Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Карамзин Дмитрий Юрьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ АНОРМАЛЬНЫХ И ВЫРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

01.01.02 – “Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление”

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Вычислительном центре РАН
им. А.А. Дородницына в отделе методов нелинейного анализа.

Научный консультант:
– д.ф.-м.н., профессор Арутюнов Арам Владимирович.

Официальные оппоненты:
– д.ф.-м.н., профессор Измаилов Алексей Феридович;
– д.ф.-м.н., профессор Никольский Михаил Сергеевич;
– д.ф.-м.н., профессор Половинкин Евгений Сергеевич.

Ведущая организация:
– Центральный экономико-математический институт РАН.

Защита состоится 24 октября 2012 г. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМиК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан .... 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию анормальных и вырожденных задач, возникающих в различных областях оптимизации и нелинейного анализа. Работа состоит из пяти глав, содержание которых соответствует следующим направлениям исследования:

1. Расширение классического вариационного исчисления и оптимального управления на задачи с разрывными траекториями. Теория оптимального импульсного управления.

2. Классическое оптимальное управление. Развитие теории принципа максимума Л.С. Понтрягина для задач с фазовыми ограничениями.

3. Теория вещественных квадратичных отображений. Условия существования регулярных нулей квадратичных отображений.

4. Исследование гладких отображений в окрестности анормальной точки. Теоремы об обратной функции и необходимые условия экстремума второго порядка в теории анормальных экстремальных задач с ограничениями.

5. Необходимые условия локального минимума второго порядка в анормальных задачах оптимального управления.

Первая глава посвящена развитию теории оптимального импульсного управления. Как известно, не все задачи вариационного исчисления и оптимального управления имеют решение в классе непрерывных траекторий. Причем, не имея решений, такие задачи могут оставаться вполне физически значимыми. Пример такой ситуации иллюстрируется следующей задачей вариационного исчисления.

$$\begin{array}{ll} \text{Найти минимум} & \displaystyle\int_0^1 x(t)\sqrt{1+(\dot{x})^2}dt \\ \text{при ограничениях} & x(0)=R_1,\ x(1)=R_2. \end{array} \tag{1}$$

Это задача о нахождении поверхности вращения, задаваемой контуром $x(t)$, площадь которой была бы наименьшей из всех возможных; а физически – невесомой мембраны, натянутой на два параллельных диска радиусов R_1 и R_2 соответственно. Применение условий Эйлера-Лагранжа приводит к дифференциальному уравнению второго порядка и краевой задаче, которая для некоторых значений параметров R_1, R_2 решения иметь не будет. И в этом есть явный физический смысл, который прямо соотносится с тем, что наблюдается на практике: когда числа R_1, R_2 достаточно велики (или же когда расстояние между дисками достаточно мало), мембрана существует, а поверхность вращения гладкая. Но как только мы начнем увеличивать расстояние между дисками, мембрана будет растягиваться и в какой-то момент времени разорвется. В этот момент времени непрерывное решение задачи перестает существовать. Однако это не означает, что минимальной поверхности вращения не существует вообще. Очевидно, что в этом вырожденном случае она будет просто объединением двух дисков и отрезка $[0,1]$, их соединяющего. Это означает, что решение $x(t)$ будет R_1 при $t=0$, R_2 при $t=1$ и 0 при $t \in (0,1)$ и, таким образом, будет претерпевать разрывы. Другими словами, решение будет *импульсным*.

Давид Гильберт, в рамках своей известной программы ([1], 20-ая задача), предложил расширить вариационное исчисление с целью покрыть и формализовать подобного рода вырожденные ситуации и, тем самым, придать строгий математический смысл разрывным решениям (и неклассическим решениям вообще). Он выразил уверенность в том, что "каждая задача вариационного исчисления имеет решение, если только термин "решение" интерпретируется правильным образом".

Об истории расширения классического вариационного исчисления в целом можно прочитать в обзорной статье [2]. Большой вклад в эту теорию внесли H. Lebesgue, L. Tonelli, J. Warga, L. Young, Н.Н. Боголюбов, Р.В. Гамкрелидзе, А.Д. Иоффе, В.Ф. Кротов, А. Размадзе, В.М. Тихомиров и др. С появлением теории оптимального управления и принципа максимума Л.С. Понтрягина, [3], в 1950-х, теория разрывных решений задач вариационного исчисления значительно обогатилась и плавно влилась в теорию оптимального импульсного управления, став ее неотъемлемой частью.

Итак, теория задач с импульсными управлениями покрывает собой достаточно широкий класс вырожденных задач классического вариационного исчисления и оптимального управления, в которых традиционных непрерывных решений не существует. Эта теория предлагает, во-первых, тот способ, как интерпретировать понятие решения для таких задач, и во-вторых, тот путь, как найти решение в новом его смысле, представляя для этого какие-нибудь условия оптимальности. Основная идея здесь лежит в расширении самих понятий управления и траектории. Обычное измеримое ограниченное управление можно заменить, например, на борелевскую меру. Действительно, с одной стороны, любая абсолютно непрерывная борелевская мера порождает интегрируемую функцию – ее производную. С другой стороны, есть меры, которые нельзя связать ни с одной измеримой интегрируемой функцией, например, мера Дирака. Это есть простейшее расширение класса управлений, которое, однако, уже достаточно богато и способно включить в себя много актуальных приложений.

Это расширение ввиду слабой-* секвенциальной компактности единичного шара в пространстве борелевских мер оказывается корректным только в случае линейных динамических систем. Сложность расширения, однако, возрастает, как скоро мы рассмотрим более общие управляемые динамические системы, например, вида

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x)v, \quad v \in K. \tag{2}$$

Здесь u – классическое измеримое и существенно ограниченное управление, функция f определяет обычную динамику,[1] а v – *неограниченная* управляющая функция, принимающая значения в некотором выпуклом замкнутом конусе K, и g – некоторая матричная функция.

Процедура расширения, как выше, уже не применима, поскольку слабые-* предельные переходы в нелинейных системах некорректны, и это демонстрируется простейшими примерами. Например, динамической системой с двумерным неограниченным управлением $v = (v_1, v_2)$:

$$\dot{x} = xv_1 + x^2 v_2, \quad x(0) = 1.$$

Если мы постараемся расширить эту систему в класс борелевских мер, предполагая, что $\|v\|_{L_1} \leq \mathrm{const}$ (полная вариация траектории должна быть, конечно, ограниченной), то мы увидим, что каждому управлению, то есть каждой векторной мере, будет соответствовать уже целая интегральная воронка траекторий, получающихся при аппроксимации этой векторной меры абсолютно непрерывными мерами. И поэтому каждую из таких траекторий можно назвать решением динамической системы, отвечающим заданной векторной мере.

Случай динамических систем вида (2) и задач управления, связанных с ними, был подробно изучен в кандидатской диссертации автора [4, 5]. Как выяснилось, борелевских мер в этом случае уже недостаточно для того, чтобы описать все возможные достижимые управления. Тогда импульсное управление оказывается чем-то большим, чем просто борелевская мера, и теперь оно – это пара $(\mu; \{v_\tau\})$, где μ – борелевская мера, а $\{v_\tau\}$ – некоторое семейство обычных измеримых и существенно ограниченных функций, которое называется *присоединенным* семейством (его точное определение см. в п. 1.3). По своему смыслу присоединенные управления действуют на разрыве системы, т.е. в тот момент, когда происходит импульс. В работе [5] было показано, что интегральная воронка, возникающая при аппроксимации меры μ абсолютно непрерывными мерами, исчерпывается траекториями, построенными по присоединенным к μ семействам, и обратно, по

[1] Первое слагаемое в (2) необходимо, чтобы включить в наши рассмотрения классическую теорию оптимального управления.

любому присоединенному семейству можно указать на соответствующую аппроксимацию абсолютно непрерывными. Таким образом, интегральная воронка параметризуется присоединенными семействами, а с их помощью из нее удается выбрать одну-единственную траекторию, которая и становится решением, отвечающим данному присоединенному семейству. Другими словами, присоединенное семейство есть не что иное, как способ аппроксимации векторной меры абсолютно непрерывными, или (выражаясь образным, нестрогим языком) есть "схема взаимодействия компонент векторной меры в момент импульса".

Для системы вида (2) следует также отметить случай условия Фробениуса, т.е. когда векторные поля g^j – столбцы матрицы g – попарно коммутируют: $g^j_x g^i \equiv g^i_x g^j \; \forall\, i, j$. Оказывается, что в таком случае введение присоединенного семейства уже излишне, а интегральная воронка, о которой говорилось выше, вырождается в одну траекторию (см. например в [6]).

Более трудным в изучении становится тот случай, когда функция g зависит не только от фазовой переменной, но и от управления u: $g = g(x, u)$; при этом динамическая система имеет вид

$$\dot{x} = f(x, u) + g(x, u)v, \quad v \in K. \tag{3}$$

Легко догадаться, что в этом случае введение дополнительных управлений, действующих на разрывах, нужно даже и тогда, когда условие Фробениуса выполняется. Первая глава посвящена разбору процедуры расширения именно для системы такого общего вида, как (3).

Несмотря на растущую сложность процедуры расширения, появление обычного управления u при управляющей мере не является лишь чисто математическим обобщением. А именно, такие системы управления общего вида (3) могут оказаться полезными и в инженерных приложениях, что показывает пример из параграфа 1.2 работы.

Это обстоятельство указывает на необходимость корректного расширения для нелинейных систем вида (3). В силу нелинейности системы оказывается невозможным корректно пополнить пространство управлений, ограничившись лишь классом борелевских мер. Таким образом, как и в случае $g = g(x)$, импульсное управление становится чем-то большим, чем просто мера. Импульсное управление, получаемое с помощью процедуры пополнения, – это мера плюс присоединенное семейство функций, прикрепленных к атомам меры. Эти дополнительные управляющие функции ведут траекторию системы в тот малый момент, когда происходит импульс. Таким образом расширяется понятие импульсного управления. Новая концепция управления получила название "управление на разрывах системы".

Итак, в главе 1 изучаются вырожденные ситуации в оптимальном управлении, когда оптимальная траектория $x(t)$ становится разрывной, а управляющая система имеет вид (3). В работе строится необходимое расширение задачи, вводятся соответствующие понятия импульсного управления и траектории в расширенной задаче. После чего доказывается принцип максимума Понтрягина для задачи импульсного управления со смешанными ограничениями. Вводимые импульсные управления содержат дополнительные (обычные ограниченные) управления, действующие на разрывах импульсной системы. Этот тип импульсных управлений можно встретить в различных инженерных приложениях, в которых необходимо учитывать быстрые вариации в распределении масс механической системы за тот малый момент времени, когда происходит импульсное воздействие.

Важный вклад в исследование импульсных управлений и смежных вопросов внесли (в нашей стране): А.В. Арутюнов, В.И. Гурман, М.И. Гусев, В.А. Дыхта, С.Т. Завалищин, Н.Н. Красовский, В.Ф. Кротов, А.Б. Куржанский, Б.М. Миллер, Ю.С. Осипов, Д.Е. Охоцимский, Б.Т. Поляк, А.Н. Сесекин, А.Г. Ченцов, А.А. Шананин и многие другие. За рубежом: A. Bressan, D.F. Lawden, F.L. Pereira, F. Rampazzo, R. Rishel, G. Silva, R.B. Vinter, J. Warga и другие. По вопросам оптимального импульсного управления существует обширная литература, часть которой представлена в диссертационной работе.

Во *второй главе* изучаются необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина [3]. Для задач с фазовыми ограничениями такие условия впервые были получены Р.В. Гамкрелидзе в 1959 году (см. [7, 8]) и затем опубликованы в классической монографии [3] (глава 6). Принцип максимума Р.В. Гамкрелидзе был получен в известных предположениях регулярности оптимальной траектории. Несколько позднее, в 1963 году, А.Я. Дубовицкий и А.А. Милютин доказали для задач с фазовыми ограничениями другой принцип максимума, [9]. Несмотря на то, что он, в отличие от принципа максимума Р.В. Гамкрелидзе, был получен без априорного предположения регулярности траектории, во многих интересных случаях принцип максимума в форме А.Я. Дубовицкого и А.А. Милютина вырождается. Этот эффект вырождения был открыт и изучен А.В. Арутюновым и Н.Т. Тынянским в [10], где были предложены первые условия, гарантирующие невырожденность принципа максимума. В последующих работах (см. [11, 12, 13, 14, 15]) эта теория была развита далее и были предложены другие варианты невырождающегося принципа максимума Дубовицкого-Милютина.

В главе 2 получен принцип максимума в новой форме, являющейся дальнейшим развитием той формы, которую предложил Р.В. Гамкрелидзе, но без априорных предположений регулярности оптимальной траектории. Такой принцип максимума выводится непосредственно из невырождающегося варианта принципа максимума в форме А.Я. Дубовицкого и А.А. Милютина, полученного А.В. Арутюновым в [13, 15], за счет перехода к новым сопряженным переменным. При этом уже известные результаты Гамкрелидзе и Дубовицкого-Милютина оказываются следствиями принципа максимума в новой форме. Характеризуя кратко идею, которая лежит в основе этой главы, можно сказать, что принцип максимума для задач с фазовыми ограничениями из [13] эквивалентен принципу максимума в новой форме. Это по сути устанавливает тесную связь между принципом максимума в форме Гамкрелидзе и принципом максимума в форме Дубовицкого-Милютина.

Большой вклад в развитие теории задач с фазовыми ограничениями внесли А.В. Арутюнов, С.М. Асеев, Р.В. Гамкрелидзе, А.В. Дмитрук, А.Я. Дубовицкий, В.А. Дубовицкий, М.И. Зеликин, А.Б. Куржанский, А.С. Матвеев, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский, Е.С. Половинкин, Г.В. Смирнов, Н.Т. Тынянский, M.M. Ferreira, H. Halkin, F.L. Pereira, R.B. Vinter и другие.

В *третьей главе* изучаются достаточные условия существования регулярных нулей у вещественных квадратичных отображений. Доказывается критерий существования регулярного нуля у квадратичного отображения (теорема 3.1, она приводится в разделе “Краткое содержание работы”), который изначально был сформулирован А.В. Арутюновым в виде гипотезы в [16]. Эта теорема находит свое применение в теории анормальных задач, где она устанавливает связь между различными теоремами об обратной функции в окрестности анормальной точки отображения (см. теоремы 1 и 2, приведенные ниже).

Теорема 3.1 и разработанный для ее доказательства аппарат играют существенную роль в следующей главе 4 при выводе необходимых условий экстремума. Таким образом, результаты главы 3 имеют как самостоятельный интерес, так и необходимы в качестве важного математического аппарата.

В *четвертой главе* исследуется вопрос об условиях разрешимости системы нелинейных уравнений без априорных предположений нормальности, а также связанный с ним вопрос о необходимых условиях экстремума в анормальной точке. Отметим, что одним из первых обратил внимание на важность и сложность исследования такого вопроса Г.А. Блисс в своей классической монографии [17].

Пусть заданы линейное пространство X, конечномерное евклидово пространство $Y = \mathbb{R}^k$, отображение $F : X \to Y$ и точка $x_* \in X$. При исследовании отображения F одним из важнейших вопросов является следующий: при каких условиях на F для любого y, достаточно близкого к точке $y_* = F(x_*)$, уравнение $F(x) = y$ имеет решение $\phi(y) : \phi(y_*) = x_*$?

Вначале для простоты будем предполагать, что X – банахово пространство. Пусть отображение $F : X \to Y$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $x_* \in X$. Если точка x_* нормальна, т.е. $\operatorname{im} F'(x_*) = Y$, то ответ дает классическая теорема об обратной функции. А именно, тогда в некоторой окрестности y_* существует такое решение $\phi(y)$ искомого уравнения, что $\phi(y_*) = x_*$ и функция ϕ непрерывно дифференцируема.

Пусть точка x_* анормальна, т.е. $\operatorname{im} F'(x_*) \neq Y$. Тогда классическая теорема об обратной функции не выполняется. (Например, уравнение $F(x) = x_1^2 + x_2^2 = y$ при $x_* = 0, y_* = 0$ имеет решения лишь при $y \geq 0$, а для уравнения $F(x) = x_1^2 - x_2^2 = y$ существует бесконечное число непрерывных функций $\phi(y)$, $y \in \mathbb{R}$, каждая из которых дает решение этого уравнения, однако ни одна из этих функций не является даже липшицевой в нуле.)

Приведем теорему об обратной функции, которая справедлива без априорных предположений нормальности точки x_*. Предположим, что отображение F дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_*, а его вторая производная удовлетворяет условию Липшица этой окрестности. Введем необходимые понятия.

Определение 1 *Пусть*

$$h \in \ker F'(x_*), \quad F''(x_*)[h, h] \in \operatorname{im} F'(x_*). \tag{4}$$

Будем говорить, что в точке x_* отображение F 2-регулярно по направлению h, если

$$F''(x_*)[h, \ker F'(x_*)] + \operatorname{im} F'(x_*) = Y.$$

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования Y на ортогональное дополнение к подпространству $\operatorname{im} F'(x_*)$.

Теорема 1 *Предположим, что существует $h \in X$, для которого имеет место (4) и в точке x_* отображение F 2-регулярно по направлению h. Тогда существуют окрестность O точки y_*, число $c > 0$ и определенная на O непрерывная функция ϕ такие, что для всех $y \in O$ имеет место*

$$F(\phi(y)) = y, \quad \|\phi(y) - x_*\| \leq c \left(|y - y_*| + |P(y - y_*)|^{1/2} \right). \tag{5}$$

Существование решения искомого уравнения $\phi(y)$ для $y \in O$ с указанной оценкой было доказано в [18], а возможность выбора функции ϕ непрерывной была доказана в [19].

Если точка x_* нормальна, то предположение теоремы 1 выполняется автоматически при $h = 0$ и, следовательно, теорема 1 превращается в классическую теорему об обратной функции. Кроме того, когда X, Y бесконечномерные банаховы пространства, эта теорема была доказана в [18], [19] в предположении, что подпространство $\operatorname{im} F'(x_*)$ замкнуто и топологически дополняемо. Случай, когда подпространство $\operatorname{im} F'(x_*)$ не замкнуто, был изучен в [20].

Заметим, что в связи с имеющейся теоремой 1 возникает проблема получения достаточных условий существования вектора h, для которого имеет место (4), и в точке x_* отображение F 2-регулярно по направлению h. Эта проблема подробно освещается в главе 3, где получено такое достаточное условие, см. теорему 3.1.

Для произвольного целого $r \geq 0$ через $\Lambda_r(x_*)$ обозначим множество всех векторов $\lambda : F'(x_*)^*\lambda = 0$, $|\lambda| = 1$, для каждого из которых существует подпространство $\Pi \subseteq X$ такое, что

1) $\operatorname{codim} \Pi \leq r$,

2) $\Pi \subseteq \ker F'(x_*)$,

3) $\langle \lambda, F''(x_*)[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \ \forall \, \xi \in \Pi$.

Теорема 2 *Пусть точка x_* анормальна и*

$$\exists\, h \in \ker F'(x_*) : \quad \langle \lambda, F''(x_*)[h, h] \rangle < 0 \ \ \forall \, \lambda \in \Lambda_{k-1}(x_*). \tag{6}$$

Тогда существуют конечномерное подпространство $M \subseteq X$, окрестность O точки y_*, число $c > 0$ и непрерывная функция $\phi : O \to M$ такие, что для всех $y \in O$ имеет место (5).

Это утверждение вытекает из теорем 1, 3.1 и лемм 1, 2 из [16].

Впервые утверждение такого типа было получено А.В. Арутюновым в [16], где в условии (6) вместо $\Lambda_{k-1}(x_*)$ рассматривалось, вообще говоря, большее множество $\Lambda_k(x_*)$, а непрерывность обратной функции ϕ вообще не рассматривалась. При этом в [16] было доказано, что в предположении выполнения вводимого там условия 2-нормальности условие (6) является необходимым для существования решения ϕ, удовлетворяющего (5).

Итак, если точка x_* нормальна, то положительный ответ на вопрос о существовании решения уравнения $F(x) = y$ с линейной оценкой дает классическая теорема об обратной функции. А более общо: если существует направление h, вдоль которого отображение 2-регулярно в точке x_*, то решение уравнения $F(x) = y$ существует в силу теоремы 1, и оценка на решение (5) является уже линейно-корневой.

Когда точка x_* анормальна, но $\operatorname{codim} \operatorname{im} F'(x_*) = 1$, то ответ на поставленный вопрос дает теорема 2. Действительно, в этом случае существует единственный (с точностью до знака) единичный вектор $\lambda \in \ker F'(x_*)^*$. В силу теоремы 2, если квадратичная форма $\lambda F''(x_*)$ не является знакоопределенной на $\ker F'(x_*)$, то исходное уравнение имеет непрерывное решение ϕ, удовлетворяющее оценке (5). Если же форма $\lambda F''(x_*)$ либо неотрицательно, либо неположительно определена на подпространстве $\ker F'(x_*)$, то исходное уравнение, хотя и может иметь решение, но, как это несложно доказать, ни одно из этих решений не будет удовлетворять оценке (5).

Итак, особый интерес представляет рассмотрение случая, когда

$$\operatorname{codim} \operatorname{im} F'(x_*) \geq 2,$$

а существование 2-регулярного направления $h \in X$ не дано a priori (такого h может и не существовать вообще, и значит, предположения теоремы 2, ввиду теоремы 3.1, могут не выполняться). Выводу достаточных условий существования решений нелинейного уравнения в этом случае посвящена первая часть главы 4.

С вопросом о разрешимости уравнения $F(x) = y$ тесно связан вопрос о необходимых условиях экстремума в нелинейной задаче минимизации,

$$f(x) \to \min, \quad F(x) = 0, \tag{7}$$

где f и F предполагаются достаточно гладкими. Как известно (см., например, [15]), если точка x_*, которая в этой задаче доставляет локальный минимум, анормальна для отображения F, то классический принцип Лагранжа неинформативен (выполняется независимо от минимизируемого функционала), а классические необходимые условия второго порядка могут нарушаться.

Вторая часть главы 4 посвящена необходимым условиям экстремума второго порядка для анормальных конечномерных задач. В этой области на сегодняшний день существует два различных подхода к исследованию. Первый, так называемый индексный подход, основанный на оценке индекса квадратичной формы функции Лагранжа, был разработан в работах А.В. Арутюнова (см. [10, 11, 15, 21]). Другой подход, основанный на том, что всякое направление, по которому отображение $F(x)$, задающее ограничения задачи, 2-регулярно, лежит в касательном конусе в точке x_* ко множеству нулей F, был разработан в работах Е.Р. Авакова (см. [18, 22, 23]).

В главе 4 используется именно индексный подход. Сформулируем строго этот подход и приведем результаты из [15].

Положим $\bar{Y} = \mathbb{R} \times Y$. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) = \lambda^0 f(x) + \langle \lambda, F(x) \rangle,$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda) \in \bar{Y}$, $\lambda^0 \geq 0$ – множители Лагранжа.

Введем в рассмотрение множество множителей Лагранжа

$$\bar{\Lambda}(x_*) := \{\bar{\lambda} \in \bar{Y} : \ \bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda), \ |\bar{\lambda}| = 1, \ \lambda^0 \geq 0, \ \mathcal{L}_x(x_*, \bar{\lambda}) = 0\}.$$

Существуют две возможности.

Пусть вначале точка x_* нормальна, т.е. $\operatorname{im} F'(x_*) = Y$. В этом случае необходимые условия первого и второго порядков хорошо известны. Они заключаются в существовании такого множителя Лагранжа $\bar{\lambda} = (\lambda^0, \lambda)$, что вторая производная функции Лагранжа $\mathcal{L}_{xx}(x_*, \bar{\lambda})$ неотрицательно определена на ядре $\ker F'(x_*)$ оператора $F'(x_*)$, которое в данном случае является касательным подпространством ко множеству $\{x : F(x) = 0\}$ в точке x_*.

Откажемся от предположения нормальности, допустив тем самым, что точка x_* может быть анормальной, т.е. $\operatorname{im} F'(x_*) \neq Y$. Тогда приведенные выше необходимые условия второго порядка, как известно (см. [15]), вообще говоря, могут не выполняться. Тем не менее в [15] были получены необходимые условия второго порядка, которые остаются содержательными без априорных предположений нормальности точки x_*. Для произвольного натурального r рассмотрим множество тех множителей Лагранжа $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$, для каждого из которых существует такое (зависящее от $\bar{\lambda}$) линейное подпространство $\Pi \subseteq X$, что

$$\operatorname{codim} \Pi \leq r, \quad \Pi \subseteq \ker F'(x_*), \quad \mathcal{L}_{xx}(x_*, \bar{\lambda})[x, x] \geq 0 \ \ \forall\, x \in \Pi.$$

Множество таких множителей Лагранжа обозначим через $\bar{\Lambda}_r(x_*)$.

В [15] было получено следующее утверждение.

Теорема 3 *Пусть точка x_* является локальным минимумом в задаче (7). Тогда $\bar{\Lambda}_k(x_*) \neq \varnothing$, и, более того, имеет место*

$$\max_{\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}_k(x_*)} \mathcal{L}_{xx}(x_*, \bar{\lambda})[h, h] \geq 0 \ \ \forall\, h \in \ker F'(x_*).$$

После этого в [24, 25] теорема 3 для анормальных задач была усилена. А именно, было доказано, что если точка x_* анормальна, то в приведенной выше формулировке необходимых условий множество $\bar{\Lambda}_k(x_*)$ можно заменить на, вообще говоря, меньшее множество $\bar{\Lambda}_{k-1}(x_*)$.

Вторая часть главы 4 посвящена дальнейшему развитию этой теории. В определение множества $\bar{\Lambda}_{k-1}(x_*)$ добавлены дополнительные условия, содержащие векторы l (см. определение множества $\bar{\mathcal{M}}_r$ ниже). В результате утверждение теоремы 3 усиливается.

Основной вклад в исследование анормальных задач и вопросов, с ними связанных (а это теоремы об обратной и неявной функции, условия экстремума второго и высших порядков и т.д.), внесли Е.Р. Аваков, А.А. Аграчев, А.В. Арутюнов, Р.В. Гамкрелидзе, А.Ф. Измаилов, А.А. Милютин и другие. Настоящая теория по существу была создана советско-российской математической школой.

В *пятой главе* изучаются необходимые условия слабого минимума второго порядка для задачи оптимального управления со смешанными ограничениями без априорных предположений нормальности (управляемости) рассматриваемого допустимого процесса. Целью этой главы является демонстрация того, каким образом результаты и методы главы 4 могут быть использованы в теории оптимального управления, при изучении локального экстремума. Точно так же, как и в конечномерных задачах, необходимые условия экстремума второго порядка в оптимальном управлении или вариационном исчислении оказываются нужными для сужения множества "подозрительных" на минимум процессов управления в смысле условий Эйлера-Лагранжа. Условия второго порядка несут некоторую дополнительную информацию об экстремуме, и это мотивирует их исследование.

Условия второго порядка в теории оптимального управления для различных задач изучались в работах А.А. Аграчева, А.В. Арутюнова, Р.В. Гамкрелидзе, А.В. Дмитрука, А.А. Милютина, Н.П. Осмоловского и многих других. Например, в работе [21] были получены необходимые условия второго порядка в классе обобщенных управлений Р.В. Гамкрелидзе. Их отличительной чертой от известных ранее необходимых условий является то, что они справедливы и содержательны и без априорных предположений нормальности рассматриваемого допустимого процесса. В главе некоторые результаты из [21] переносятся на случай задач со слабым минимумом в классе обычных управлений.

Цель работы. Конечной целью работы является: расширение теоретических знаний об условиях оптимальности в различных классах экстремальных задач, развитие и расширение теории классического вариационного исчисления и оптимального управления на задачи с разрывными траекториями, доказательство теорем существования в классе импульсных управлений, развитие теории принципа максимума Л.С. Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, установление связи между различными условиями оптимальности в задачах с фазовыми ограничениями, получение новых свойств квадратичных отображений, получение новых теорем об обратной функции в окрестности анормальной точки, усиление необходимых условий экстремума второго порядка в анормальных задачах оптимизации, усиление необходимых условий оптимальности второго порядка в анормальных задачах оптимального управления.

Общая методика исследования. При решении изложенных выше задач и доказательстве теорем используются элементы: математического, функционального, негладкого, многозначного и выпуклого анализов, теории дифференциальных уравнений, вещественной алгебраической геометрии, а также теории экстремальных задач и принципа максимума. Основными инструментами исследования необходимых условий в задаче импульсного управления является вариационный принцип Экланда, а также разрывная замена времени Лебега. Доказательство критерия существования регулярного нуля у квадратичного отображения основывается на теоремах и методах вещественной алгебраической геометрии, таких, как полуалгебраическая триангуляция полуалгебраического компакта, леммы об отборе кривых, на понятии размерности полуалгебраического множества и т.д. Используются элементы теории гомотопий. Доказательство теорем об обратной функции, как и в [16], проводится методом "от противного" и использует уже известные необходимые условия экстремума второго порядка в анормальной точке. Вывод же новых необходимых условий экстремума в анормальной точке основан на получаемых в работе теореме об обратной функции и критерии существования регулярного нуля.

Научная новизна. Все результаты диссертационной работы являются новыми. Корректное расширение в класс разрывных траекторий для систем вида (3) построено впервые. Оно включает в себя:

1) Пополнение класса управлений. Определение управления расширенной задачи как элемента некоторого метрического пространства. Понятие "близости" управлений.

2) Пополнение класса траекторий. Определение решения динамической системы расширенной задачи. Корректность решения относительно вводимой метрики: близкие управления порождают близкие траектории.

3) Теоремы существования решения. Необходимо указать на те условия, при которых предлагаемая процедура расширения будет заведомо успешной, в том смысле, что в расширенной задаче решение уже будет существовать.

Принцип максимума для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями – это новый теоретический результат. Он проливает свет на ту связь, которая существует между различными условиями оптимальности в этой области, а это условия в форме Гамкрелидзе и в форме Дубовицкого-Милютина.

Критерий существования регулярного нуля у квадратичного отображения – это новый результат, который представляет ценность для теории анормальных задач. Он устанавливает связь между различными теоремами об обратной функции в окрестности анормальной точки, а также позволяет получить новые содержательные необходимые условия экстремума второго порядка для анормальных задач.

Теорема об обратной функции – это новый теоретический результат, который дает достаточные условия локальной разрешимости некоторых систем нелинейных уравнений, для которых ранее условий разрешимости не существовало. В частности, систем квадратичных уравнений, задаваемых квадратичным отображением, у которого нет регулярных нулей.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит в основном теоретический характер и открывает следующие возможности. Концепция импульсного управления, вводимая в работе, позволяет моделировать процессы управления импульсного типа, в которых возможно управлять динамической системой в сам момент действия импульса. Например, в том случае, если необходимо учесть быстрые вариации в распределении масс механической системы за тот малый момент времени, когда происходит импульсное воздействие. Подобного рода процессы управления можно найти в различных инженерных приложениях: от задач робототехники до задачи об оптимальном маневре летательного/космического аппарата. Теоретическая ценность результатов в целом обсуждалась выше в секции "Научная новизна".

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН под руководством профессора А.В. Арутюнова, на семинаре кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ под руководством профессора В.М. Тихомирова, на семинаре кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ под руководством профессора Ф.П. Васильева, на семинаре Института проблем управления РАН под руководством профессора Б.Т. Поляка, на семинарах ВЦ РАН по асимптотической теории дифференциальных уравнений Н.Н. Боголюбова под руководством профессора Е.А. Гребеникова, на семинарах Института систем и робототехники, функционирующего на базе университета г. Порто (Португалия) под руководством профессора F. Pereira, а также на различных конференциях в России и за рубежом (список прилагается).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 24 печатных работы в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка обозначений и списка литературы. Текст работы изложен на 281 странице, список литературы включает 101 наименование.

Краткое содержание

Приведем основной результат главы 1. Это принцип максимума Л.С. Понтрягина в классе импульсных управлений.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \varphi(p) \to \min, \\ dx = f(x,u,t)dt + g(x,u,t)d\vartheta, \ t \in T, \\ p = (x_0, x_1) \in S, \\ R(x,u,t) \in C, \\ \vartheta = (\mu, \{u_\tau, v_\tau\}), \ \mathrm{range}(\mu) \subseteq K. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $T = [t_0, t_1]$ – фиксированный отрезок времени; $p = (x_0, x_1)$, где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$; S, C – замкнутые множества; K – выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^k$; $\vartheta = (\mu, \{u_\tau, v_\tau\})$ – импульсное управление.

Приведем точные определения импульсного управления и решения $x(\cdot)$, удовлетворяющего дифференциальной связи

$$dx = f(x,u,t)dt + g(x,u,t)d\vartheta, \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \tag{9}$$

фигурирующей в (8). Эти определения отвечают той концепции расширения с управлениями на разрывах, о которой шла речь выше. В классе таких импульсных управлений будут справедливы теоремы существования решения филипповского типа (см. § 1.7 работы).

Рассмотрим борелевскую векторную меру μ, принимающую значения в конусе K. Через $|\mu|$ обозначим ее вариацию (вариация векторной меры μ – это сумма вариаций всех ее компонент, т.е. $|\mu| = \sum_{i=1}^{k} |\mu^i|$).

Обозначим через $V(\mu)$ множество скалярных неотрицательных борелевских мер ν таких, что существуют борелевские векторные меры μ_i, принимающие значения в конусе K, для которых $(\mu_i, |\mu_i|) \xrightarrow{w} (\mu, \nu)$.

Здесь $\xrightarrow{w}$ означает сходимость в слабой* топологии, т.е. каждая координата меры μ_i и мера $|\mu_i|$ сходятся слабо* в $C^*(T)$. Пусть $\nu \in V(\mu)$ и $\tau \in T$. Рассмотрим измеримую функцию $v_\tau : [0,1] \to K$ такую, что

$$\sum_{j=1}^{k} |v_\tau^j(s)| = \nu(\tau) \ \text{ п.в. } s \in [0,1] \ \text{ и } \ \int_0^1 v_\tau(s)ds = \mu(\tau). \tag{10}$$

Здесь, $\mu(\tau) := \mu(\{\tau\}) \in K$ – это значение μ на одноточечном множестве $\{\tau\}$. Семейство вектор-функций $\{u_\tau, v_\tau\}$, которое зависит от вещественного параметра $\tau \in T$, назовем присоединенным к векторной мере μ, если существует скалярная борелевская мера $\nu \in V(\mu)$ такая, что для каждого τ выполняются условия (10), а вектор-функции $u_\tau : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ являются измеримыми и существенно ограниченными равномерно по τ.

Определение 1.2 *Элемент $\vartheta = (\mu; \{u_\tau, v_\tau\})$ назовем импульсным управлением в задаче (8), если μ – это такая борелевская векторная мера, принимающая значения в конусе K, что семейство вектор-функций $\{u_\tau, v_\tau\}$ является присоединенным к μ.*

Возьмем произвольные импульсное управление $\vartheta = (\mu, \{u_\tau, v_\tau\})$, число $\tau \in T$ и вектор $a \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\chi(\cdot) = \chi(\cdot, \tau, a)$ решение следующей динамической системы (если оно существует)

$$\begin{cases} \dot{\chi}(s) = g(\chi(s), u_\tau(s), \tau)v_\tau(s), \ s \in [0,1], \\ \chi(0) = a. \end{cases}$$

Функцию ограниченной вариации $x(t)$, заданную на отрезке времени T, назовем решением дифференциального уравнения (9), отвечающим управлению (u, ϑ) и начальному значению x_0, если $x(t_0) = x_0$ и для каждого $t \in (t_0, t_1]$ имеет место:

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x,u,\varsigma)d\varsigma + \int_{[t_0,t]} g(x,u,\varsigma)d\mu_{\text{c}} + \\ + \sum_{\tau \le t}[x_\tau(1) - x_\tau(0)], \end{aligned} \tag{11}$$

где $x_\tau(\cdot) := \chi(\cdot, \tau, x(\tau^-))$ и μ_{c} означает непрерывную компоненту меры μ. Заметим, что сумма в (11) определена корректно, поскольку, согласно (10), существует не более чем счетное множество точек τ, где функция v_τ отлична от нуля.

Такое определение оказывается корректным с точки зрения пополнения задачи, и в его силу можно описать интегральную воронку решений, возникающую при аппроксимации борелевской меры μ абсолютно непрерывными мерами (см. лемму 1.1).

Сформулируем принцип максимума. Положим

$$U(x,t) := \{u \in \mathbb{R}^m : \ R(x,u,t) \in C\}.$$

Рассмотрим функцию Понтрягина

$$H(x,u,\psi,t) := \langle f(x,u,t), \psi \rangle,$$

а через Q обозначим следующую вектор-функцию

$$Q(x,u,\psi,t) := g^*(x,u,t)\psi.$$

В предположении ограниченности множества $U(x,t)$ и регулярности смешанных ограничений, вводимой в главе 1, а также при довольно общих предположениях относительно функций, входящих в постановку задачи (см. главу 1), получена следующая

Теорема 1.1 *Пусть процесс $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\vartheta})$ является оптимальным в задаче (8).*

Тогда существуют число $\lambda \geq 0$, вектор-функция с ограниченным изменением $\psi(t)$, измеримая вектор-функция $\eta \in \mathbb{L}_1^r(T)$, $\eta(t) \in \check{N}_C(\hat{R}(t))$ п.в. t, а для каждой точки $\tau \in \mathrm{Ds}(|\hat{\vartheta}|)$ существуют свои собственные, уже абсолютно непрерывная вектор-функция $\psi_\tau(s)$ и существенно ограниченная вектор-функция $\eta_\tau \in \mathbb{L}_\infty^r([0,1])$, $\eta_\tau(s) \in \check{N}_C(\hat{R}_\tau(s))$ п.в. s, определенные на отрезке $[0,1]$, такие, что

$$\begin{aligned} &\lambda + |\psi(t)| \neq 0, \ \forall\, t \in T, \\ &\lambda + |\psi_\tau(s)| \neq 0, \ \forall\, s \in [0,1], \ \forall\, \tau \in \mathrm{Ds}(|\hat{\vartheta}|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(t) = \psi(t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \hat{H}}{\partial x}(\varsigma) d\tau - \int_{[t_0,t]} \frac{\partial}{\partial x} \langle \hat{Q}(\varsigma), d\hat{\mu}_{\mathrm{c}} \rangle + \\ + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \hat{R}^*}{\partial x}(\varsigma)\eta(\varsigma) d\varsigma + \sum_{\tau \in \mathrm{Ds}(|\hat{\vartheta}|):\, \tau \leq t} [\psi_\tau(1) - \psi_\tau(0)], \ \ \forall\, t \in (t_0, t_1], \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}_\tau}{ds}(s) = \hat{g}_\tau(s)\hat{v}_\tau(s), \\ \dfrac{d\psi_\tau}{ds}(s) = -\dfrac{\partial}{\partial x} \langle \hat{Q}_\tau(s), \hat{v}_\tau(s) \rangle + \dfrac{\partial \hat{R}_\tau^*}{\partial x}(s)\eta_\tau(s), \\ \hat{x}_\tau(0) = \hat{x}(\tau^-), \ \psi_\tau(0) = \psi(\tau^-), \\ s \in [0,1], \ \forall\, \tau \in \mathrm{Ds}(|\hat{\vartheta}|), \end{cases}$$

$$(\psi(t_0), -\psi(t_1)) \in \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p}(\hat{p}) + N_S(\hat{p}),$$

$$\max_{u \in \hat{U}(t)} \hat{H}(u,t) = \hat{H}(t), \quad \text{п.в.}\, t \in T,$$

$$
\begin{cases}
\max\limits_{v\in K}\max\limits_{u\in\hat U(t)}\left\langle \hat Q(u,t),v\right\rangle = 0\ \ \forall\, t\in T,\\
\max\limits_{v\in K}\max\limits_{u\in\hat U_\tau(s)}\left\langle \hat Q_\tau(u,s),v\right\rangle =\\
=\left\langle \hat Q_\tau(s),\hat v_\tau(s)\right\rangle = 0,\ \ \text{\textit{п.в.}}\, s\in[0,1]\ \forall\,\tau\in \mathrm{Ds}(|\hat\vartheta|),\\
\displaystyle\int_{[t_0,t]}\langle \hat Q(t),d\hat\mu_{\mathrm{c}}\rangle = 0\ \ \forall\, t\in T,
\end{cases}
\tag{12}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \hat H}{\partial u}(t)+\dfrac{\partial}{\partial u}\left\langle \hat Q(t),\dfrac{d\hat\mu_{\mathrm{ac}}}{dt}\right\rangle = \dfrac{\partial \hat R^*}{\partial u}(t)\eta(t),\ \ \text{\textit{п.в.}}\, t\in T,\\
\displaystyle\int_{[t_0,t]}\frac{\partial}{\partial u}\langle \hat Q(\varsigma),d\hat\mu_{\mathrm{sc}}\rangle = 0\ \ \forall\, t\in T,\\
\dfrac{\partial}{\partial u}\langle \hat Q_\tau(s),\hat v_\tau(s)\rangle = \dfrac{\partial \hat R^*_\tau}{\partial u}(s)\eta_\tau(s),\ \ \text{\textit{п.в.}}\, s\in[0,1],\ \forall\,\tau\in \mathrm{Ds}(|\hat\vartheta|),
\end{cases}
$$

где $\hat\mu_{\mathrm{ac}}$, $\hat\mu_{\mathrm{sc}}$ есть абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты меры $\hat\mu_{\mathrm{c}}$.

Здесь “крышка” над функцией или многозначным отображением от переменных (x,u,ψ) означает, что вместо опущенных аргументов подставляются оптимальные значения, а индекс τ при функции означает, что подставляются оптимальные значения на разрыве в точке τ. Здесь также $N_S(y)$ – нормальный конус Мордуховича, а $\check N_S(y)$ – его овыпукление, или нормальный конус Кларка.

Условие (12) представляет собой условие максимума для импульсной части динамики g. Оно имеет несколько громоздкий вид, поскольку рассматривается случай векторной меры. Но если предположить, что $k=1$, а $K=[0,\infty)$ – т.е. рассмотреть случай неотрицательной скалярной меры μ в импульсном управлении ϑ, – то смысл условия (12) раскрывается легче. В этом случае оно говорит:

$$
\begin{cases}
\max\limits_{u\in\hat U(t)}\hat Q(u,t)\le 0\ \ \forall\, t\in T,\\
\max\limits_{u\in\hat U(t)}\hat Q(u,t) = 0\ \ \forall\, t\in \mathrm{supp}(\hat\mu),\\
\max\limits_{u\in\hat U_\tau(s)}\hat Q_\tau(u,s) = \hat Q_\tau(s) = 0\ \ \text{п.в.}\, s\in[0,1].
\end{cases}
$$

Иными словами, импульсный гамильтониан всегда равен нулю на носителе оптимальной меры и никогда не больше, чем ноль.

Подобного рода принцип максимума, но без смешанных ограничений и при дополнительных предположениях выпуклости векторграммы и гладкости был получен Б.М. Миллером в [26]. Однако автор не вводил определения импульсного управления, а решение системы (9) определил в приближенном смысле на языке сходящихся на T (и только на T) последовательностей траекторий (определения траектории и управления, как и сама концепция расширения задачи, данные выше, в работе [26] не приведены).

Приведем основной результат главы 2. Он заключается в принципе максимума для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями в форме Р.В. Гамкрелидзе без априорных предположений регулярности оптимальной траектории.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} K_0(p) + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u,t)dt \to \min, \\ \dot{x} = f(x,u,t),\ t \in [t_0,t_1],\ t_0 < t_1, \\ G(x,t) \le 0, \\ R(x,u,t) \le 0, \\ K_1(p) = 0,\ K_2(p) \le 0, \\ p = (x_0, x_1, t_0, t_1). \end{cases} \tag{13}$$

Здесь моменты времени t_0 и t_1 априори не предполагаются фиксированными, x – фазовая переменная, принимающая значения в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, а $u \in \mathbb{R}^m$ – управляющий параметр. В качестве класса допустимых управлений рассматриваются измеримые существенно ограниченные функции $u(\cdot)$.

Пусть (p^*, x^*, u^*) – допустимый процесс в задаче (13). Здесь $p^* = (x_0^*, x_1^*, t_0^*, t_1^*)$. Положим $T = [t_0^*, t_1^*]$.

Введем функцию

$$M(x,u,t) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) f(x,u,t) + \frac{\partial G}{\partial t}(x,t),$$

которую впервые предложил рассматривать Р.В. Гамкрелидзе (в его обозначениях, функция $p(x,u)$, см. [7]).

Рассмотрим *расширенную* функцию Понтрягина

$$\bar{H}(x,u,\psi,\mu,\lambda^0,t) = \langle \psi, f(x,u,t) \rangle - \langle \mu, M(x,u,t) \rangle - \lambda^0 f_0(x,u,t),$$

и малый лагранжиан

$$l(p,\lambda) = \lambda^0 K_0(p) + \left\langle \lambda^1, K_1(p) \right\rangle + \left\langle \lambda^2, K_2(p) \right\rangle,$$

где $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2)$.

Определение 2.3 *Будем говорить, что процесс (p^*, x^*, u^*) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, если существуют вектор $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2) : \lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^1 \in \mathbb{R}^{d(K_1)}$, $\lambda^2 \in \mathbb{R}^{d(K_2)}$, $\lambda^0 \geq 0$, $\lambda^2 \geq 0$, $\left\langle \lambda^2, K_2(p^*) \right\rangle = 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi : T \to \mathbb{R}^n$, функция $\mu : T \to \mathbb{R}^{d(G)}$, и измеримая существенно ограниченная функция $r : T \to \mathbb{R}^{d(R)}$, такие, что λ^0, ψ, μ одновременно не равны нулю и*

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}(t) + r(t)\frac{\partial R}{\partial x}(t) \ \text{ п.в. } t,$$
$$\psi(t_s^*) = (-1)^{s+1}\frac{\partial l}{\partial x_s}(p^*, \lambda) + \mu(t_s^*)\frac{\partial G}{\partial x_s}(t_s^*), \quad s = 1, 2,$$
$$\max_{u \in U(t)} \bar{H}(u, t) = \bar{H}(t) \ \text{ п.в. } t,$$
$$\dot{h} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}(t) - r(t)\frac{\partial R}{\partial t}(t) \ \text{ п.в. } t,$$
$$h(t_s^*) = (-1)^{s}\frac{\partial l}{\partial t_s}(p^*, \lambda) - \mu(t_s^*)\frac{\partial G}{\partial t}(t_s^*), \quad s = 1, 2,$$
$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(t) = r(t)\frac{\partial R}{\partial u}(t) \ \text{ п.в. } t,$$
$$\langle r(t), R(t) \rangle = 0, \ r(t) \geq 0 \ \text{ п.в. } t,$$

где $h(t) := \max_{u \in U(t)} \bar{H}(u, t)$.

Кроме того, функция h абсолютно непрерывна на отрезке T, а вектор-функция μ удовлетворяет следующим свойствам:

а) каждая из функций μ^j постоянна на любом сегменте времени $S = [s_1, s_2]$, на котором оптимальная траектория целиком лежит во внутренности множества, задаваемого j-ым фазовым ограничением, т.е. когда $G^j(s) < 0 \ \forall s \in S$;

б) вектор-функция μ непрерывна слева на интервале (t_0^*, t_1^*) и, кроме того, $\mu(t_1^*) = 0$;

в) каждая из функций μ^j (нестрого) монотонно убывает.

При определенных предположениях регулярности и согласованности ограничений, вводимых в главе 2, была получена следующая

Теорема 2.1 *Пусть процесс (p^*, x^*, u^*) является оптимальным в задаче (13). Предположим, что концевые ограничения в точке p^* регулярны, фазовые и смешанные ограничения регулярны и в точке p^* фазовые ограничения согласованы с концевыми.*

Тогда процесс (p^*, x^*, u^*) удовлетворяет принципу максимума.

Без априорных предположений регулярности принцип максимума из теоремы 2.1 может вырождаться. Поэтому далее в работе доказываются теоремы 2.2, 2.3, в которых при выполнении определенного вида условий управляемости в концевых точках относительно фазовых ограничений или регулярности рассматриваемого процесса вырождения происходить не будет, так как будут верны более сильные, чем в теореме 2.1, условия нетривиальности.

Сформулируем главный результат главы 3. Приведем здесь его более простую версию для конечномерных пространств. Пусть задано квадратичное отображение $Q : X \to Y$, где $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$. Иными словами, Q – это набор из k квадратичных форм на X. Вектор x: $Q(x) = 0$ называется регулярным нулем квадратичного отображения Q, если $Q'(x)X = Y$. Здесь $Q'(x)$ обозначает обычную производную или якобиан отображения Q в точке x.

Введем необходимые обозначения. Для произвольного вектора $\lambda = (\lambda^1, .., \lambda^k) \in Y$ положим

$$\lambda Q = \sum_{j=1}^{k} \lambda^j Q_j,$$

где Q_j обозначает j-ую координату отображения Q. Через $\operatorname{ind} q$ будем обозначать индекс квадратичной формы q. Для целого числа r через Λ_r обозначим множество таких векторов $\lambda \in Y$, $\lambda \neq 0$, что $\operatorname{ind} \lambda Q \leq r$.

Введем в рассмотрение условие:

A) $\exists\, h \in X$: $\langle \lambda, \bar{y} \rangle < 0 \ \forall\, \lambda \in \Lambda_{k-1}$, где $\bar{y} = Q[h, h]$.

Если $\Lambda_{k-1} = \varnothing$, то условие A) считается выполненным автоматически.

Теорема 3.1 *Пусть квадратичное отображение Q удовлетворяет условию A). Тогда у него существует регулярный нуль.*

Впервые условие A) было введено в работе [16], в которой было доказано (см. лемму 2), что если условие A) выполняется, то квадратичное отображение Q сюръективно (т.е. $Q(X) = Y$).

При $k = 1$ утверждение теоремы очевидно. При $k = 2$ оно относительно несложно доказывается. Усилить утверждение теоремы 3.1 при $k \geq 2$, заменив в условии A) множество Λ_{k-1} меньшим множеством Λ_{k-2}, нельзя. Это показывает пример квадратичного отображения $Q(x) = (x_1x_2,\ x_1^2 - x_2^2)$, действующего из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, у которого нет нетривиальных нулей.

Впервые достаточные условия существования регулярного нуля у квадратичного отображения, заключающиеся в том, что $\Lambda_{k-1} = \varnothing$, были получены в [27]. Затем в [28] было доказано, что если $\Lambda_{k-1} = \varnothing$, то множество регулярных нулей всюду плотно во множестве N. Наконец, в [16] был доказан ослабленный вариант теоремы 3.1, а именно, что если $\exists\, h \in X$: $\langle \lambda, \bar{y} \rangle < 0 \;\forall\, \lambda \in \Lambda_k$, где $\bar{y} = Q[h,h]$, и конус $\operatorname{conv} \Lambda_r$ (conv – выпуклая оболочка) при $r = \frac{1}{2}k(k+3)$ является острым, т.е. не содержит ни одной прямой, то у Q существует регулярный нуль. Отметим, что если $X = \mathbb{R}^n$, и $n \gg k$ (например, $n > 2(k-2)$, и $(n-k-1)(n-k) > 2(k-1)$), то последнее предположение является условием общего положения, так как в этом случае множество квадратичных отображений Q, для которых конус $\operatorname{conv} \Lambda_{k-1}$ является острым, всюду плотно в пространстве всех квадратичных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$ (см. [15], §1.9).

Доказательство теоремы 3.1 потребовало определенных усилий и обращения к методам вещественной алгебраической геометрии, [29]. Были использованы такие теоремы и понятия, как полуалгебраическая триангуляция полуалгебраического компакта, леммы об отборе кривых, размерность полуалгебраического множества и т.д.

Приведем основные результаты главы 4. Пусть, как и выше, $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$. Для целого $r \geq 0$ через Π_r обозначим линейное подпространство в X, коразмерность которого в X не превосходит r. Пусть $\operatorname{cone}\{M\}$ означает коническую оболочку множества M.

Пусть $y, d \in Y$, а $r \geq 0$ – целое число. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r(x_*; y, d) \;\; := \;\; \{\lambda \in Y^* : \;\; & \exists\, l \in \ker F'(x_*),\; \exists\, \Pi_{r+1}, \Pi_r : \\ & \Pi_{r+1} \subseteq \Pi_r \subseteq \ker F'(x_*),\; \Pi_{r+1} \subseteq \ker(PF''(x_*)l), \\ & |\lambda| = 1,\; l \neq 0,\; \langle \lambda, d \rangle \leq 0, \\ & F'(x_*)^*\lambda = 0, \\ & \exists\, \nu \in Y^* : \; F'(x_*)^*\nu + (F''(x_*)l)^*\lambda = 0, \\ & \langle \lambda, F''(x_*)[\xi,\xi] \rangle \geq 0 \;\forall\, \xi \in \Pi_r, \\ & F''(x_*)[l,l] \in \operatorname{cone}\{y\} + \operatorname{cone}\{d\} + \operatorname{im} F'(x_*)\}. \end{aligned}$$

Через $B_\delta(y)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса δ с центром в точке y. Для $\delta > 0$ положим

$$\Upsilon_\delta(d) := B_\delta(y_0) \cap (y_0 + \operatorname{cone} B_\delta(d)).$$

Определение 4.1 *Пусть $d \in Y$. Скажем, что при $y \in Y$ для отображения F в точке x_* выполняется условие $\mathbf{A}_r(x_*; y, d)$, если*

a) $y \notin \operatorname{im} F'(x_*) - \operatorname{cone}\{d\}$;

b) $y \in F''(x_*)(\ker F'(x_*))$;

c) $\langle \lambda, y \rangle < 0 \;\forall\, \lambda \in \mathcal{M}_r(x_*; y, d)$.

Имеют место следующие теоремы об обратной функции.

Теорема 4.1 *Пусть задан вектор $d \in Y$, причем $d \notin \operatorname{im} F'(x_*)$. Предположим, что при некотором $\hat{y} \in Y$ для отображения F в точке x_* выполняется условие $\mathbf{A}_{k-2}(x_*; \hat{y}, d)$. Тогда существуют положительные числа δ и const (зависящие от $\hat{y}, d$) такие, что для всех $y \in \Upsilon_\delta(d)$ существует $x(y)$:*

$$F(x(y)) = y, \quad |x(y) - x_*| \leq \mathrm{const}\,\sqrt{|y - y_0|}. \tag{14}$$

Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r(x_*) \ := \ \{\lambda \in Y : \ &\exists\, l \in X, \ \exists\, \Pi_{r+1}, \Pi_r : \\ &\Pi_{r+1} \subseteq \Pi_r \cap \ker F'(x_*) \cap \ker(PF''(x_*)l), \\ &|\lambda| = 1, \ \ l \neq 0, \\ &F'(x_*)^*\lambda = 0, \\ &\exists\, \nu \in Y : \ F'(x_*)^*\nu + (F''(x_*)l)^*\lambda = 0, \\ &\langle \lambda, F''(x_*)[\xi, \xi] \rangle \geq 0 \ \forall\, \xi \in \Pi_r\}.\end{aligned}$$

Теорема 4.2 *Пусть $F'(x_*) = 0$ и*

$$\exists\, \hat{y} \in F''(x_*)(X) : \ \ \langle \hat{y}, \lambda \rangle < 0 \ \ \forall\, \lambda \in \mathcal{M}_{k-2}(x_*).$$

Тогда существуют окрестность O точки y_* и число $c > 0$ такие, что для любого $y \in O$ существует вектор $x = x(y)$, для которого выполняется (14).

Теорема 4.3 *Пусть $\mathcal{M}_{k-2}(x_*) = \varnothing$. Тогда существуют окрестность O точки y_* и число $c > 0$ такие, что для всех $y \in O$ существует вектор $x = x(y)$, для которого выполняется*

$$F(x(y)) = y, \quad |x(y) - x_*| \leq c\left(|y - y_*| + |P(y - y_*)|^{1/2}\right).$$

В работе строятся примеры квадратичных отображений, у которых нет регулярных нулей (и тогда предположения теорем 1, 2 нарушаются), но для них выполнены предположения теорем 4.1–4.3.

Сформулируем результаты второй части главы 4. Это необходимые условия экстремума второго порядка в анормальной точке.

Положим $\Phi = (f, F)$, $d = (-1, 0, .., 0) \in \bar{Y}$. Пусть $\bar{y} \in \bar{Y}$. Пусть $\bar{P}$ обозначает оператор ортогонального проектирования пространства $\bar{Y}$ на его подпространство $(\operatorname{im} \Phi'(x_*))^\perp$. Для целых $r \geq 0$ рассмотрим множество

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{M}}_r(x_*;\bar{y}) \;=\; \{&\bar{\lambda}\in\bar{\Lambda}(x_*):\ \exists\, l\in\ker F'(x_*):\\
&\langle f'(x_*),l\rangle\le 0,\ l\ne 0,\\
&\exists\,\Pi_{r+1},\Pi_r:\ \Pi_{r+1}\subseteq\Pi_r\subseteq\ker F'(x_*),\\
&\Pi_{r+1}\subseteq\ker f'(x_*),\ \Pi_{r+1}\subseteq\ker\bar{P}\Phi''(x_*)l,\\
&\exists\,\bar{\nu}=(\nu^0,\nu),\ \nu^0\ge 0;\ \mathcal{L}_x(x_*,\bar{\nu})+\mathcal{L}_{xx}(x_*,\bar{\lambda})l=0,\\
&\mathcal{L}_{xx}(x_*,\bar{\lambda})[\xi,\xi]\ge 0\ \forall\,\xi\in\Pi_r,\\
&\Phi''(x_*)[l,l]\in\operatorname{cone}\{\bar{y}\}+\operatorname{cone}\{d\}+\operatorname{im}\Phi'(x_*)\}.
\end{aligned}
$$

Теорема 4.7 *Пусть анормальная точка x_* является локальным минимумом в задаче (7). Тогда*

$$
\max_{\bar{\lambda}\in\bar{\mathcal{M}}_{k-1}(x_*;\Phi''(x_*)[h,h])}\mathcal{L}_{xx}(x_*,\bar{\lambda})[h,h]\ge 0\ \ \forall\,h\in\ker F'(x_*):\ \Phi''(x_*)[h,h]\notin\operatorname{im}\Phi'(x_*)-\operatorname{cone}\{d\}.
$$

В главе 5 изучается следующая задача

$$
\begin{cases}
K_0(p)\to\min,\\
\dot{x}=f(x,u,t),\ t\in T=[t_0,t_1],\\
R(x,u,t)\in C,\\
K_1(p)\le 0,\ K_2(p)=0,\\
p=(x_0,x_1),\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Здесь, как и ранее, $x\in\mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $u\in\mathbb{R}^m$ – управляющий параметр, t – время, а $t_0<t_1$ – заданные моменты времени. Вектор $p=(x_0,x_1)$ называется концевым. Заданные отображения $K_i:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{k_i}$, $i=1,2$ определяют концевые ограничения. Заданное отображение $R:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^r$ определяет смешанные ограничения $R(x,u,t)\in C$. Здесь множество $C\subset\mathbb{R}^r$ является выпуклым замкнутым конусом, который имеет вид

$$
C=\{y\in\mathbb{R}^r:\ y^i\le 0,\ i=1,..,r_1,\ y^i=0,\ i=r_1+1,..,r\},\ \ 0\le r_1\le r.
$$

Напомним, что допустимый процесс $\{\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)\}$ называется слабым (локальным) минимумом в задаче (15), если существует такое $\hat{\varepsilon}>0$, что для любого допустимого процесса $\{x(\cdot),u(\cdot)\}$, удовлетворяющего условию $|p-\hat{p}|+\|u-\hat{u}\|_{\mathbb{L}_\infty}\le\hat{\varepsilon}$, выполнено неравенство $K_0(\hat{p})\le K_0(p)$. Здесь $\hat{p}=(\hat{x}_0,\hat{x}_1)$, $\hat{x}_0=\hat{x}(t_0)$, $\hat{x}_1=\hat{x}(t_1)$.

Рассмотрим допустимый процесс $\{\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)\}$, являющийся слабым минимумом. Для удобства будем считать, что $K_1(\hat{p})=0$, $K_0(\hat{p})=0$. Если над некоторой функцией, зависящей от (x,u), ставится крышка, то это означает, что вместо опущенных аргументов в нее подставляются оптимальные значения $\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)$. Например: $\hat{f}(t) = f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)$. То же обозначение используется для частных производных по x, u.

Будем предполагать, что смешанные ограничения регулярны вдоль рассматриваемого допустимого процесса (см. определение 5.2).

Рассмотрим матрицу $\Gamma_0(t)$, являющуюся псевдообратной матрицей к $\frac{\partial \hat{R}}{\partial u}(t)$, и матрицу активных индексов $D_0(t)$; точные их определения можно найти в § 5.3.

Пусть Δ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = Z\Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(t) - \frac{\partial \hat{R}}{\partial x}(t)\Gamma_0(t)\frac{\partial \hat{f}}{\partial u}(t)\Big).$$

Обозначим через $P(t)$ матрицу ортогонального проектирования $\mathbb{R}^m$ на подпространство $\ker \frac{\partial \hat{R}}{\partial u}(t)D_0(t)$ и положим

$$A = \frac{\partial K}{\partial x_0}(\hat{p}) + \Delta(t_1)\frac{\partial K}{\partial x_1}(\hat{p}), \quad B(t) = P(t)\frac{\partial \hat{f}}{\partial u}(t)\Delta^{-1}(t)\Delta(t_1)\frac{\partial K}{\partial x_1}(\hat{p}).$$

Введем в рассмотрение *расширенную матрицу управляемости*

$$Q = A^*A + \int_{t_0}^{t_1} B^*(t)B(t)dt.$$

Говорят, что допустимый процесс $\{\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\}$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа, если существует $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2) \neq 0$, удовлетворяющее условиям $\lambda^0 \geq 0$, $\lambda^1 \geq 0$, и существенно ограниченная измеримая вектор-функция η, удовлетворяющая условию $\eta(t) \in N_C(\hat{R}(t))$ п.в. $t \in T$, такие, что для вектор-функции ψ, являющейся решением задачи Коши

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x}(t, \psi) + \eta(t)\frac{\partial \hat{R}^*}{\partial x}(t), \ \ \psi(t_0) = \frac{\partial l}{\partial x_0}(\hat{p}, \lambda),$$

имеет место $\psi(t_1) = -\frac{\partial l}{\partial x_1}(\hat{p}, \lambda)$,

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u}(t, \psi(t)) - \eta(t)\frac{\partial \hat{R}^*}{\partial u}(t) = 0 \ \text{ п.в. } t \in T.$$

Обозначим через $\Lambda = \Lambda(\hat{x}, \hat{u})$ множество таких λ, которые отвечают процессу $\{\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\}$ в силу уравнения Эйлера-Лагранжа.

Положим $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{L}^m_\infty(T)$. Пусть $(\xi, \delta u) \in \mathcal{X}$ и $\delta x(\cdot)$ – соответствующее решение уравнения в вариациях

$$\dot{\delta x} = \delta x\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(t) + \delta u(t)\frac{\partial \hat{f}}{\partial u}(t), \ \ t \in T, \quad \delta x(t_0) = \xi.$$

В $\mathcal{X}$ рассмотрим подпространства

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_K = \{(\xi, \delta u) \in \mathcal{X} :\ (\xi, \delta x(t_1))\tfrac{\partial K}{\partial p}(\hat{p}) = 0\},\\
&\mathcal{N}_R = \{(\xi, \delta u) \in \mathcal{X} :\ \langle \delta x(t), \tfrac{\partial \hat{R}^i}{\partial x}(t)\rangle + \langle \delta u(t), \tfrac{\partial \hat{R}^i}{\partial u}(t)\rangle = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, i \in I_0(t) \text{ п.в. } t \in T\},\\
&\mathcal{N} = \mathcal{N}_K \cap \mathcal{N}_R.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество пар $(\xi, \delta u) \in \mathcal{X}$ таких, что

$$\langle (\xi, \delta x(t_1)), \frac{\partial K_0}{\partial p}(\hat{p})\rangle \le 0,\ (\xi, \delta x(t_1))\frac{\partial K_1}{\partial p}(\hat{p}) \le 0,\ (\xi, \delta x(t_1))\frac{\partial K_2}{\partial p}(\hat{p}) = 0,$$

$$\delta x(t)\frac{\partial \hat{R}}{\partial x}(t) + \delta u(t)\frac{\partial \hat{R}}{\partial u}(t) \in T_C(\hat{R}(t)) \ \text{ п.в. } t \in T.$$

Здесь $T_C(y)$ – касательный конус ко множеству C в точке y. Множество $\mathcal{K}$ является конусом, который не пуст (так как содержит нуль). Для каждого $\lambda \in \Lambda$ на $\mathcal{X}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\lambda(\xi, \delta u) = \frac{\partial^2 l}{\partial p^2}(\hat{p}, \lambda)[(\xi, \delta x(t_1))]^2 -\\
- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 \hat{H}(t, \psi(t))}{\partial (x, u)^2}[(\delta x(t), \delta u(t))]^2 dt +\\
+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), \frac{\partial^2 \hat{R}(t)}{\partial (x, u)^2}[(\delta x(t), \delta u(t))]^2\rangle dt.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\Lambda_a = \Lambda_a(\hat{x}, \hat{u})$ множество тех $\lambda \in \Lambda$, для которых индекс формы $\mathcal{A}_\lambda$ на подпространстве $\mathcal{N} = \mathcal{N}_K \cap \mathcal{N}_R$ не превышает числа $q = \dim\ker Q$.

Теорема 5.1 *Пусть допустимый процесс $\{\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\}$ является слабым локальным минимумом в задаче (15) и смешанные ограничения регулярны. Тогда $\Lambda_a \ne \varnothing$ и*

$$\max_{\lambda \in \Lambda_a,\, |\lambda| = 1} \mathcal{A}_\lambda(\xi, \delta u) \ge 0 \ \ \forall\, (\xi, \delta u) \in \mathcal{K}.$$

В анормальной ситуации, т.е. когда расширенная матрица управляемости Q вырождена (и тогда $q > 0$), в определении множества Λ_a можно брать только те λ, для которых индекс квадратичной формы $\mathcal{A}_\lambda$ не превосходит числа $q - 1$.

Основные результаты работы

1. Предложена новая концепция расширения классического оптимального управления на задачи с разрывными траекториями. Введены соответствующие понятия импульсного управления и траектории расширенной задачи. Импульсное управление, помимо традиционной борелевской меры, содержит также в себе, как часть, обычные ограниченные управления, возникающие на разрывах управляемой динамической системы в момент действия импульса. Каждое такое дополнительное обычное управление присоединено к атому управляющей меры и по своему назначению определяет развитие траектории системы на ее разрыве. Рассмотрена задача с импульсными управлениями при наличии смешанных ограничений. Сформулирован и доказан принцип максимума Понтрягина. Условия регулярности смешанных ограничений ослаблены по сравнению с известными в литературе условиями, и глобальная регулярность ограничений заменена на локальную. Предложен модельный пример механической системы, показывающий, что введенные импульсные управления могут оказаться полезными в приложениях. В предположениях филипповского типа о выпуклости вектограммы установлено существование решения задачи оптимального импульсного управления.

2. Рассмотрена задача оптимального управления с фазовыми ограничениями в ее классической формулировке. Получен принцип максимума в форме Р.В. Гамкрелидзе без априорных предположений регулярности оптимальной траектории. Установлена связь между этим принципом максимума и другими условиями оптимальности. Рассмотрены различные типы условий регулярности, выполнение которых гарантирует невырожденность принципа максимума.

3. Изучены различные свойства вещественных квадратичных отображений. Получены достаточные условия существования регулярных нулей у квадратичных отображений.

4. Изучены достаточные условия разрешимости нелинейных уравнений в окрестности анормальной точки. Получен ряд теорем, содержащих подобного рода условия, которые также гарантируют линейно-корневую оценку на решение. Рассмотрен вопрос о необходимых условиях экстремума второго порядка в конечномерных анормальных задачах оптимизации. Получен ряд теорем, содержащих такие условия и усиливающих известные ранее результаты в этой области.

5. Рассмотрены анормальные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств. Получены необходимые условия слабого минимума второго порядка.

Благодарности

В первую очередь выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю профессору А.В. Арутюнову за постоянную поддержку. Многие результаты получены в сотрудничестве с ним.

За плодотворное сотрудничество я также благодарен профессорам Е.Р. Авакову и Ф.Л. Перейре.

Я также признателен профессорам А.А. Аграчеву, Ф.П. Васильеву, В.А. Дыхте, А.Ф. Измаилову, М.И. Зеликину, Г.Г. Магарил-Ильяеву, Б.Ш. Мордуховичу, К.Ю. Осипенко, Е.С. Половинкину, Б.Т. Поляку и В.М. Тихомирову за содержательные и полезные обсуждения.

Цитированная в автореферате литература

[1] D. Hilbert. “Mathematical Problems”. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, no. 10 (1902), pp. 437–479.

[2] B.S. Mordukhovich. Existence of optimal controls. J. Soviet Math. 7 (1977), pp. 850–886.

[3] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

[4] Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю. Необходимые условия минимума в задаче оптимального импульсного управления. Нелинейная динамика и управление. Вып. 4. Сб. статей под редакцией С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: Физматлит, 2004, с. 205–240.

[5] Карамзин Д.Ю. Необходимые условия оптимальности в различных классах экстремальных задач управления. Дисс. к.ф.-м.н., ВМиК МГУ, 2003.

[6] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000.

[7] Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах. Докл. АН СССР, 1959, Т. 125, №3, с. 475–478.

[8] Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. Изв. АН СССР, 1960, Т. 24, №3, с. 315–356.

[9] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Докл. АН СССР, 1963, Т. 149, №4, с. 759–762.

[10] Арутюнов А.В., Тынянский Н.Т. О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями. Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика, 1984, №4, с. 60–68.

[11] Арутюнов А.В. К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями. Докл. АН СССР, 1985, Т. 280, №5, с. 1033–1037.

[12] Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А. Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением концевых и фазовых ограничений. УМН, 1985, Т. 40, №2, с. 175–176.

[13] Арутюнов А.В. К теории принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Докл. АН СССР, 1989, Т. 304, №1, с. 11–14.

[14] R.B. Vinter, M.M.A. Ferreira. When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate? // J. Math. Anal. and Appl. 1994. V. 187. pp. 438–467.

[15] Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи, М.: Факториал, 1997.

[16] Арутюнов А.В. Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки, Матем. сб., 191:1 (2000), с. 3–26.

[17] Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению. Москва, 1950.

[18] Аваков Е.Р. Теоремы об оценках в окрестности вырожденной точки. Мат. заметки, 47, 1990, с. 3–13.

[19] Арутюнов А.В. Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности. ЖВМиМФ, 46, №2, 2006, с. 205–215.

[20] Аваков Е.Р., Арутюнов А.В. Теорема об обратной функции и условия экстремума для анормальных задач с незамкнутым образом, Матем. сб., 196:9 (2005), с. 3–22.

[21] Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математический анализ, 1989, Т. 27, с. 147–235.

[22] Аваков Е.Р. Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 25:5 (1985), с. 680–693.

[23] Аваков Е.Р. Необходимые условия экстремума для гладких анормальных задач с ограничениями типа равенств и неравенств, Матем. заметки, 45:6 (1989), с. 3–11.

[24] Арутюнов А.В., Ячимович В. К теории экстремума для анормальных задач, Вестн. МГУ. Сер. Вычисл. матем. и кибернетика. 2000. №1. с. 34–40.

[25] Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю. Необходимые условия экстремума в анормальной экстремальной задаче с ограничениями типа равенств. ЖВМиМФ. Т. 46, №8, 2006, с. 1363–1368.

[26] Миллер Б.М. Условия оптимальности в задачах обобщенного управления. Автоматика и телемеханика, 1992, №5, с. 50–58.

[27] A.A. Agrachev, A.V. Sarychev. Abnormal sub-Riemannian geodesics: Morse index and rigidity // Ann. Inst. Henri Poincare. 1996. 13, N 6. p. 635–690.

[28] Арутюнов А.В. Некоторые свойства квадратичных отображений. Вестник МГУ, сер. 15, ВМиК, 1999, №2, с. 30–32.

[29] J. Bochnak, M. Coste, M.F. Roy. Real Algebraic Geometry. Springer: A Series of Modern Surveys in Mathematics, 1998.

Публикации автора по теме диссертации

(24 работы в реферируемых журналах)

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Расширение и возмущение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Вестник МГУ. Сер. 15, ВМиК, №2, 2002, с. 31–35.

* Д.Ю. Карамзин. К теории принципа максимума в задачах с фазовыми ограничениями. Вестник МГУ. Сер. 15, ВМиК, №4, 2002, с. 23–31.

* А.В. Арутюнов, В.Н. Бурков, А.Ю. Заложнев, Д.Ю. Карамзин. Задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций. Автоматика и телемеханика, №5, 2002, с. 108–119.

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия минимума в задаче оптимального импульсного управления. Нелинейная динамика и управление. Вып. 4. Сб. статей под редакцией С.В. Емельянова, С.К. Коровина. М.: Физматлит, 2004, с. 205–240.

* A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L Pereira. A nondegenerate Maximum Principle for the impulse control problem with state constraints. SIAM J. Control Optim. Vol. 43, №5, 2005, p. 1812–1843.

* Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия минимума в задаче оптимального импульсного управления. Современная математика и ее приложения. Т. 24, 2005, с. 74–134. (D.Yu. Karamzin. Necessary Conditions of the Minimum in an Impulse Optimal Control Problem. Journal of Mathematical Sciences. Vol. 139, №6, 2006, pp. 7087–7150.)

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия слабого минимума в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями. Дифференциальные уравнения. Т. 41, №11, 2005, с. 1458–1468.

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия экстремума в анормальной экстремальной задаче с ограничениями типа равенств. Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 46, №8, 2006, с. 1363–1368.

* Д.Ю. Карамзин. К теории необходимых условий экстремума для конечномерных задач при наличии неравенств. Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 46, №11, 2006, с. 1950–1961.

* Д.Ю. Карамзин. Принцип максимума в задаче управления при ограниченных фазовых координатах. Автоматика и телемеханика, №2, 2007, с. 26–38.

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия минимума в анормальных задачах с геометрическими ограничениями. Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 47, №3, 2007, с. 364–375.

* Д.Ю. Карамзин. Необходимые условия экстремума в задаче управления с фазовыми ограничениями. Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 47, №7, 2007, с. 1123–1150.

* A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L. Pereira. Necessary Conditions of Optimality for Problems with Equality and Inequality Constraints: The Abnormal Case. J. Optim. Theory Appl. (2009) 140: 391–408.

* Д.Ю. Карамзин. Исследование достаточных условий существования регулярного нуля у квадратичных отображений. Математический форум. Т. 2. Исследования по выпуклому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2009, с. 84–97. (Итоги науки. ЮФО).

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин, Ф. Перейра. Об импульсных задачах управления с ограничениями: управление скачками систем. Современная математика и ее приложения. Том 65 (2009), с. 48–81. (A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L. Pereira. On constrained impulsive control problems: controlling system jumps. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 165, №6, 2010, pp. 654–687.)

* A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L. Pereira. Maximum principle in problems with mixed constraints under weak assumptions of regularity. Optimization. Vol. 59, №7, October 2010, pp. 1067–1083.

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин, Ф. Перейра. Принцип максимума Л.С. Понтрягина для задач оптимального импульсного управления. Доклады Академии наук, 2010, том 432, №4, с. 439–442.

* A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L. Pereira. On a generalization of the impulsive control concept: controlling system jumps. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol. 29, №2, February 2011, pp. 403–415.

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Регулярные нули квадратичных отображений и их приложение. Математический сборник, том 202, №6, 2011, с. 3–28.

* А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин, Ф. Перейра. Принцип максимума для задач оптимального управления при ограниченных фазовых координатах в форме Р.В. Гамкрелидзе и его связь с другими условиями оптимальности. Доклады Академии наук, 2011, том 436, №6, с. 738–742.

* A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L. Pereira. The Maximum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints by R.V. Gamkrelidze: Revisited. J. Optim. Theory Appl. (2011) 149: pp. 474–493.

* A.V. Arutyunov, D.Yu. Karamzin, F.L. Pereira. Pontryagin's maximum principle for constrained impulsive control problems. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. Vol. 75, №3, February 2012, pp. 1045–1057.

* Е.Р. Аваков, А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. Обратная функция в окрестности анормальной точки гладкого отображения. Доклады Академии наук, 2012, том 444, №1, с. 1–4.

* Е.Р. Аваков, А.В. Арутюнов, Д.Ю. Карамзин. О необходимых условиях экстремума второго порядка в конечномерных анормальных задачах оптимизации. Доклады Академии наук, 2012, том 444, №2, с. 1–3.

Конференции, на которых были доложены результаты диссертации

- Международная конференция “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”. Екатеринбург, 22-26 июня, 2005.
- Международная конференция “Тихонов и современная математика”, Москва, 19-25 июня, 2006.
- XVI всероссийская конференция “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам”, Абрау-Дюрсо, 2006.
- International Conference “Computer Algebra in Scientific Computing – 2006” (CASC–2006), Chisinau, Moldova, September 11-15, 2006.
- International Conference “Extremal Problems in Complex and Real Analysis” (EPCoRA–2007), Moscow, May 21-25, 2007.
- IX Международная Четаевская конференция “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”. Иркутск, 12-16 июня, 2007.
- International Conference “Differential Equations and Topology” dedicated to the 100th Anniversary of the birthday of L.S. Pontryagin, Moscow, Russia, June 17-22, 2008.
- The 8th Portuguese Conference on Automatic Control (CONTROLO–2008), Vila Real, Portugal, July 21-23, 2008.
- Workshop on Control, Nonsmooth Analysis and Optimization in honour of F. Clarke and R. Vinter on the occasion of their 60th birthday. Porto, Portugal, May 4-8, 2009.
- The 23rd European Conference on Operational Research. Bonn, Germany, July 5-8, 2009.
- International Conference “Control and Optimization of Dynamical Systems – CODS–2009”, Tashkent, Uzbekistan, September 28-30, 2009.
- The 24th European Conference on Operational Research, Lisbon, Portugal, July 11-14, 2010.
- VI Московская международная конференция по исследованию операций, 19-23 октября, 2010.
- The 6th International Workshop Computer Algebra Systems in Teaching and Research (CASTR–2011), Siedlce, Poland, February 2-6, 2011.
- Workshop “Optimization–2011”, Costa da Caparica, Portugal, July 24-27, 2011.
- The 8th International ISAAC Congress, Moscow, 22-27 August, 2011.
- Колмогоровские чтения – 2011, Тамбов, 10-14 октября 2011.