

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Хромов Денис Валерьевич

**Модели и алгоритмы построения криволинейных
скелетов пространственных форм**

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре математических методов прогнозирования
факультета вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Местецкий Леонид Моисеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН
Щепин Евгений Витальевич
кандидат физико-математических наук
Конушин Антон Сергеевич

Ведущая организация: Институт систем обработки изображений РАН

Защита состоится 26 апреля 2013 г. в 11 часов на заседании диссертационного
совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М.В.
Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ
имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус. Желающие присутствовать на
заседании диссертационного совета должны сообщить об этом за два дня по
тел. 939-30-10 (для оформления заявки на пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ име-
ни М.В. Ломоносова. С текстом автореферата можно ознакомиться на офици-
альном сайте ВМК МГУ <http://cs.msu.ru> в разделе «Наука» — «Работа диссер-
тационных советов» — «Д 501.001.44».

Автореферат разослан «_____» _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Костенко Валерий Алексеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы В настоящее время возникает большое количество практических задач, связанных с анализом формы трёхмерных объектов. Это связано с широким распространением устройств, позволяющих получать цифровые трёхмерные модели объектов реального мира. Такие модели, как правило, представляют собой воксельные изображения, облака точек или полигональные поверхности. Все эти структуры данных на практике обладают очень большой размерностью и в явном виде не содержат в себе информации о форме исходных трёхмерных объектов с «человеческой» точки зрения. Проблема распознавания формы пространственных объектов, описанных таким образом, является весьма актуальной в различных приложениях. Поэтому задача распознавания формы может вызывать существенные трудности. Кроме того, зачастую требуется построить алгоритмы, работающие в режиме реального времени, что накладывает дополнительные ограничения на эффективность.

В задачах анализа формы плоских изображений хорошо зарекомендовало себя применение аппарата непрерывных скелетов. Скелетом двумерной области обычно называется её серединная ось — множество центров максимальных вписанных в эту область кругов. Скелет плоской области представляет собой планарную укладку некоторого графа, удачно схватывающего основные геометрические свойства фигуры. Визуально скелет выглядит как утончение исходной формы до набора одномерных линий. Извлекать из такого графа признаковую информацию для задач распознавания и классификации значительно проще, чем из исходного гранично-контурного описания двумерной области.

Существует аналогичный подход в задачах обработки трёхмерных изображений. Серединная ось области в трёхмерном пространстве определяется как множество центров максимальных вписанных в эту область шаров. Однако в отличие от двумерного случая, трёхмерная серединная ось не является укладкой графа в пространстве и в общем случае представляет собой двумерное стра-

тифицированное многообразие. Это множество может обладать очень сложной внутренней структурой, поэтому его применение зачастую не приводит к существенному упрощению решаемой задачи.

Поэтому существует большая потребность в математической модели, описывающей аналог двумерной срединной оси в трёхмерном пространстве именно как пространственную укладку некоторого графа. В литературе такие объекты принято называть криволинейными скелетами (*curve-skeletons*). Несмотря на большое количество публикаций по этой теме, общего строгого определения криволинейного скелета до сих пор не существует. В одной из наиболее полных обзорных работ¹ криволинейный скелет неформально определяется как одномерное представление трёхмерного объекта; в качестве формальных критериев перечислены свойства, выполнение которых желательно для хороших математических моделей скелетов. К этим свойствам относятся сохранение топологии, инвариантность относительно изометрических преобразований, возможность реконструкции исходного объекта по скелету, минимальная толщина (для воксельных изображений), центрированность, достоверность, возможность основанной на структуре скелета сегментации, устойчивость к малым преобразованиям поверхности объекта, гладкость образующих скелет кривых, наличие иерархических отношений между различными элементами скелета.

В многочисленных публикациях обычно предлагаются разнообразные эвристики для построения скелетов, при этом формального математического определения скелета не даётся. Существующие попытки формализовать понятие криволинейного скелета пока не привели к выработке общепринятой математической модели. В качестве наиболее известного примера можно привести определение скелета как множества центров максимальных вписанных в исходный объект шаров, таких, что их точки касания могут быть соединены как минимум

¹ Cornea N., Silver D. Curve-skeleton properties, applications, and algorithms // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2007. Vol. 13. P. 530–548.

двумя различными геодезическими линиями по поверхности объекта². Однако определяемый таким образом скелет в общем случае не является одномерным (он может содержать двумерные страты для объектов, поверхность которых не является гладкой).

К настоящему моменту накоплено очень большое количество способов построения криволинейных скелетов. Идеи, на которых эти подходы основаны, чрезвычайно разнообразны. При этом общепризнанного формального определения не существует (в отличие от двумерного случая, где использование серединной оси в качестве непрерывного скелетного представления области практически не имеет сравнимых альтернатив). Таким образом, не существует какого-либо обоснованного метода для оценки и сравнения различных подходов между собой, если не считать таковым визуальную оценку качества скелетов, получаемых при помощи различных алгоритмов. Поэтому актуальной является задача построения общего определения трёхмерного криволинейного скелета, а также математического аппарата для строгой численной оценки качества различных конкретных способов построения скелетов.

Цель диссертационной работы Целью настоящей работы является исследование и разработка математической модели трёхмерных криволинейных скелетов, позволяющей проводить строгую оценку качества различных конкретных способов построения скелетов, а также построение эффективных алгоритмов, действующих в рамках заданной модели. Для того, чтобы продемонстрировать практическую полезность предлагаемого подхода, необходима практическая реализация разработанных алгоритмов.

Предлагаемый подход основан на аппроксимации исходного трёхмерного объекта при помощи пространственных циркуляров — геометрических примити-

² Dey T., Sun J. Defining and computing curve-skeletons with medial geodesic function // Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing, SGP '06. Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland: Eurographics Association, 2006. P. 143–152.

вов, для которых криволинейный скелет определяется однозначно. Циркуляры, с одной стороны, могут рассматриваться в качестве приближенного представления трёхмерных объектов самой разнообразной формы, а с другой — для них естественным и однозначным образом вводится понятие криволинейного скелета. Отсюда вытекает основная идея метода: всякую трёхмерную фигуру можно с некоторой погрешностью аппроксимировать при помощи пространственного циркуляра, тогда скелетом этой фигуры можно считать скелет аппроксимирующего её циркуляра. При этом численной оценкой качества скелета является величина погрешности аппроксимации.

Таким образом, алгоритм построения криволинейного скелета сводится к аппроксимации фигуры пространственным циркуляром. Такая аппроксимация выполняется в два шага. Сначала ищется начальное приближение циркуляра, топология осей которого хорошо воспроизводит топологию искомого скелета. Затем происходит итеративная подгонка приближенного циркуляра согласно используемому критерию качества.

Научная задача Основная задача настоящей работы заключается в разработке общей математической модели криволинейных скелетов. Важно, чтобы при этом было дано строгое и обоснованное определение, предоставляющее возможность численно оценить качество скелета. Критерий качества должен иметь ясный физический смысл и соответствовать интуитивным представлениям о том, что такое трёхмерный криволинейный скелет; кроме того, практическая ценность этого критерия должна быть явным образом продемонстрирована на реальных примерах.

Для того, чтобы оценить полезность предлагаемого подхода, в работе рассматриваются как конкретные алгоритмы построения локально оптимальных скелетов в рамках предложенной модели, так и их практические приложения.

Методы исследования Работа носит теоретико-экспериментальный характер. Теоретическая часть содержит в себе элементы дифференциальной геометрии, вычислительных методов, теории графов, теории сложности алгоритмов и вычислений. Для проведения экспериментов создан специализированный программный комплекс, входными данными для которого послужили как синтетические трёхмерные модели, так и модели реальных объектов, полученные методами трёхмерного сканирования.

Научная значимость состоит в разработке формальной математической модели криволинейных скелетов. Предложенная модель даёт теоретическую основу для разработки и сравнения алгоритмов скелетизации пространственных объектов. Наличие численной меры качества скелетов позволяет формулировать задачу трёхмерной скелетизации как задачу оптимизации некоторой функции; в работе описан основанный на этом подходе алгоритм, использующий численные методы для уточнения получаемых скелетов.

Практическая значимость Трёхмерные криволинейные скелеты находят широкое применение в многочисленных задачах анализа формы трёхмерных изображений. В работе предлагаются эффективные алгоритмы построения скелетов, которые могут быть использованы в практических приложениях (например, в медицине, биометрической идентификации, распознавании жестов).

На защиту выносятся следующие научные результаты:

- Математическая модель трёхмерных криволинейных скелетов, основанная на аппроксимации исходного трёхмерного объекта при помощи пространственных циркуляров, для которых криволинейный скелет определяется однозначно.
- Мера близости между циркуляром и пространственным объектом, основанная на скелетном отображении — продолжении гомотопии, связываю-

щей внутреннюю область объекта и оси циркуляра, на поверхность объекта.

- Метод построения трёхмерных скелетов при помощи численной оптимизации меры близости, описывающей точность аппроксимации исходного объекта пространственным циркуляром.
- Алгоритм построения начального приближения скелета при помощи графов Роба поверхности исходного пространственного объекта.
- Алгоритм построения начального приближения скелета при помощи двумерных скелетов плоских проекций, основанный на оценке качества проекций при помощи введённой меры близости.
- Алгоритм итеративной оптимизации меры близости методом наискорейшего градиентного спуска, в котором вычисление градиента и шага осуществляется на основе скелетного отображения.

Апробация работы Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

- научно-техническая конференция «Техническое зрение в системах управления» TVCS 2011 (Москва, Россия, 2011 год) [2];
- международная конференция «Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems» ACIVS 2011 (Гент, Бельгия, 2011 год) [4];
- всероссийская конференция «Математические методы распознавания образов» ММРО-15 (Петрозаводск, Россия, 2011 год) [1];
- международная конференция «21th International Conference on Computer Graphics and Vision» GraphiCon 2011 (Москва, Россия, 2011 год) [7];

- международная конференция «24th Canadian Conference on Computational Geometry» CCCG 2012 (Шарлоттаун, Канада, 2012 год) [8];
- ярославская международная конференция «Дискретная геометрия», посвященная 100-летию А.Д. Александрова (Ярославль, Россия, 2012 год) [6].

Описания отдельных результатов работы включены в отчёты по проектам РФФИ 11-01-00783, 12-07-31107.

Личный вклад. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Постановка задачи была выполнена совместно с научным руководителем.

Публикации по теме диссертации в изданиях списка ВАК: [3, 4]. Другие публикации по теме диссертации: [1, 2, 5–8].

Структура и объём диссертационной работы. Работа состоит из оглавления, введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Содержание работы изложено на 133 страницах. Список литературы включает 59 наименований.

Содержание работы

Введение содержит общую характеристику работы, обоснование актуальности темы исследования, цели и задачи диссертационного исследования.

В первой главе рассматривается общая постановка задачи построения трёхмерных криволинейных скелетов, проведен обзор существующих подходов к решению этой задачи.

В разделе 1.1 содержится краткий обзор существующих способов цифрового геометрического описания трёхмерных объектов, и указаны прикладные области, в которых возникают задачи, связанные с анализом трёхмерных форм.

В разделе 1.2 рассматривается понятие серединной оси области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Серединной осью открытого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется множество точек этого множества, для которых существует не менее двух ближайших точек на границе этого множества:*

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{a} \in \Omega \mid \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial\Omega : \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{z} \in \partial\Omega \|\mathbf{a} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\|\}. \quad (1)$$

Перечислены основные свойства серединных осей. Показано, что серединные оси плоских объектов представляют собой геометрические графы и потому используются в задачах распознавания двумерных изображений, но серединные оси трёхмерных объектов являются существенно более сложным объектом (двумерным стратифицированным многообразием), поэтому их практическое применение ограничено.

В разделе 1.3 вводится понятие трёхмерного криволинейного скелета, представляющего собой обобщение плоской серединной оси для трёхмерных объектов; в ряде практических задач применение криволинейных скелетов оказывается более продуктивным по сравнению с использованием трёхмерных серединных осей. Проведен обзор публикаций, посвящённых построению трёхмерных скелетов; показано, что несмотря на разнообразие существующих алгоритмов и наличие общего интуитивного представления о том, что должен представлять собой криволинейный скелет, математического определения трёхмерного криволинейного скелета не существует. Поэтому анализ и сравнение существующих алгоритмов между собой на практике трудновыполнимы и обычно сводятся к визуальной оценке результатов, получаемых тем или иным алгоритмом.

Во второй главе описана предлагаемая математическая модель трёхмерных криволинейных скелетов. В основе модели лежит сведение скелетизации к аппроксимации трёхмерной формы при помощи набора жирных кривых — пространственных объектов, для которых криволинейный скелет определяется естественным образом. При этом скелет исходного объекта определяется как объединение осевых линий жирных кривых, а мера сходства, относительно которой производится аппроксимация, является численной оценкой качества полученного скелета.

В разделе 2.1 вводится понятие жирной кривой как объединения шаров, центры которых расположены на некоторой гладкой кривой (рис. 1); анализируются некоторые свойства жирных кривых.

Определение 2. Пусть γ — гладкая кривая в \mathbb{R}^n , не имеющая особых точек. Пусть, кроме того, на ней задана неотрицательная гладкая функция r

$$r : \gamma \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

которая не обращается в нуль нигде, кроме, может быть, концевых точек γ . Тогда жирной кривой с осью γ и радиальной функцией r называется множество точек

$$\mathcal{F}(\gamma, r) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} \in \gamma : \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \leq r(\mathbf{x})\}. \quad (3)$$

Концевые точки кривой γ называются вершинами жирной кривой.

Определение 3. Пусть \mathcal{F} — жирная кривая в \mathbb{R}^n с осью γ и радиальной функцией r , причём ось и радиальная функция параметризованы на отрезке от 0 до 1. Огибающей поверхностью жирной кривой \mathcal{F} называется огибающая семейства n -мерных шаров

$$B(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \gamma(t)\|^2 \leq r^2(t), 0 < t < 1\}, \quad (4)$$

если такая огибающая существует.

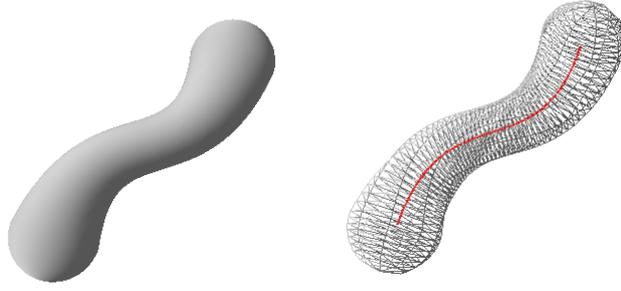


Рис. 1: Жирная кривая и её ось.

Теорема 1. Для того, чтобы у жирной кривой существовала огибающая, необходимо и достаточно, чтобы для всех $0 < t < 1$ выполнялось $|\dot{r}| \leq \|\nabla\gamma\|$.

В качестве частного случая жирных кривых, удобных для практического применения, предложен класс жирных кривых Безье.

Определение 4. Пусть заданы $(k + 1)$ точка

$$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

и $(k + 1)$ неотрицательное число

$$r_0, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}_+. \quad (6)$$

Тогда жирной кривой Безье порядка k с опорным множеством (\mathbf{p}_i, r_i) называется жирная кривая с осью

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^k \mathbf{p}_i b_k^i(t) \quad (7)$$

и радиальной функцией

$$r(t) = \sum_{i=0}^k r_i b_k^i(t), \quad (8)$$

где b_k^i — полиномы Бернштейна

$$b_k^i(t) = \frac{k!}{i!(k-i)!} t^i (1-t)^{k-i}. \quad (9)$$

В разделе 2.2 вводится понятие пространственного циркуляра, представляющего собой объединение жирных кривых (рис. 2); описывается применение циркуляров для аппроксимации трёхмерных объектов.

Определение 5. Пусть V — конечное множество точек \mathbb{R}^n . Циркуляром \mathcal{C} с множеством вершин V называется объединение конечного множества жирных кривых, вершины которых содержатся в V .

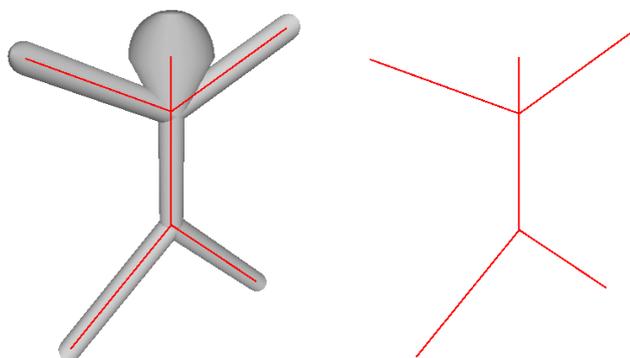


Рис. 2: Циркуляр и оси образующих его жирных линий.

Определение 6. Графом связности циркуляра с множеством вершин V называется граф, множество вершин которого совпадает с множеством V , а две вершины v_1, v_2 этого графа соединены ребром тогда и только тогда, когда пространственный циркуляр содержит в себе жирную кривую с парой концевых вершин v_1, v_2 .

Пространственный циркуляр представляет собой фигуру, составленную из набора примитивов (жирных линий). Пусть задана некоторая мера близости между фигурами в \mathbb{R}^n (например, метрика Хаусдорфа; подробнее вопрос о выборе меры близости рассматривается в разделе 2.3), тогда можно поставить задачу об аппроксимации произвольной фигуры Ω циркуляром с заданной погрешностью. Если для фигуры Ω построен аппроксимирующий её циркуляр \mathcal{C} , то естественно определить скелет Ω как множество осей циркуляра.

Определение 7. Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , \mathcal{C} — аппроксимирующий её циркуляр. Тогда оси циркуляра \mathcal{C} называются криволинейным скелетом фигуры Ω .

Взаимосвязь между трёхмерной формой и аппроксимирующим её циркуляром описывается в терминах скелетной гомотопии и скелетного отображения. Скелетная гомотопия является математической формализацией интуитивного представления о скелете как о некотором «уточнении» исходной формы; скелетное отображение, вычисляемое для заданной скелетной гомотопии, описывает взаимосвязь между граничными точками формы и точками скелета.

Определение 8. Пусть Ω — фигура, $\bar{\Omega}$ — её замыкание, \mathcal{A} — оси аппроксимирующего её циркуляра, причём $\mathcal{A} \subset \bar{\Omega}$. Скелетной гомотопией называется непрерывное отображение

$$F : [0; 1] \times \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}, \quad (10)$$

такое, что для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ выполнено

$$F(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, F(1, \mathbf{x}) \in \tilde{\mathcal{A}}, \quad (11)$$

где $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{term}$, \mathcal{A}_{term} — множество точек, каждая из которой является концевой ровно для одной кривой из множества осей жирных кривых, составляющих \mathcal{C} .

Определение 9. Пусть даны фигура Ω , аппроксимирующий её циркуляр \mathcal{C} с осями \mathcal{A} и скелетная гомотопия $F(t, \mathbf{x})$. Скелетным отображением σ называется функция, которая каждой граничной точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ставит в соответствие пересечение замыканий

$$\sigma(\mathbf{x}) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{F(1, \Omega_\varepsilon(\mathbf{x}))}, \quad (12)$$

где

$$\Omega_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Omega : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}. \quad (13)$$

Теорема 2. *Скелетное отображение σ каждой точке границы $\partial\Omega$ ставит в соответствие непустое замкнутое подмножество осей циркуляра.*

В разделе 2.3 описывается мера сходства, задающая погрешность аппроксимации фигуры пространственным циркуляром. Показано, что меры, традиционно используемые при сравнении подмножеств \mathbb{R}^n (например, метрика Хаусдорфа), не подходят для решения задачи скелетизации в рамках описываемой модели. Предложена мера, основанная на использовании скелетного отображения.

Определение 10. *Погрешностью аппроксимации объекта Ω циркуляром \mathcal{C} называется величина*

$$\varepsilon(\Omega, \mathcal{C}) = \int_{\mathbf{x} \in S = \partial\Omega} \max_{\mathbf{y} \in \sigma(\mathbf{x})} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - r^2(\mathbf{y}))^2 dS, \quad (14)$$

где $r(\mathbf{y})$ — значение радиальной функции в точке $\mathbf{y} \in \mathcal{C}$, а $\sigma(\mathbf{x})$ — скелетное отображение.

В разделе 2.4 задача аппроксимации формы циркуляром рассмотрена для плоских многоугольных фигур. Показано, что предложенная модель действительно является обобщением двумерного скелета: серединная ось плоской многоугольной области является осью циркуляра, аппроксимирующего эту область с нулевой погрешностью.

Определение 11. *Плоская фигура Ω называется многоугольной, если её граница $\partial\Omega$ представляет собой объединение конечного числа отрезков прямых линий.*

Теорема 3. *Для всякой плоской многоугольной фигуры Ω существует совпадающий с ней циркуляр, оси которого совпадают с серединной осью этой фигуры.*

Теорема 4. У жирных линий циркуляра, порождённого серединной осью плоской многоугольной фигуры, существуют огибающие.

Теорема 5. Пусть Ω — плоская многоугольная фигура. Тогда существует скелетное отображение, связывающее фигуру Ω и порождённый её серединной осью циркуляр, для которого погрешность аппроксимации $\varepsilon(\Omega, \mathcal{C})$ равна нулю.

Таким образом, в рамках предложенной модели оптимальным двумерным криволинейным скелетом является плоская серединная ось. Это даёт теоретическое обоснование практической полезности модели, т.к. серединная ось является общепринятым способом задания скелетов двумерных изображений.

В главе 3 описаны алгоритмы построения скелетов, основанные на использовании численного критерия качества, позволяющего решать задачу трёхмерной скелетизации как обычную задачу численной оптимизации. Решение состоит из двух этапов: построения начального приближения и последующей оптимизации этого начального приближения численными методами.

В разделе 3.1 вводятся основные определения и допущения, используемые в описываемых алгоритмах. Предполагается, что тело Ω представлено в виде множества, ограниченного полигональной поверхностью с множеством вершин \mathfrak{V} , множеством рёбер \mathfrak{E} и множеством граней \mathfrak{F} .

В качестве жирных кривых используются жирные кривые Безье первого порядка. Алгоритмы строят только такие скелетные отображения, которые каждой граничной точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ставят в соответствие единственную точку скелета $\sigma(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}$ (а не некоторое множество, как в общем случае, согласно теореме 2). Погрешность аппроксимации вычисляется приближенно как дискретная сумма по вершинам полигональной модели.

Определение 12. Пусть трёхмерная фигура Ω задана полигональной моделью. Дискретной погрешностью аппроксимации объекта Ω циркуляром \mathcal{C} на-

зывается величина

$$\tilde{\varepsilon}(\Omega, \mathcal{C}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathfrak{V}} (\|\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{x})\|^2 - r^2(\sigma(\mathbf{x})))^2, \quad (15)$$

где \mathfrak{V} — множество вершин полигональной модели.

В разделе 3.2 описывается алгоритм построения начального приближения, основанный на применении графов Роба.

Определение 13. Пусть f — непрерывная вещественная функция, заданная на компактном многообразии M . Линией уровня функции f называется максимальное связное подмножество M , на котором f принимает постоянное значение.

Определение 14. Пусть f — непрерывная вещественная функция, заданная на компактном многообразии M . Графом Роба функции f называется факторпространство многообразия M

$$R_f = M / \sim_f, \quad (16)$$

где \sim_f — отношение эквивалентности, такое, что

$$\mathbf{x} \sim_f \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \quad (17)$$

тогда и только тогда, когда \mathbf{x}, \mathbf{y} принадлежат одной и той же линии уровня функции f .

Граф Роба является топологическим пространством на множестве линий уровня некоторой функции f , заданной на поверхности объекта Ω (см. рис. 3).

Приведены процедуры, необходимые для построения скелета на основе данного подхода: вычисление функции f и дискретизация её уровней относительно полигональной сетки $(\mathfrak{V}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F})$, построение графа Роба и его вложения в пространство \mathbb{R}^3 .

Алгоритм. Построение начального приближения скелета

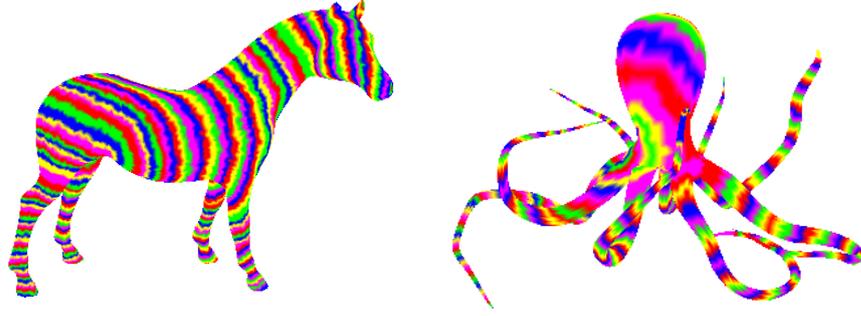


Рис. 3: Линии уровня функции, порождающей граф Роба.

Вход:

\mathcal{V} — вершины трёхмерной модели;

\mathcal{E} — рёбра трёхмерной модели.

Выход:

\mathcal{C} — начальное приближение пространственного циркуляра.

```

1: function НАЧАЛЬНОЕ_ПРИБЛИЖЕНИЕ( $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{E}$ )
2:    $f \leftarrow$  Порождающая_функция( $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{E}$ )
3:    $R_f \leftarrow$  Граф_Роба( $f$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{E}$ )
4:    $\mathcal{C} \leftarrow$  Вложение_графа_Роба( $R_f$ )
5:   return  $\mathcal{C}$ 
6: end function

```

В разделе 3.3 описывается алгоритм построения начального приближения, основанный на вычислении двумерных срединных осей плоских проекций объекта Ω . В общем случае выбор плоской проекции, позволяющей получить адекватный трёхмерный криволинейный скелет, представляет собой нетривиальную задачу; в настоящей работе она решается при помощи численного критерия, позволяющего оценить качество получаемых скелетов. Общая схема алгоритма показана на рис. 4.

Обозначим через \mathbb{S} единичную сферу в \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{p}\| = 1\}. \quad (18)$$

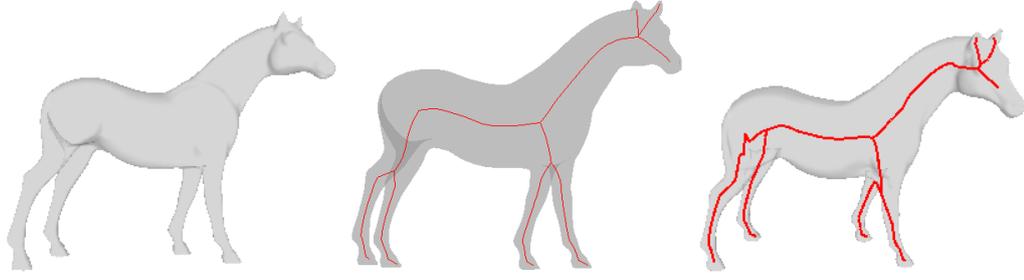


Рис. 4: Модель лошади, срединная ось плоской проекции и полученный в результате трёхмерный криволинейный скелет.

Определение 15. *Проекцией множества $X \subset \mathbb{R}^3$ вдоль вектора $\mathbf{p} \in \mathbb{S}$ называется параллельная проекция $\text{Pr}_{\mathbf{p}}(X)$ множества X на плоскость $\Pi_{\mathbf{p}}$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору \mathbf{p} :*

$$\Pi_{\mathbf{p}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = 0\}. \quad (19)$$

Обозначим через $\mathcal{C}_{\mathbf{p}}(\Omega)$ процедуру построения пространственного циркуляра по двумерной срединной оси плоской проекции $\text{Pr}_{\mathbf{p}}(\Omega)$. Тогда задача выбора оптимальной плоской проекции сводится к минимизации функции

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{S}} \tilde{\varepsilon}(\Omega, \mathcal{C}_{\mathbf{p}}(\Omega)). \quad (20)$$

В работе описана простейшая реализация этого подхода, основанная на применении метода Монте-Карло.

В разделе 3.4 описан численный алгоритм оптимизации пространственного циркуляра \mathcal{C} относительно меры сходства $\tilde{\varepsilon}(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$. Используется метод наискорейшего спуска. Приведены формулы, по которым происходит вычисление промежуточных значений функции и её градиента.

Обозначим вектор из всех переменных, описывающих циркуляр, через Z .

Алгоритм. Численная оптимизация пространственного циркуляра

Вход:

Z_0 — описание начального приближения;

ε — требуемая точность численного метода.

Выход:

Z — описание оптимизированного циркуляра.

```
1: function ОПТИМИЗАЦИЯ_ЦИРКУЛЯРА( $Z_0, \varepsilon$ )
2:    $k \leftarrow 0$ 
3:   repeat
4:      $g \leftarrow \nabla \tilde{\varepsilon}(Z_k)$ 
5:      $\lambda \leftarrow$  Величина_шага( $Z_k, g$ )
6:      $Z_{k+1} = Z_k - \lambda g$ 
7:      $k \leftarrow k + 1$ 
8:   until  $|\tilde{\varepsilon}(Z_k) - \tilde{\varepsilon}(Z_{k-1})| < \varepsilon$ 
9:   return  $Z_k$ 
10: end function
```

Теорема 6. *Последовательность значений дискретной погрешности аппроксимации $\tilde{\varepsilon}(Z_k)$ сходится.*

Итерационная процедура может приводить к возникновению радиальных функций с отрицательными значениями. Эта проблема разрешается путём расширения модели и введения понятия обобщённой жирной кривой (рис. 5), радиальная функция которой может принимать отрицательные значения. Доказано, что обобщённые жирные кривые могут быть представлены в виде объединения жирных кривых в смысле определения 2, поэтому алгоритм корректен в рамках используемой математической модели.

Определение 16. *Обобщённой линейной жирной кривой называется множество*

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, r^{(1)}, r^{(2)}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t \in [0; 1] : \|\mathbf{p}^{(1)} + (1-t)\mathbf{p}^{(2)} - \mathbf{a}\| \leq |tr^{(1)} + (1-t)r^{(2)}|\}, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)} \in \mathbb{R}^3, r^{(1)}, r^{(2)} \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

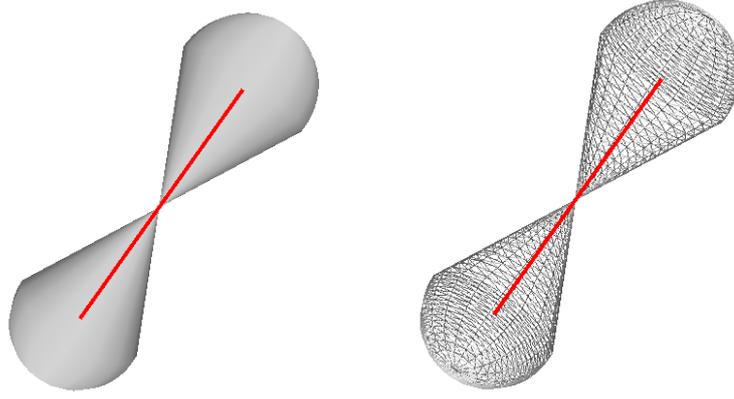


Рис. 5: Обобщённая линейная жирная кривая и её ось.

Теорема 7. *Всякая обобщённая жирная кривая $\mathcal{F}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, r^{(1)}, r^{(2)})$ может быть представлена в виде линейной жирной кривой или пространственного циркуляра, состоящего из двух линейных жирных кривых.*

В разделе 3.5 проведен анализ вычислительной сложности описанных алгоритмов.

Теорема 8. *Итерация алгоритма численной оптимизации методом градиентного спуска имеет вычислительную сложность $O(|\mathfrak{V}|)$.*

Теорема 9. *Алгоритм построения начального приближения пространственного циркуляра при помощи графов Роба имеет вычислительную сложность $O(|\mathfrak{E}| \log |\mathfrak{V}|)$.*

Теорема 10. *Алгоритм построения начального приближения при помощи плоских проекций имеет вычислительную сложность $O(|\mathfrak{V}|^2)$.*

В главе 4 описана практическая реализация алгоритмов, продемонстрированы результаты проведенных вычислительных экспериментов.

В разделе 4.1 приведена техническая информация, связанная с деталями программной реализации. Перечислены используемые технологии, описаны основные структуры данных.

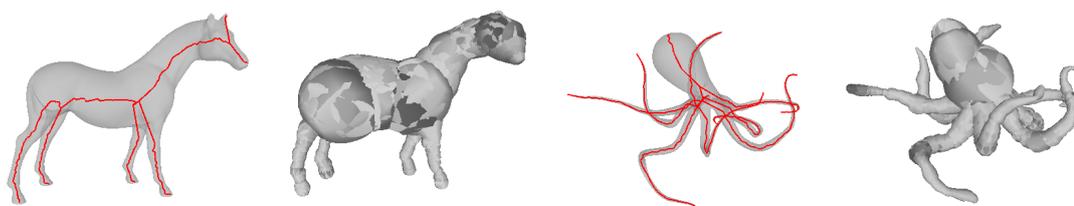


Рис. 6: Примеры криволинейных скелетов и пространственных циркуляров.

В разделе 4.2 приведены результаты проведенных вычислительных экспериментов. Продемонстрированы результаты работы алгоритмов для различных изображений (рис. 6). Подробно показаны различные этапы работы алгоритмов, существенно зависящих от адекватности меры сходства между трёхмерным объектом и аппроксимирующим её циркуляром; сюда относятся выбор оптимальной плоской проекции при построении начального приближения и итеративная подгонка численными методами.

В разделе 4.3 проведен обзор свойств, которым должен удовлетворять алгоритм скелетизации согласно общепринятыми представлениям. Показано, что большая часть из этих свойств выполняется или может быть выполнена при некоторых модификациях описанных алгоритмов.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Список публикаций по теме диссертации

1. Местецкий Л., Хромов Д.. Криволинейные скелеты трёхмерных форм // Доклады 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов». 2011.
2. Хромов Д.. Построение трёхмерных криволинейных скелетов при помощи пространственных циркуляров // Научно-техническая конференция «Техническое зрение в системах управления». Тезисы докладов. 2011.

3. Хромов Д.. Трехмерные циркуляры и криволинейные скелеты // Известия ВУЗов. Математика. 2012. по. 4. Р. 90–99.
4. Khromov D.. Curve-skeletons based on the fat graph approximation // Proceedings of the 13th international conference on Advanced concepts for intelligent vision systems. ACIVS'11. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. P. 239–248.
5. Khromov D.. 3D circular shapes and curve skeletons // Russian Mathematics (Iz VUZ). 2012. Vol. 56. P. 75–83. 10.3103/S1066369X1204010X.
6. Khromov D.. A Numerical Approach of the Curve-Skeletons Problem // Yaroslavl International Conference "Discrete Geometry" dedicated to the centenary of A.D. Alexandrov. 2012.
7. Khromov D., Mestetskiy L.. 3D Curve-Skeletons Extraction and Evaluation // Proceedings of the 21th International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2011). 2011.
8. Khromov D., Mestetskiy L.. 3D Skeletonization as an Optimization Problem // In Proceedings of the 24th Canadian Conference on Computational Geometry. 2012.