Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Баззаев Александр Казбекович

Локально-одномерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва–2013

Работа выполнена на кафедре прикладной математики математического факультета Северо-Осетинского государственного университета имени К.Л. Хетагурова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Кабардино-Балкарского государственного университета имени Х.М. Бербекова
Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Московского физико-технического института
Лобанов Алексей Иванович

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики Российского государственного социального университета
Киреева Ольга Ильинична

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Южный федеральный университет»

Защита диссертации состоится 11 сентября 2013 года в 15 часов 30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, второй учебный корпус, факультет ВМиК, ауд. № 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке факультета ВМиК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «25» июля 2013 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.43

доктор физико-математических наук, профессор Захар Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Использование дробных производных для описания и изучения физических процессов стохастического переноса стало в последние годы одной из популярных областей физики, многие проблемы фильтрации жидкости в сильно-пористых (фрактальных) средах приводят также к необходимости изучения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка.

К первым работам по теории дифференциальных уравнений дробного порядка следует отнести работы L. O'Shaughnessy[1], S. Mandelbrojt [2]. В работах M.A. Al-Bassam [3], M.A. Al-Bassam [4], A.Z. Al-Abedeen, H.L. Arora [5], A.Z. Al-Abedeen [6] получен ряд результатов, аналогичных теоремам из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В монографиях Самко С.Г., Килбаса А.А., Маричева О.И.[7], Псху А.В.[8], A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo[9] дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Монография Нахушева А.М.[10] посвящена качественно новым свойствам операторов дробного интегро-дифференцирования и их применению к дифференциальным уравнениям дробного порядка.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы Головизнина В.М., Киселёва В.П., Короткина И.А., Юркова Ю.П.[11], Головизнина В.М., Киселёва В.П., Короткина И.А., Юркова Ю.П.[12], K. Diethelm и N. G. Walz[13], K. Diethelm и N. J. Ford[14], Таукеновой

[1] O'Shaughnessy L., //Problem 433. Amer. Math. Month. 1918. Vol. 25. P. 172-173.

[2] Mandelbrojt S. Sulla generalizzazione del calcolo delle variazione Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend Cl. sci., fis. mat. e natur. Ser. 6. 1925. Vol. 1. P. 151-156.

[3] Al-Bassam M.A. On fractional calculus and its applications to the theory of ordinary differential equations of generalized order // Nonlinear analysis and applications (St Johns, New Foundland, Canada, 1981). Lect. Notes in Pure and Appl. Math. Dekker. New York. 1982. Vol. 80. P. 305−331.

[4] Al-Bassam M.A. Some existence theorems on differential equations of genera-lized order // Ibid. 1965. Bd 218. S. 70−78.

[5] Al-Abedeen A.Z., Arora H.L. A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equations of generalized order // Canad. Math. Bull. 1978. Vol. 21. №3. P. 267−271.

[6] Al-Abedeen A.Z. Existence theorem on differential equations of generalized order. // Rafidain J. Sci. Mosul. Univ. Iraq. 1976. Vol. 1. P. 95−104.

[7] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторие их приложения. Минск. «Наука и техника». 1987. −688 с.

[8] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

[9] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier. 2006

[10] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. – 272 с.

[11] Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрков Ю.П. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии: Препринт IBRAE -2002-01. М.: ИБРАЭ РАН, 2002.

[12] Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А., Юрков Ю.П. Прямые задачи классического переноса радионуклидов в геологических формациях // Изв. РАН. Энергетика. 2004. №4. с. 121 — 130. и МФ. 1968. Т.8, №3. С.679-684.

[13] K. Diethelm, G. Walz. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation, Numer. Algorithms 16 (1997), 231-253.

[14] K. Diethelm, N. J. Ford. Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 265 (2002), 229-248.

Ф.И. и Шханукова-Лафишева М.Х.[15] и др. Работа Лафишевой М.М. и Шханукова М.Х.[16] посвящена рассмотрению локально-одномерных схем для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями первого рода. В данной работе с помощью принципа максимума доказаны устойчивость и равномерная сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

После появления работы Бицадзе А.В. и Самарского А.А.[17], внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Различные классы нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучались в работах Самарского А.А., Ионкина Н.И., Ильина В.А., Моисеева Е.И., Чудновского А.Ф., Шополова Н.Н., Гордезиани Д.Г., Нахушева А.М., Шханукова М.Х., Керефова А.А., Митропольского Ю.А., Березовского А.А., Муравей Л.А., Филиновского А.В., Житарашу Н.В., Эйдельмана С.Д., Солдатова А.П., Гулина А.В., Морозовой В.А. и др.

Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почво-грунтах. К первым работам для параболических уравнений с неклассическими (интегральными) граничными условиями относятся, по-видимому, работы Cannon J.R.[18], Камынина Л.И. [19] и Чудновского А.Ф. [20]

Цель диссертационной работы

1. Построение локально-одномерных схем для:
   (a) уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами;
   (b) уравнения диффузии дробного порядка с конвекцией;
   (c) уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах;
   (d) уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью;
   (e) уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде с нелокальным условием на границе.
2. Доказательство устойчивости и сходимости разностных схем для рассматриваемых задач.

---

[15] Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №10. С.1871-1881.

[16] Лафишева М.М., Шхануков М.Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. №10. С. 1878-1887.

[17] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. ДАН СССР. 1969. Т.185. №4. С. 739-740.

[18] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specificationof energy. Quart. Appl. Math. 21(1963). Pp. 155-160.

[19] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. ЖВМ и МФ. 1964. Т.4. №6. С. 1006-1024.

[20] Чудновский А.Ф. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло-и влагопереноса в почве // «Сб. трудов по агрофизике», вып. 23, Гидрометеоиздат, 1969. С. 41 − 54.

Методы исследования

В работе для построения локально-одномерных схем для рассматриваемых задач используется метод суммарной аппроксимации. Для получения априорных оценок используются метод энергетических неравенств и принцип максимума.

Научная новизна работы

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами построены локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике. Доказаны устойчивость и сходимость рассматриваемых разностных схем;

2. для уравнения диффузии дробного порядка с конвекцией построены локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике. Доказаны устойчивость и сходимость рассматриваемых разностных схем;

3. для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах построены локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике. Доказаны устойчивость и сходимость рассматриваемых разностных схем;

4. для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью построены локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике. Доказаны устойчивость и сходимость рассматриваемых разностных схем;

5. для уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде с нелокальным условием на границе построены локально-одномерные схемы. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы и доказана ее сходимость.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Построение локально-одномерных схем для:
   (a) уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами;
   (b) уравнения диффузии дробного порядка с конвекцией;
   (c) уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах;
   (d) уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью;

(e) уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде с нелокальным условием на границе.

2. Устойчивость и сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемых задач.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер и является продолжением развития теории краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с переменными коэффициентами.

Локально-одномерные разностные схемы, построенные для рассматриваемых задач, могут быть использованы при решении прикладных задач, приводящих к таким уравнениям.

Апробация результатов работы

Основные результаты диссертации представлены в виде докладов на:

1. Международной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», 29 июня—4 июля, 2008 г., Владикавказ;

2. Международном Российско-Абхазском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». КБР, г. Нальчик-Эльбрус, 17—22 мая 2009 г.;

3. Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна. Воронеж, 25 — 30 января 2010 г.;

4. I региональной междисциплинарной конференции молодых ученых «Наука-Обществу». Владикавказ, 18—20 марта 2010 г.;

5. Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». Владикавказ, 19—24 июля 2010 г.;

6. Международной научной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов «ПЕРСПЕКТИВА-2010», 23—26 апреля 2010 г., КБР, п. Эльбрус, ЭУНК КБГУ;

7. Международной конференции молодых ученых «Математический анализ и математическое моделирование». Россия, Владикавказ, 12—19 июля 2010 г.;

8. Седьмой Всероссийской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Г. Самара, 3—6 июня 2010 г.;

9. Международном Российско-Болгарском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». КБР, г. Нальчик, КЧР, а. Хабез, 25—30 июня 2010 г.;

10. Международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики», г. Нальчик, 5–8 декабря 2011 г.;

11. Втором Международном Российско-Узбекском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». КБР, Эльбрус–2012;

12. семинарах кафедры вычислительной математики КБГУ в 2010–2013 г.г.;

13. семинарах по математическому анализу ЮМИ в 2010–2013 г.г.;

14. семинарах по математическому моделированию и численым методам ЮМИ в 2010–2013 г.г.;

15. научно-исследовательском семинаре кафедры вычислительных методов ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова в 2012–2013 г.г.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 9 работах [1] – [9]. Из них [3], [5], [6], [7], [8] и [9] опубликованы в изданиях, включенных в список изданий, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов кандидатской диссертации.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 132 страницах и состоит из введения, 5 глав и списка литературы, состоящей из 106 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава носит в основном методический характер и посвящена изучению локально-одномерных схем для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода с незнакоопределенным оператором в главной части. Доказываются устойчивость и сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)u(x,t) - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u(x,t) - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u,$$

$k_\alpha(x,t)$, $q_\alpha(x,t)$, $f(x,t)$ – заданные функции x и t такие, что

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \ |q_\alpha|, \ |\beta_{\pm\alpha}| \leqslant c_2,$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(\overline{Q}_T), q_\alpha(x,t), f(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q}_T), \ \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

где $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0,T]$, $\overline{G} = G + \Gamma$, $C^{m,n}$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и n по t. Такие несколько завышенные условия гладкости потребуются при построении разностной схемы второго порядка аппроксимации.

Отметим, что локально-одномерные схемы для задачи (1) – (3) были рассмотрены в работе Фрязинова И.В.[21], но при условиях

$$0 < k_* \leqslant k_\alpha, \ q_\alpha \geqslant q_* > 0, \ \beta_{\pm\alpha} \geqslant 0, \ \beta_{-\alpha}^2 + \beta_{+\alpha}^2 \neq 0,$$

k_*, q_* – положительные постоянные, а в работе Андреева В.Б.[22] для задачи (1) — (3) были построены разностные схемы с расщепляющимся оператором.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \ell_\alpha/N_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha\}, \ \overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha},$$

$$\omega_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1\}, \ \omega_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \omega_{h_\alpha},$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, \ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \\ \qquad h_\alpha/2, \ i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

На отрезке $[0,T]$ также введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau; \ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha/p\,\tau, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p-1$ и обозначим $\Delta_\alpha = \left(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}\right], \ \alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Задаче (1) – (3) поставим в соответствие цепочку «одномерных» уравнений. Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathscr{P}u = \partial_{0t}^{\alpha} u - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathscr{P}_\alpha u = 0, \ \mathscr{P}_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

[21] Фрязинов И.В. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи// Ж.вычисл.матем. и матем. физ. 1964. Т.4, 1106 – 1112.

[22] Андреев В.Б. О сходимости разностных схем с расщепляющимся оператором, аппроксимирующих третью краевую задачу для параболического уравнения. // ЖВМ и МФ. 1969. Т.9. №2. С. 337-349.

где $f_\alpha(x,t),\ \alpha = 1, 2,\ \dots\ , p,$ – произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f.$$

Будем последовательно решать задачи

$$\mathscr{P}_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0,\ t \in \Delta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{4}$$

$$\begin{cases} k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha},\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha},\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{5}$$

полагая при этом

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x,0) = u_0(x), \\ v_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}),\ \alpha = 2, 3, \dots, p, \\ v_{(1)}(x, t_j) = v_{(p)}(x, t_j). \end{gathered} \tag{6}$$

Аппроксимируем каждое уравнение (4) номера α двухслойной неявной схемой на полуинтервале $\big(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}\big]$, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p},\ \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{7}$$

$$\Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y,$$

где коэффициенты a_α – сеточные функции, которые выбираются из условий второго порядка аппроксимации на равномерной сетке. Можно использовать следующую аппроксимацию коэффициентов $k_\alpha(x,t)$:

$$a_\alpha = k_\alpha(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, x_p, \overline{t}),\ \overline{t} = t_{j+1/2}.$$

К уравнению (7) надо присоединить граничные и начальные условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (5):

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} = \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} - \mu_{-\alpha},\ x_\alpha = 0, \\ -a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\alpha/p} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \mu_{+\alpha},\ x_\alpha = \ell_\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

Условия (8) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Применяя известный прием повышения точности аппроксимации краевых условий третьего рода до второго порядка по h_α, получим разностный аналог задачи (1) — (3):

$$\begin{gathered} y_{\overline{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p},\ \alpha = 1, 2, \dots, p,\ x \in \overline{\omega}_h, \\ y(x,0) = u_0(x),\ y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y = \dfrac{a^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} y_0}{0.5h_\alpha}, \ x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+ y = -\dfrac{a^{(N_\alpha)} y_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} + \overline{\beta}_{+\alpha} y_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha}, \ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \qquad \Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \overline{\mu}_{-\alpha}, \ x_\alpha = 0, \\ \overline{\mu}_{+\alpha}, \ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

где

$$\overline{\mu}_{-\alpha} = \frac{\mu_{-\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha,0}, \ \overline{\mu}_{+\alpha} = \frac{\mu_{+\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha,N_\alpha},$$

$$\overline{\beta}_{-\alpha} = \beta_{-\alpha} + 0.5h_\alpha d_\alpha^{(0)}, \ \overline{\beta}_{+\alpha} = \beta_{+\alpha} + 0.5h_\alpha d_\alpha^{(N_\alpha)}.$$

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где $u^{j+\alpha/p}$ — решение исходной дифференциальной задачи (1) − (3). Тогда для погрешности z получаем задачу:

$$z_{\overline{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_\alpha^{j+\alpha/p}, \tag{10}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha = \begin{cases} \Lambda_\alpha, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^-, \ x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+, \ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \qquad \Psi_\alpha = \begin{cases} \psi_\alpha, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \psi_{-\alpha}, \ x_\alpha = 0, \\ \psi_{+\alpha}, \ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha, \ \overset{\circ}{\psi}_\alpha = O(1), \ \overset{*}{\psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau),$$

$$\psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha} + \frac{\overset{*}{\psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \ \psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\psi}_{+\alpha} + \frac{\overset{*}{\psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

$$\overset{*}{\psi}_{\pm\alpha} = O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau), \ \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm\alpha} = 0.$$

Для решения разностной задачи (9) справедлива

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (9) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (9) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y_{\overline{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant M \Bigg(\|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} +$$

$$+ \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_s \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'}) \right) H/\hbar_\alpha \Bigg), \tag{11}$$

где M зависит от размерности области.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть задача (1) – (3) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение* $u(x,t)$ *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\ 1 \leqslant \alpha, \nu \leqslant p.$$

Тогда разностная схема (9) сходится со скоростью $O(|h|^2+\tau)$, *так что*

$$\|y^{j+1}-u^{j+1}\|_1^2 \leqslant M\left(|h|^2+\tau\right),\ |h|^2=\hbar_1^2+\hbar_2^2+\ldots+\hbar_p^2,$$

где

$$\|y^{j+1}\|_1^2 = \|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y_{\overline{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}.$$

Вторая глава посвящена разностным методам решения уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода. Данная глава состоит из двух параграфов. Первый параграф посвящен рассмотрению многомерных чисто неявных разностных схем для рассматриваемой задачи, а во втором для нее строятся локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума доказываются устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемой задачи.

В цилиндре $Q_T = G\times[0<t\leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G=\{x=(x_1,x_2,\ldots,\ x_p) : 0<x_\beta<\ell_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,p\}$ с границей Γ, $\overline{G}=G\cup\Gamma$ рассматривается третья начально-краевая задача:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = Lu+f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{12}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \varkappa_{-\beta}(x,t)u-\mu_{-\beta}(x,t),\ x_\beta=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \varkappa_{+\beta}(x,t)u-\mu_{+\beta}(x,t),\ x_\beta=\ell_\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{13}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{14}$$

где

$$Lu=\sum_{\beta=1}^{p}L_\beta u,\ L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right),$$

$$0<c_0\leqslant k_\beta\leqslant c_1,\ \varkappa_{\pm\beta}\geqslant\varkappa^*>0,$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha}d\eta$ – регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$, c_0, c_1 – положительные постоянные, $\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$, $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (12) – (14) обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

В работе Таукеновой Ф.И. и Шханукова-Лафишева М.Х.[23] предложен дискретный аналог дробной производной порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t_j}\frac{\dot u(x,\eta)}{(t_j-\eta)^\alpha}d\eta=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)u_t^s+O\left(\tau\right), \tag{15}$$

где

$$u_t^s=\frac{u^{s+1}-u^s}{\tau}.$$

Используя (15), получаем разностное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)y_t^s=\sum_{\beta=1}^{p}\left(a_\beta y_{\overline{x}_\beta}^{j+1}\right)_{x_\beta}+\varphi^{j+1},\ x_\beta\in\omega_h. \tag{16}$$

К уравнению (16) присоединим граничные и начальные условия. Разностный аналог для граничных условий (13) имеет вид:

$$\begin{cases} a_\beta^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}=\varkappa_{-\beta}y_0-\mu_{-\beta},\ x_\beta=0,\\ -a_\beta^{(N_\beta)}y_{\overline{x}_\beta,N_\beta}=\varkappa_{+\beta}y_{N_\beta}-\mu_{+\beta},\ x_\beta=\ell_\beta.\end{cases} \tag{17}$$

Условия (17) имеют порядок аппроксимации $O(h_\beta)$. Применяя известный прием повышения порядка аппроксимации краевых условий до $O(h_\beta^2+\tau)$ на решениях уравнения (12), получим следующий разностный аналог задачи (12) — (14):

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)y_t^s=\overline{\Lambda}y^{j+1}+\Phi^{j+1},\\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G},\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$\overline{\Lambda}y=\begin{cases}\Lambda y=\sum\limits_{\beta=1}^{p}\left(a_\beta y_{\overline{x}_\beta}\right)_{x_\beta},\ x_\beta\in\omega_h,\\ \Lambda^-y=\dfrac{a_\beta^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}-\varkappa_{-\beta}y_0}{0.5h_\beta},\ x_\beta=0,\\ \Lambda^+y=-\dfrac{a_\beta^{(N_\beta)}y_{\overline{x}_\beta,N_\beta}+\varkappa_{+\beta}y_{N_\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta=\ell_\beta,\end{cases}\qquad \Phi=\begin{cases}\varphi,\ x_\beta\in\omega_h,\\ \dfrac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta=0,\\ \dfrac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta=\ell_\beta,\end{cases}$$

$$\overline{\mu}_{-\beta}=\mu_{-\beta}+0.5h_\beta f_{\beta,0},\quad \overline{\mu}_{+\beta}=\mu_{+\beta}+0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

Для решения разностной задачи (18) справедлива

[23] Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №10. С.1871–1881.

Теорема 3. *Разностная схема (18) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (18) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \frac{1}{\varkappa^*}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(\|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}\right)+$$

$$+\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha \max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\varphi^s\|_C. \tag{19}$$

Здесь и далее

$$\|y\|_C = \max_{x\in\omega_h}|y|,\ \ \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x\in\gamma_h}|y|.$$

Для погрешности $z^{j+1} = y^{j+1} - u^{j+1}$ справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha \max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\psi^s\|_C. \tag{20}$$

Так как $\psi = O(|h|^2+\tau),\ |h| = \max\limits_{1\leqslant\beta\leqslant p} h_\beta$, то из (20) следует

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(\frac{|h|^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^\alpha\right).$$

При $\alpha \to 1$ получаем известный результат

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(|h|^2+\tau\right).$$

Перейдем теперь к построению локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи (12) – (14). Для этого используем дискретный аналог дробной производной порядка α, $0<\alpha<1$, предложенный в работе Лафишевой М.М. и Шханукова М.Х.[24]

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t_{j+\beta/p}}\frac{\dot u(x,\eta)}{(t_{j+\beta/p}-\eta)^\alpha}d\eta =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+\beta}\left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p}\right)u^{s/p}_{\bar t} + O\left(\tau/p\right),\ u^{s/p}_{\bar t} = \frac{u^{s/p}-u^{(s-1)/p}}{\tau/p}. \tag{21}$$

Локально-одномерные схемы для задачи (12) – (14) имеют вид:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}}y = \overline{\Lambda}_\beta y^{j+\beta/p} + \Phi^{j+\beta/p}_\beta, \tag{22}$$

$$y(x,0) = u_0(x),$$

[24] Лафишева М.М., Шхануков М.Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. №10. С. 1878–1887.

где

$$\overline{\Lambda}_\beta y = \begin{cases} \Lambda_\beta y = (a_\beta y_{\overline{x}_\beta})_{x_\beta},\ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \Lambda_\beta^- y = \dfrac{a_\beta^{(1_\beta)} y_{x_\beta,0} - \varkappa_{-\beta} y_0}{0.5h_\beta},\ x_\beta = 0, \\ \Lambda_\beta^+ y = -\dfrac{a_\beta^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \varkappa_{+\beta} y_{N_\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \qquad \Phi_\beta = \begin{cases} \varphi_\beta,\ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \dfrac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = 0, \\ \dfrac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

где

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p} \right) u_{\overline{t}}^{s/p},\ u_{\overline{t}}^{s/p} = \frac{u^{s/p} - u^{(s-1)/p}}{\tau}.$$

$$\overline{\mu}_{-\beta} = \mu_{-\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,0}, \quad \overline{\mu}_{+\beta} = \mu_{+\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

Заметим, что при повышении порядка аппроксимации краевых условий третьего рода на решениях уравнения (12) до $O(h_\beta^2 + \tau)$, естественным образом возникает разностная задача (22) с нелокальным по каждому направлению x_β ($\beta = 1, 2, \ldots,\ p$) граничным условием. Эта особенность возникает и в случае многомерных разностных схем (18) для дифференциальных уравнений дробного порядка.

Если вместо чисто неявной схемы рассматривать более общее разностное уравнение с весами $\Lambda_\beta(\sigma_\beta y^{j+\beta/p} + (1-\sigma_\beta) y^{j+(\beta-1)/p})$ в правой части (22), то возникнет условие на шаг τ:

$$\tau \leqslant \frac{(2-2^{1-\alpha}) h_\beta^2}{2c_1 \Gamma(2-\alpha)(1-\sigma_\beta)},\ 0 \leqslant \sigma_\beta \leqslant 1,\ \beta = 1, 2, \ldots,\ p,$$

которое при $\alpha \to 1$ переходит в известное условие $\tau \leqslant \dfrac{h_\beta^2}{2c_1(1-\sigma_\beta)}$.

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально- одномерных схем. Пусть $u = u(x, t)$ – решение задачи (12) –(14), а $y^{j+\beta/p}$, $\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$, – решение разностной задачи (22). Характеристикой точности локально-одномерных схем является разность $y^{j+1} - u^{j+1} = z^{j+1}$.

Промежуточные значения $y^{j+\beta/p}$ будем сравнивать с $u^{j+\beta/p} = u(x,\ t_{j+\beta/p})$, полагая $z^{j+\beta/p} = y^{j+\beta/p} - u^{j+\beta/p}$. Тогда для погрешности $z^{(\beta)} = z^{j+\beta/p}$ имеем задачу

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} z = \overline{\Lambda}_\beta z^{(\beta)} + \Psi_\beta^{j+\beta/p}, \tag{23}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\beta = \begin{cases} \Lambda_\beta,\ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \Lambda_\beta^-,\ x_\beta = 0, \\ \Lambda_\beta^+,\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \qquad \Psi_{(\beta)} = \begin{cases} \psi_\beta,\ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \psi_{-\beta},\ x_\beta = 0, \\ \psi_{+\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\psi_\beta = \overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta,\ \overset{\circ}{\psi}_\beta = O(1),\ \overset{*}{\psi}_\beta = O(h_\beta^2 + \tau),$$

$$\psi_{-\beta} = \overset{\circ}{\psi}_{-\beta} + \tfrac{\overset{*}{\psi}_{-\beta}}{0.5h_\beta},\ \psi_{+\beta} = \overset{\circ}{\psi}_{+\beta} + \tfrac{\overset{*}{\psi}_{+\beta}}{0.5h_\beta}, \overset{*}{\psi}_{\pm\beta} = O(h_\beta^2) + O(h_\beta\tau),\ \sum_{\beta=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm\beta} = 0,$$

$$z(x,0)=0.$$

Для решения разностной задачи (22) справедлива

Теорема 4. *Локально-одномерная схема (22) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (22) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \frac{1}{\varkappa^*}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(\|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}\right)+$$

$$+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\varphi^{j'+s/p}\|_C. \qquad (24)$$

Для решения z задачи для погрешности на основании теоремы 4 справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant M\left(\frac{|h|^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right),\ |h| = \max_{1\leqslant\beta\leqslant p} h_\beta.$$

Справедлива

Теорема 5. *Пусть задача (12) – (14) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\beta^2\partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^{2+\alpha}u}{\partial x_\beta^2\partial t^\alpha},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2},\ 1\leqslant\beta,\nu\leqslant p,\ \beta\neq\nu,$$

тогда решение разностной задачи (22) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (12) – (14) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}}+\tau^{2\alpha-1}\right),\ h^2 = o(\tau^{1-\alpha}),\ \frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1.$$

Третья глава также состоит из двух параграфов. Первый параграф посвящен рассмотрению локально-одномерных схем для уравнения диффузии дробного порядка с конвекцией, а во втором параграфе строятся локально-одномерные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной в младших членах. С помощью принципа максимума доказаны устойчивость и равномерная сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемых задач.

Рассмотрим первый параграф.

В цилиндре $Q_T = G\times[0<t\leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G=\{x=(x_1,x_2,\dots,\ x_p):0<x_\beta<\ell_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \dots,p\}$ с границей Γ, $\overline{G}=G\cup\Gamma$ рассматривается третья начально-краевая задача:

$$\partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \qquad (25)$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{-\beta}(x,t)u - \mu_{-\beta}(x,t),\ x_\beta = 0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \\ -k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{+\beta}(x,t)u - \mu_{+\beta}(x,t),\ x_\beta=\ell_\beta,\ 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \qquad (26)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{27}$$

где

$$Lu=\sum_{\beta=1}^{p}L_\beta u,\ L_\beta u=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+r_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}-q_\beta(x,t)u,$$

$$0<c_1\leqslant k_\beta(x,t)\leqslant c_2,\ 0<q_\beta(x,t)\leqslant c_3,$$

$$r_\beta(0,t)\geqslant 0,\ r_\beta(\ell,t)\leqslant 0,\ |r_\beta(x,t)|\leqslant c_4,\ \lambda_{\pm\beta}\geqslant\lambda^*>0,$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^{\alpha}}d\eta$ – регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1,\ \dot u=\partial u/\partial t,\ c_0,\ c_1$ – положительные постоянные, $\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ Q_T=G\times[0<t\leqslant T]$.

Получим для задачи (25) – (27) монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации по h_β, для которых справедлив принцип максимума при любых τ и $h_\beta,\ \beta=1,2,\ \ldots,\ p$. Для этого рассмотрим уравнение (25) с возмущенным оператором

$$\widetilde{L}u=\sum_{\beta=1}^{p}\widetilde{L}_\beta u,\ \widetilde{L}_\beta u=\varkappa_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right)+r_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}-q_\beta(x,t)u,$$

$\varkappa_\beta=1/(1+R_\beta),\ R_\beta=0.5h_\beta|r_\beta|/k_\beta,\ \beta=1,2,\ \ldots,\ p$ – разностное число Рейнольдса.

Аппроксимируем каждый из операторов $\widetilde{L}_\beta,\ \beta=1,2,\ \ldots,p$, при фиксированном $t=\overline{t}=t_{j+1/2}$ разностными операторами

$$\widetilde{\Lambda}_\beta y=\varkappa_\beta\left(a_\beta y_{\overline{x}_\beta}\right)_{x_\beta}+b_\beta^{+}a_\beta^{(+1_\beta)}y_{x_\beta}+b_\beta^{-}a_\beta y_{\overline{x}_\beta}-d_\beta y,\ \beta=1,2,\ \ldots,p,$$

где

$$\begin{gathered}a_\beta=A_\beta[k_\beta(x_\beta+i_\beta h_\beta,\overline{t})],\ d_\beta=F_\beta[q_\beta(x_\beta+i_\beta h_\beta,\overline{t})],\\ a_\beta^{(+1_\beta)}=a_\beta(x_\beta+i_\beta h_\beta,\overline{t}),\ b_\beta^{\pm}=F_\beta[\widetilde{r}_\beta^{\pm}(x_\beta+i_\beta h_\beta,\overline{t})],\\ \widetilde{r}_\beta^{\pm}=\tfrac{r_\beta^{\pm}}{k_\beta},\ r_\beta^{+}=0.5(r_\beta+|r_\beta|)\geqslant 0,\ r_\beta^{-}=0.5(r_\beta-|r_\beta|)\leqslant 0,\end{gathered}$$

A_β и F_β – шаблонные функционалы, используемые для вычисления коэффициентов $a_\beta,\ d_\beta$ и φ_β и обеспечивающие второй порядок аппроксимации. Например, можно положить $b_\beta^{\pm}=r_\beta^{\pm}/k_\beta$.

Тогда разностный аналог задачи (25) – (27) имеет вид:

$$\begin{gathered}\Delta_{0t_{j+\beta/p}}^{\alpha}y=\overline{\Lambda}_\beta y^{j+\beta/p}+\Phi_\beta^{j+\beta/p},\ \beta=1,2,\ \ldots,p,\\ y(x,0)=u_0(x),\end{gathered} \tag{28}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\beta y = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}_\beta y = \varkappa_\beta \left(a_\beta y_{\overline{x}_\beta}\right)_{x_\beta} + b^+_\beta a^{(+1_\beta)}_\beta y_{x_\beta} + b^-_\beta a_\beta y_{\overline{x}_\beta} - d_\beta y, \ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \Lambda^-_\beta y = \dfrac{\overline{a}^{(1_\beta)}_\beta y_{x_\beta,0} - \overline{\lambda}_{-\beta} y_0}{0.5h_\beta}, \ x_\beta = 0, \\ \Lambda^+_\beta y = -\dfrac{\overline{a}^{(N_\beta)}_\beta y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \overline{\lambda}_{+\beta} y_{N_\beta}}{0.5h_\beta}, \ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\Phi_\beta = \begin{cases} \dfrac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta}, \ x_\beta = 0, \\ \varphi_\beta, \ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \dfrac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta}, \ x_\beta = \ell_\beta. \end{cases}$$

где

$$\overline{a}^{(1_\beta)}_\beta = a^{(1_\beta)} + 0.5h_\beta r_{\beta,0}, \ \overline{a}^{(N_\beta)}_\beta = a^{(N_\beta)} - 0.5h_\beta r_{\beta,N_\beta},$$
$$\overline{\lambda}_{-\beta} = \lambda_{-\beta} + 0.5h_\beta d^{(0)}_\beta, \ \overline{\lambda}_{+\beta} = \lambda_{+\beta} + 0.5h_\beta d^{(N_\beta)}_\beta,$$
$$\overline{\mu}_{-\beta} = \mu_{-\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,0}, \ \overline{\mu}_{+\beta} = \mu_{+\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

Задача для погрешности $z^{j+\beta/p}$ имеет вид:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} z = \overline{\Lambda}_\beta z^{(\beta)} + \Psi^{j+\beta/p}_\beta, \tag{29}$$
$$z(x,0) = 0,$$

где

$$\overline{\Lambda}_\beta = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}_\beta, \ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \Lambda^-_\beta, \ x_\beta = 0, \\ \Lambda^+_\beta, \ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \qquad \Psi_\beta = \begin{cases} \psi_\beta, \ x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \psi_{-\beta}, \ x_\beta = 0, \\ \psi_{+\beta}, \ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\psi_\beta = \overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta, \ \overset{\circ}{\psi}_\beta = O(1), \ \overset{*}{\psi}_\beta = O(h^2_\beta + \tau),$$
$$\psi_{-\beta} = \overset{\circ}{\psi}_{-\beta} + \tfrac{\overset{*}{\psi}_{-\beta}}{0.5h_\beta}, \psi_{+\beta} = \overset{\circ}{\psi}_{+\beta} + \tfrac{\overset{*}{\psi}_{+\beta}}{0.5h_\beta},$$
$$\overset{*}{\psi}_{\pm\beta} = O(h^2_\beta) + O(h_\beta\tau), \ \sum_{\beta=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm\beta} = 0.$$

Для решения разностной задачи (28) справедлива

Теорема 6. *Локально-одномерная схема (28) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (28) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \frac{1}{\lambda^*} \max_{0<t'\leqslant j\tau} \left(\|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}\right) +$$

$$+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^{j} \tau^\alpha \sum_{\beta=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant \beta} \|\varphi^{j'+s/p}\|_C. \tag{30}$$

Замечание 1. *Теорема 6 остается справедливой и при* $q_\beta(x,t) \geqslant 0$.

Для решения z задачи для погрешности (29) справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant M\left(\frac{|h|^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),\ |h| = \max_{1\leqslant\beta\leqslant p} h_\beta.$$

Справедлива

Теорема 7. *Пусть задача (25) – (27) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение* $u(x,t)$ *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\beta^2 \partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_\beta^2 \partial t^\alpha},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2},\ 1 \leqslant \beta,\nu \leqslant p,\ \beta \neq \nu,$$

тогда решение разностной задачи (28) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (25) – (27) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),\ h^2 = o(\tau^{1-\alpha}),\ \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1.$$

Перейдем теперь ко второму параграфу данной главы.

Рассмотрим следующую задачу: в цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots,\ x_p) : 0 < x_\beta < \ell_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается третья начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной $\partial_{0x}^\nu u$ порядка ν $(0 < \nu < 1)$ по пространственной переменной x в младших членах:

$$\partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{31}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{-\beta}(x,t)u - \mu_{-\beta}(x,t),\ x_\beta = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \lambda_{+\beta}(x,t)u - \mu_{+\beta}(x,t),\ x_\beta = \ell_\beta,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{32}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{33}$$

где

$$Lu = \sum_{\beta=1}^{p} L_\beta u,\ L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right) + r_\beta(x,t)\partial_{0x_\beta}^\nu u - q_\beta(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\beta \leqslant c_1,\ r_\beta \leqslant 0,\ |r_\beta| \leqslant c_2,\ q_\beta > 0,\ \lambda_{\pm\beta} \geqslant \lambda^* > 0,$$

$\partial_{0t}^\alpha u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta$ – регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, $\dot u = \partial u / \partial t$,

$\partial_{0x_\beta}^\nu u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int\limits_0^{x_\beta} \dfrac{u'(\xi_\beta, t)}{(x_\beta - \xi_\beta)^\nu} d\xi_\beta,\ 0 < \nu < 1$ – регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля порядка ν $(0 < \nu < 1)$ по пространственной переменной x_β, $u' = \partial u / \partial x,\ c_0,\ c_1,\ c_2$ – положительные постоянные, $\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$.

Дифференциальной задаче (31) – (33) поставим в соответствие локально-одномерные разностные схемы:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} y_\beta = \Lambda_\beta y^{j+\beta/p} + \varphi_\beta^{j+\beta/p}, \tag{34}$$

где

$$\Lambda_\beta y = (a y_{\overline{x}_\beta})_{x_\beta} + r_\beta \Delta^\nu_{0x_\beta} y - d_\beta y,$$

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\beta/p}} y_\beta = \frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p} \right) y_{\overline{t}}^{s/p},\ y_{\overline{t}}^{s/p} = \frac{y^{s/p} - y^{(s-1)/p}}{\tau/p}.$$

Присоединим к (34) граничные и начальные условия:

$$\begin{cases} a_\beta^{(1_\beta)} y^{j+\beta/p}_{x_\beta,0} = \lambda_{-\beta} y_0^{j+\beta/p} - \mu_{-\beta},\ x_\beta = 0, \\ -a_\beta^{(N_\beta)} y^{j+\beta/p}_{\overline{x}_\beta,N_\beta} = \lambda_{+\beta} y_{N_\beta}^{j+\beta/p} - \mu_{+\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \tag{35}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x \in \omega_{h_\beta}. \tag{36}$$

Задача для погрешности z имеет вид:

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s+1)/p} - t^{1-\alpha}_{j+(\beta-s)/p} \right) z_{\overline{t}}^{s/p} = \Lambda_\beta z^{j+\beta/p} + \psi_\beta^{j+\beta/p}, \tag{37}$$

$$\begin{cases} a^{(1_\beta)} z^{j+\beta/p}_{x_\beta,0} = \lambda_{-\beta} z_0^{j+\beta/p} - \nu_{-\beta},\ x_\beta = 0, \\ -a^{(N_\beta)} z^{j+\beta/p}_{\overline{x}_\beta,N_\beta} = \lambda_{+\beta} z_{N_\beta}^{j+\beta/p} + \nu_{+\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \tag{38}$$

$$\psi_\beta^{j+\beta/p} = \overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta,$$

$$\psi = \sum_{\beta=1}^{p} \psi_\beta^{j+\beta/p} = \sum_{\beta=1}^{p} (\overset{\circ}{\psi}_\beta + \overset{*}{\psi}_\beta) = \sum_{\beta=1}^{p} \overset{*}{\psi}_\beta = O\left(|h| + \tau\right),$$

$$\overset{*}{\psi}_\beta = O(h_\beta + \tau),\ \overset{\circ}{\psi}_\beta = O(1),$$

$$\nu_{-\beta} = O(h_\beta),\ \nu_{+\beta} = O(h_\beta).$$

Для решения разностной задачи (34) – (36) справедлива

Теорема 8. *Локально-одномерная схема (34) – (36) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (34) – (36) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \max_{0<t'\leqslant j\tau} \frac{1}{\lambda^*}\Big(\|\mu_{-\beta}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\mu_{+\beta}(x,t')\|_{C_\gamma}\Big) +$$

$$+p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha\sum_{\beta=1}^{p}\max_{0\leqslant s\leqslant\beta}\|\varphi^{j'+s/p}\|_C. \qquad (39)$$

Замечание 2. *Теорема 8 остается справедливой и при* $q_\beta(x,t)\geqslant 0$.

Для погрешности z справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant M\left(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), |h| = \max_{1\leqslant\beta\leqslant p} h_\beta.$$

Справедлива

Теорема 9. *Пусть задача (31) – (33) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_T$ *решение* $u(x,t)$ *и существуют непрерывные в* $\overline{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\beta^2 \partial x_s^2},\ \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_\beta^2 \partial t^\alpha},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2},\ 1\leqslant\beta,s\leqslant p,\ \beta\neq\nu,$$

тогда решение разностной задачи (34) – (36) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (31) – (33) со скоростью

$$O\left(\frac{|h|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right),\ h = o(\tau^{1-\alpha}),\ \frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1.$$

Четвертая глава посвящена рассмотрению локально-одномерных схем для дифференциального уравнения дробного порядка в случае, когда на границе области задано условие с сосредоточенной теплоемкостью дробного порядка

$$c_0\partial_{0t}^\nu u = k\frac{\partial u}{\partial x},$$

где $\partial_{0t}^\nu u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\nu)}\displaystyle\int_0^t \frac{\dot{u}(x,\eta)}{(t-\eta)^\nu}d\eta$ – регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\nu,\ 0<\nu<1$, $\dot{u} = \partial u/\partial t$.

Краевые задачи для уравнения теплопроводности, когда на границе области помещена сосредоточенная теплоемкость величины c_0 возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью (см. книгу Тихонова А.Н. и Самарского А.А.[25], с. 186). Тогда для уравнения теплопроводности в одномерном случае, например, при $x=0$ ставится краевое условие вида

$$c_0\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x},\ c_0 = const > 0.$$

[25]Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука. 1966. – 724 с.

Аналогичные задачи возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности, затопленного на некоторое время участка (см. книгу Нерпина С.В. и Чудновского А.Ф.[26], с.233). В работе Нигматулина Р.Р.[27] для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка.

В цилиндре $Q_T = G \times (0,T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots,\ x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1,\ 2,\ \dots, p\}$ с границей Γ, рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^\nu u = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{40}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varkappa_{-\alpha}\partial_{0t}^\nu u + \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \varkappa_{+\alpha}\partial_{0t}^\nu u + \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{41}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{42}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u,\ L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),$$
$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha \leqslant c_1,\ \beta_{\pm\alpha} \geqslant \beta_* > 0,\ \varkappa_{\pm\alpha} = const > 0.$$

Разностный аналог задачи (40) — (42) имеет вид

$$\begin{gathered} \Delta_{0t_{j+\alpha/p}}^\nu y = \overline{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{43}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha},\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y = \dfrac{a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \beta_{-\alpha}y_0}{p\varkappa_{-\alpha} + 0.5h_\alpha},\ x_\alpha = 0, \\ \Lambda_\alpha^+ y = -\dfrac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} + \beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}}{p\varkappa_{+\alpha} + 0.5h_\alpha},\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \qquad \Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \overline{\mu}_{-\alpha},\ x_\alpha = 0, \\ \overline{\mu}_{+\alpha},\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases}$$

$$\overline{\mu}_{-\alpha} = \frac{\mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0}}{p\varkappa_{-\alpha} + 0.5h_\alpha},\ \overline{\mu}_{+\alpha} = \frac{\mu_{+\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha}}{p\varkappa_{-\alpha} + 0.5h_\alpha}.$$

Задача для погрешности z имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\nu)}\sum_{s=1}^{pj+\alpha}\left(t_{j+(\alpha-s+1)/p}^{1-\nu} - t_{j+(\alpha-s)/p}^{1-\nu}\right) z_{\overline{t}}^{s/p} = \Lambda_\alpha z^{j+\alpha/p} + \psi_\alpha^{j+\alpha/p},$$

---

[26] Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Энерго-и массо-обмен в системе растение-почва-воздух. Л.:ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ, 1975г.

[27] Нигматулин Р.Р. Особенности релаксации системы с остаточной памятью //. Физ. твердого тела. 1985. Т.27. №5. С. 1583 — 1585

где

$$\psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \Delta^\nu_{0t_{j+\alpha/p}} u,$$

$\psi_\alpha = \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \overset{*}{\psi}_\alpha$, $\overset{\circ}{\psi}_\alpha = O(1)$, $\overset{*}{\psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau)$. Таким образом, разностная задача (43) обладает суммарной аппроксимацией

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{*}{\psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau).$$

Для граничных условий получаем

$$\Delta^\nu_{0t_{j+\alpha/p}} z = \Lambda_\alpha^- z^{j+\alpha/p} + \psi_{-\alpha},\ \psi_{-\alpha} = \frac{0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}}{p\varkappa_{-\alpha} + 0.5h_\alpha} + \frac{\overset{*}{\psi}_{-\alpha}}{p\varkappa_{-\alpha} + 0.5h_\alpha},\ x_\alpha = 0,$$

$$\Delta^\nu_{0t_{j+\alpha/p}} z = \Lambda_\alpha^+ z^{j+\alpha/p} + \psi_{+\alpha},\ \psi_{+\alpha} = \frac{0.5h_\alpha \overset{\circ}{\psi}_{+\alpha}}{p\varkappa_{+\alpha} + 0.5h_\alpha} + \frac{\overset{*}{\psi}_{\alpha}}{p\varkappa_{+\alpha} + 0.5h_\alpha},\ x_\alpha = \ell_\alpha,$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{\pm\alpha} = O(1),\ \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_{\pm\alpha} = 0,\ \overset{*}{\psi}_{\pm\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau).$$

Для решения разностной задачи (43) справедлива

Теорема 10. *Локально-одномерная схема (43) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (43) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \max_{0\leqslant k\leqslant j} \frac{1}{\beta_*} \left(\|\overline{\mu}_{-\alpha}(t_k)\|_{C_\gamma} + \|\overline{\mu}_{+\alpha}(t_k)\|_{C_\gamma}\right) +$$

$$+ p^{1-\nu}\Gamma(2-\nu) \sum_{j'=0}^{j} \tau^\nu \sum_{\alpha=1}^{p} \max_{0\leqslant s\leqslant\alpha} \|\varphi^{j'+s/p}\|_C. \tag{44}$$

По аналогии с работой Лафишевой М.М. и Шханукова М.Х. [28] можно показать, что на кубической сетке $h_1 = h_2 = \ldots = h_p = h$ при условиях

$$\varkappa_{-1} = \varkappa_{-2} = \ldots = \varkappa_{-p} = \varkappa_1,\ \varkappa_{+1} = \varkappa_{+2} = \ldots = \varkappa_{+p} = \varkappa_2$$

для погрешности z справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant M\left(\frac{|h|^2}{\tau^{1-\nu}} + \tau^{2\nu-1}\right),\ |h| = \max_{1\leqslant\alpha\leqslant p} h_\alpha.$$

Итак, справедлива

[28] Лафишева М.М., Шхануков М.Х. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. №10. С. 1878-1887.

Теорема 11. *Пусть задача (40) – (42) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2},\ \frac{\partial^{2+\nu} u}{\partial x_\alpha^2 \partial t^\nu},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\ 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant p,$$

$$\varkappa_{-1} = \varkappa_{-2} = \ldots = \varkappa_{-p} = \varkappa_1 > 0,\ \varkappa_{+1} = \varkappa_{+2} = \ldots = \varkappa_{+p} = \varkappa_2 > 0,$$

тогда решение разностной задачи (43) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (40) – (42) со скоростью

$$O\Big(\frac{h^2}{\tau^{1-\nu}} + \tau^{2\nu-1}\Big),\ h^2 = o(\tau^{1-\nu}), \frac{1}{2} < \nu < 1.$$

Пятая глава посвящена рассмотрению нелокальной краевой задачи для уравнения параболического типа в p-мерном параллелепипеде. С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы и доказана ее сходимость.

В работе Чудновского А.Ф. [29] обращено внимание на недостаточно критический подход к формулировке граничных условий для уравнения влагопереноса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ 0 < x < \ell,\ 0 < t \leqslant T, \tag{45}$$

где $D(w)$ – коэффициент диффузивности, w – влажность в долях единицы, x – глубина.

Для уравнения (45) Чудновский А.Ф. сформулировал задачу с нелокальным условием:

$$D\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = \int\limits_0^\alpha w dx, \tag{46}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0, \tag{47}$$

$$w(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{48}$$

Нелокальное условие (46) означает, что поток влаги через поверхность $x = 0$ равен содержанию влаги в активном слое почвы от 0 до α, условие (47) означает изоляцию в смысле обмена влагой между слоем почвы $x = \ell$ и ее нижними слоями, и в начальный момент задан глубинный ход влажности (48).

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{49}$$

[29] Чудновский А.Ф. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло-и влагопереноса в почве // «Сб. трудов по агрофизике», вып. 23, Гидрометеоиздат, 1969. С. 41 – 54.

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \displaystyle\int_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha + \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{50}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{51}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |q_\alpha|,\ |\beta_{\pm\alpha}| \leqslant c_2,\ \alpha = 1,2,\ldots,p,$$

$c_0,\ c_1,\ c_2$ – положительные постоянные.

Разностный аналог задачи (49) – (51) имеет вид

$$y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p},\ \alpha = 1,2,\ldots,p,\ x \in \overline{\omega}_h, \tag{52}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}, \tag{53}$$

где

$$y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau},$$

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y = \dfrac{a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} y_0}{0.5h_\alpha} - \dfrac{1}{0.5h_\alpha}\displaystyle\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ y = -\dfrac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha} + \overline{\beta}_{+\alpha} y_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha},\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \overline{\mu}_{-\alpha},\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \overline{\mu}_{+\alpha},\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha,\ i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2,\ i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases}$$

$$\overline{\mu}_{-\alpha} = \frac{\mu_{-\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha,0},\ \overline{\mu}_{+\alpha} = \frac{\mu_{+\alpha}}{0.5h_\alpha} + f_{\alpha,N_\alpha},$$

$$\overline{\beta}_{-\alpha} = \beta_{-\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha,0},\ \overline{\beta}_{+\alpha} = \beta_{+\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha,N_\alpha}.$$

Задача для погрешности $z^{j+\alpha/p} = z^{(\alpha)}$ имеет вид:

$$z_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \widetilde{\Psi}_\alpha^{(\alpha)},\ \alpha = 1,2,\ldots,p,\ z(x,0) = 0, \tag{54}$$

$$\overline{\Lambda}_\alpha z = \begin{cases} \Lambda_\alpha z = (a_\alpha z_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha z, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda^-_\alpha z = \dfrac{a^{(1_\alpha)}_\alpha z_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} z_0}{0.5h_\alpha} - \dfrac{1}{0.5h_\alpha} \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha} \hbar_\alpha, \ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda^+_\alpha z = -\dfrac{a^{(N_\alpha)}_\alpha z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} + \overline{\beta}_{+\alpha} z_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha}, \ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\widetilde{\Psi}_\alpha = \begin{cases} \Psi_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha, \ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0, \ \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1), \ \overset{*}{\Psi}_\alpha = O(h^2_\alpha + \tau), \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha}/0.5h_\alpha, \ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} = 0, \ \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} = O(h^2_\alpha + \tau), \ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \overset{*}{\Psi}_{+\alpha}/0.5h_\alpha, \ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} = 0, \ \overset{*}{\Psi}_{+\alpha} = O(h^2_\alpha + \tau), \ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

Т.е., разностная задача (52) обладает суммарной аппроксимацией

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{*}{\psi}_\alpha = O(|h|^2 + \tau), |h|^2 = \hbar^2_1 + \hbar^2_2 + \ldots + \hbar^2_p.$$

Для решения разностной задачи (52) справедлива

Теорема 12. *Локально-одномерная схема (52) – (53) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (52) – (53) справедлива оценка*

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y^{j'+\alpha/p}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant$$

$$\leqslant M(t)\left[\|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'}) + \mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right) H/\hbar_\alpha\right)\right], \tag{55}$$

где $M(t) > 0$ – не зависит от h_α и τ.

Справедлива

Теорема 13. *Пусть задача (49) – (51) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2_\alpha \partial x^2_\beta}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2_\alpha \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_\alpha}, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \ \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (52) – (53) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|^2_1 \leqslant M\left(|h|^2 + \tau\right),$$

$$\|y^{j+1}\|^2_1 = \|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y^{j'+\alpha/p}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Шханукову-Лафишеву Мухамеду Хабаловичу за поддержку и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Баззаев А.К.* Локально-одномерная разностная схема для III-й краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка в двумерной области. //Сборник научных трудов Северо-Осетинского отделения Академии наук высшей школы Российской Федерации, 2008, №6, С. 134−139.

2. *Баззаев А.К.* Численное решение третьей краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка методом суммарной аппроксимации. Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. - Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008− 376 с.

3. *Баззаев А.К., Шхануков М.Х.* Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода // ЖВМ и МФ., 2010, Т. 50, №7, С. 1200−1208.

4. *Баззаев А.К.* Первая краевая задача для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области // Труды молодых ученых. Серия: Математика. 2010. Выпуск №4, С. 147−162.

5. *Баззаев А.К.* Третья краевая задача для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2010. №2, С. 5−14.

6. *Баззаев А.К.* Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. // Владикавказский математический журнал, 2011, Т. 13, Выпуск 1, С. 3−12.

7. *Баззаев А.К., Гутнова Д.К., Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерная схема для параболического уравнения с нелокальным условием. // ЖВМ и МФ, 2012, том 52, № 6, с. 1048−1057.

8. *Баззаев А.К., Мамбетова А.Б., Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально- одномерная схема для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // ЖВМ и МФ, 2012, том 52, № 9, с. 1656−1665.

9. *Баззаев А.К.* Разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода в многомерной области. // Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 11−16.

Баззаев Александр Казбекович

Локально-одномерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 15.07.2013. Усл. п. л. 1,4
Формат бумаги 60×84 1/16. Тираж 100 экз. Заказ №83

Отпечатано в ИПЦ СОИГСИ им. В.И. Абаева
ВНЦ РАН и Правительства РСО-Алания
362040, г. Владикавказ, пр. Мира, 10.