

На правах рукописи
УДК 519.72,519.68

Домахина Людмила Григорьевна

**СКЕЛЕТНАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ И
ЦИРКУЛЯРНАЯ МОРФОЛОГИЯ
МНОГОУГОЛЬНИКОВ**

01.01.09 - Дискретная математика и математическая кибернетика.

Автореферат
диссертации на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2014 г.

Работа выполнена на кафедре математических методов прогнозирования
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор,
зав. кафедры информатики и математики
Международного университета в Москве
Местецкий Леонид Моисеевич

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., с.н.с., начальник подразделе-
ния 3000 Государственного научно-
исследовательского института авиацион-
ных систем
Визильтер Юрий Валентинович

к.ф.-м.н., доцент кафедры автоматки и
телемеханики Тульского государственно-
го университета
Середин Олег Сергеевич

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт системного
анализа Российской академии наук

Защита состоится «16» мая 2014 г. в 11 часов на заседании диссертаци-
онного совета Д501.001.44 при Московском государственном университете
имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991 ГСП-1 Москва, Ленинские го-
ры, МГУ имени М.В.Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК.
Желающие присутствовать на заседании диссертационного совета должны
сообщить об этом за 2 дня по тел. 939-30-10 (для оформления заявки на
пропуск).

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Автореферат разослан «__» апреля 2014

Председатель
диссертационного совета

профессор
Васин А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации рассматривается задача сегментации выделенных в изображении объектов для сравнения и классификации этих объектов по их форме. Обычно в основе классификации формы лежит сравнение тестируемого объекта с эталонными объектами, форма которых считается известной (например, сходство с геометрическими фигурами). Сегментация в этом случае имеет целью декомпозицию объекта сложной формы на составляющие его элементы, форма которых имеет более простой вид и, соответственно, допускает более простую классификацию.

В диссертации исследуются методы сегментации, основанные на медиальном представлении формы объектов. Медиальное представление объекта включает множество срединных осей объекта (называемое скелетом) и радиальную функцию, заданную в точках скелета. Такое представление широко используется в качестве информативного дескриптора, описывающего общую структуру объекта. Скелет плоской фигуры представляет собой множество центров максимальных вписанных в фигуру окружностей. Скелет фигуры имеет вид геометрического графа. Скелетная сегментация состоит в разбиении скелетного графа на составляющие части — подграфы, соответствующие отдельным структурным элементам формы объекта. Скелетная сегментация формы основывается на построении медиального представления формы и анализе полученного скелетного графа и радиальной функции.

В диссертации задача скелетной сегментации рассматривается лишь для многоугольных фигур. Представление формы объектов изображения многоугольными фигурами широко используется в компьютерной графике, обработке и анализе изображений. С одной стороны, многоугольными фигурами можно приблизить любые, сколь угодно сложные, фигуры, представленные как неявным описанием, так и явным заданием границы, либо цифровым бинарным изображением. С другой стороны, скелет многоугольной фигуры имеет аналитическое описание в виде геометрического графа с ребрами, являющимися отрезками прямых линий и квадратичных парабол, что существенно упрощает его вычисление и анализ.

Цель работы: разработка эффективных методов скелетной сегментации формы многоугольных фигур, основанных на математически корректных моделях, имеющих формальные показатели качества сегментации и позволяющих сравнивать и классифицировать объекты по форме.

Подход к достижению указанных целей основан на понятии срединной оси фигуры. Понятие срединной оси плоской фигуры (или скелета) было впервые введено в конце 1960-х годов Blum¹. Он показал, что медиальное представление объектов (от англ. *medial representation*), присутствующих на двумерных изображениях, является эффективным способом описания их

¹Blum H. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*. MIT Press, 1967. pp. 362-380.

геометрической структуры.

Существующие методы сегментации, в том числе методы, использующие скелетное представление, основываются на эвристических правилах. Для оценки качества сегментации используются экспертные критерии на базе субъективных визуальных оценок. Это не позволяет оптимизировать сегментацию формы, а также сравнивать между собой различные методы сегментации.

Таким образом, с одной стороны, скелетное представление формы открывает принципиальную возможность построения и использования скелетной сегментации при сравнении и классификации формы. Разработанные в последнее время методы описания формы дискретных изображений в виде непрерывного скелетного представления многоугольных фигур (Местецкий²) позволяют использовать скелетное представление для анализа и распознавания изображений. С другой стороны, известные методы сегментации формы основываются на эвристических правилах, не имеют формальных критериев качества сегментации и не приспособлены для решения задач сравнения формы объектов. Этим обосновывается **актуальность темы**, направленной на исследование и разработку новых методов сегментации формы, которые позволили бы преодолеть указанные недостатки известных методов.

Научная задача заключается в разработке новых методов сегментации формы, основанных на скелетном представлении и имеющих формальные показатели качества сегментации. Сложность этой задачи обуславливается несколькими факторами:

1) *Скелетизация — некорректная задача* по Адамару. Использование скелета для представления формы объектов порождает проблему "шумовых" ветвей (рис. 1). Для нескольких аппроксимирующих фигур, различия которых практически незаметны для глаза, можно получить скелеты с разной топологической структурой. Небольшие нерегулярности в границе фигуры, являющиеся зачастую следствием шумов, приводят к появлению соответствующих шумовых ветвей скелета. Отсюда возникает проблема регуляризации скелетного графа в интересах дальнейшей его сегментации.

2) Неопределенность понятия *качество сегментации* и необходимость его формализации. Критерий качества сегментации фигуры должен приноситься извне и формироваться исходя из дальнейшего использования результатов. В частности, необходимо сформулировать критерий качества сегментации применительно к задаче классификации формы объектов.

3) Необходимость корректной *работы с парами фигур*. Задача совместной сегментации пар фигур возникает при разработке метрик, описывающих сходство и различие формы изображений в задачах классификации.

²Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений. Фигуры. Скелеты. Циркуляры Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2009

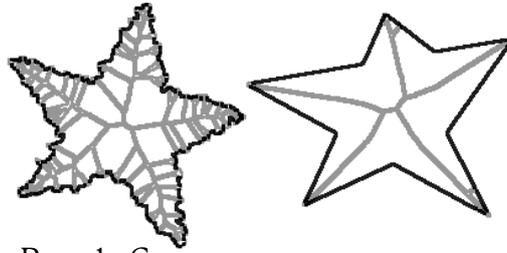


Рис. 1: Скелеты многоугольников.

Структура предлагаемого метода решения

Предлагаемое решение поставленных задач основывается на выделении и последовательном решении двух задач скелетной сегментации:

1. Задача генерации скелетных дескрипторов формы по критериям полноты описания — задача сегментации фигуры.
 - (a) Циркулярное представление фигуры — задание полного описания фигуры. Данное представление содержит в себе "лишнюю" информацию для описания формы.
 - (b) Определение признаков формы — множеств подциркуляров фигуры при помощи морфологических функций и проекций.
 - (c) Определение устойчивой проекции фигуры — малоинформативное, но устойчивое описание фигуры.
 - (d) Определение функции устойчивости сегментации.
 - (e) Генерация признаков по критериям соответствия и полноты описания.
2. Задача селекции скелетных признаков по критериям делимости классов — задача сравнения формы фигуры.
 - (a) Определение априорной информации об изоморфизме циркуляров — топологическая функция устойчивости.
 - (b) Определение функции устойчивости пары образов — метрическая функция устойчивости.
 - (c) Селекция признаков по критериям делимости классов — оптимизация по топологической и метрической функциям устойчивости.
 - (d) Определение меры сходства на паре фигур.

На защиту выносятся следующие новые научные результаты:

1. Критерий качества скелетной сегментации фигуры, основанный на определении функции штрафа при помощи противоположных по смыслу функций соответствия и устойчивости. Метод скелетной сегментации фигуры, основанный на минимизации циркулярной функции штрафа.
2. Критерий качества скелетной сегментации пары фигур. Метод скелетной сегментации пары фигур, основанный на минимизации циркулярной функции штрафа для пар.

3. Алгоритм поиска оптимальной сегментации пары фигур, основанный на определении циркулярной функции штрафа для пары фигур с учетом априорной информации об изоморфизме скелетов и на минимизации функции штрафа для пары. Определение множества циркуляров общего положения. Доказательство существования и единственности решения на множестве базовых циркуляров общего положения.
4. Циркулярная мера сходства формы фигур, основанная на проекции циркулярной функции штрафа на множестве пар циркуляров.

Научная новизна

1. Подход к определению критерия качества скелетной сегментации фигуры через методы математической морфологии.
2. Идея определения моделей сегментации формы на основе оптимизации по соответствию и качеству.
3. Формализация аппарата циркулярной морфологии: множества циркуляров, операторы проектирования на множествах циркуляров, циркуляры уникальной проекции, максимальный единичный проектор, циркулярные функции штрафа, соответствия, устойчивости.
4. Новый метод скелетной сегментации фигуры, основанный на минимизации циркулярной функции штрафа.
5. Новый критерий качества скелетной сегментации пары фигур, основанный на циркулярной функции штрафа для пары фигур и априорной информации об изоморфизме.
6. Новый метод скелетной сегментации пары фигур на основе оригинального критерия качества.
7. Алгоритм построения монотонного множества вложенных цепочек циркуляров, алгоритм поиска оптимальной сегментации пары фигур.
8. Новая циркулярная мера сходства формы фигур, основанная на проекции циркулярной функции штрафа на множестве пар циркуляров.

Научная значимость работы состоит в формализации математической морфологии на множестве циркуляров — определении аппарата *циркулярной морфологии*, который может быть использован для определения общих и прикладных мер для сравнения плоских фигур, а также в определении теоретически корректного критерия сегментации одной фигуры и зависимого критерия сегментации пары фигур.

Практическая значимость заключается в том, что представление фигур с помощью скелетной сегментации и циркулярной морфологии может

быть использовано в задачах распознавания формы. Полученные результаты могут найти применение в программных комплексах двумерной векторной графики, в системах распознавания изображений, машинного зрения.

Внедрение результатов

Выносимые на защиту методы были разработаны, исследованы и практически использованы в ходе работ по проектам Российского Фонда фундаментальных исследований (РФФИ) 05-01-00542 "Методы распознавания формы изображений на основе дискретно-непрерывных преобразований"; 08-01-00670 "Методы анализа и распознавания формы изображений на основе непрерывных моделей". Представленные в работе результаты частично вошли в книгу "Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. Курс лекций и практический занятий" (Физматкнига, 2011), рекомендованную в качестве учебного пособия в технических ВУЗах.

Структура диссертации

Работа состоит из оглавления, введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Содержание работы изложено на 149 страницах. Список литературы включает 75 наименований. Текст работы иллюстрируется 48 рисунками и 6 таблицами.

Апробация

Представленные в работе результаты докладывались и обсуждались на

1. 12-й, 13-й и 14-й всероссийских конференциях "Математические методы распознавания образов" (Московская обл. 2005, Ленинградская обл. 2007 год, Владимирская обл. 2009 год);
2. международных конференциях "Интеллектуализация обработки информации - 2006" и "Интеллектуализация обработки информации - 2008" (Симферополь 2006, 2008);
3. международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2006" в секциях "Математика и механика" и "Вычислительная Математика и Кибернетика" (Москва 2006);
4. научной школе-семинаре "Дискретная математика и математическая кибернетика", Московская область, март 2006;
5. 18-й международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению "Графикон" (Москва 2008 год);
6. 4-ой международной конференции по теории компьютерного зрения и приложениям (The fourth International Conference on Computer Vision Theory and Applications VISAPP- 2009), Лиссабон, Португалия 2009;
7. 2-ом международном семинаре по анализу изображений: теории и приложениям (The Second International Workshop on Image Mining. Theory and Applications (IMTA 2009), Лиссабон, Португалия 2009;

8. 10-й международной конференции по вычислительным наукам и приложениям (ICCSA 2010), Фукоука, Япония 2010 — *победитель в номинации лучшая работа*;
9. семинарах "Морфологический анализ данных", Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, 2011.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана общая характеристика работы, приведено обоснование актуальности темы исследования, поставлены цели и задачи диссертационного исследования, аргументирована научная значимость исследований, представлены выносимые на защиту научные положения, изложена краткая структура диссертации.

В первой главе даются основные определения, приводится обзор литературы.

Определение 1. *Скелетом* $ma(F)$ ³ *фигуры* F называется множество центров всех ее максимальных пустых кругов.

Определение 2. Под *сегментацией скелета* будем понимать процесс его конечного разбиения — получение декомпозиции скелета.

Определение 3. *Вершинами скелета* назовем все центры максимальных пустых кругов, кроме тех, что касаются границы фигуры в двух точках. *Ребром скелета*, соединяющим две вершины, назовем срединные оси фигуры, состоящие из центров окружностей, каждая касается границы ровно в двух точках. *Ветвью скелета* назовем простую цепь скелетного графа, в которой все вершины имеют степень два, кроме двух крайних вершин. Ветвь скелета называется *терминальной*, если она содержит хотя бы одну терминальную вершину скелета, иначе — *внутренней*. *Скелетный граф* фигуры — геометрический граф с множеством вершин и ребер скелета фигуры.

Скелетный граф задает скелетную сегментацию, так как его вершины задают разбиение скелета. Но такая сегментация является избыточным описанием и не подходит для решения задач классификации. Кроме того, она неустойчива, так как при незначительных изменениях фигуры скелет может существенно измениться.

Определение 4. *Однореберный скелетный оператор* $ma^0 : F \rightarrow Sk^0$ по фигуре строит максимальную евклидову цепь подграфа ее скелета.

Теорема 1. *Однореберный скелетный оператор* $ma^0 : F \rightarrow Sk^0$ *устойчив на паре метрических пространств* (Φ, Λ) *с расстояниями* $\rho_\Phi(.,.)$ — *расстояние Хаусдорфа* и $\rho_\Lambda(.,.)$ — *топологическое скелетное расстояние (разность числа ребер скелетных графов)*.

³*ma* от англ. medial axes

Представления в виде одnoreберных скелетных подграфов являются малоинформативными и не позволяют решать задачи классификации и сравнения формы. Возникает вопрос о поиске достаточно устойчивого, но при этом достаточно информативного промежуточного скелета.

Таковым является базовый⁴ скелет фигуры, полученный за счет стрижки терминальных ветвей скелета. Он улучшает качество скелетной сегментации, на его основе можно построить "базовую скелетную сегментацию фигуры", которая лучше отражает структуру фигуры по сравнению с сегментацией на основе скелета фигуры.

Вторая глава посвящена скелетной сегментации и циркулярной морфологии многоугольника. Предлагаемый в работе подход базируется на расширенном по сравнению со скелетным представлением фигуры: циркулярным.

Определение 5. *Циркуляр* — геометрический граф с множеством кругов с центрами на нем. Объединение всех его кругов называется его *силуэтом*.

Определение 6. *Срединный циркуляр* $c^{ma}(F)$ фигуры F — это такой циркуляр, что

- его осевой граф совпадает со скелетом фигуры F ;
- его множество кругов совпадает со множеством максимальных вписанных пустых кругов фигуры F .

Лемма 1. *Любой плоской фигуре F соответствует единственный срединный циркуляр.*

Таким образом, задача сегментации многоугольника сводится к задаче сегментации циркуляра.

Определение 7. Назовем $c_2 \in \Theta$ *подциркуляром* циркуляра c_1 или вложенным в циркуляр c_1 , если осевой граф c_2 вложен в осевой граф c_1 и все круги, соответствующие c_2 , принадлежат и c_1 :

$$c_2 \subseteq c_1 \Leftrightarrow \begin{cases} mg(c_2) \subseteq mg(c_1) \\ \forall t \in mg(c_2) : c_t \in c_2 \Rightarrow c_t \in c_1 \end{cases} \quad (1)$$

Функции, задающие полноту и устойчивость циркулярного представления, определены на базе математического аппарата критериальных и проективных морфологий Визильтера⁶.

⁴Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений. Фигуры. Скелеты. Циркуляры. Москва, ФИЗМАТЛИТ 2009 г.

⁶Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Ососков М.В., Моржин А.В. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. Курс лекций и практических занятий.- М: Физматкнига, с. 384-389, 2010.

Определение 8 (Расстояние между парой циркуляров). Расстоянием между циркулярами $c_1 \in \Theta$ и $c_2 \in \Theta$ назовем величину, равную расстоянию Хаусдорфа между их силуэтами:

$$D_H(c_1, c_2) = D_H(\text{Sil}(c_1), \text{Sil}(c_2)) \quad (2)$$

Определение 9. Базовым подциркуляром с точностью, равной нулю, является сам циркуляр: $c^{(\varepsilon=0)} \equiv c^*$. Базовым подциркуляром циркуляра c^* с точностью $\varepsilon \geq 0$ назовем минимальный подциркуляр $c^{(\varepsilon)}$ циркуляра c^* , вложенный во все базовые подциркуляры с точностями меньше ε , такой, что расстояние Хаусдорфа между циркуляром и подциркуляром не превосходит ε .

$$\left\{ \begin{array}{l} c^{(\varepsilon)} \subseteq c^* - \text{подциркуляр} \\ D_H(c^*, c^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon - \text{расстояние не превосходит } \varepsilon \\ \forall c \subseteq c^* : c \neq c^{(\varepsilon)}, D_H(c^*, c) \leq \varepsilon \Rightarrow c^{(\varepsilon)} \subset c - \text{подциркуляр } c^{(\varepsilon)} \text{ минимальный} \\ \forall \varepsilon_1 < \varepsilon \Rightarrow c^{(\varepsilon)} \subseteq c^{(\varepsilon_1)} - \text{вложен во все базовые подциркуляры с меньшей} \\ \text{точностью} \end{array} \right. \quad (3)$$

Алгоритм построения монотонных цепочек циркуляров на основе стрижки

Базовые подциркуляры можно получать при последовательной стрижке терминальных ветвей циркуляра. Так для циркуляра c можно построить монотонные вложенные цепочки подциркуляров. Первый подциркуляр совпадает с циркуляром c : $c^0 \equiv c$. От него на каждом шаге "отстригается" такая терминальная ветвь, что ее удаление наименьшим образом влияет на силуэт $\text{Sil}(c)$. Если таких ветвей несколько, то они отстригаются все.

Обозначим упорядоченное множество полученных вложенных подциркуляров и соответствующее множество точностей их стрижки:

$$\tilde{c} = \{c^0, \dots, c^n\}; \tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^n\} \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда всем точностям из цепочки $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^n\}$ (4) соответствует ровно по одной "отстриженной" терминальной ветви. То есть $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \{e^i\} \equiv e^i$. Описанное условие называется *уникальностью терминальной стрижки*.

Определение 10. *Циркуляр общего положения* — это циркуляр, для которого выполнено условие уникальности терминальной стрижки.

Замечание: использование расстояния Хаусдорфа дает в общем случае неэффективный алгоритм полиномиальной сложности. На практике можно использовать другие расстояния, которые делают алгоритм субкубической сложности $N^2 \log N$. Например, расстояние, равное сумме длин отстригаемых ребер или верхнюю оценку расстояния Хаусдорфа, которую можно

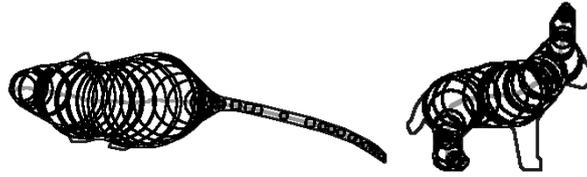


Рис. 2: Пример: подциркуляры-проекции.

сделать для подциркуляров. Такие расстояния вычисляются аналитически и суммируются на каждом шаге, за счет чего достигается высокая эффективность алгоритма.

Определение 11 (Максимальный стриженный подциркуляр). Максимальный стриженный подциркуляр — циркуляр, полученный в результате алгоритма построения монотонного подмножества циркуляра, осевой граф которого представляет собой максимальную простую цепочку.

Определение 12 (Оператор проектирования на максимальный стриженный подциркуляр). Назовем оператором проектирования циркуляра $c \in \ddot{\Theta}$ на максимальный стриженный подциркуляр оператор, ставящий в соответствие циркуляру c его максимальный стриженный подциркуляр. Обозначим такой оператор $Pr_2(c)$.

$$Pr_2 : \ddot{\Theta} \rightarrow \ddot{\Theta}; Pr_2(c) = c^{n-j}, j = \max_{i=1, \dots, n} \{i : c^{n-i} \in \tilde{c} - \text{простая цепочка}\} \quad (5)$$

Лемма 2. Для любого циркуляра общего положения: $c \in \ddot{\Theta}$ существует такой номер $j > 0$, что в его цепочке подциркуляров 4 осевой граф циркуляра c^{n-j} является простой цепочкой, а сам циркуляр c^{n-j} принадлежит модельному множеству проектора Pr_2 .

Доказательство. Достаточно показать, что для $j = 1$ лемма верна. □

Оператор проекции Pr_2 можно использовать для генерации признаков формы. Для фиксированного циркуляра c проекция $Pr_2(c)$ — это признак циркуляра c .

Определение 13. Базовый циркуляр с точностью ε для циркуляра общего положения c^* — это максимальный циркуляр $c_B^{(\varepsilon)}$, находящийся между "соседними" базовыми подциркулярами или совпадающий с одним из базовых подциркуляров, такой, что расстояние Хаусдорфа между ним и циркуляром

c^* в точности равно ε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^i \leq \varepsilon < \varepsilon^{i+1}; \varepsilon^i, \varepsilon^{i+1} \in \tilde{\varepsilon} — \text{величина } \varepsilon \text{ находится между точностями} \\ \text{из монотонной цепочки (4);} \\ c^i \cong c_B^{(\varepsilon)}, c^i \in \tilde{c} — \text{циркуляр } c^i \text{ из монотонной цепочки (4) изоморфен} \\ \text{базовому циркуляру } c_B^{(\varepsilon)}; \\ c^i \setminus c_B^{(\varepsilon)} = e_B^i \text{ или } c^i = c_B^{(\varepsilon)} — \text{разницу между циркуляром } c^i \text{ из монотонной} \\ \text{цепочки и базовым циркуляром } c_B^{(\varepsilon)} \text{ составляет кусок одного ребра или же} \\ \text{они совпадают;} \\ D_H(c^*, c_B^{(\varepsilon)}) = \varepsilon — \text{расстояние Хаусдорфа между базовым циркуляром } c_B^{(\varepsilon)} \\ \text{и исходным циркуляром } c^* \text{ в точности равно } \varepsilon; \\ \forall t \in mg(c_B^{(\varepsilon)}) : C_t \in c^i \Rightarrow C_t \in c_B^{(\varepsilon)} — \text{все круги с центрами на осевом графе} \\ mg(c_B^{(\varepsilon)}) \text{ принадлежат базовому циркуляру } c_B^{(\varepsilon)}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Определение 14. *Монотонное подмножество циркуляра* $\Theta^S(c^*)$ общего положения $c^* \in \dot{\Theta}$ — это все подциркуляры из множества всех циркуляров Θ , подциркуляром которых является также максимальный стриженный подциркуляр циркуляра c : $\Theta^S(c^*) = \{c' \subseteq c \subseteq c^*\}$

Определение 15. *Базовое множество циркуляра* c — множество всех базовых циркуляров циркуляра c с точностями из отрезка $[0, \varepsilon^n]$.

$$\tilde{c}^B = \{c_B^{(\varepsilon)} : \varepsilon \in [0, \varepsilon^n]\} \quad (7)$$

Определение 16. *Циркулярная функция штрафа* — это функция на множестве пар циркуляров $\Phi : \Theta \times \Theta \rightarrow R$ следующего вида:

$$\Phi_c(c, c') = J_c(c, c') + \chi_c(c, c') + \alpha_c Q_c(c') \quad (8)$$

Где c — циркуляр-проецируемый образ, а c' — циркуляр-проекция.

0.1 Задача поиска циркулярной проекции

Сформулируем задачу поиска циркулярной проекции.

Задача 1. Найти циркуляр, доставляющий минимум циркулярной функции штрафа.

$$\Psi_1(c_1, c'_1) = Pr(c_1, J_c, Q_c) = arg \min_{(c'_1) \in \dot{\Theta}} \Phi_c(c_1, c'_1) \quad (9)$$

Определение 17 (Хорошо определенная функция штрафа). Функция штрафа (8) хорошо определена, если требования соответствия и устойчивости оказываются противоположными: из неравенства "функция соответствия на проекции B_1

меньше или равна функции соответствия на проекции B_2 ” следует обратное неравенство для функции устойчивости: $Q(B_1) \geq Q(B_2)$, а из неравенства ”функция устойчивости на проекции B_1 больше или равна функции устойчивости на проекции B_2 ” следует обратное неравенство для функции соответствия: $J(A, B_1) \leq J(A, B_2)$.

$$\forall A \in \Omega : \begin{cases} \forall B_1, B_2 \in V(A, \Phi) : J(A, B_1) \leq J(A, B_2) \Rightarrow Q(B_1) \geq Q(B_2) \\ \forall B_3, B_4 \in V(A, \Phi) : Q(B_3) \geq Q(B_4) \Rightarrow J(A, B_3) \leq J(A, B_4) \end{cases} \quad (10)$$

Определение 18. *Циркулярная функция соответствия $J_c(c, c')$ — это расстояние Хаусдорфа между циркуляром-образом и циркуляром-проекцией для всех проекций, являющихся подциркулярами проецируемого образа.*

$$J_c(c, c') = \begin{cases} D_H(c, c'), c' \subseteq c \\ +\infty, c' \not\subseteq c \end{cases} \quad (11)$$

Теорема 2. *Функция $J(c, c')$ является функцией соответствия на множестве допустимых проекций $V(c, \Phi)$.*

Определение 19. *Множеством допустимых проекций функции Φ назовем множество всех проекций, на которых функция $\Phi(A, B)$ принимает конечное значение: $V(A, \Phi) = \{B : \Phi(A, B) < +\infty\}$*

Лемма 3. *При определении функции соответствия $J_c(c, c')$ через расстояние Хаусдорфа (11), множеством допустимых проекций $V(c, \Phi_c)$ функции Φ_c будут только подциркуляры циркуляра c .*

Лемма 4. *Функция соответствия $J_c(c, c')$ является монотонной (не убывающей) на множестве допустимых проекций $V(c, \Phi)$ и строго монотонной (возрастающей) на множестве $c' \in \tilde{c} = \{c^0, \dots, c^n\}$.*

Определение 20. *Функция устойчивости — это расстояние Хаусдорфа между циркуляром- проекцией c' и максимальной единичной проекцией $Pr_2(c')$:*

$$Q_c(c') = D_H(c', Pr_2(c')) \quad (12)$$

Лемма 5. *Функция штрафа Φ_c (8) эквивалентна следующей функции (упрощенная функция штрафа): $\Phi_c(c, c') = J_c(c, c') + \alpha_c Q_c(c')$.*

Теорема 3. *Функция штрафа Φ_c (8) хорошо определена*

Доказательство. В силу леммы 5 теорема доказывается по определению хорошо определенной функции на упрощенной функции штрафа. \square

Поэтому задача поиска наилучшей сегментации поставлена как задача поиска циркуляра, минимизирующего функцию штрафа:

$$\Psi(c, \Phi) = \arg \min_{c' \in \Theta} \Phi_c(c, c')$$

Лемма 6. *Решение задачи 1 (минимум функции $\Phi_c(c, c')$) находится в монотонном подмножестве циркуляра \tilde{c} (4).*

Параметр α_c функции штрафа определяет степень важности устойчивости или соответствия искомого оптимального циркуляра. Он должен задаваться исходя из прикладной задачи, в которой необходимо искать оптимальный циркуляр. Монотонность функции соответствия позволяет найти оптимальный циркуляр конструктивно, выбрав его из множества вложенных монотонных подциркуляров (4).

Третья глава посвящена выбору наилучшей скелетной сегментации для пар фигур. Для пар циркуляров вводятся аналогичные операторы и критерии, что и для циркуляров. Описываются их свойства. Для пары плоских циркуляров предлагается концепция морфологического проектора с априорным условием изоморфизма.

Определение 21. *Два скелета изоморфны, если существует изоморфизм соответствующих скелетных графов, сохраняющий ориентацию любых трех подряд идущих вершин при положительном направлении обхода двух скелетных графов.*

Определение 22. *Два циркуляра c_1 и c_2 изоморфны, если изоморфны их осевые графы: $tg(c_1) \cong tg(c_2)$.*

Введем обозначения:

$\check{\Theta}^2 = \{(c_1, c_2) : c_1 \in \Theta, c_2 \in \Theta : tg(c_1) \cong tg(c_2)\}$ — множество всех пар изоморфных циркуляров на плоскости;

$\check{\Theta}(c_1, c_2) = \{c'_1 \subseteq c_1, c'_2 \subseteq c_2 : c'_1 \cong c'_2\}$ — множество всех пар изоморфных подциркуляров (c_1, c_2) на плоскости.

$\dot{\Theta}(c_1, c_2) = \{c'_1 \subseteq c_1, c'_2 \subseteq c_2 : c'_1 \cong c'_2\}$ — множество пар всех базовых циркуляров общего положения (c_1, c_2) на плоскости.

Определение 23. *Функция устойчивости для пар циркуляров — это индикатор их изоморфизма:*

$$Q_2(c'_1, c'_2) = \begin{cases} 0, & tg(c'_1) \cong tg(c'_2) \\ +\infty, & tg(c'_1) \not\cong tg(c'_2) \end{cases} \quad (13)$$

Определение 24. *Функция соответствия для пары циркуляров c_1 и c_2 :*

$$J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) = \max\{J_c(c_1, c'_1), J_c(c_2, c'_2)\} \quad (14)$$

Определение 25. *Функция штрафа для пары циркуляров c_1 и c_2 имеет вид:*

$$\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) = J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) + Q_2(c'_1, c'_2) \quad (15)$$

Определение 26. Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма выглядит следующим образом:

$$\Psi_2(c_1, c_2, c'_1, c'_2) = Pr(c_1, c_2) = \arg \min_{(c'_1, c'_2) \in \Theta^2} \Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) \quad (16)$$

Определение 27. Проекция пары циркуляров (c_1, c_2) — это пара (c'_1, c'_2) , доставляющая минимум функции штрафа $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$.

Задача 2. Построить морфологический проектор (16) с априорным условием изоморфизма $\Psi_2(c_1, c_2, c'_1, c'_2)$ на множестве Θ^2 .

Для решения поставленной задачи доказан ряд утверждений.

Теорема 4. Множество допустимых проекций функции (15) Φ_2 — это множество всех изоморфных подциркуляров c_1 и c_2 .

Теорема 5. Множество $V(c_1, c_2, \Phi_2) = \tilde{\Theta}(c_1, c_2)$ ограничено в метрическом пространстве $\tilde{\Theta}^2$ с расстоянием $\mu_H((c_1, c_2), (c'_1, c'_2)) = \max\{D_H(c_1, c_2), D_H(c'_1, c'_2)\}$.

Доказательство. Идея доказательства: выбрать значением числа M_1 — максимальный из диаметров циркуляров c_1 и c_2 . Показать, что для любой пары циркуляров (c'_1, c'_2) из множества $V(c_1, c_2, \Phi_2) = \tilde{\Theta}(c_1, c_2)$, верно, что $\mu_H((x^*, y^*), (c'_1, c'_2)) \leq M_1$. \square

Теорема 6. Функция $J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ соответствия (14) непрерывна по переменным (c'_1, c'_2) на множестве допустимых проекций функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$: $(c'_1, c'_2) \in V(c_1, c_2, \Phi_2)$ на метрическом пространстве $\tilde{\Theta}(c_1, c_2)$ с расстоянием $\mu_H^{c_1, c_2}(c'_1, c'_2) = \max\{D_H(c_1, c'_1), D_H(c_2, c'_2)\}$.

Доказательство. Идея доказательства: по определению непрерывности функции в метрическом пространстве. \square

Лемма 7. Функция устойчивости на основе априорной информации об изоморфизме $Q_2(c'_1, c'_2)$ непрерывна на множестве допустимых проекций функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$.

Определение 28. Расстоянием между двумя парами циркуляров из множества всех изоморфных циркуляров Θ^2 назовем следующую величину: $\bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) =$

$$= \begin{cases} |\max\{D_H(c_1, c'_1), D_H(c_2, c'_2)\} - \max\{D_H(c_1, c''_1), D_H(c_2, c''_2)\}|, \\ \text{при } (c'_1, c'_2) \in \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2), (c''_1, c''_2) \in \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) \\ M, \text{ иначе} \end{cases} \quad (17)$$

Где $M > 0$ — фиксированная положительная величина, равная максимуму по всем циркулярным расстояниям из множества $\Theta^B(c_1, c_2)$:

$$M = \max_{(c'_1, c'_2) \in \Theta^S(c_1, c_2); (c''_1, c''_2) \in \Theta^B(c_1, c_2)} \mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) \quad (18)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
F_1 \leftrightarrow c^{ma}(F_1) & \xrightarrow{b} & c_1^* & \xrightarrow{c} & \tilde{c}_1 & \xrightarrow{d} & Pr(c_1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
\Theta^2 & \xrightarrow{\cong} & \Theta^S(c_1, c_2) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{\Theta}(c_1, c_2) & \xrightarrow{\cong} & \Theta(Pr(c_1), Pr(c_2)) \\
\uparrow & & \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\
F_2 \leftrightarrow c^{ma}(F_2) & \xrightarrow{b} & c_2^* & \xrightarrow{c} & \tilde{c}_2 & \xrightarrow{d} & Pr(c_2)
\end{array}$$

Рис. 3: Схема преобразования циркулярного представления к проекциям. а-фигуры и их срединные циркуляры; б-подциркуляры; с-изоморфные подциркуляры; д-проекции;

Лемма 8. *Расстояние между двумя парами циркуляров из множества всех изоморфных циркуляров (17) удовлетворяет аксиоме метрики: "неравенство треугольника".*

Доказательство. Для произвольных трех пар циркуляров необходимо рассмотреть 4 случая их принадлежности множеству монотонных подциркуляров $\Theta^B(c_1, c_2)$. \square

Лемма 9. *Множество монотонных изоморфных подциркуляров пары циркуляров (c_1, c_2) на плоскости $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ замкнуто относительно $\tilde{\Theta}^2$.*

Теорема 7. *Функция штрафа для пары циркуляров $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ (15) непрерывна на множестве допустимых проекций.*

Доказательство. Это утверждение следует из непрерывности суммы двух непрерывных функций $J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ и $Q_2(c'_1, c'_2)$ от переменных (c'_1, c'_2) на множестве допустимых проекций. \square

Теорема 8. *Для каждой пары циркуляров существует проекция функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ (16).*

Доказательство. Идея доказательства: множество, в котором лежит проекция, сужается до подмножества $\tilde{\Theta}(c_1, c_2)$, которое не пусто. В силу леммы 9 множество $\tilde{\Theta}(c_1, c_2)$ замкнуто относительно $\tilde{\Theta}^2$. То есть функция Φ_2 непрерывна (теорема 7) на замкнутом ограниченном (теорема 5) множестве $\tilde{\Theta}(c_1, c_2)$, поэтому достигает на нем своего минимального значения. \square

Переформулируем задачу (16) на множестве циркуляров общего положения.

Задача 3. Для любой пары циркуляров общего положения $(c_1, c_2) \in \dot{\Theta}$ найти проекцию $(c'_1, c'_2) = Pr(c_1, c_2, J_2, Q_2)$.

Теорема 9. *Одно из решений задачи поиска проекции для пары циркуляров (задача 3) лежит в монотонных упорядоченных множествах \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 , то есть $\exists(c_1^*, c_2^*) \in \Psi_2(c_1, c_2, c'_1, c'_2) : c_1^* \in \tilde{c}_1, c_2^* \in \tilde{c}_2$.*

Доказательство. Пусть в монотонных множествах \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 выбрана пара изоморфных подциркуляров $c_1^i \in \tilde{c}_1, c_2^j \in \tilde{c}_2 : c_1^i \cong c_2^j$ с минимальными индексами i, j . Предположение о том, что пара (c_1^i, c_2^j) не оптимальная для функции $\Phi_2(c_1, c_1', c_2, c_2')$ на множестве $\Theta(c_1, c_2)$ приводит к противоречию. \square

Теорема 10. *Для пары циркуляров общего положения c_1, c_2 решение задачи поиска проекции для пары циркуляров c_1^*, c_2^* единственно.*

Таким образом, для решения задачи 1 необходимо построить цепочки монотонных подциркуляров и найти решение в этих цепочках.

Лемма 10. *Для циркуляра общего положения количество ветвей циркуляров из цепочек \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 (4) равно: $\{n + 1, n, \dots, 1\}$ и $\{m + 1, m, \dots, 1\}$ соответственно. Где n и m — количество циркуляров цепочек \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 соответственно.*

Предположим, без ограничения общности, что $m \leq n$, тогда $\#c_1^{(n-m)+1} \equiv \#c_2^1$. Поэтому для любого значения $i = 0, \dots, m$ количество ветвей циркуляров из цепочки с соответствующими индексами $m - i$ и $n - i$ одинаково, т.е. $\#c_1^{n-i} \equiv \#c_2^{m-i}$. Решение задачи сводится к поиску минимального индекса i , при котором вложенный циркуляр первой цепочки изоморфен вложенному циркуляру второй. Проверку изоморфизма предлагается свести к поиску топологической эквивалентности диаграмм смежности соответствующих осевых графов циркуляров. Если существует их наложение, то циркуляры изоморфны. Алгоритм построения монотонных множеств $\tilde{c}, \tilde{\varepsilon}$ имеет полиномиальную вычислительную сложность по числу ребер циркуляра c . Оптимизировать алгоритм для решения практических задач можно в трех направлениях:

1. Замена расстояния Хаусдорфа на менее вычислительно трудоемкое расстояние.
2. Построение цепочек монотонных циркуляров не полностью.
3. Использование информации о предыдущих шагах алгоритма.

Применяя все способы оптимизации, можно свести вычислительную сложность алгоритма решения задачи поиска проекции сводится к *субкубической* по минимальному числу ребер одного из циркуляров c_1 и c_2 в худшем случае.

Итак, можно считать, что найденная проекция является наилучшей парой циркуляров, аппроксимирующих две заданные фигуры. С одной стороны она хорошо (в смысле расстояния Хаусдорфа) аппроксимирует обе фигуры, с другой стороны является наиболее "простой" (в смысле близости к максимальным единичным циркулярам). Кроме того, априорное условие изоморфизма ограничивает множество допустимых проекций и дает интересное в прикладном смысле множество решений для пар фигур.

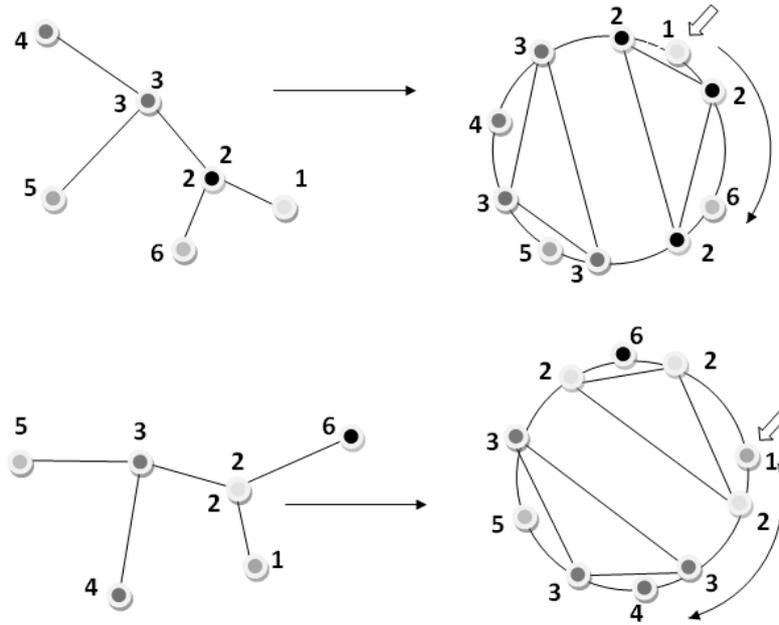


Рис. 4: Проверка изоморфизма осевых графов циркуляров: круговая диаграмма смежности.

В четвертой главе описано приложение теории циркулярной морфологии с задачам сравнения формы.

Определение 29. *Циркулярное расстояние с условием изоморфизма для пары фигур* — это значение функции штрафа на паре проекций функции с априорным условием изоморфизма срединных циркуляров этих фигур:

$$\rho_c(F_1, F_2) = \Phi_2(c^{ma}(F_1), c_1^*, c^{ma}(F_2), c_2^*) \quad (19)$$

где $(c_1^*, c_2^*) = \Psi_2(c^{ma}(F_2), c^{ma}(F_2), \Phi_2, Q_2)$

Теорема 11. *Циркулярное расстояние удовлетворяет четырем аксиомам полуметрики: 1) $\rho_c(F, F) = 0$; 2) $\rho_c(F_1, F_2) \geq 0$; 3) $\rho_c(F_1, F_2) = 0 \Rightarrow c^{ma}(F_1) \cong c^{ma}(F_2)$, но необязательно $F_1 = F_2$; 4) $\rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) \geq \rho_c(F_1, F_3)$ для любых F_1, F_2, F_3 .*

Определение 30. Экспериментальным пороговым циркулярным расстоянием с порогом η назовем следующую величину:

$$\rho_c^\eta(F_1, F_2) = \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2), & \text{при } \rho_c(F_1, F_2) \leq \eta \\ \infty, & \text{при } \rho_c(F_1, F_2) > \eta \end{cases} \quad (20)$$

Экспериментальное пороговое расстояние позволяет упростить и ускорить алгоритм поиска проекции.

Описано 5 модельных экспериментов, подтверждающих достоверность и эффективное применение разработанных методов к задачам распознавания формы плоских фигур и запросам по базе изображений.

Эксперимент 1: устойчивость к деформации Рассматривается упорядоченное множество из прямоугольников с уменьшающимся шумовым отростком (рис. 5). Рассчитываются расстояния от первого, среднего и последнего многоугольников до остальных. Эксперимент показывает устойчивость предложенной меры сходства к незначительным деформациям.



Рис. 5: Прямоугольники с уменьшающимся шумовым отростком.

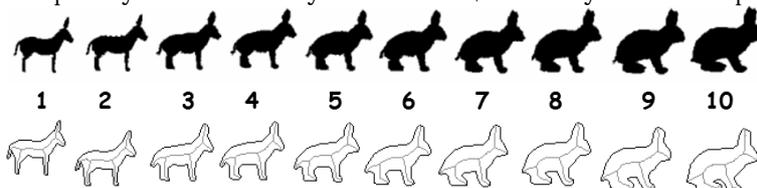


Рис. 6: Последовательность ослы-зайпы

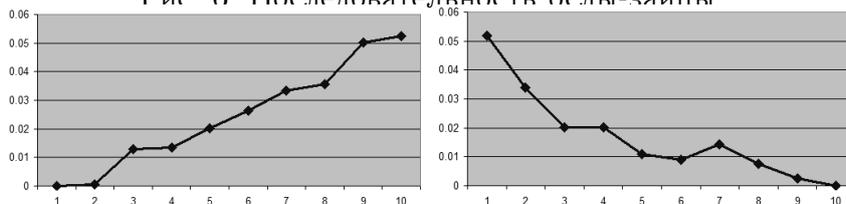


Рис. 7: Диаграммы циркулярных расстояний: от осла до остальных фигур (слева), от зайца до остальных фигур (справа).

Эксперимент 2: Монотонность расстояний при морфинге фигур. Рассматривается последовательность фигур животных, для которых происходит плавный морфинг одной фигуры в другую: "осел превращается в зайца" (рис. 6). Графики циркулярных расстояний от осла до остальных фигур рис. 7 (слева) и от зайца до остальных фигур рис. 7 (справа) показывают монотонность последовательности этих расстояний. Таким образом, предложенная мера сходства хорошо отделяет различные фигуры, даже имеющие незначительные структурные различия. Это преимущество достигается за счет метрической компоненты предложенной меры сходства.

Эксперимент 3: классификация инструментов.

Проведен эксперимент, предложенный Torsello⁷. Имеется множество, состоящее из двух классов инструментов: разводные ключи и плоскогубцы. Необходимо для каждого инструмента отсортировать расстояния от него до остальных.

Для решения задачи рассчитываются все расстояния от каждого инструмента до остальных. Получаются последовательности расстояний. Определяются верные последовательности инструментов и последовательности на основе полученных расстояний. Рассчитывается количественная оценка качества работы методов с помощью перестановок до верно отсортированных последовательностей. Процент ошибки — это количество перестановок для каждого из инструментов, нормированное по максимальному количеству перестановок для всех инструментов. В результате метод Torsello дает 34% перестановок до правильных последовательностей, а циркулярная мера сходства всего 20%, что показывает ее более высокое качество в сортировке

⁷Torsello A. and Hancock E. R. A Skeletal Measure of 2D Shape Similarity. Computer Vision and Image Understanding, vol. 95, no. 1, pp. 1-29, 2004.

	0.0009	0.00236	0.0077	0.00867	0.0381	0.209
	0.0012	0.017	0.023	0.039	0.0516	0.074
	0.00048	0.001	0.0015	0.0439	0.0048	0.00926
	0.0004	0.0006	0.0019	0.003	0.009	0.10297
	0.0002	0.0005	0.0105	0.01388	0.0139	0.1292
	0.0176	0.07268	0.1338	0.1338	0.1397	0.1397
	0.00005	0.0002	0.0017	0.0032	0.0636	0.0064

	0.068	0.081	0.108	0.112	0.132	0.187
	0.053	0.054	0.069	0.080	0.087	0.112
	0.030	0.048	0.054	0.084	0.092	0.108
	0.021	0.030	0.054	0.081	0.086	0.110
	0.080	0.084	0.086	0.095	0.102	0.132
	0.088	0.092	0.095	0.110	0.128	0.186
	0.021	0.048	0.068	0.069	0.102	0.128

Рис. 8: Слева: циркулярное расстояние (19). Справа: "Производная" скелетная мера сходства (Torsello, 2004).

инструментов.

Эксперимент 4: Задача распознавания на основе скелетной сегментации.

Заданы: 142 фигуры в виде бинарных изображений (рис. 9), содержащая объекты трех классов: мыши (69), руки (22) и птицы (51).

Необходимо: решить задачу распознавания с набором прецедентов и контрольных объектов.

Решение:

- (1) Построение признакового пространства на множестве всех объектов.
- (2) Случайное разделение всей выборки на обучающую и контрольную.

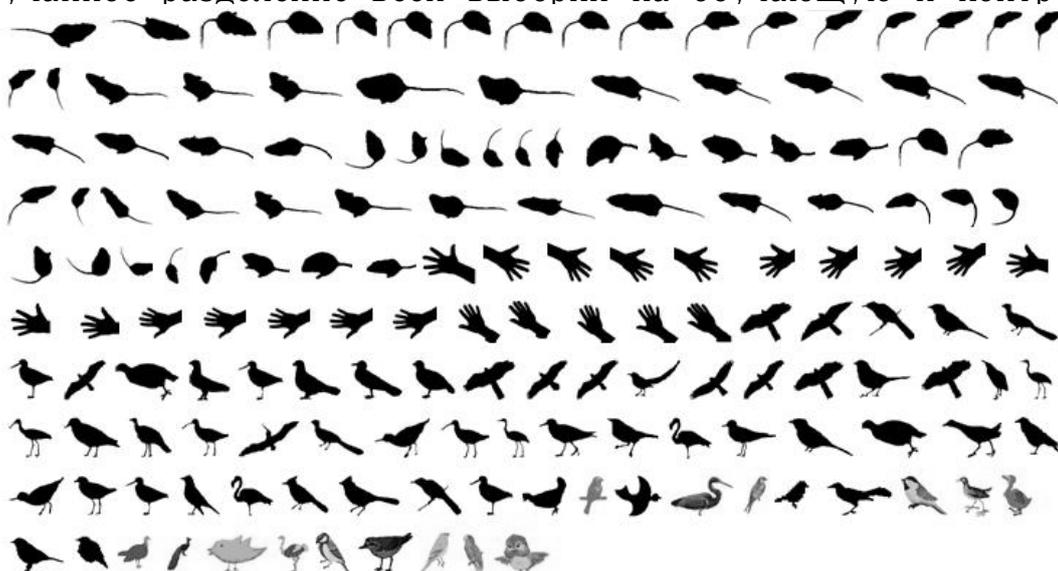


Рис. 9: База данных 181 плоская фигура.

1							
2							
3							
4							
5							
6							

Рис. 10: 6 ближайших по циркулярному расстоянию (19) фигур из базы Использование метода скользящего контроля.

- (3) Использование стандартных методов обучения выборки (метод k-ближайших соседей, голосование по логическим закономерностям классов, метод опорных векторов, комбинированный комитетный метод), оценка точности работы алгоритма на контрольной выборке.

В работе наилучшего алгоритма всего один объект классифицирован неверно: мышь, отнесенная к классу птиц. Таким образом, подход к сравнению формы с помощью изоморфных непрерывных скелетов был успешно реализован и проверен на модельном приложении распознавания формы. Проведенные эксперименты показали очень хорошие результаты.

Эксперимент 5: Сравнение формы: эксперименты с запросами. Имеется база изображений, состоящая из 181 фигуры (рис. 9).

Задача: для каждой фигуры найти ближайшие в смысле циркулярного расстояния 6 фигур. В результате для каждой из фигур от 4 до 6 ближайших найденных относятся к тому же классу, что и сама фигура (рис. 10).

В заключении перечислены основные результаты работы.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Петрова Л.Г. (Домахина), Местецкий Л.М.* Построение гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами методом построения вложенных цепочек подграфов. Труды XIII межд. конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Москва, 2006, т.4, секция "Математика и Механика" с. 69-70.
2. *Петрова (Домахина) Л.Г., Местецкий Л.М.* Расчет гомеоморфизма многоугольников методом разбиения округленных областей на собственные области ребер базовых скелетов. Труды XIII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Москва, 2006, секция "Вычислительная Математика и Кибернетика" с. 32-33.

3. *Петрова (Домахина) Л.Г., Местецкий Л.М.*, Расчет гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами. Сборник "Искусственный интеллект". Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Украина, 2006.
4. *Петрова (Домахина) Л.Г.* Непрерывные модели преобразования растровых изображений. Сборник тезисов лучших дипломных работ 2006 года. М.: Изд. отдел Факультета ВМиК МГУ, 2006.
5. *Петрова (Домахина) Л.Г.* Преобразование растровых изображений на основе непрерывных моделей гранично-скелетного представления. Сборник статей ВМиК МГУ, выпуск 2, 2006.
6. *Домахина Л.Г.* Об одном методе сегментации растровых объектов для задач преобразования формы. Труды 13 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-13). Ленинградская обл., г. Зеленогорск, 2007, с. 312-315.
7. *Домахина Л.Г., Охлопков А.Д.* Изоморфные скелеты растровых изображений. Труды 18 межд. конференции ГРАФИКОН, 2008.
8. *Домахина Л.Г.* Устойчивость скелетной сегментации. Журнал Таврический вестник информатики и математики. Изд-во НАН Украины, №1, 2008.
9. *L. Domakhina, A. Okhlopov* Shape Comparison Based on Skeleton Isomorphism. The Proceedings of the 4th International Conf. on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP). Lisbon, Portugal, 2009.
10. *L. Domakhina* Skeleton-Based Shape Segmentation, The Proceedings of the Second International Workshop on Image Mining. Theory and Applications (IMTA 2009). Lisbon, Portugal, 2009.
11. *Домахина Л.Г.*, Регуляризация скелета для задачи сравнения формы. Труды 14 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-14). Суздаль, 2009, с. 342-346.
12. ***Domakhina L.G. Skeleton-Based Segmentation and Decomposition of Raster Pairs of Shapes. Pattern Recognition and Image Analysis, №. 3, 2010, pp.293-316***
13. *Liudmila Domakhina* "On the Minimization of a Circular Function on the Isomorphic Shrunk Subset". ICCSA, pp.51-60. 2010 International Conference on Computational Science and Its Applications, 2010.
14. ***Домахина Л.Г. Критериальные и проективные морфологии для множества плоских циркуляров. Журнал вычислительной математики и математической физики, №7, 2012.***