелательные возмущения среды, приводящие к снижению эффективности производства.

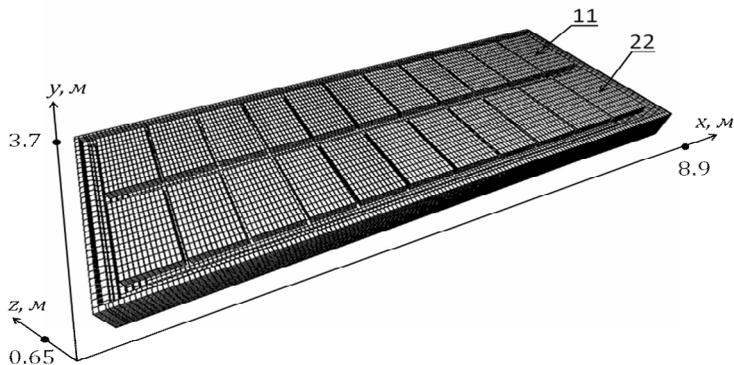
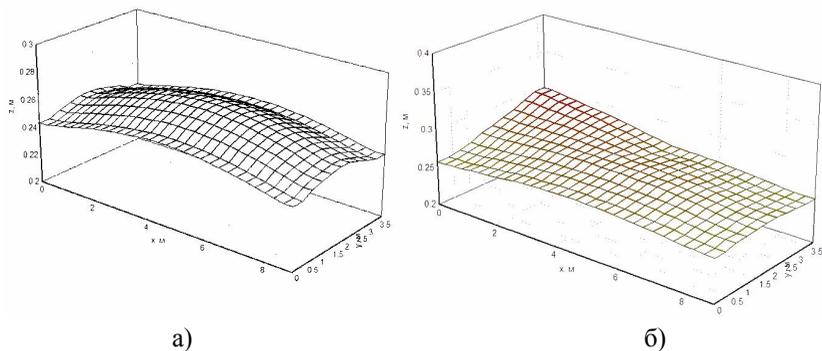


Рисунок 2. Геометрия электролизной ванны.
Расположение 11 и 22-го анодов.

При замене выгоревших анодных блоков, которые выводят парами по мере их выгорания, происходит перераспределение токов по анодам, что влечет за собой изменение распределения напряженности электромагнитного поля в металле и электролите, а значит, ведет к изменению величины электромагнитной силы, действующей в этих среда, что в свою очередь меняет распределение полей скоростей в металле и электролите. Практика показывает, что часто нежелательные колебания поверхности раздела возникают при извлечении двух крайних анодов. Проведен численный эксперимент, моделирующий извлечение 11-го и 21-го (двух крайних, см. рис. 2) анодов.



а) б)
Рисунок 3. Положение границы раздела сред при всплеске, вызванном выемкой анодов. Время $t = 0.25$ с.

На рис. 3.а приведена характерная граница раздела сред для случая устойчивой работы электролизера. Численный эксперимент показал, что примерно через 0.3 с после отключения анодов наблюдается всплеск поверхности раздела (см. рис. 3.б), при котором МПР становится равно 2 см, что меньше критического для данного электролизера, однако затем амплитуда колебаний снижается до допустимой величины. Рис. 3.б хорошо согласуется с рис. 4, на котором показано распределение скоростей в обеих средах в вертикальной плоскости XZ.

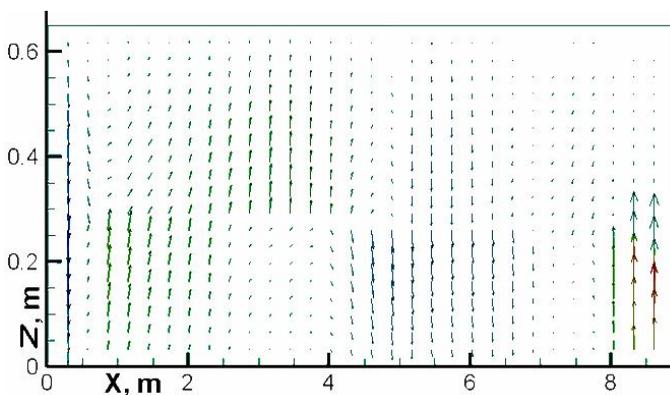


Рисунок 4. Поле скоростей в плоскости XZ на расстоянии 1.75 м от длинной стороны ванны. Время $t = 0.25$ с.
Максимальный модуль скорости – 0.04 м/с,

На рис.5-6 приведены поля скоростей в алюминии и электролите в момент, когда МПР достигает наименьшего значения.

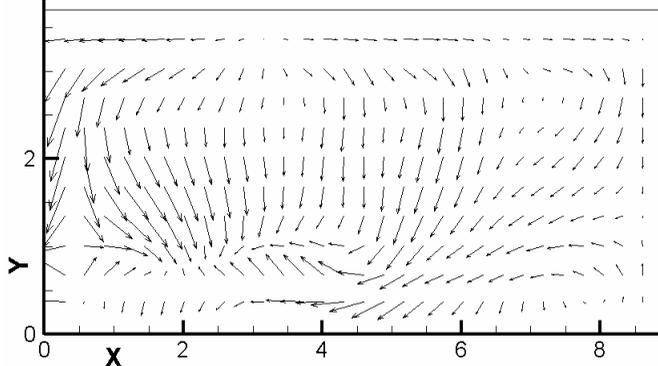


Рис.5. Поле скоростей в среде электролита в момент достижения наименьшего МПР. Проекция на плоскость XY.

$Z = 0.4875$ м. $t = 0.25$ с. Максимальный модуль скорости – 0.08 м/с,

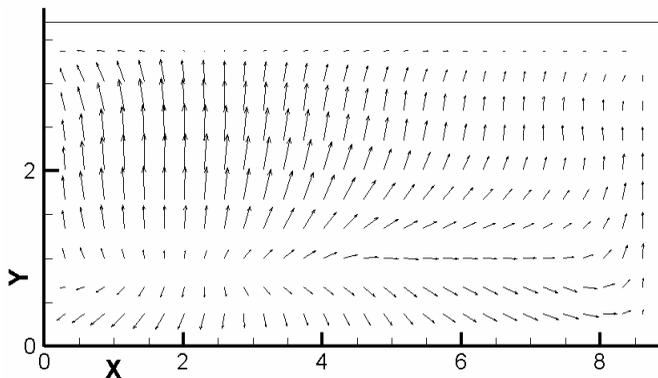


Рис.6. Поле скоростей в среде алюминия в момент достижения наименьшего МПР. Проекция на плоскость XY.

$Z = 0.1625$ м. $t = 0.25$ с. Максимальный модуль скорости – 0.08 м/с,

Предположение о представлении алюминия и электролита как смеси двух жидкостей, сделанное в рабочей гипотезе модели, не позволяет точно определить положение границы раздела сред, поэтому граница раздела восстанавливается как поверхность уровня с $\alpha_1 = A$, где $0 < A \leq 1, A = const$. «Толщина размытия» границы раздела сред (т.е. область, в которой α_1 изменяется от A до 1) составляет приблизительно $0.1-0.15$ см.

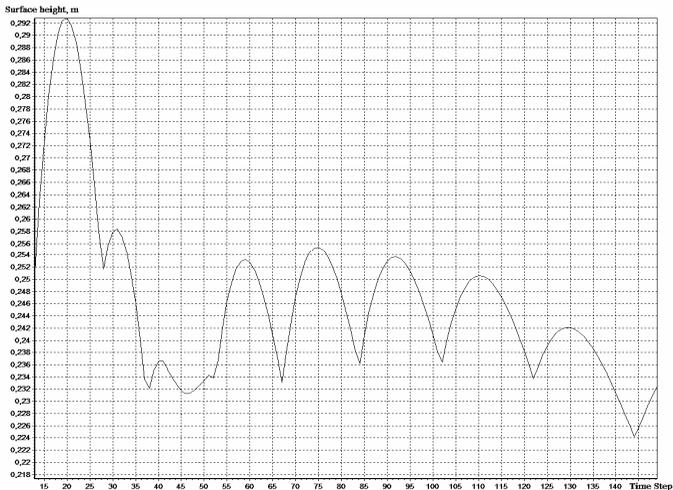
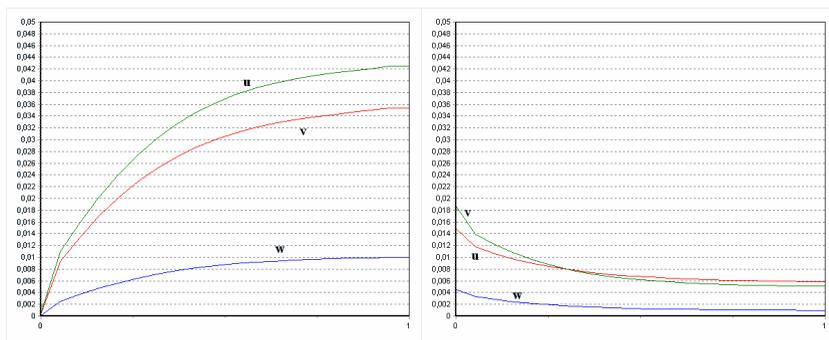


Рис. 7. Динамика максимальной высоты поверхности раздела после извлечения 11 и 21 анодов. Шаг по времени – 0.015 с. Макс. высота уровня алюминия – 0.292 м.

На рис. 7 изображена динамика максимальной высоты поверхности металла. Расчеты показали, что при одновременном извлечении 11 и 22-го анода происходит резкое возрастание амплитуды колебаний до 4 см, что приводит к тому, что МПР (расстояние анод-металл), изначально составляющее 5-6 см, становится меньше допустимого. Это свидетельствует о нарушении стабильности работы электролизера, что подтверждается технологическими наблюдениями. Таким образом, проведение предварительных расчетов по предложенной модели позволяет заранее делать прогноз о стабильности процесса электролиза при извлечении анодов из конкретного электролизера, не прибегая к дорогостоящим физическим экспериментам.

В параграфе 3.3 приведено сравнение результатов, полученных в результате расчётов по осреднённой по высоте двумерной модели. Расчёты, проведенные по разработанной в диссертации математической модели, подтверждают существование в каждом из сред слоёв, толщина которых не превышает 1/3 толщины соответствующей области, о которых действительно можно говорить как о средних слоях области, в которых физические величины не испытывают значительных изменений (см. рис. 8).



а) металл

б) электролит

Рисунок 8. Распределение скоростей по высоте электролизёра в средах.

Было проведено исследование МГД-стабильности электролизёра в зависимости от формы настывли – для трёх конфигураций - когда её край у борта находится за проекцией края анода (т.е. ближе к стенке ванны, рис. 9), когда настывль заходит под анод (рис. 10) и, когда граница круто падающей настывли находится строго под краем анода (рис. 11) – последняя считается наиболее удачной в смысле устойчивости протекания магнитогидродинамических процессов. Были проведены расчёты для трёх описанных видов формы рабочего пространства.

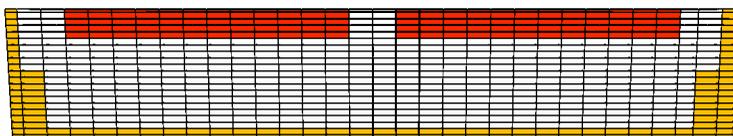


Рисунок.9. Вертикальный срез ванны. Конфигурация 1.

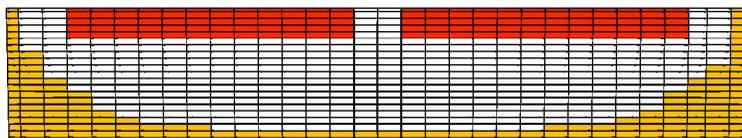


Рисунок.10. Вертикальный срез ванны. Конфигурация 2.

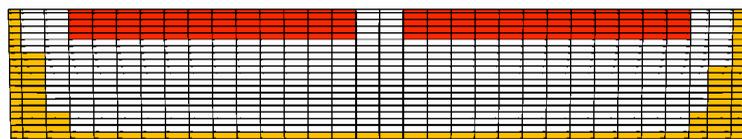


Рисунок.11. Вертикальный срез ванны. Конфигурация 3.

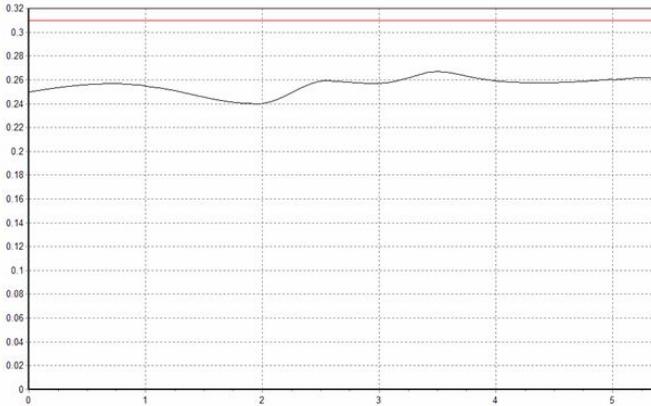


Рисунок.12. Динамика максимальной амплитуды колебания границы раздела сред для конфигурации 1.

Графики максимальной высоты поверхности уровня алюминия, полученные в результате проведённого моделирования, для ванн, имеющих форму рабочего пространства, изображённую на рис. 9-11, приведены на рис. 12-14. Расчёт проводился на временах порядка десятков секунд, для данных конфигураций наблюдались невозрастающие колебания МПР. Как видно из рис. 12-14 – максимальная амплитуда колебания границы раздела сред в этих вариантах существенно отличается: для первого варианта (рис. 12) она составляет около 1,5 см, для второго (рис. 13) – 5,5 см, для третьего (рис. 14) – не превышает 1 см.

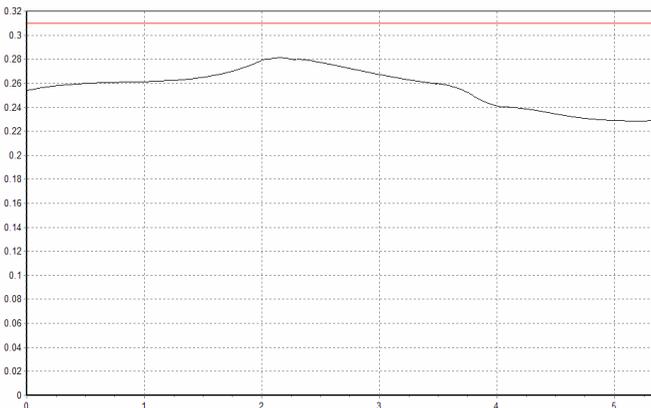


Рисунок.13. Динамика максимальной амплитуды колебания границы раздела сред для конфигурации 2.

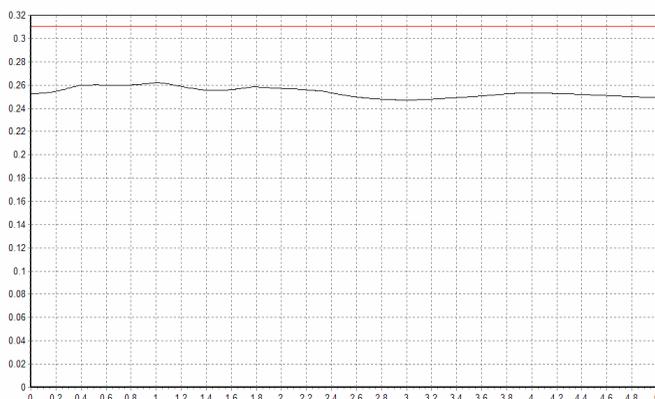


Рисунок.14. Динамика максимальной амплитуды колебания границы раздела сред для конфигурации 3.

В Заключение приведены основные результаты диссертационной работы:

1. Разработана трёхмерная двухфазная математическая модель алюминиевого электролизёра, учитывающая взаимосвязь гидродинамических и электромагнитных процессов в средах алюминия и электролита, реальную геометрию ванны и конфигурацию анодов.

2. Предложен численный метод решения и его программная реализация, что позволяет провести визуализацию динамических процессов в электролизной ванне.

3. Численно исследована МГД-стабильность ванны при замене различных пар выгоревших анодов и зависимость МГД-стабильности работы электролизёра от формы рабочего пространства ванны для заданной конфигурации анодов.

Основные положения диссертации изложены в работах

1. Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Проворова О.Г., Кузьмин Р.Н. «Об устранении неопределенности критерия Бояревича-Ромерио» // Математика. Компьютер. Образование: сб. тезисов XIV международной конференции / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. М.-Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика", 2007, С. 95.
2. Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Проворова О.Г., Кузьмин Р.Н. «Об устранении неопределенности критерия Бояревича-Ромерио» // Математика. Компьютер. Образование: сб. трудов XIV

- международной конференции / Под общей редакцией Г.Ю. Ризниченко; М.-Ижевск: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2007, том 2, С.225-231.
3. Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Мокин А.Ю. «Трёхмерная модель динамической поверхности раздела сред в процессе электролиза» // Математика. Компьютер. Образование: сб. тезисов XV международной конференции / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. М.-Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика": сб. тезисов, 2008, том 1, С.113.
 4. Савенкова Н.П., Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Шобухов А.В., Анпилов С.В., Складчиков С.А. «Двумерная и трёхмерная математические модели электролиза алюминия» // Математика. Компьютер. Образование: сб. тезисов XV международной конференции / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. М.-Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика": сб. тезисов, том 1, 2009. С.174.
 5. Н. П. Савенкова, А. В. Шобухов, С. В. Анпилов, Р. Н. Кузьмин «Математическое моделирование физико-технологического процесса электролиза» // Прикладная физика; 2009; №6; с.43-51.
 6. Н.П. Савенкова, Р.Н. Кузьмин, О.Г. Проворова, А.В. Шобухов, С.В. Анпилов, С.А. Складчиков «Двумерная и трёхмерная математические модели электролиза алюминия» // Динамика сложных систем, 2009, №2, С.53-59.
 7. Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Пискажова Т.В., Проворова О.Г. «Трёхмерная двухфазная модель МГД-стабильности алюминиевого электролизера» // XVIII Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко: сб. тезисов, 2010, С.6.
 8. Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Пискажова Т.В. «Двухфазная трёхмерная модель алюминиевого электролизёра» // Прикладная физика, 2011, №6. С.25-33.
 9. Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Пискажова Т.В. «Трёхмерная двухфазная модель алюминиевого электролизера» // Математика. Компьютер. Образование: сб. тезисов XV международной конференции / Под ред.

Г.Ю.Ризниченко. М.-Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика": сб. тезисов, 2011, С.229.

10. Савенкова Н.П., Анпилов С.В. «Двухфазная трёхмерная модель МГД-стабильности алюминиевого электролизёра» // Тихоновские чтения, сб. тезисов, М.: МАКС Пресс, 2011, С 70-71.
11. Анпилов С.В. Двухфазная 3-D модель алюминиевого электролизёра // Препринт, М.: МАКС Пресс, 2011, 18с.
12. Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Кузьмин Р.Н., Проворова О.Г., Пискажова Т.В. «Двухфазная 3D модель мгд-явлений алюминиевого электролизёра» // Сборник докладов третьего международного конгресса «Цветные металлы - 2011». Красноярск,. – С. 282-286.