

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ  
АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ  
(ИБРАЭ РАН)

На правах рукописи

Кондаков Василий Гаврильевич

**Обобщение схемы КАБАРЕ на многомерные  
уравнения задач газовой динамики**

специальность: 05.13.18 – «Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н. С.А. Карабасов

Москва - 2014

# Содержание

Введение.....	5
Глава 1. Схема КАБАРЕ для уравнений одномерной газовой динамики. ....	11
ОПИСАНИЕ СХЕМЫ КАБАРЕ .....	12
Сеточные множества и сеточные функции .....	12
Аппроксимация системы дивергентных уравнений.....	13
Вычисление новых значений потоковых переменных.....	14
Звуковые точки .....	19
Вариант № 1. Ускорение потока влево .....	20
Вариант № 2. Торможение потока вправо.....	21
Вариант № 3. Торможение потока влево .....	22
Вариант № 4. Ускорение потока вправо .....	22
Учет особенностей уравнения состояния.....	22
Граничные условия.....	24
СВОЙСТВА СХЕМЫ КАБАРЕ .....	25
Аппроксимация.....	25
Другая форма представления алгоритма .....	25
Свойства акустического приближения .....	26
Некоторые вычислительные свойства нового алгоритма .....	31
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ.....	31
Задача Сода .....	31
Задача Шу-Ошера.....	33
Глава 2. Обобщение схемы Кабаре на двумерные ортогональные сетки. ....	36
Уравнения Эйлера и инварианты Римана .....	37
Схема КАБАРЕ .....	41
Звуковые точки .....	50
Вариант №1. Ускорение потока вправо .....	51
Вариант №2. Ускорение потока влево .....	52

Вариант №3. Торможение потока, двигающегося вправо .....	53
Вариант №4. Торможение потока, двигающегося влево .....	54
Граничные условия.....	54
Выбор шага по времени .....	60
Постановка тестовых примеров .....	61
Задача №1. Изолированный Q-вихрь. ....	61
Задача №2. Двойное маховское отражение .....	67
Глава 3. Схема КАБАРЕ в трехмерной области на регулярной сетке.....	69
Разностная схема.....	69
Вычисление промежуточных значений консервативных величин .....	73
Вычисление потоковых переменных вдоль оси x.....	78
Вычисление потоковых переменных вдоль оси y.....	80
Вычисление потоковых переменных вдоль оси z.....	82
Вычисление новых значений консервативных величин. ....	83
Аппроксимация тензора вязкости .....	84
Выбор шага по времени .....	86
Особенности распараллеливания .....	87
Обтекание обратного уступа .....	88
Постановка задачи и примеры расчетов в литературе .....	88
Постановка задачи.....	92
Результаты расчета.....	94
Заключение к Главе 3 .....	96
Глава 4. Схема КАБАРЕ в трехмерной области на произвольной сетке с гексагональными ячейками.....	98
Разностная схема.....	99
Идеальный газ.....	109
Слабосжимаемый газ .....	111
Тензор вязких напряжений .....	118
Вычисление тензора вязких напряжений .....	123
Вычисление шага по времени.....	125

Глава 5. Моделирование высокоскоростной турбулентной струи из одноконтурного сопла, эксперимент JEAN.....	128
Постановка задачи и примеры расчетов в литературе.....	128
Результаты расчетов по методу Кабаре.....	133
Заключение к Главе 5 .....	146
Защищаемые положения .....	147
Литература .....	148

## Введение

Эффективные алгоритмы для решения уравнений газовой динамики играют ключевую роль во многих областях механики жидкости и газа, от нестационарной аэродинамики и аэроакустики до задач переноса в гидродинамике при высоких числах Рейнольдса и Пекле. В этой связи разработка новых и модификация уже существующих численных методов решения уравнений газовой динамики остается актуальной задачей вычислительной математики.

Как известно, уравнения газовой динамики являются гиперболическими, и их решения могут быть одновременно гладкими в одной области и разрывными в другой [1]. Такие свойства решений налагают на алгоритмы численного решения гиперболических систем уравнений довольно противоречивые требования.

С одной стороны, метод должен обладать высоким порядком точности в тех областях, где решение является гладким. Даже в этих областях получение решения требуемой точности в прикладных задачах газовой динамики представляет известные трудности. В частности, известными недостатками классических конечно-разностных методов для задач газовой динамики в эйлеровых переменных являются большие диссипативные и дисперсионные ошибки [2-4]. Одним из часто используемых подходов для улучшения диссипативных и дисперсионных свойств классических схем являются подходы, основанные на применении центральных конечно-разностных схем повышенного порядка аппроксимации. В таких подходах за основу берутся уравнения переноса, записанные в неконсервативной форме, и проводится оптимизация коэффициентов разностного шаблона уравнения линейного переноса с целью минимизации дисперсионной ошибки при заданном порядке аппроксимации [5-7]. Оптимизированные конечно-

разностные схемы были разработаны как способ перенесения замечательных свойств спектральных методов в пространственно-временную область для снятия проблем, возникающих при постановке граничных условий в областях конечного размера. Оптимизированные конечно-разностные схемы эффективны для задач линейного переноса на слабо неоднородных сетках при наличии медленно меняющегося фонового поля на сетке: уже 4-го порядка схемы демонстрируют рекордную точность при переносе быстро осциллирующих решений по медленно меняющемуся среднему полю. К другому классу методов относятся так называемые методы высокого разрешения, которые основаны на решении уравнений переноса в консервативной форме [8]. Для улучшения разностных свойств используются формулы высокого порядка аналитического восполнения (реконструкции) функции потоков или переменных. Для обеспечения баланса между дисперсионными и диссипативными ошибками, возникающими в решении при наличии плохо разрешённых градиентов, используются подходы на основе введения дополнительных диффузионных или антидиффузионных членов, улучшающих разностные свойства изначальной аппроксимации [9].

С другой стороны, метод решения должен уметь сохранять свойство монотонности в областях с большими перепадами значений. Согласно теореме Годунова (1959) эти два требования одновременно не выполняются в рамках линейных разностных схем. Для преодоления этих трудностей могут применяться разностные методы с выделением разрывов. Эти методы основаны на прямом выделении разрывов, возникающих в численном решении. Выделение достигается путем построения дискретной сетки, связанной с разрывами. В частности может быть использован метод характеристик [10]. Для того чтобы вблизи разрывов не возникали нефизические осцилляции, требуется применение либо монотонных схем первого порядка точности, либо искусственной вязкости. В областях гладкости решения требуется использование схем более высокого порядка точности. Для этих целей были применены т.н. гибридные разностные схемы,

или, по-другому, разностные схемы переменного порядка точности. Несколько отличный подход к уточнению численного решения, получаемого методами сквозного счета, основан на применении дифференциальных анализаторов [11]. Дифференциальный анализатор – это численный алгоритм, позволяющий по результатам сквозного счета определить расположение разрывов в дискретных ячейках. Далее вблизи найденных и выделенных особенностей производится уточнение решения [12].

Борис и др.[13-15] развили гибридный метод, который позволяет повысить порядок точности численных расчетов путем применения специальной процедуры коррекции потоков – FCT (Flux Corrected Transport). На первом шаге вычисления решения используется монотонная схема первого порядка точности. На втором шаге полученное решение должно быть модифицировано, с целью повысить порядок до второго по времени и пространству. На этом шаге не должны возникать новые локальные экстремумы, а также возрастать (уменьшаться) значения локальных максимумов (минимумов), которые имели место на начало этого шага. Заметим, что эти условия эквивалентны условию неувеличения полной вариации численного решения, или условию TVD (Total Variation Diminishing). Для того чтобы решение удовлетворяло TVD-условию, развита специальная техника кусочно-линейной реконструкции сеточных функций. Эта техника впервые была предложена в работах Колгана [16] и, позднее, развита в работах Ван Лира [17]. Наклоны кусочно-линейных распределений сеточных функций внутри дискретных ячеек для выполнения TVD-условия ограничиваются специальными ограничителями для обеспечения свойства минимальной вариации решения [18, 19].

Практически все схемы переменного порядка точности основаны на кусочно-полиномиальной реконструкции дискретных сеточных функций, удовлетворяющей TVD-свойству. Бурное развитие TVD-алгоритмов привело к созданию ряда их многочисленных модификаций, например TVB [20] (Shu, 1987), AUSM [21] (Liou, 1996), WENO[22] (Liu, Osher, Chan, 1994), WAF[23]

(Того, 1989). Создание этих методик привело к значительному повышению качества получаемых численных решений по сравнению с классическими разностными схемами фиксированного порядка точности. В частности, схемы ТВД второго-третьего порядка хорошо зарекомендовали себя при расчете ударных волн. Однако для задач, связанных с линейным переносом, они оказываются слишком диссипативными. В схемах ТВД/ТВБ повышенного (начиная с 5-го) порядка аппроксимации, сочетающих конечно-элементные методы высокого порядка с Римановскими солверами (Разрывный Галёркин) [24] и использующих вместо лимитерной функции переменный шаблон (ЕНО/ВЕНО) [25], этот недостаток практически устранен.

Несмотря на успехи методов повышенного порядка аппроксимации для решения уравнений переноса, возможности схем второго порядка аппроксимации в этом направлении представляются далеко не исчерпанными. Главными достоинствами таких методов являются компактность вычислительного шаблона, простота реализации, робастность при обобщении на неоднородные сетки и в режимах больших градиентов решения, а также естественная согласованность граничных условий с сеточным шаблоном, используемым внутри области. Именно с этим связано то, что во многих современных кодах до сих пор широко применяются классические конечно-разностные методы второго порядка. Поэтому улучшение диссипативных и дисперсионных свойств решений, не выходя за пределы класса методов второго порядка, представляется самостоятельной актуальной задачей. Примером перспективного метода второго порядка является схема Кабаре, определенная на компактном постоянном шаблоне, обладающая улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами и допускающая введение нелинейной коррекции потоков в областях больших градиентов решения на том же самом шаблоне.



Схема Кабаре была впервые представлена для линейного уравнения переноса в трехслойном виде в работах Айзерлиса [26] и Самарского и Головизнина [27, 28] в двухслойном виде, с разнесенными переменными по пространству и по времени, в работе Головизнина и др. [29]. Консервативная нелинейная коррекция схемы Кабаре была впервые рассмотрена в работе Головизнина и Карабасова [30]. Более совершенные варианты алгоритма нелинейной коррекции для уравнений в одномерном случае были предложены в работах Головизнина и др. [29] [31]. В неконсервативном виде схема Кабаре была обобщена для двумерных уравнений адвекции в работах Роу [32], Трана и Шорера [33] и Кима [34]. В компактной форме предиктор-корректор, соответствующей сеточному шаблону в одну пространственно-временную ячейку, схема Кабаре для гиперболических законов сохранения была представлена в работах Головизнина [35] и Карабасова и Головизнина [36]. Для уравнений двумерного линейного переноса консервативное обобщение схемы Кабаре с учётом нелинейной коррекции было предложено Головизниным и др. в работе [37]. Для двумерных уравнений Эйлера схема Кабаре была представлена Карабасовым и Головизниным [38] а также Головизниным и др. в работе [39]. В последней работе, так же, как и в работе Фараносова и др. [40], посвященной обобщению схемы Кабаре на трехмерные уравнения Навье-Стокса с учетом параллельной реализации алгоритма, содержится существенный вклад автора настоящей диссертации.

В рамках настоящей диссертации предложено обобщение схемы Кабаре на уравнения газовой динамики в двумерном и трехмерном случае с улучшенной процедурой реконструкции потоков в случае звуковой точки. Проведена серия двумерных расчетов изолированных вихрей и их взаимодействия с ударными волнами, на которых подтверждены такие положительные качества алгоритмов Кабаре, как малая диссипативность и отсутствие паразитных осцилляций при наличии больших градиентов решения. На основе схемы Кабаре разработаны параллельные алгоритмы для решения трехмерных уравнений Навье-Стокса. Эти алгоритмы использованы

для решения задачи о моделировании обтекания обратного уступа турбулентным потоком и истечения высокоскоростной затопленной турбулентной струи (эксперимент JEAN[41]) в рамках подхода крупных вихрей. Проведена статистическая обработка решения для нескольких сеток, и показано хорошее совпадение расчета с данными эксперимента.

## Глава 1. Схема КАБАРЕ для уравнений одномерной газовой динамики.

Уравнения газовой динамики представляют собой гиперболическую систему законов сохранения массы, импульса и полной энергии. В эйлеровых переменных они выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p)u}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$E = \varepsilon + u^2 / 2, \quad p = P(\rho, \varepsilon).$$

здесь  $\rho$  – плотность,  $u$  – скорость,  $p$  – давление,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $E$  – полная энергия. Уравнение состояния удовлетворяет равенству:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{P}{\rho^2} + \frac{\partial P}{\partial \rho} = c^2 \geq \mu_0 > 0, \quad (1.2)$$

где  $c$  – скорость звука.

Свойство гиперболичности этой системы состоит в том, что в областях гладкости она приводится к т.н. характеристической форме:

$$\left\{ \mathbf{\Omega} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} \right\} + \mathbf{\Lambda} \cdot \left\{ \mathbf{\Omega} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \right\} = \mathbf{\Omega} \cdot \vec{f}, \quad \vec{\varphi}^T = (\rho, u, p), \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (\rho \cdot c)^{-1} \\ 0 & 1 & -(\rho \cdot c)^{-1} \\ -c^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + c & 0 & 0 \\ 0 & u - c & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Вычислительные алгоритмы, базирующиеся на дивергентной форме записи уравнений (1.1) и сохраняющие свойство дивергентности на разностном уровне называются консервативными [42]. Консервативные разностные схемы, дополненные процедурами монотонизации численного

решения в областях сильных градиентов (искусственная вязкость, нелинейная коррекция потоков), составляют основу современного парка алгоритмов сквозного счета газодинамических задач [43].

Вычислительные схемы, опирающиеся на представление уравнений газовой динамики в форме (1.3), получили название характеристических [44], или сеточно-характеристических [45]. Характеристические алгоритмы по точности заметно превосходят схемы сквозного счета в областях гладкости решения, однако при возникновении сильных разрывов теряют однородность и приводят к значительным алгоритмическим трудностям. Это обстоятельство обуславливает относительную редкость их практического использования, несмотря на неослабевающий интерес к ним со стороны математического сообщества.

В работе [46] предложен новый вычислительный метод, объединяющий достоинства характеристических и консервативных разностных схем. Его отличительной особенностью является наличие двух видов переменных, т.н. «консервативных» и «потоковых» величин. Специализация переменных позволяет использовать дивергентную форму записи уравнений для вычисления «консервативных» переменных и характеристическую – для определения потоков. Новый метод, названный «балансно-характеристическим» заметно превосходит по всем параметрам известные TVD-, TVB- и ENO – алгоритмы [43].

## ***ОПИСАНИЕ СХЕМЫ КАБАРЕ***

### **Сеточные множества и сеточные функции**

На отрезке  $[X_l, X_r]$  введем неравномерную расчетную сетку с координатами узлов  $x_k : \{x_1 = X_l, x_{k+1} > x_k, x_N = X_r, k = 1, \dots, N\}$ . Множество узлов этой сетки обозначим как  $\mathfrak{N}$  множество центров ячеек – как  $\omega$ . Центры ячеек будем отмечать полуцелыми индексами  $k+1/2$ . Множества сеточных

функций, определенных на  $\mathfrak{w}$  и  $\omega$  будем обозначать соответственно как  $H_{\mathfrak{w}}$  и  $H_{\omega}$ .

Для объединения балансного и характеристического подходов будем использовать как множество узлов  $\mathfrak{w}$ , так и множество ячеек  $\omega$  расчетной сетки.

Введем два типа дискретных величин: т.н. «консервативные» величины  $\vec{\Psi}_{\omega}^T = (U_{k+1/2}, \Theta_{k+1/2}, P_{k+1/2}), E_{k+1/2}, \mathcal{E}_{k+1/2} \in \mathcal{H}_{\omega}$ , и «потоковые» -  $\vec{\phi}_{\mathfrak{w}}^T = (u_k, \rho_k, p_k) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ . Здесь  $U_{k+1/2}$  - скорости,  $\Theta_{k+1/2}$  - плотности,  $P_{k+1/2}$  - давления,  $\mathcal{E}_{k+1/2}$  - удельные внутренние энергии,  $E_{k+1/2}$  - полные энергии ячеек,  $u_k$  - потоковые скорости,  $p_k$  - потоковые давления,  $\rho_k$  - потоковые плотности. Таким образом, количество неизвестных сеточных функций в новом подходе в случае одного пространственного измерения в два раза превышает их число в традиционных подходах [43] и [2].

### Аппроксимация системы дивергентных уравнений

Пусть в момент времени  $t_n$  известны значения консервативных и потоковых переменных  $\vec{\Psi}_{\omega}^n$  и  $\vec{\phi}_{\mathfrak{w}}^n$ . Аппроксимируем исходную систему уравнений газовой динамики, записанную в виде системы законов сохранения, неявной консервативной разностной схемой, обладающей вторым порядком аппроксимации на гладких решениях:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot u})_{i+1} - (\overline{\rho \cdot u})_i}{h_{i+1/2}} &= 0, \\ \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot u^2 + p})_{i+1} - (\overline{\rho \cdot u^2 + p})_i}{h_{i+1/2}} &= 0, \\ \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\overline{\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u})_{i+1} - (\overline{\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u})_i}{h_{i+1/2}} &= 0, \\ E_{i+1/2}^{n+1} = \mathcal{E}_{i+1/2}^{n+1} + 0,5 \cdot U_{i+1/2}^{n+1} \cdot U_{i+1/2}^{n+1}, \quad e_i^n = \varepsilon_i^n + 0,5 \cdot u_i^n \cdot u_i^n, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где чертой сверху обозначается осреднение по двум временным слоям:

$$\bar{\eta} = (\eta^{n+1} + \eta^n) / 2.$$

### Вычисление новых значений потоковых переменных

Для того, чтобы разрешить систему (1.5) относительно новых значений консервативных переменных, определим неизвестные значения потоковых величин, используя характеристическую форму записи исходных уравнений (1.3).

Вначале вычислим значения консервативных величин на момент времени  $t_{n+1/2} = t_n + 0,5 \cdot \tau_{n+1/2}$  по разностной схеме

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} &= 0, \\ \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1}^n - (\rho \cdot u^2 + p)_i^n}{h_{i+1/2}} &= 0, \\ \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} &= 0, \\ E_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathcal{E}_{i+1/2}^{n+1/2} + 0,5 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad e_i^n = \varepsilon_i^n + 0,5 \cdot u_i^n \cdot u_i^n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

аппроксимирующей дивергентную форму дифференциальных уравнений (1.1) со вторым порядком точности по пространству и с первым порядком по времени. Следует отметить, что сами промежуточные значения консервативных переменных вычисляются при этом со вторым порядком точности. Затем, в пространственно-временной расчетной ячейке  $D_{i+1/2}^{n+1/2} : \{(x, t) \in [x_{i+1}, x_i] \times [t_{n+1}, t_n]\}$  аппроксимируем характеристическую систему (1.3) системой линейных уравнений:

$$\left\{ \mathbf{\Omega}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} \right\} + \mathbf{\Lambda}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \left\{ \mathbf{\Omega}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial x} \right\} = \vec{g}_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad \vec{g}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{\Omega}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \vec{f}_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad (1.7)$$

где

$$\mathbf{\Omega}_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot C_{i+1/2}^{n+1/2})^{-1} \\ 0 & 1 & -(\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot C_{i+1/2}^{n+1/2})^{-1} \\ -(C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_{i+1/2}^{n+1/2} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{P_{i+1/2}^{n+1/2}}{(\Theta_{i+1/2}^{n+1/2})^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{i+1/2}^{n+1/2}}$$

$$\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} (\lambda_1)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)_{i+1/2}^{n+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (U+C)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (U-C)_{i+1/2}^{n+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & U_{i+1/2}^{n+1/2} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \mathbf{\Omega}_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \vec{\varphi}, \quad \vec{I}^T = (r, q, s), \quad r = u(x, t) + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p(x, t), \\ q &= u(x, t) - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p(x, t), \quad s = p(x, t) - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot \rho(x, t), \\ G_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot C_{i+1/2}^{n+1/2})^{-1}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

(1.7) можно записать в виде:

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} + (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{\partial I_k}{\partial x} = (\mathbf{g}_k)_{i+1/2}^{n+1/2}. \quad (1.10)$$

Величины  $(r, q, s)$  будем называть «римановыми квазиинвариантами», или просто «квазиинвариантами».

По известным значениям потоковых переменных в момент времени  $t_n$  и консервативных переменных в момент  $t_{n+1/2}$ , вычислим соответствующие им значения Римановых квазиинвариантов:

$$\begin{aligned} (r_{i+1}^n)_{i+1/2} &= u_{i+1}^n + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_{i+1}^n, \quad (r_i^n)_{i+1/2} = u_i^n + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^n, \quad R_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot P_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ (q_{i+1}^n)_{i+1/2} &= u_{i+1}^n - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_{i+1}^n, \quad (q_i^n)_{i+1/2} = u_i^n - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^n, \quad Q_{i+1/2}^{n+1/2} = U_{i+1/2}^{n+1/2} - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot P_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ (s_{i+1}^n)_{i+1/2} &= p_{i+1}^n - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot \rho_{i+1}^n, \quad (s_i^n)_{i+1/2} = p_i^n - (C_{i+1/2}^{n+1/2}) \cdot \rho_i^n, \quad S_{i+1/2}^{n+1/2} = P_{i+1/2}^{n+1/2} - (C_{i+1/2}^{n+1/2})^2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если в ячейке  $D_{i+1/2}^{n+1/2}$  квазиинварианты являются гладкими функциями, то с точностью  $O\left[(\tau_{n+1/2})^2, (h_{i+1/2})^2\right]$  должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} (I_k)_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_k)_i^n, & (I_k)_i^{n+1} &= 2 \cdot (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (I_k)_{i+1}^n, \\ (\vec{I}^T)_{i+1}^{n+1} &= (r_{i+1}^{n+1}, q_{i+1}^{n+1}, s_{i+1}^{n+1})_{i+1/2}, & (\vec{I}^T)_{i+1}^n &= (r_{i+1}^n, q_{i+1}^n, s_{i+1}^n)_{i+1/2}, \\ (\vec{I}^T)_i^n &= (r_i^n, q_i^n, s_i^n)_{i+1/2}, & (\vec{I}^T)_{i+1/2}^{n+1/2} &= (R_{i+1/2}^{n+1/2}, Q_{i+1/2}^{n+1/2}, S_{i+1/2}^{n+1/2}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

связывающие неизвестные значения квазиинвариантов на новом временном слое с их известными значениями посредством линейной экстраполяции. Примем эти соотношения в качестве определяющих.

Из уравнений (1.7) следует, что величины квазиинвариантов на новом временном слое должны удовлетворять неравенствам:

$$\begin{aligned} \max(I_k)_D &\geq \left[ (I_k)_{i+1}^{n+1} \right]_{i+1/2} \geq \min(I_k)_D, \quad \text{if } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} \geq 0, \quad \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2}}{h_{i+1/2}} \leq 1, \\ \max(I_k)_D &\geq \left[ (I_k)_i^{n+1} \right]_{i+1/2} \geq \min(I_k)_D, \quad \text{if } (\lambda_k)_{i+1/2}^{n+1/2} < 0, \quad \frac{\tau_{n+1/2} \cdot (|\lambda_k|)_{i+1/2}^{n+1/2}}{h_{i+1/2}} \leq 1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \max(I_k)_D &= \max_{x \in [x_{i+1}, x_i]} (I_k)^n + \tau_{n+1/2} \cdot \max_{(x,t) \in D} (g_k), \\ \min(I_k)_D &= \min_{x \in [x_{i+1}, x_i]} (I_k)^n + \tau_{n+1/2} \cdot \min_{(x,t) \in D} (g_k). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Значения квазиинвариантов на новом временном слое, вычисленные по формулам линейной экстраполяции (1.12) не всегда будут удовлетворять этим неравенствам, поэтому их следует откорректировать в соответствии с (1.13).

В случае дискретных сеточных функций заменим ограничения (1.14) их приближенными сеточными аналогами:

$$\begin{aligned} \max(I_k)_D &= \max \left[ (I_k)_i^n, (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, (I_k)_{i+1}^n \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, \\ \min(I_k)_D &= \min \left[ (I_k)_i^n, (I_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, (I_k)_{i+1}^n \right] + \tau_{n+1/2} \cdot (g_k)_{i+1/2}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

и процедуру коррекции определим как



$$\left[ \left( \tilde{I}_k \right)_{i+1}^{n+1} \right]_{i+1/2} = \begin{cases} (I_k)_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(I_k)_D \leq (I_k)_{i+1}^{n+1} \leq \max(I_k)_D \\ \min(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} < \min(I_k)_D \\ \max(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} > \max(I_k)_D \end{cases}, \quad (1.16)$$

$$\left[ \left( \tilde{I}_k \right)_i^{n+1} \right]_{i+1/2} = \begin{cases} (I_k)_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(I_k)_D \leq (I_k)_{i+1}^{n+1} \leq \max(I_k)_D \\ \min(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} < \min(I_k)_D \\ \max(I_k)_D & \text{if } (I_k)_{i+1}^{n+1} > \max(I_k)_D \end{cases}. \quad (1.17)$$

Алгоритм, описанный формулами (1.15)-(1.17), будем называть «основной процедурой коррекции». Следует отметить, что коррекции подвергаются все без исключения квазиинварианты без анализа области их зависимости. Такой анализ будет проведен позднее.

Таким образом, для каждого узла с индексами  $(i, n+1)$  мы получили шесть значений квазиинвариантов  $(\tilde{r}_i^{n+1})_{i-1/2}, (\tilde{r}_i^{n+1})_{i+1/2}, (\tilde{q}_i^{n+1})_{i-1/2}, (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}, (\tilde{s}_i^{n+1})_{i-1/2}, (\tilde{s}_i^{n+1})_{i+1/2}$ . Какие из них следует использовать для нахождения новых значений потоковых переменных, зависит от того, с какой стороны соответствующая характеристика приходит в узел  $(i, n+1)$ . Вычислим «прикидочные» значения  $\tilde{u}_i^{n+1}$  и новой скорости звука  $\tilde{c}_i^{n+1}$  со вторым порядком точности по формулам:

$$\tilde{u}_i^{n+1} = U_{i+1/2}^{n+1/2} + U_{i-1/2}^{n+1/2} - u_i^n, \quad \tilde{c}_i^{n+1} = C_{i+1/2}^{n+1/2} + C_{i-1/2}^{n+1/2} - c_i^n, \quad (1.18)$$

и определим соответствующие характеристические скорости как:

$$\left( \tilde{\lambda}_1 \right)_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} + c_i^{n+1}, \quad \left( \tilde{\lambda}_2 \right)_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} - c_i^{n+1}, \quad \left( \tilde{\lambda}_3 \right)_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1}. \quad (1.19)$$

Следует отметить, что на этом этапе нам потребуется только информация о направлении прихода характеристик в данный узел, поэтому вопрос о точности вычисления характеристических скоростей не является критическим.

Возможны всего четыре комбинации прихода характеристик в узел  $(i, n+1)$

$$\left\{ \left( \tilde{\lambda}_1 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_2 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_3 \right)_i^{n+1} < 0 \right\}, \left\{ \left( \tilde{\lambda}_1 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_2 \right)_i^{n+1} < 0, \left( \tilde{\lambda}_3 \right)_i^{n+1} < 0 \right\},$$

$$\left\{ \left( \tilde{\lambda}_1 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_2 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_3 \right)_i^{n+1} \geq 0 \right\}, \left\{ \left( \tilde{\lambda}_1 \right)_i^{n+1} < 0, \left( \tilde{\lambda}_2 \right)_i^{n+1} < 0, \left( \tilde{\lambda}_3 \right)_i^{n+1} < 0 \right\}.$$

Новые значения потоковых переменных в первом случае находятся из системы уравнений:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^{n+1} &= \left( \tilde{r}_i^{n+1} \right)_{i-1/2}, \quad u_i^{n+1} - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^{n+1} = \left( \tilde{q}_i^{n+1} \right)_{i+1/2}, \\ p_i^{n+1} - \left( C_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^2 \cdot \rho_i^{n+1} &= \left( \tilde{s}_i^{n+1} \right)_{i-1/2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

откуда в первом случае получаем:

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} &= \frac{\left( \tilde{r}_i^{n+1} \right)_{i-1/2} - \left( \tilde{q}_i^{n+1} \right)_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \quad u_i^{n+1} = \frac{G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \left( \tilde{r}_i^{n+1} \right)_{i-1/2} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot \left( \tilde{q}_i^{n+1} \right)_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \\ \rho_i^{n+1} &= \frac{\left( p_i^{n+1} \right) - \left( \tilde{s}_i^{n+1} \right)_{i-1/2}}{\left( C_{i-1/2}^{n+1/2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В случае  $\left\{ \left( \tilde{\lambda}_1 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_2 \right)_i^{n+1} < 0, \left( \tilde{\lambda}_3 \right)_i^{n+1} < 0 \right\}$

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} &= \frac{\left( \tilde{r}_i^{n+1} \right)_{i-1/2} - \left( \tilde{q}_i^{n+1} \right)_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \quad u_i^{n+1} = \frac{G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \left( \tilde{r}_i^{n+1} \right)_{i-1/2} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot \left( \tilde{q}_i^{n+1} \right)_{i+1/2}}{G_{i-1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \\ \rho_i^{n+1} &= \frac{\left( p_i^{n+1} \right) - \left( \tilde{s}_i^{n+1} \right)_{i+1/2}}{\left( C_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для сверхзвукового течения вправо, т.е. при

$\left\{ \left( \tilde{\lambda}_1 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_2 \right)_i^{n+1} \geq 0, \left( \tilde{\lambda}_3 \right)_i^{n+1} \geq 0 \right\}$  имеем:

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} &= \frac{\left( \tilde{r}_i^{n+1} \right)_{i-1/2} - \left( \tilde{q}_i^{n+1} \right)_{i-1/2}}{2 \cdot G_{i-1/2}^{n+1/2}}, \quad u_i^{n+1} = \frac{\left( \tilde{r}_i^{n+1} \right)_{i-1/2} + \left( \tilde{q}_i^{n+1} \right)_{i-1/2}}{2}, \\ \rho_i^{n+1} &= \frac{\left( p_i^{n+1} \right) - \left( \tilde{s}_i^{n+1} \right)_{i-1/2}}{\left( C_{i-1/2}^{n+1/2} \right)^2}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

для сверхзвукового течения влево:

$$\begin{aligned}
p_i^{n+1} &= \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i+1/2} - (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{2 \cdot G_{i+1/2}^{n+1/2}}, & u_i^{n+1} &= \frac{(\tilde{r}_i^{n+1})_{i+1/2} + (\tilde{q}_i^{n+1})_{i+1/2}}{2}, \\
\rho_i^{n+1} &= \frac{(p_i^{n+1}) - (\tilde{s}_i^{n+1})_{i+1/2}}{(C_{i+1/2}^{n+1/2})^2}.
\end{aligned}
\tag{1.24}$$

На этом этапе вычисления новых значений потоковых переменных во внутренних узлах расчетной сетки завершается.

Следует отметить, что описанный выше алгоритм вычисления потоковых переменных является достаточно грубым – он приведен из соображений простоты изложения и минимизации объема текста. Так он не учитывает существования т.н. «звуковых точек» и это, безусловно будет проявляться в расчетах, выполненных при его строгом выполнении. Полная форма алгоритма, учитывающая все особенности переходов от дозвуковых течений к сверхзвуковым и обратно приведена ниже.

### ***Звуковые точки***

Рассмотрим все возможные случаи перехода от дозвуковых течений к сверхзвуковым. Для начала определим критерий наличия звуковой точки в узле сетки. Пусть нам известны значения чисел Маха в смежных ячейках на момент времени  $t_n + 0.5dt$ , обозначим их как  $M_L$ ,  $M_R$ , соответственно в левой и в правой ячейках от узла. Критерием наличия звуковой точки может служить условие  $(|M_L| - 1) * (|M_R| - 1) < 0$ , которое указывает на то, что в одной из ячеек сверхзвуковая скорость, а в другой дозвуковая.

Далее приведем варианты комбинаций из чисел Маха  $M_L$ ,  $M_R$ , при которых достигается вышеуказанное условие:

1. Сверхзвуковое течение справа налево в левой ячейке  $M_L < -1$ , дозвуковое течение в правой ячейке  $|M_R| < 1$ . Ускорение потока влево.
2. Сверхзвуковое течение слева направо в левой ячейке  $M_L > 1$ , дозвуковое течение в правой ячейке  $|M_R| < 1$ . Торможение потока двигающегося вправо

3. Дозвуковое течение в левой ячейке  $|M_L| < 1$ , сверхзвуковое течение справа налево в правой ячейке  $M_R < -1$ . Торможение потока двигающегося влево.
4. Дозвуковое течение в левой ячейке  $|M_L| < 1$ , сверхзвуковое течение слева направо в правой ячейке  $M_R > 1$ . Ускорение потока вправо.

### Вариант № 1. Ускорение потока влево

Найдем решение на новом временном слое в узле для варианта №1. Как следует из описания, первому варианту соответствует ускорение потока влево, или следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
 M_L &< -1, \\
 (\lambda_1)_L &= U_L + c_L = c_L(M_L + 1) < 0, \\
 (\lambda_2)_L &= U_L - c_L = c_L(M_L - 1) < 0, \\
 (\lambda_3)_L &= U_L = c_L M_L < 0, \\
 |M_R| &< 1, \\
 (\lambda_1)_R &= U_R + c_R \geq c_R(1 - |M_R|) > 0, \\
 (\lambda_2)_R &= U_R - c_R \leq c_R(|M_R| - 1) < 0.
 \end{aligned}$$

Из данных неравенств следует, что в рассматриваемый узел из левой ячейки ни одна характеристика не приходит. В то время как из правой ячейки как минимум приходит характеристика  $(\lambda_2)_L$ . Таким образом, для решения не хватает двух уравнений. Восполним нехватку уравнений тем предположением, что число Маха в узле на новом временном слое равно полусумме чисел Маха из левой и правой ячеек, т.е.

$$M = \left(\frac{u}{c}\right)_i^{n+1} = 0.5 \cdot (M_L + M_R). \text{ Легко проверить, что данное уравнение верно}$$

со вторым порядком точности по пространственной переменной и первым по времени. Для этого достаточно разложить в ряд Тейлора выражения для чисел Маха. Последнее недостающее уравнение дополним инвариантом отвечающему характеристическому числу  $\lambda_3 = 0.5 \cdot ((\lambda_3)_L + (\lambda_3)_R)$ .

Полученная система уравнений окончательно принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} - G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^{n+1} &= (q_i^{n+1})_{i+1/2}, \\
 \frac{u_i^{n+1}}{c_i^{n+1}} &= 0.5 \cdot \left( \frac{U_{i-1/2}^{n+1/2}}{C_{i-1/2}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2}}{C_{i+1/2}^{n+1/2}} \right), \\
 p_i^{n+1} - (C_{i\pm 1/2}^{n+1})^2 \rho_i^{n+1} &= (s_i^{n+1})_{i\pm 1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

где во втором уравнении присутствует неизвестная величина скорости звука  $c_i^{n+1}$  определим ее из (1.18), знак плюс-минус в третьем уравнении указывает возможность прихода характеристики энтропии как из левой, так и правой ячеек.

Решение принимает вид:

$$\begin{aligned}
 u_i^{n+1} &= 0.5 \cdot \tilde{c}_i^{n+1} \cdot \left( \frac{U_{i-1/2}^{n+1/2}}{C_{i-1/2}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2}}{C_{i+1/2}^{n+1/2}} \right), \\
 p_i^{n+1} &= \frac{u_i^{n+1} - (q_i^{n+1})_{i+1/2}}{G_{i+1/2}^{n+1/2}}, \\
 \rho_i^{n+1} &= \frac{p_i^{n+1} - (s_i^{n+1})_{i\pm 1/2}}{(C_{i\pm 1/2}^{n+1})^2}.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Другие варианты с звуковыми точками разрешаются аналогичным образом, главным условием здесь остается предположение равенства числа Маха полу сумме чисел Маха из левой и правой ячеек. Далее в кратком виде запишем системы уравнений соответствующие каждому из вариантов.

## Вариант № 2. Торможение потока вправо

Торможение потока двигающегося вправо:  $M_L > 1$ ,  $|M_R| < 1$ . Из левой ячейки приходят все три характеристики, из правой характеристика  $(\lambda_2)_R$ . В данном случае возник перебор с количеством уравнений, убираем уравнения, отвечающие дублирующим характеристикам, т.е. характеристики  $(\lambda_2)_L, (\lambda_2)_R$ . Система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} + G_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot p_i^{n+1} &= (r_i^{n+1})_{i-1/2}, \\
\frac{u_i^{n+1}}{c_i^{n+1}} &= 0.5 \cdot \left( \frac{U_{i-1/2}^{n+1/2}}{C_{i-1/2}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2}}{C_{i+1/2}^{n+1/2}} \right), \\
p_i^{n+1} - (C_{i\pm 1/2}^{n+1})^2 \rho_i^{n+1} &= (s_i^{n+1})_{i\pm 1/2}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= 0.5 \cdot \tilde{c}_i^{n+1} \cdot \left( \frac{U_{i-1/2}^{n+1/2}}{C_{i-1/2}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2}^{n+1/2}}{C_{i+1/2}^{n+1/2}} \right), \\
p_i^{n+1} &= \frac{(r_i^{n+1})_{i-1/2} - u_i^{n+1}}{G_{i-1/2}^{n+1/2}}, \\
\rho_i^{n+1} &= \frac{p_i^{n+1} - (s_i^{n+1})_{i\pm 1/2}}{(C_{i\pm 1/2}^{n+1})^2}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

### Вариант № 3. Торможение потока влево

Торможение потока движущегося влево:  $|M_L| < 1$ ,  $M_R < -1$ . Из левой ячейки приходит характеристика  $(\lambda_1)_L$ , из правой все три характеристики. Убираем характеристики  $(\lambda_1)_L, (\lambda_1)_R$  в итоге получаем снова систему уравнений (1.25), следовательно решение будет в точности совпадать с (1.26).

### Вариант № 4. Ускорение потока вправо

Ускорение потока влево:  $|M_L| < 1$ ,  $M_R > 1$ . Из левой ячейки приходит характеристика  $(\lambda_1)_L$ , из правой – ни одной характеристики. Следовательно, система уравнений совпадает с (1.27), а решение выражается соотношениями из (1.28).

### Учет особенностей уравнения состояния

Описанная выше аппроксимация матрицы левых собственных векторов  $\Omega$  (1.4) постоянными в областях  $D_{i+1/2}^{n+1/2}$  матрицами  $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$  (1.8) ориентирована на уравнения состояния общего вида, в том числе и табличные. Для уравнений состояния, задаваемых аналитически, эта аппроксимация может

быть уточнена с использованием специфики этих уравнений. Так для идеального газа с уравнением состояния  $P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \varepsilon$  вместо матрицы  $\Omega_{i+1/2}^{n+1/2}$  можно взять матрицу

$${}^* \Omega_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{{}^* G_{i+1/2}^{n+1/2}}{\sqrt{p}} \\ 0 & 1 & -\frac{{}^* G_{i+1/2}^{n+1/2}}{\sqrt{p}} \\ -\gamma \cdot \frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}, \quad {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}}}, \quad (1.29)$$

соответствующую допущению, что плотность в пределах ячейки  $D_{i+1/2}^{n+1/2}$  является постоянной и равной  $\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$ . В этом случае Римановы квазиинварианты будут иметь вид:

$$\begin{aligned} (r)_{i+1/2} &= u(x, t) + {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p(x, t)}, & (q)_{i+1/2} &= u(x, t) - {}^* G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{p(x, t)}, \\ (s)_{i+1/2} &= \ln(p / \rho^\gamma). \end{aligned} \quad (1.30)$$

В отличие от квазиинвариантов (1.9) последние являются нелинейными функциями от плотности и давления. Изменяются и формулы (1.21)-(1.24), выражающие новые значения потоковых переменных через квазиинварианты. Все остальные процедуры, описанные в предыдущем пункте, остаются неизменными.

Еще одним видом локальных инвариантов, имеющих большую практическую значимость, в частности, при решении задач аэроакустики, имеют т.н. «изоэнтропические» квазиинварианты, отвечающие предположению о постоянстве энтропии в пределах каждой пространственно-временной расчетной ячейки:

$$\begin{aligned} (r)_{i+1/2} &= u(x, t) + {}^s G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot [p(x, t)]^\mu, & (q)_{i+1/2} &= u(x, t) - {}^s G_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot [p(x, t)]^\mu, \\ (s)_{i+1/2} &= \ln(p / \rho^\gamma), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$${}^s G_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{2\sqrt{\gamma} \cdot \left[ \exp(S_{i+1/2}^{n+1/2}) \right]^{-\frac{1}{2\gamma}}}{\gamma - 1}, \quad S_{i+1/2}^{n+1/2} = \ln \left[ \frac{p_{i+1/2}^{n+1/2}}{\left( \rho_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^\gamma} \right], \quad \mu = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}. \quad (1.32)$$

### **Граничные условия**

Для нахождения новых значений потоковых величин  $\rho_1^{n+1}, u_1^{n+1}, p_1^{n+1}$  на левой границе области необходимо использовать граничные условия. Граничные условия определяют значения квазиинвариантов, переносимых характеристиками, приходящими в граничный узел слева. Все остальное – как и для внутренних узлов. Рассмотрим, для примера, граничные условия трех типов: набегающий сверхзвуковой поток, набегающий дозвуковой поток, и непроницаемую стенку. В первом случае граничные потоковые величины должны иметь те же значения, что и набегающий поток, т.е.

$$\rho_1^{n+1} = \rho_{-\infty}, \quad u_1^{n+1} = u_{-\infty}, \quad p_1^{n+1} = p_{-\infty}.$$

Во втором случае они вычисляются из системы уравнений (1.20):

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} + G_{-\infty} \cdot p_1^{n+1} &= (r)_{-\infty}, \quad u_1^{n+1} - G_{3/2}^{n+1/2} \cdot p_1^{n+1} = \left( \tilde{q}_1^{n+1} \right)_{3/2}, \\ p_1^{n+1} - \left( C_{i+1/2}^{n+1/2} \right)^2 \cdot \rho_1^{n+1} &= (s)_{-\infty}. \end{aligned}$$

Для неподвижной жесткой стенки –

$$\rho_1^{n+1} = \Theta_{3/2}^{n+1}, \quad u_1^{n+1} = 0, \quad p_1^{n+1} = -\left( \tilde{q}_1^{n+1} \right)_{3/2} / G_{1/2}^{n+1/2}.$$

Аналогичным образом определяются потоковые переменные  $\rho_N^{n+1}, u_N^{n+1}, p_N^{n+1}$  и на правой границе расчетной области.

При известных значениях потоковых переменных на слое  $t_{n+1}$  система разностных уравнений (1.5) становится явной, и из нее легко находятся новые значения консервативных переменных.

Таким образом, основу балансно-характеристического алгоритма составляет неявная консервативная разностная схема (1.5), для численного решения которой используется явный алгоритм типа «предиктор – корректор» [2], где в качестве «предиктора» применяется явная консервативная схема (1.6), а в качестве «корректора» – процедура (1.11),



(1.12), (1.16), (1.17), (1.20)-(1.24), следующая из характеристической формы представления уравнений (1.3).

## **СВОЙСТВА СХЕМЫ КАБАРЕ**

### **Аппроксимация**

Нетрудно видеть, что при отсутствии блока коррекции квазиинвариантов (1.16)-(1.17) все процедуры, использующиеся при получении новых потоковых величин, обладают вторым порядком аппроксимации. Таким образом, в областях гладкости решения, балансно-характеристические схемы также имеют второй порядок аппроксимации. При «активизации» процедуры коррекции квазиинвариантов, которая проявляется в окрестностях слабых и сильных разрывов, порядок аппроксимации снижается до первого.

### **Другая форма представления алгоритма**

Балансово-характеристический алгоритм может быть представлен и в ином виде, описанном в [46].

Вычитая из разностных уравнений (1.5) уравнения (1.6), получаем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1}^{n+1} - (\rho \cdot u)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0, \\
 & \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1}^{n+1} - (\rho \cdot u^2 + p)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0, \\
 & \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1}^{n+1} - (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0, \\
 & E_{i+1/2}^{n+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}^{n+1/2} + 0,5 \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2} \cdot U_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad e_i^{n+1} = \varepsilon_i^{n+1} + 0,5 \cdot u_i^{n+1} \cdot u_i^{n+1}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Сдвигая в этих уравнениях индекс  $n$  на единицу вниз и складывая результат с системой (1.6), приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \frac{(\rho \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \\
& \frac{(\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot U)_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \frac{(\rho \cdot u^2 + p)_{i+1}^n - (\rho \cdot u^2 + p)_i^n}{h_{i+1/2}} = 0, \\
& \frac{(\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\Theta \cdot E)_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \frac{(\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_{i+1}^n - (\rho \cdot e \cdot u + p \cdot u)_i^n}{h_{i+1/2}} = 0.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

где  $\tau_n = (\tau_{n+1/2} + \tau_{n-1/2})/2$ .

Система (1.34) не содержит значений консервативных переменных на целых временных слоях и при непостоянных шагах по времени формально имеет первый порядок аппроксимации. То, что эта система эквивалентна системе (1.5), имеющей второй порядок аппроксимации, говорит о том, что, члены первого порядка малости в структуре невязки являются дивергентными и при суммировании взаимно уничтожаются.

### Свойства акустического приближения

Исследуем свойства акустического приближения балансно-характеристических разностных схем на постоянном фоновом течении с параметрами  $(\rho^*, u^*, p^*)$ . Полагая  $\vec{\varphi}_i^n = \vec{\varphi}^* + \delta\vec{\varphi}_i^n$ ,  $\vec{\Psi}_{i+1/2}^{n+1/2} = \vec{\Psi}^* + \delta\vec{\Psi}_{i+1/2}^{n+1/2}$  и подставляя возмущенные величины в систему (1.6), с точностью до величин второго порядка малости приводим ее к виду:

$$\frac{\delta\vec{\Psi}_{i+1/2}^{n+1/2} - \delta\vec{\Psi}_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + (\mathbf{\Omega}^*)^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda}^* \cdot \mathbf{\Omega}^* \cdot \frac{\delta\vec{\varphi}_{i+1}^n - \delta\vec{\varphi}_i^n}{h_{i+1/2}} = 0. \tag{1.35}$$

Учитывая, что  $\delta\vec{I}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{\Omega}^* \cdot \delta\vec{I}_{i+1/2}^{n+1/2}$ ,  $\delta\vec{I}_i^n = \mathbf{\Omega}^* \cdot \delta\vec{\varphi}_i^n$ , получаем:

$$\frac{(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}/2} + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^n}{h_{i+1/2}} = 0. \tag{1.36}$$

Здесь и далее  $k=1,2,3$ . Аналогичным образом система (1.5) представляется в виде

$$\frac{(\delta I)_{i+1/2}^{n+1} - (\delta I)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \lambda_k^* \cdot \frac{\overline{(\delta I_k)_{i+1}} - \overline{(\delta I_k)_{i+1}}}{h_{i+1/2}} = 0. \tag{1.37}$$

Соотношения (1.12) после линеаризации записываются как:

$$\begin{aligned} (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} &= 2 \cdot (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_i^n, \quad \text{if } \lambda_k^* \geq 0, \\ (\delta I_k)_i^{n+1} &= 2 \cdot (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_{i+1}^n, \quad \text{if } \lambda_k^* < 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Разностные уравнения (1.35) и (1.36) соотношения (1.37) представляют собой замкнутую систему. Отметим, что процедура нелинейной коррекции (1.16), (1.17) на данном этапе не рассматривается. Покажем, что эта система является бездиссипативной.

Вычитая (1.36) из (1.37) находим:

$$\frac{(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1} - (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}/2} + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (1.39)$$

откуда получаем

$$(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1} = (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2}}{2} \cdot [(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}] = 0, \quad (1.40)$$

где  $(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} = (\tau_{n+1/2} \cdot |\lambda_k^*|) / h_{i+1/2}$ .

Из (1.35) следует, что

$$(\delta I_k)_{i+1/2}^n = (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2}}{2} \cdot [(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_i^n] = 0.$$

Из двух последних соотношений находим:

$$(\overline{\delta I_k})_{i+1/2} = (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2}}{4} \cdot \left\{ [(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}] - [(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_i^n] \right\} = 0. \quad (1.41)$$

Умножим (1.36) на  $(\overline{\delta I_k})_{i+1/2}$  получаем:

$$\frac{[(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1}]^2 - [(\delta I_k)_{i+1/2}^n]^2}{2 \cdot \tau_{n+1/2}} + \frac{(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} \cdot (\overline{\delta I_k})_{i+1/2} \cdot [(\overline{\delta I_k})_{i+1} - (\overline{\delta I_k})_i] = 0. \quad (1.42)$$

Пусть для определенности,  $\lambda_k^* \geq 0$ . Тогда, согласно (1.38)

$$(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} + (\delta I_k)_i^n}{2} = \frac{\overline{(\delta I_k)_{i+1}} + \overline{(\delta I_k)_i}}{2} + \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}}{4} - \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_i^n}{4},$$

откуда следует тождество

$$\frac{(W_k)_{i+1/2}^{n+1} - (W_k)_{i+1/2}^n}{\tau_{n+1/2}} + \frac{(\Phi_k)_{i+1}^{n+1/2} - (\Phi_k)_i^{n+1/2}}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (1.43)$$

где

$$(W_k)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ (\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1} \right]^2 + \frac{(h_{i+1/2})^2}{8} (CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} \left[ 1 - (CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} \right] \left[ \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} \right]^2, \quad (1.44)$$

$$(\Phi_k)_{i+1}^{n+1/2} = \frac{\lambda_k \cdot \left[ (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} + (\delta I_k)_{i+1}^n \right]^2}{8}. \quad (1.45)$$

К такому же результату мы придем и при  $\lambda_k^* < 0$ .

Выражение (1.44) представляет собой квадратичную форму, положительно определенную при условиях  $(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} < 1$ , поэтому линейную комбинацию

$$\mathbf{E}^{n+1} = \sum_{i \in \omega} \left[ \sum_{k=1}^3 \alpha_k \cdot (W_k)_{i+1/2}^{n+1} \right] \cdot h_{i+1/2}, \quad \alpha_k > 0, \quad (1.46)$$

можно трактовать как квадрат нормы решений системы (1.36) -(1.38), или как полную энергию соответствующих акустических возмущений. Из (1.43) следует, что на сеточных функциях с компактным носителем на каждом временном интервале выполняется равенство  $\mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{E}^n$ , свидетельствующее о полном отсутствии в разностных уравнениях (1.36)-(1.38) т.н. аппроксимационной вязкости.

Следует отметить, что поскольку в определение энергии (1.44) входят величины  $(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2}$ , то она будет зависеть от ширины временного

интервала (временного шага)  $\tau_{n+1/2}$  и при переменных шагах по времени на каждом временном интервале значения полной энергии будут отличаться, однако в пределах одного временного шага энергия всегда будет сохраняться.

Условие положительной определенности квадратичной формы (1.46) является достаточным условием линейной устойчивости балансно-характеристических разностных схем на постоянном фоне.

Для исследования дисперсионных свойств линейной системы уравнений (1.36)-(1.39) рассмотрим ее частные решения в виде комбинации бегущих волн:

$$(\delta I_k)_j^n = \beta_k \cdot \exp\left[i \cdot (\omega \cdot t_n - m \cdot x_j)\right], \quad (\delta I_k)_{j+1/2}^\mu = \chi_k \cdot \exp\left[i \cdot (\omega \cdot t_\mu - m \cdot x_{j+1/2})\right], \quad (1.47)$$

где  $\mu = n, n + 1/2$ .

Подставляя (1.47) в (1.36) -(1.38) находим:

$$\chi_k \cdot \left[ \sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}} - 1 \right] + \beta_k \cdot \frac{(CFL_k^*)^{n+1/2}}{2} \cdot \left[ \exp(-i \cdot \theta/2) - \exp(i \cdot \theta/2) \right] = 0, \quad (1.48)$$

$$\chi_k \left[ (\eta_k)^{n+1/2} - 1 \right] + \beta_k \cdot \frac{\left[ (\eta_k)_{j+1/2}^{n+1/2} + 1 \right] \cdot (CFL_k^*)^{n+1/2}}{2} \cdot \left[ \exp(-i \cdot \theta/2) - \exp(i \cdot \theta/2) \right] = 0, \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \beta_k \cdot (\eta_k)^{n+1/2} \cdot \exp(-i \cdot \theta/2) &= 2 \cdot \chi_k \cdot \sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}} - \beta_k \cdot \exp(i \cdot \theta/2), \quad \text{if } \lambda_k^* \geq 0, \\ \beta_k \cdot (\eta_k)^{n+1/2} \cdot \exp(i \cdot \theta/2) &= 2 \cdot \chi_k \cdot \sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}} - \beta_k \cdot \exp(-i \cdot \theta/2), \quad \text{if } \lambda_k^* < 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Здесь  $\theta = m \cdot h_{i+1/2}$  - т.н. приведенное волновое число, лежащее на отрезке  $[0, 2\pi]$ ,  $(\eta_k)^{n+1/2} = \exp(i \cdot \omega \cdot \tau_{n+1/2})$  - модуль перехода на следующий временной слой. Исключая  $\sqrt{(\eta_k)^{n+1/2}}$  из (1.48) с помощью (1.50), из требования разрешимости получившейся системы двух линейных уравнений относительно неизвестных  $\alpha_k, \chi_k$  получаем квадратное уравнение

$$\left[ (\eta_k)^{n+1/2} \right]^2 - (\eta_k)^{n+1/2} \cdot \left[ 1 - 2 \cdot (CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} \right] \cdot \left[ 1 - \exp(i\theta) \right] - \exp(i\theta) = 0, \quad (1.51)$$

в точности совпадающее с характеристическим уравнением для схемы КАБАРЕ, предложенной и исследованной в работах [28], [27]. В частности, в работе [28] показано, что при  $(CFL_k^*)_{i+1/2}^{n+1/2} \leq 1$  всегда выполняется свойство  $\left|(\eta_k)^{n+1/2}\right| \equiv 1$ , свидетельствующее об отсутствии у схемы амплитудных ошибок.

Получим дисперсионное соотношение для акустических уравнений (1.36)-(1.38) как функцию от числа Куранта и приведенного волнового числа. Учитывая, что

$$\omega = \frac{1}{\tau_{n+1/2}} \cdot \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im}(\eta_k)^{n+1/2}}{\operatorname{Re}(\eta_k)^{n+1/2}} \right],$$

находим

$$\frac{\omega}{m \cdot |\lambda_k^*|} = \Upsilon(CFL_k^*, \theta) = \frac{1}{CFL_k^* \cdot \theta} \cdot \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{Im}(\eta_k)^{n+1/2}}{\operatorname{Re}(\eta_k)^{n+1/2}} \right]. \quad (1.52)$$

Величина  $\Delta(CFL_k^*, \theta) = \Upsilon(CFL_k^*, \theta) - 1$  представляет собой приведенную фазовую ошибку схемы. В работе [28] показано, что при  $CFL_k^* = 1$  и  $CFL_k^* = 0,5$  фазовая ошибка равна нулю при всех  $\theta \in [0, 2\pi]$  и ее отклонение от нуля в области  $(CFL, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$  существенно меньше, чем у ранее известных линейных схем. Это говорит о том, что балансно-характеристические схемы обладают улучшенными дисперсионными свойствами.

Следует отметить, что в отличие от других схем, компактность шаблона схемы (1.36)-(1.38) позволяет проводить анализ ее дисперсионных свойств на переменных пространственно-временных расчетных сетках.

Совпадение характеристического уравнения (1.51) у схемы (1.36)-(1.38) и схемы КАБАРЕ не является случайностью. Покажем, что схема (1.36)-(1.38) сводится к схеме КАБАРЕ. Сдвигая индекс  $n$  в уравнении (1.39) вниз на единицу и складывая результат с (1.35), получаем:

$$\frac{(\delta I_k)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\delta I_k)_{i+1/2}^{n-1/2}}{\tau_n} + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{h_{i+1/2}} = 0, \quad \tau_n = 0,5 \cdot (\tau_{n+1/2} + \tau_{n-1/2}). \quad (1.53)$$

Это уравнение совместно с (1.38) называют двухслойным представлением схемы КАБАРЕ [2]. Исключая отсюда промежуточные значения квазиинвариантов, приходим к известному трехслойному представлению [28], [27]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{(\delta I_k)_{i+1}^{n+1} - (\delta I_k)_{i+1}^{n+1}}{\tau_n} + \frac{(\delta I_k)_i^n - (\delta I_k)_i^{n-1}}{\tau_n} \right] + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{h_{i+1/2}} &= 0, \quad \lambda_k^* \geq 0, \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{(\delta I_k)_i^{n+1} - (\delta I_k)_i^n}{\tau_n} + \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{\tau_n} \right] + \lambda_k^* \cdot \frac{(\delta I_k)_{i+1}^n - (\delta I_k)_{i+1}^{n-1}}{h_{i+1/2}} &= 0, \quad \lambda_k^* < 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

### Некоторые вычислительные свойства нового алгоритма

Поскольку линейные уравнения (1.36)-(1.38) обладают вторым порядком аппроксимации, то согласно теореме Годунова их решения не будут обладать свойством монотонности на разрывных решениях. Ситуацию исправляет процедура монотонизации (1.16), (1.17). При  $\lambda_k \geq 0$  в акустическом приближении ее можно записать как:

$$\left[ (\delta \tilde{I}_k)_{i+1}^{n+1} \right]_{i+1/2} = \begin{cases} (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} & \text{if } \min(\delta I_k)_D \leq (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} \leq \max(\delta I_k)_D \\ \min(\delta I_k)_D & \text{if } (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} < \min(\delta I_k)_D \\ \max(\delta I_k)_D & \text{if } (\delta I_k)_{i+1}^{n+1} > \max(\delta I_k)_D \end{cases} \quad (1.55)$$

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

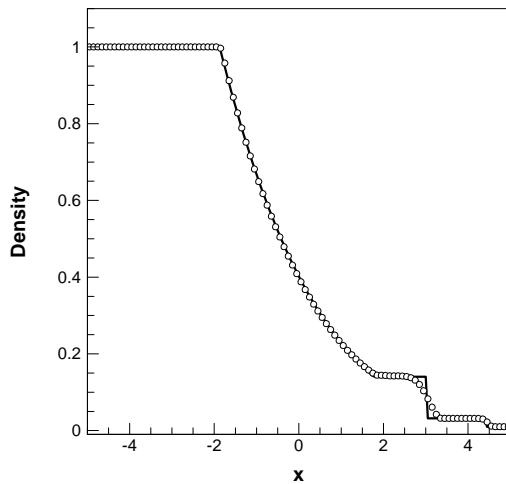
### Задача Сода

Стандартным тестом для одномерных разностных схем для газовой динамики является задача о распаде разрыва. В начальный момент задаются значения, характеризующие состояние газа до и после разрыва. В общем случае решение распадается на автомодельную комбинацию волны

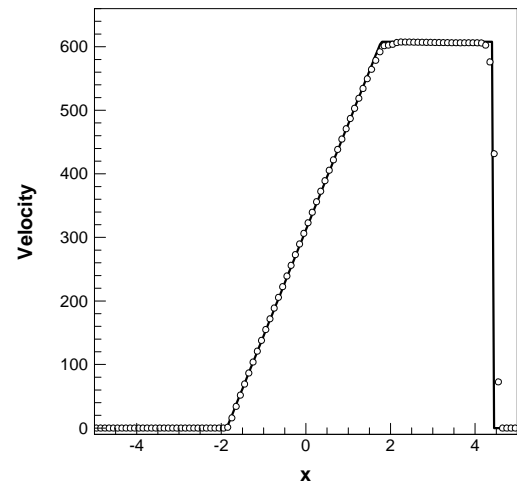
разряжения, контактного разрыва и ударной волны. В задаче о распаде разрыва использован следующий набор левых и правых векторов задачи Римана, т.н. задача Сода:

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix}^{left} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^5 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix}^{right} = \begin{Bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 10^3 \end{Bmatrix}.$$

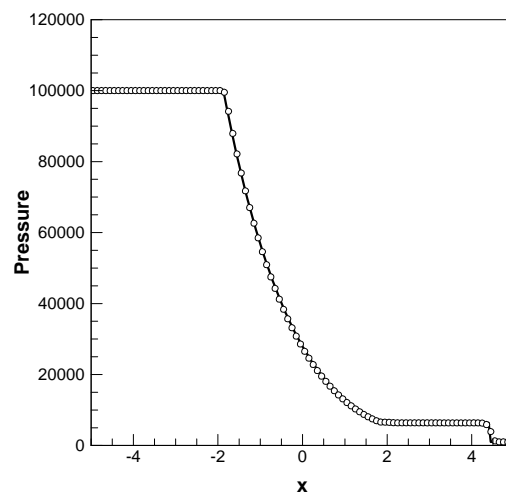
Сверхзвуковой случай – решением является комбинация из ударной волны, контактного разрыва и волны разряжения, где максимальная скорость газа больше скорости звука.



(a)



(б)



(B)



*Рис. 1.1. Профили плотности (а), скорости (б) и давления (в) при N=101 в контрольный момент времени t=0.005.*

Из полученного решения хорошо видно, что скорость и давление (см.рис.1.б, 1.в) находятся в хорошем согласии с аналитическим решением, причем ударная волна растянута всего на две-три ячейки. В тоже время немного размазана плотность в районе контактного разрыва (см.рис.1.а), которое можно объяснить влиянием численной вязкости.

### **Задача Шу-Ошера**

Прохождение сильной ударной волны по неподвижному фону с синусоидально возмущенной плотностью [47]. Согласно постановке следует брать начальные данные в виде:

$$\begin{aligned} \rho_L &= 3,857143; & u_L &= 2,629369; & p_L &= 10,3333; \\ \rho_R &= 1 + 0.2 \cdot \sin(5x); & u_R &= 0; & p_R &= 1; \\ x &\in [-5, 5]; & t_{\text{contr}} &= 1,8; \end{aligned}$$

где точка раздела расположена при  $x=-4$ . На рис.1.2 представлено сравнение графиков плотности на момент времени  $t_{\text{contr}}$  на сетке с числом расчетных узлов  $N=201$  и «эталонной» сетке с  $N=9601$ .

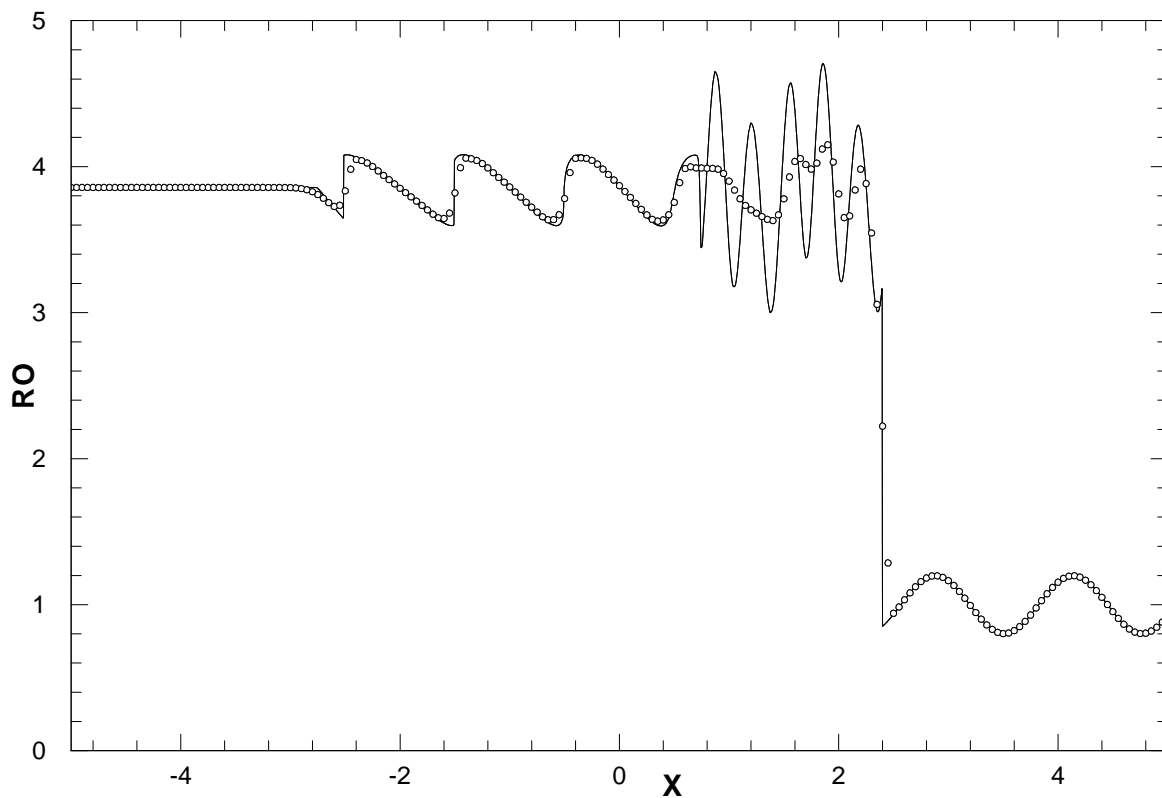


Рис. 1.2. Сравнение плотности на сетках  $N=201$  и  $N=9601$ .

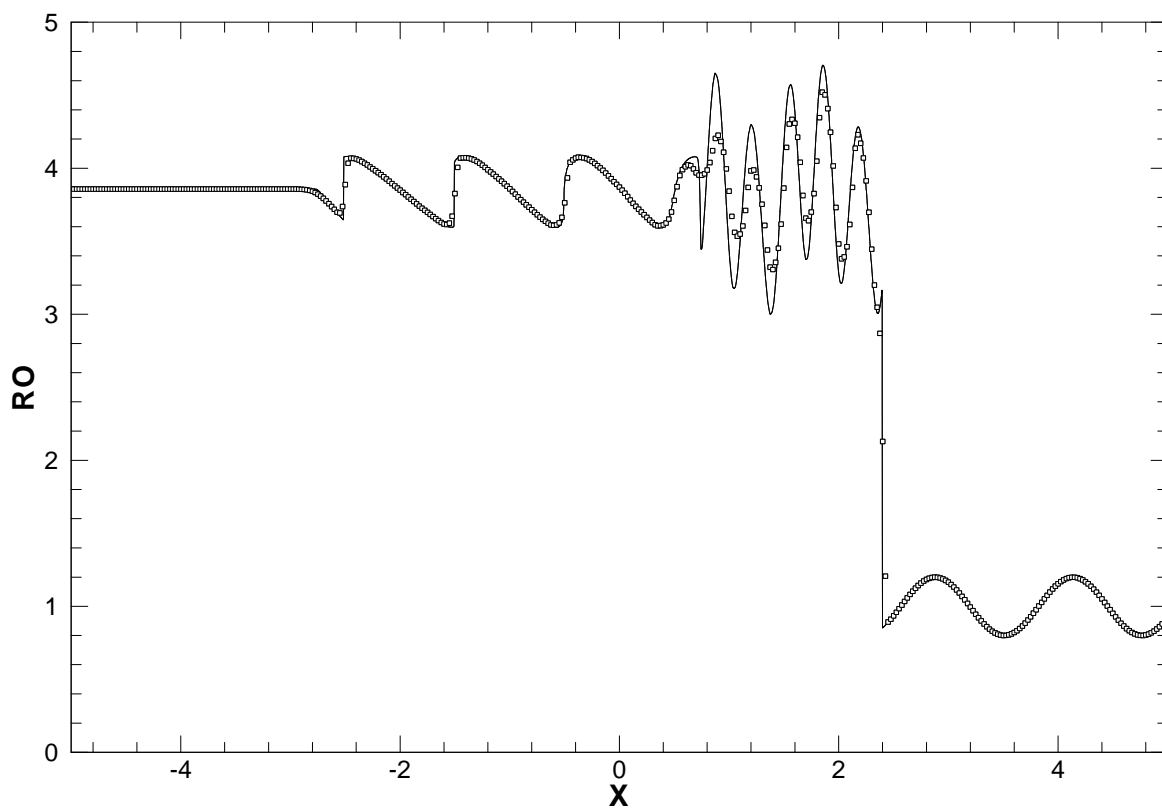


Рис. 1.3. Сравнение плотности на сетках  $N=401$  и  $N=9601$ .

Как видно из графика сравнения плотности (см.рис.1.3) при  $N=401$  решение принимает более-менее правильный характер. Ниже приводится таблица результатов сходимости решения.

*Таблица 1.1. Отклонение плотности по нормам  $L$  и  $C$ .*

$N$	$h_x$	$ E _C$	$ E _L$
201	0.05	1.415136844	0.025729251
401	0.025	0.568627544	0.010885636
801	0.0125	0.539266908	0.004653576
1601	0.00625	0.445486074	0.002061894
3201	0.003125	0.225244943	0.000787596

## **Глава 2. Обобщение схемы Кабаре на двумерные ортогональные сетки.**

В работах [28],[27] предложена и подробно исследована трехслойная разностная схема для простейшего уравнения переноса, названная схемой КАБАРЕ. На равномерных расчетных сетках эта схема имеет второй порядок аппроксимации, бездиссипативна и обладает улучшенными, по сравнению с другими схемами второго порядка, дисперсионными свойствами. Для монотонизации этой схемы в работе [30] была разработана процедура нелинейной коррекции потоков. В дальнейшем, посредством введения новых независимых переменных из трехслойной схема КАБАРЕ была преобразована в двухслойную с сохранением всех ее положительных качеств и обобщена, вначале на квазилинейные одномерные скалярные законы сохранения [48], а затем – на одномерные уравнения газовой динамики в эйлеровых переменных [35].

В настоящей работе предложено обобщение схемы КАБАРЕ системы уравнений Эйлера на двумерные ортогональные сетки. Выбор ортогональных сеток обусловлен соображениями простоты и наглядности изложения.

Следует отметить, что в работах [35, 46], посвященных обобщению схемы КАБАРЕ на одномерные уравнения газовой динамики, в целях экономии места, был описан простейший вариант нахождения новых потоковых переменных без явного выделения т.н. «звуковых точек». При решении трансзвуковых тестовых задач это приводило к образованию паразитных разрывов. В настоящей работе этот недочет устранен – алгоритм вычисления новых потоковых переменных описан в полном объеме.

При обобщении на двумерный случай схемы КАБАРЕ удалось сохранить основные позитивные свойства, характерные для одномерного случая. Предложенная схема способна одинаково рассчитывать как

дозвуковые, так и сверхзвуковые течения, а также зоны перехода между ними – звуковые точки. Этапы реализации численного алгоритма новой схемы остаются такими же, как и в одномерной схеме. Схема КАБАРЕ обладает вторым порядком аппроксимации как по пространству, так и по времени. Кроме того, в двумерном случае у схемы КАБАРЕ появляется дополнительное уникальное свойство – она способна неограниченно долго «прокручивать» одиночные вихри с неподвижным центром. При перемещении центра вихря по сетке аппроксимационная вязкость начинает проявляться, однако ее величина оказывается существенно меньше, чем у известных ранее разностных схем.

### ***Уравнения Эйлера и инварианты Римана***

Рассматривается течение сжимаемой невязкой среды в двумерной области. Данный тип течения может моделировать квазидвумерное течение среды в плоской области, например естественную конвекцию воздуха между стеклами окна. Уравнения описывающие такое течение могут быть записаны в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p)u}{\partial x} + \frac{\partial (\rho E + p)v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Эту систему называют системой уравнений Эйлера, и как мы видим неизвестных на одну величину больше количества уравнений. Система замыкается уравнением состояния среды. В дальнейших выкладках будем использовать уравнение состояния совершенного газа:  $p = \rho(\gamma - 1)\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  –

удельная внутренняя энергия, которая связана с полной энергией  $E$  как  $E = \varepsilon + (u^2 + v^2) / 2$ .

Систему уравнений (2.1) представим в векторном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} &= 0, \\ \mathbf{U} &= (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho E)^T, \\ \mathbf{E} &= (\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho uv \quad (\rho E + p)u)^T, \\ \mathbf{F} &= (\rho v \quad \rho uv \quad \rho v^2 + p \quad (\rho E + p)v)^T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Далее найдем систему линеаризованных уравнений относительно пространственных и временных производных переменных  $(\rho, u, v, p)$  для составления матричного уравнения. Поиск такой системы необходим для нахождения вида инвариантов Римана, которые мы будем использовать для вычисления потоковых переменных в нашей разностной схеме. В уравнении неразрывности среды достаточно разложить производные по частям. В уравнениях закона сохранения импульса нужно выделить уравнение неразрывности под множителем соответствующих компонент скорости. Как результат получим три уравнения относительно первых производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Последнее недостающее уравнение на давление построим из определения частной производной. Как известно уравнение состояния, без ограничения общности может быть записано в виде  $p = p(\rho, \varepsilon)$ , или что давление есть функция двух переменных: плотности и внутренней энергии. Следовательно, частную производную давления от времени можно переписать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = p_\rho \rho_t + p_\varepsilon \varepsilon_t. \quad \text{Подставим в это}$$

равенство производные плотности и внутренней энергии от времени, получаемые из системы уравнений (2.1). После нескольких простых преобразований получим, что:

$$p_t = p_\rho \rho_t + p_\varepsilon \varepsilon_t = -p_\rho \left( (\rho u)_x + (\rho v)_y \right) - p_\varepsilon \left( u \cdot \varepsilon_x + v \cdot \varepsilon_y + \frac{p}{\rho} (u_x + v_y) \right)$$

Откуда путем объединения слагаемых, получается искомое тождество:

$$p_t + u(p_\rho \rho_x + p_\varepsilon \varepsilon_x) + v(p_\rho \rho_y + p_\varepsilon \varepsilon_y) + (u_x + v_y) \left( \rho p_\rho + \frac{p}{\rho} p_\varepsilon \right) = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

$$c^2 = p_\rho + \frac{p}{\rho^2} p_\varepsilon.$$

В уравнении (2.4) мы воспользовались определением частной производной давления от координат  $x$ ,  $y$  и определением скорости звука.

Систему линеаризованных уравнений относительно первых производных представим в матричном виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

$$\Phi = (\rho \quad u \quad v \quad p)^T, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (2.5) гиперболическая, поэтому матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  имеют только вещественные собственные значения и полные системы собственных векторов. Можно показать, что собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  ( $u$ - $c$ ,  $u$ ,  $u$ ,  $u+c$ ), а матрицы  $\mathbf{B}$  ( $v-c$ ,  $v$ ,  $v$ ,  $v+c$ ). Составим матрицу из левых собственных векторов (вектора строки матрицы):

$$\mathbf{\Omega}_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/\rho c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma/\rho & 0 & 0 & 1/p \\ 0 & 1 & 0 & 1/\rho c \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{\Omega}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1/\rho c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma/\rho & 0 & 0 & 1/p \\ 0 & 0 & 1 & 1/\rho c \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение можно привести к т.н. системе характеристических уравнений. Для этого достаточно умножить слева уравнение (2.5) на одну из матриц  $\mathbf{\Omega}_A, \mathbf{\Omega}_B$  и воспользоваться свойством собственных векторов

$$\mathbf{\Omega}_A \mathbf{A} \mathbf{\Omega}_A^{-1} = \text{diag}(u - c, u, u, u + c), \mathbf{\Omega}_B \mathbf{B} \mathbf{\Omega}_B^{-1} = \text{diag}(v - c, v, v, v + c):$$

$$\mathbf{\Omega}_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{diag}(u - c, u, u, u + c) \mathbf{\Omega}_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\mathbf{\Omega}_A \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{\Omega}_B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{diag}(v - c, v, v, v + c) \mathbf{\Omega}_B \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\mathbf{\Omega}_B \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Каждая строка матричных уравнений (2.7) соответствует характеристическому уравнению относительно инвариантов Римана. Введем обозначение для инвариантов, пусть инварианты Римана соответствующие первому матричному уравнению из (2.7)  $\mathbf{Inv}_x$ , а инварианты из второго уравнения –  $\mathbf{Inv}_y$ . Выражения для инвариантов  $\mathbf{Inv}_x$  находятся как

первообразные от выражения  $\mathbf{\Omega}_A \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ :

$\mathbf{Inv}_x = (u - G \cdot p^\mu \quad v \quad \ln \frac{p}{\rho^\gamma} \quad u + G \cdot p^\mu)^T$ . Инварианты  $\mathbf{Inv}_y$  определяются

первообразными от  $\mathbf{\Omega}_B \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ :  $\mathbf{Inv}_y = (v - G \cdot p^\mu \quad u \quad \ln \frac{p}{\rho^\gamma} \quad v + G \cdot p^\mu)^T$ . В

указанных выражениях мы использовали неизвестные переменные  $G$  и  $\mu$ ,



которые определяются соотношениями  $G = \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\gamma \frac{p^{1/\gamma}}{\rho}}$ ,  $\mu = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}$ . Отметим, что соотношение давления и плотности в выражении G должны быть одинаковыми для всех точек где вычисляется инвариант, что соответствует постоянству  $\frac{p}{\rho^\gamma} = const$  или постоянству энтропии.

Вычислительные алгоритмы, базирующиеся на дивергентной форме (2.2) записи уравнений и сохраняющие свойство дивергентности на разностном уровне называются консервативными[42]. Консервативные разностные схемы, дополненные процедурами монотонизации численного решения в областях сильных градиентов (искусственная вязкость, нелинейная коррекция потоков), составляют основу современного парка алгоритмов сквозного счета газодинамических задач.

Вычислительные схемы, опирающиеся на представление уравнений газовой динамики в форме (2.5), получили название характеристических [49], или сеточно – характеристических [50]. Объединение позитивных свойств консервативных и характеристических схем осуществляется в т.н. «балансно – характеристических схемах», общие подходы к построению которых изложены в работах[29],[51],[31],[46],[35]. Схему КАБАРЕ также можно отнести к этому классу.

### ***Схема КАБАРЕ***

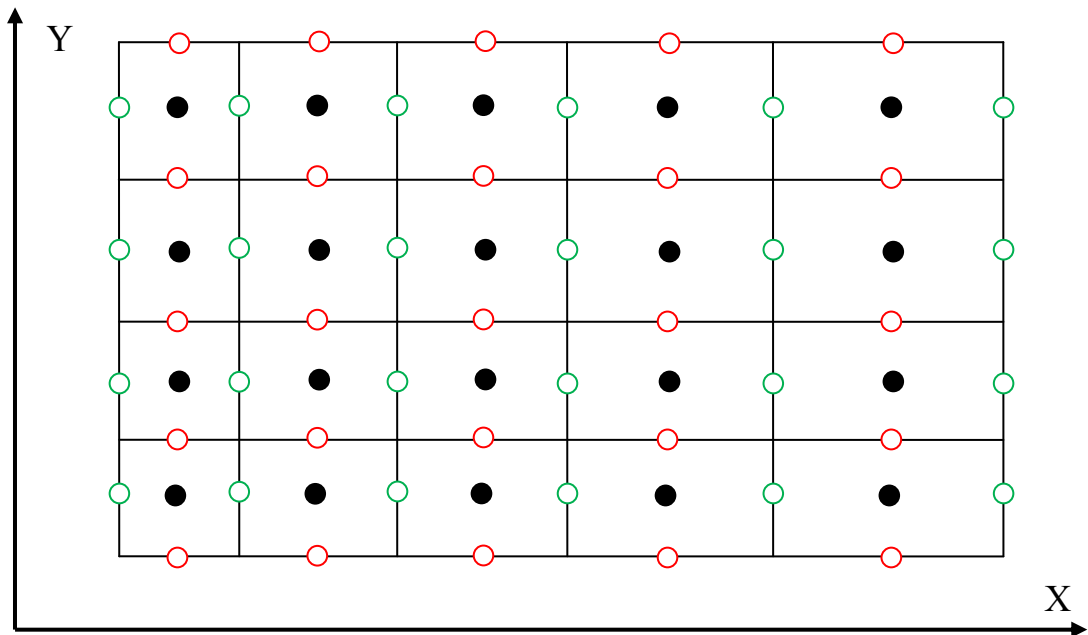
В прямоугольнике  $[X_l, X_r] \times [Y_b, Y_t]$  введем неравномерную ортогональную расчетную сетку с координатами узлов:

$$(x_i, y_j) : \begin{cases} x_1 = X_l, x_{i+1} > x_i, x_{N_x} = X_r, i = 1, N_x \\ y_1 = Y_b, y_{j+1} > y_j, y_{N_y} = Y_t, j = 1, N_y \end{cases}$$

Множество вертикальных границ ячеек этой сетки обозначим как  $\bar{\omega}_x$ , множество центров горизонтальных граней – как  $\bar{\omega}_y$ , а множество центров –

как  $\omega$ . Центры ячеек будем отмечать полуцелыми индексами  $(i+1/2, j+1/2)$ . Множества сеточных функций, определенных на  $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y$  и  $\omega$  будем обозначать соответственно, как  $H_{\bar{\omega}_x}, H_{\bar{\omega}_y}$  и  $H_{\omega}$ .

Введем два типа дискретных величин: т.н. «консервативные» величины  $\vec{\Psi}_{\omega}^T = (\Theta_{i+1/2, j+1/2}, U_{i+1/2, j+1/2}, V_{i+1/2, j+1/2}, E_{i+1/2, j+1/2}) \in H_{\omega}$ , и «потоковые» –  $\vec{\phi}_{\bar{\omega}_x}^T = (\rho_{i, j+1/2}, u_{i, j+1/2}, v_{i, j+1/2}, p_{i, j+1/2}) \in H_{\bar{\omega}_x}$  и  $\vec{\phi}_{\bar{\omega}_y}^T = (\rho_{i+1/2, j}, u_{i+1/2, j}, v_{i+1/2, j}, p_{i+1/2, j}) \in H_{\bar{\omega}_y}$ . Здесь  $U_{i+1/2, j+1/2}, V_{i+1/2, j+1/2}$  – x и y компоненты скорости,  $\Theta_{i+1/2, j+1/2}$  – плотности,  $E_{i+1/2, j+1/2}$  – и полные энергии ячеек,  $u_{i, j+1/2}, v_{i, j+1/2}, u_{i+1/2, j}, v_{i+1/2, j}$  – потоковые скорости,  $p_{i, j+1/2}, p_{i+1/2, j}$  – потоковые давления,  $\rho_{i, j+1/2}, \rho_{i+1/2, j}$  – потоковые плотности.



*Рис.2.1. Схематическое изображение проекции сеточных множеств на элементы расчетной сетки. Сплошные круги – расположение консервативных величин, красные полые круги – потоковые переменные в центрах горизонтальных граней, зеленые полые круги – потоковые на вертикальных гранях.*

Согласно методике построения схемы, консервативные переменные должны вычисляться так, чтобы выполнялись разностные аналоги законов сохранения вещества, его импульса и энергии. Это означает, что во всей области должны оставаться постоянными масса вещества, энтропия и полная энергии. Этого можно добиться, применяя напрямую интегро-интерполяционный подход к системе дивергентных уравнений (2.2). Результатом этой процедуры станет система разностных уравнений:

$$\frac{\mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau} + \frac{\bar{\mathbf{E}}_{i+1,j+1/2} - \bar{\mathbf{E}}_{i,j+1/2}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2,j+1} - \bar{\mathbf{F}}_{i+1/2,j}}{y_{j+1} - y_j} = 0. \quad (2.8)$$

где верхняя черта над векторами означает полусумму по двум временным слоям  $\bar{\eta} = 0.5 \cdot (\eta^n + \eta^{n+1})$ . Векторное уравнение (2.8) является, вообще говоря, неявным. Для поиска новых значений консервативных величин в схеме КАБАРЕ используется методика предиктор-корректор.

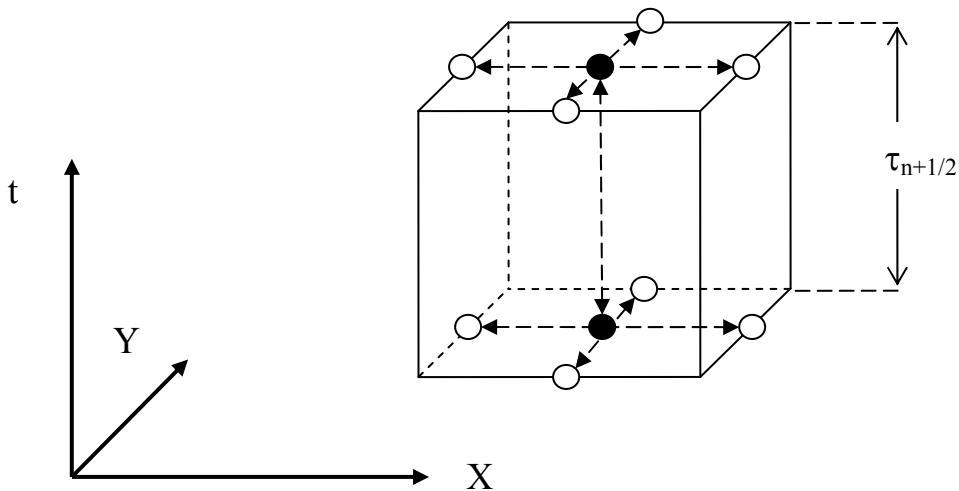


Рис.2.2. Вычислительный шаблон схемы КАБАРЕ.

По аналогии с одномерной схемой КАБАРЕ (см. главу 1) в начале на шаге предиктор ищем промежуточные значения консервативных переменных:

$$\frac{\mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^n}{\tau / 2} + \frac{\mathbf{E}_{i+1,j+1/2}^n - \mathbf{E}_{i,j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j+1}^n - \mathbf{F}_{i+1/2,j}^n}{y_{j+1} - y_j} = 0. \quad (2.9)$$

здесь промежуточные значения консервативных переменных обозначаются верхними полуцелыми индексами  $\mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}$ .

Распишем шаг-предиктор в виде уравнений и разрешим его относительно промежуточных консервативных переменных:

$$\begin{aligned} \Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \Theta_{i+1/2,j+1/2}^n - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho u)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho u)_{i,j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \frac{(\rho v)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho v)_{i+1/2,j}^n}{y_{j+1} - y_j} \right\}, \\ U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \left[ (\Theta U)_{i+1/2,j+1/2}^n - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho u^2 + p)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho u^2 + p)_{i,j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\rho uv)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho uv)_{i+1/2,j}^n}{y_{j+1} - y_j} \right\} \right], \\ V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \left[ (\Theta V)_{i+1/2,j+1/2}^n - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho uv)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho uv)_{i,j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\rho v^2 + p)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho v^2 + p)_{i+1/2,j}^n}{y_{j+1} - y_j} \right\} \right], \\ E_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \left[ (\Theta E)_{i+1/2,j+1/2}^n - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho Eu + pu)_{i+1,j+1/2}^n - (\rho Eu + pu)_{i,j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + (2.10) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\rho Ev + pv)_{i+1/2,j+1}^n - (\rho Ev + pv)_{i+1/2,j}^n}{y_{j+1} - y_j} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Далее необходимо определить потоковые переменные на новом временном слое. Для этого мы будем использовать свойство инвариантов Римана, из которого следует, что вдоль характеристик соответствующие выражения инвариантов остаются постоянными. В двумерном пространстве, вообще говоря, линии характеристик лежат в трехмерном пространстве  $(t,x,y)$ . В дальнейших рассуждениях мы будем считать, что в объеме одной ячейки инварианты Римана в каждом из направлений  $(x,y)$  являются соответственно функциями только от двух координат  $(x,t)$  и  $(y,t)$ . В рамках

вышеуказанных предположений запишем равенства для инвариантов Римана, верные внутри ячейки со вторым порядком точности по временному и пространственным шагам:

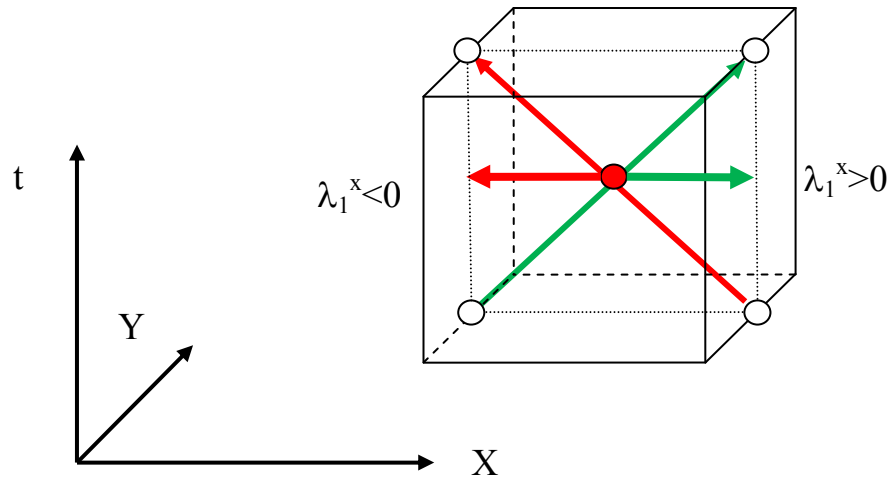
$$\begin{aligned}
(\widetilde{\mathbf{Inv}}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} &= 2 \cdot (\mathbf{Inv}_x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\mathbf{Inv}_x)_{i+1,j+1/2}^n, \\
(\widetilde{\mathbf{Inv}}_x)_{i+1,j+1/2}^{n+1} &= 2 \cdot (\mathbf{Inv}_x)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^n, \\
(\widetilde{\mathbf{Inv}}_y)_{i+1/2,j}^{n+1} &= 2 \cdot (\mathbf{Inv}_y)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\mathbf{Inv}_y)_{i+1/2,j+1}^n, \\
(\widetilde{\mathbf{Inv}}_y)_{i+1/2,j+1}^{n+1} &= 2 \cdot (\mathbf{Inv}_y)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - (\mathbf{Inv}_y)_{i+1/2,j}^n.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Инварианты, полученные экстраполяцией (2.11), нужно подвергнуть коррекции на предмет, удовлетворения принципа максимума внутри ячейки. Другими словами, значение инварианта на временном слое не должно являться экстремумом функции инварианта от пространственной переменной на самой грани. Это требование можно удовлетворить путем задания оценки минимума и максимума функции инварианта на грани и корректировке полученного значения, так чтобы значение функции инварианта всегда оставалась в диапазоне между минимумом и максимумом. На данном этапе построения схемы КАБАРЕ опустим выкладки по формулировке принципа максимума и запишем непосредственно саму процедуру коррекции на примере вертикальной грани:

$$\begin{aligned}
\min_x &= \min((\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^n, (\mathbf{Inv}_x)_{i+1,j+1/2}^n, (\mathbf{Inv}_x)_{i+1/2,j+1/2}^n) + \tau \cdot \mathbf{q}_x, \\
\max_x &= \max((\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^n, (\mathbf{Inv}_x)_{i+1,j+1/2}^n, (\mathbf{Inv}_x)_{i+1/2,j+1/2}^n) + \tau \cdot \mathbf{q}_x, \\
(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^n &= \begin{cases} \min_x, \text{if } ((\widetilde{\mathbf{Inv}}_x)_{i,j+1/2}^n < \min_x) \\ \max_x, \text{if } ((\widetilde{\mathbf{Inv}}_x)_{i,j+1/2}^n > \max_x). \\ (\widetilde{\mathbf{Inv}}_x)_{i,j+1/2}^n \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

В определениях (2.12) входит неизвестная  $\mathbf{q}_x$ , которая является оценкой правой части характеристического первого уравнения из (2.7). В нашем случае это будет вектор, с компонентами из комбинаций производных по  $y$ ,

вычисленных в центре ячейки. Опустим написание правой части ввиду громоздкости выражений.



*Рис.2.3. Направления интерполяции инвариантов в зависимости от направления характеристических скоростей.*

Как следует из выражений (2.11), на каждую грань ячейки приходится ровно 8 уравнений относительно инвариантов. В то время как число неизвестных равно 4, для разрешения перебора нужно использовать некое правило, которое отобрало 4 уравнения из 8-ми. Таким правилом нам послужат характеристические числа, указывающие, куда направлены характеристики в рассматриваемой грани. Следовательно, нужно оценить значения характеристических чисел на грани на новом временном слое. В качестве оценки этих чисел будем использовать полу сумму соответствующих характеристических чисел из смежных ячеек:

$$\begin{aligned} (\lambda_k)_{i,j+1/2}^{n+1} &= 0.5 \cdot \left( (\lambda_k)_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + (\lambda_k)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \right), \\ (\lambda_k)_{i+1/2,j}^{n+1} &= 0.5 \cdot \left( (\lambda_k)_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + (\lambda_k)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \right), k = 1, 4. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В равенствах (2.13) первое уравнение относится к вертикальным граням, второе к горизонтальным. Индекс k пробегает от 1 до 4, для вертикальных граней это будут числа u-c, u, u+c, для горизонтальных v-c, v, v+c.

Из полученных выражений характеристических чисел получим информацию о приходе характеристик с той или с другой стороны к

рассматриваемой грани. Каждому из случаев будет свой набор уравнений, рассмотрим все возможные случаи.

Первый возможный вариант, сверхзвуковое течение слева направо, когда все характеристические числа положительны  $\lambda_k > 0, k = 1, 4$ . Все инварианты определим вторым уравнением из (2.11) и подвергнем коррекции согласно (2.12). Решением полученной системы будут выражения:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j+1/2}^{n+1} &= 0.5 \cdot \left( \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1 + \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4 \right), \\
 p_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left( \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4 - \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1 \right)}{2G_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right\}^{1/\mu}, \\
 v_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, \\
 \rho_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{i,j+1/2}^{n+1}}{e^{\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3}} \right\}^{1/\gamma}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

где нижний индекс под инвариантом указывает порядковой номер компоненты.

Второй вариант соответствует дозвуковому течению слева направо, когда число Маха меньше единицы и скорость на грани направлена в положительную сторону по оси  $x$ . Первый инвариант вычислим по первому уравнению из (2.11), остальные согласно второму уравнению. Обозначение инвариантов в этом случае совпадает с предыдущим, но изменится инвариант, соответствующий первому характеристическому числу  $\lambda_1 = u - c < 0, \lambda_k > 0, k = 2, 4$ . Решение примет вид:

$$\begin{aligned}
u_{i,j+1/2}^{n+1} &= \frac{\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4 \cdot G_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1 \cdot G_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{G_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}, \\
p_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4 - \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1}{G_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + G_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right\}^{1/\mu}, \\
v_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, \\
\rho_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{i,j+1/2}^{n+1}}{e^{\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3}} \right\}^{1/\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Третий вариант описывает дозвуковое течение справа налево, в этом случае первые три инварианта найдем из первого уравнения (2.11), а четвертое из второго  $\lambda_k < 0, k=1,3, \lambda_4 > 0$ . Решением данной системы будет выражения (2.15). Стоит отметить, что различия между вторым и третьим вариантами лежит в поиске второго и третьего инвариантов. Одни находят из левой смежной ячейки, другие – из правой.

Четвертый вариант – сверхзвуковое течение справа налево, чему соответствуют отрицательные характеристические числа  $\lambda_k < 0, k=1,4$ . Все инварианты найдем из первого уравнения (2.11). Решение полученной системы уравнений относительно консервативных переменных примет вид:

$$\begin{aligned}
u_{i,j+1/2}^{n+1} &= 0.5 \cdot \left( \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1 + \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4 \right), \\
p_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left( \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4 - \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1 \right)}{2G_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right\}^{1/\mu}, \\
v_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, \\
\rho_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{i,j+1/2}^{n+1}}{e^{\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3}} \right\}^{1/\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Итак, мы рассмотрели все возможные варианты прихода характеристик на вертикальные грани. Для поиска потоковых переменных на



горизонтальных гранях процедура поиска решения остается аналогичной: оцениваются характеристические числа на новом временном слое, исходя из знаков этих чисел, составляется система уравнений инвариантов.

Последний шаг-корректор, вычисляющий консервативные переменные на новом временном слое выглядит следующим образом:

$$\frac{\mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + \frac{\mathbf{E}_{i+1,j+1/2}^{n+1} - \mathbf{E}_{i,j+1/2}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j+1}^{n+1} - \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} = 0. \quad (2.17)$$

После разрешения уравнения (2.17) относительно новых значений консервативных переменных получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho u)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{i,j+1/2}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \frac{(\rho v)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho v)_{i+1/2,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} \right\}, \\ U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}} \left[ (\Theta U)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho u^2 + p)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho u^2 + p)_{i,j+1/2}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\rho uv)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho uv)_{i+1/2,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} \right\} \right], \\ V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}} \left[ (\Theta V)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho uv)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho uv)_{i,j+1/2}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\rho v^2 + p)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho v^2 + p)_{i+1/2,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} \right\} \right], \\ E_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{\Theta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}} \left[ (\Theta E)_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - 0.5\tau \left\{ \frac{(\rho Eu + pu)_{i+1,j+1/2}^{n+1} - (\rho Eu + pu)_{i,j+1/2}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\rho Ev + pv)_{i+1/2,j+1}^{n+1} - (\rho Ev + pv)_{i+1/2,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, схема КАБАРЕ представляет собой алгоритм из нескольких фаз вычислений. На первом шаге-предикторе происходит вычисление промежуточных величин по уравнениям (2.10). Далее

вычисляются инварианты Римана методом линейной экстраполяции (2.11) с последующей коррекцией (2.12). Из полученной системы уравнений относительной потоковых переменных в зависимости от прихода характеристик с помощью формул (2.14), (2.15) и (2.16) найдем искомые значения потоковых переменных на новом временном слое. Окончательный шаг-корректор производится по формулам (2.18).

Ниже приводятся способы задания граничных условий и выделение звуковых точек.

### ***Звуковые точки***

Возьмем в рассмотрение вертикальную грань и смежные к ней ячейки. Все дальнейшие рассуждения, без ограничения общности, могут быть перенесены и для случая горизонтальной грани. Для выявления звуковых точек необходимо знать направления первых двух локально – одномерных характеристик в каждой из прилегающих ячеек. При этом возможны следующие четыре ситуации:

1. В левой ячейке - дозвуковое течение, в правой – сверхзвуковое течение вправо. Из левой ячейки на рассматриваемую грань приходит одна характеристика, отвечающая локальному инварианту  $\left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1$ , а из правой ячейки не приходит ни одной из первых двух характеристик. Такая конфигурация соответствует звуковой точке при ускорении потока вправо.

2. В правой ячейке «дозвук», в левой ячейке – сверхзвуковое течение влево. Из правой ячейки приходит характеристика, соответствующая четвертому локальному инварианту  $\left[ {}_R(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4$ , со стороны левой ячейки не приходит ни одной из первых двух характеристик. Это соответствует звуковой точке при ускорении потока влево.

3. В левой ячейке – сверхзвуковое течение вправо, а в правой – дозвуковое течение. Из левой ячейки на рассматриваемую грань приходят

две характеристики, отвечающие локальным инвариантам  $\left[ \begin{matrix} L \\ L \end{matrix} (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1$  и  $\left[ \begin{matrix} L \\ L \end{matrix} (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4$ , а из правой ячейки приходит одна характеристика, соответствующая локальному инварианту  $\left[ \begin{matrix} R \\ R \end{matrix} (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4$ . Такая конфигурация соответствует звуковой точке при торможении потока,двигающегося вправо.

4. В правой ячейке – сверхзвуковое течение влево, в левой ячейке – «дозвук». Из правой ячейки приходят две первые характеристики, соответствующие первому и четвертому локальным инвариантам  $\left[ \begin{matrix} R \\ R \end{matrix} (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1$  и  $\left[ \begin{matrix} R \\ R \end{matrix} (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4$ , со стороны левой ячейки приходит только первая характеристика, приносящая локальный инвариант  $\left[ \begin{matrix} L \\ L \end{matrix} (\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1$ . Это соответствует звуковой точке при торможении потока, движущегося влево.

Ниже приведены способы разрешения ситуаций с звуковыми точками. Основным предположением является вычисление числа Маха на грани интерполяцией.

### **Вариант №1. Ускорение потока вправо**

На грань приходит одна характеристика из левой ячейки, отвечающее характеристическому числу  $\lambda_4 = u + c$ . Недостающее равенство для вычисления потоковых переменных получим из интерполяционного соотношения для числа Маха. Также оценим характеристические числа полу суммой скоростей  $\lambda_{2,3} = 0.5 \left( U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \right)$  и определим тем самым, откуда придут еще две характеристики:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{c}\right)_{i,j+1/2}^{n+1} &= 0.5 \cdot \left( \frac{U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right), \\ \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1 &= u_{i,j+1/2}^{n+1} + G_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{i,j+1/2}^{n+1})^\mu, \\ v_{i,j+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, & \text{if } \lambda_2 > 0, \\ \left[ {}_R(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, & \text{if } \lambda_2 < 0, \end{cases} \\ \ln \left( \frac{p_{i,j+1/2}^{n+1}}{(\rho_{i,j+1/2}^{n+1})^\gamma} \right) &= \begin{cases} \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3, & \text{if } \lambda_2 > 0, \\ \left[ {}_R(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3, & \text{if } \lambda_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение данной системы уравнений может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1/2}^{n+1} &= \frac{H \cdot \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1}{H + G_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}, \\ p_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_1}{H + G_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right\}^{1/\mu}, \\ v_{i,j+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, & \text{if } \lambda_2 > 0, \\ \left[ {}_R(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, & \text{if } \lambda_2 < 0, \end{cases} \\ \rho_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left( \frac{p_{i,j+1/2}^{n+1}}{e^S} \right)^{1/\gamma}, \\ H &= 0.5 \cdot \sqrt{\gamma} e^{\frac{S}{2\gamma}} \left( \frac{U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right), \\ S &= \begin{cases} \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3, & \text{if } \lambda_2 > 0, \\ \left[ {}_R(\mathbf{Inv}_x)_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3, & \text{if } \lambda_2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

### Вариант №2. Ускорение потока влево

Из правой ячейки приходит характеристика, отвечающая числу  $\lambda_1 = u - c$ . Скорость на грани, как и в других вариантах, оценим полу суммой

скоростей слева и справа  $\lambda_{2,3} = 0.5(U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2})$ . Число Маха на грани приравняем полу сумме чисел Маха из ячеек. Решение данной системы принимает вид:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j+1/2}^{n+1} &= \frac{H \cdot \left[ \left[ \begin{matrix} R \\ \text{Inv}_x \end{matrix} \right]_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4}{H - G_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}, \\
 p_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left[ \left[ \begin{matrix} R \\ \text{Inv}_x \end{matrix} \right]_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_4}{H - G_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right\}^{1/\mu}, \\
 v_{i,j+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} \left[ \left[ \begin{matrix} L \\ \text{Inv}_x \end{matrix} \right]_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, & \text{if } \lambda_2 > 0, \\ \left[ \left[ \begin{matrix} R \\ \text{Inv}_x \end{matrix} \right]_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_2, & \text{if } \lambda_2 < 0, \end{cases} \\
 \rho_{i,j+1/2}^{n+1} &= \left( \frac{p_{i,j+1/2}^{n+1}}{e^S} \right)^{1/\gamma}, \\
 H &= 0.5 \cdot \sqrt{\gamma} e^{\frac{S}{2\gamma}} \left( \frac{U_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} + \frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right), \\
 S &= \begin{cases} \left[ \left[ \begin{matrix} L \\ \text{Inv}_x \end{matrix} \right]_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3, & \text{if } \lambda_2 > 0, \\ \left[ \left[ \begin{matrix} R \\ \text{Inv}_x \end{matrix} \right]_{i,j+1/2}^{n+1} \right]_3, & \text{if } \lambda_2 < 0. \end{cases} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

### Вариант №3. Торможение потока,двигающегося вправо

В данном случае на рассматриваемую грань приходит сразу 5 характеристик, поэтому здесь стоит вопрос отбора. Поскольку приход одних и тех же характеристик (отвечают  $\lambda_1 = u - c$ ) с обеих сторон никак не разрешается, то данные характеристики не будут рассматриваться. Следовательно, снова возникает нехватка 1-го уравнения, которое мы определим снова интерполяцией числа Маха из смежных ячеек. Решение в данном конкретном примере будет совпадать с выражениями (2.19).

#### Вариант №4. Торможение потока, движущегося влево

В отличие от варианта №3 отбросим характеристики, отвечающие  $\lambda_4 = u + c$ . Решение будет совпадать с соотношениями (2.20).

Как утверждалось выше, данные соображения для вертикальных граней со звуковыми точками будут справедливы и для горизонтальных с заменой компонент скорости местами.

#### Граничные условия

Рассмотрим расчетную ячейку, правое ребро которой соответствует границе области. На границе могут быть заданы различные граничные условия. Для уравнений Эйлера возможны следующие варианты:

- сверхзвуковое втекание,
- сверхзвуковое вытекание,
- дозвуковое втекание,
- непроницаемая стенка,
- свободное вытекание.

Реализация условия сверхзвукового втекания. В этом случае все потоковые переменные на границе приносятся сверхзвуковым потоком и определяются инвариантами  $\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_k$ ,  $k = 1, 4$ , которые приносит поток, и которые легко вычисляются по параметрам набегающего потока:

$$\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_1 = u_{\infty, j+1/2}^{n+1} - G_{\infty, j+1/2}^{n+1} \cdot (p_{\infty, j+1/2}^{n+1})^\mu,$$

$$\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_2 = v_{\infty, j+1/2}^{n+1},$$

$$\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_3 = \ln \left( \frac{p_{\infty, j+1/2}^{n+1}}{(\rho_{\infty, j+1/2}^{n+1})^\gamma} \right),$$

$$\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_4 = u_{\infty, j+1/2}^{n+1} + G_{\infty, j+1/2}^{n+1} \cdot (p_{\infty, j+1/2}^{n+1})^\mu.$$

Таким образом, потоковые переменные на правой границе зададим как:

$$p_{N_x, j+1/2}^{n+1} = p_{\infty, j+1/2}^{n+1}, u_{N_x, j+1/2}^{n+1} = u_{\infty, j+1/2}^{n+1}, v_{N_x, j+1/2}^{n+1} = v_{\infty, j+1/2}^{n+1}, \rho_{N_x, j+1/2}^{n+1} = \rho_{\infty, j+1/2}^{n+1}.$$

Реализация условия сверхзвукового вытекания. Все потоковые переменные в этом случае приносятся на границу сверхзвуковым вытекающим потоком и определяются инвариантами  $\left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N_x, j+1/2}^{n+1} \right]_k, k=1,4$ . Граничные потоковые переменные вычисляются по формулам (2.14), или в текущих обозначениях:

$$\begin{aligned} u_{N_x, j+1/2}^{n+1} &= 0.5 \cdot \left( \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N_x, j+1/2}^{n+1} \right]_1 + \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N_x, j+1/2}^{n+1} \right]_4 \right), \\ p_{N_x, j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left( \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N_x, j+1/2}^{n+1} \right]_4 - \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N_x, j+1/2}^{n+1} \right]_1 \right)}{2G_{N_x-1/2, j+1/2}^{n+1/2}} \right\}^{1/\mu}, \\ v_{N_x, j+1/2}^{n+1} &= \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N_x, j+1/2}^{n+1} \right]_2, \\ \rho_{N_x, j+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{N_x, j+1/2}^{n+1}}{e^{\left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N_x, j+1/2}^{n+1} \right]_3}} \right\}^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Реализация условия дозвукового втекания. С правой стороны на границу области набегаёт поток с заданными параметрами на бесконечности:  $u_{\infty, j+1/2}^{n+1}, v_{\infty, j+1/2}^{n+1}, \rho_{\infty, j+1/2}^{n+1}, p_{\infty, j+1/2}^{n+1}$ . По этим данным вычисляется

скорость звука в набегающем потоке  $c_{\infty, j+1/2}^{n+1} = \sqrt{\gamma \frac{p_{\infty, j+1/2}^{n+1}}{\rho_{\infty, j+1/2}^{n+1}}}$ , инварианты Римана

набегающего потока

$$\begin{aligned} \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_1 &= u_{\infty, j+1/2}^{n+1} - \frac{2 \cdot c_{\infty, j+1/2}^{n+1}}{\gamma - 1}, \quad \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_2 = v_{\infty, j+1/2}^{n+1}, \\ \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_3 &= \ln \left[ \frac{p_{\infty, j+1/2}^{n+1}}{(\rho_{\infty, j+1/2}^{n+1})^\gamma} \right], \quad \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_4 = u_{\infty, j+1/2}^{n+1} + \frac{2 \cdot c_{\infty, j+1/2}^{n+1}}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

и осредненные собственные числа на правом ребре расчетной ячейки:

$$\begin{aligned}
(\lambda_1^x)_{N,j+1/2}^{n+1} &= 0.5 \cdot (U_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - C_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + u_{\infty,j+1/2}^{n+1} - c_{\infty,j+1/2}^{n+1}), \\
(\lambda_2^x)_{N,j+1/2}^{n+1} &= (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} = 0.5 \cdot (U_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + u_{\infty,j+1/2}^{n+1}), \\
(\lambda_4^x)_{N,j+1/2}^{n+1} &= 0.5 \cdot (U_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + C_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + u_{\infty,j+1/2}^{n+1} + c_{\infty,j+1/2}^{n+1}).
\end{aligned}$$

Поскольку поток дозвуковой, то давление и нормальная скорость на границе определяются замкнутой системой уравнений:

$$\begin{aligned}
p_{N,j+1/2}^{n+1} &= \left[ \frac{\left[ \left[ L (\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_4 - \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty,j+1/2}^{n+1} \right]_1 \right]^{\frac{1}{\mu}}}{G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} + G_{\infty,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \\
u_{N,j+1/2}^{n+1} &= \frac{G_{\infty,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \left[ L (\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_4 + G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty,j+1/2}^{n+1} \right]_1}{G_{\infty,j+1/2}^{n+1/2} + G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Плотность и касательная скорость зависят от знака осредненной характеристической скорости переноса для третьего и четвертого инварианта:

$$\begin{aligned}
\rho_{N,j+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} \left\{ \frac{p_{i,j+1/2}^{n+1}}{\exp \left\{ \left[ L (\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_3 \right\}} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0 \\ \left\{ \frac{p_{i,*}^{n+1}}{\exp \left\{ \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty,j+1/2}^{n+1} \right]_3 \right\}} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} < 0 \end{cases}, \\
v_{i,j+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} \left[ L (\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_2 & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0 \\ \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty,j+1/2}^{n+1} \right]_2 & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} < 0 \end{cases}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Реализация условия непротекания на правой стенке. В этом случае нормальная составляющая потоковой скорости на правом ребре должна равняться нулю:  $u_{N,j+1/2}^{n+1} = 0$ . Расчетные формулы для остальных потоковых величин будут зависеть от комбинации характеристических чисел,



вычисленных по значениям консервативных переменных в данной ячейке на половинном слое по времени:  $(\lambda_k^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}, k=1,2,3$ .

Если  $\left[ (\lambda_1^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} < 0, (\lambda_2^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} = (\lambda_3^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_4^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0 \right]$ , то

на правую грань приходят три характеристики:

$$p_{N,j+1/2}^{n+1} = \left[ \frac{[L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}]_4}{G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad \rho_{N,j+1/2}^{n+1} = \left\{ \frac{p_{N,j+1/2}^{n+1}}{\exp\left\{ [L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}]_3 \right\}} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.24)$$

$$v_{N,j+1/2}^{n+1} = [L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}]_2, \quad u_{N,j+1/2}^{n+1} = 0.$$

В случае, когда консервативная скорость направлена «от стенки», на правую границу приходит только одна характеристика и система определяющих уравнений оказывается замкнутой, но не полной:

$$p_{N,j+1/2}^{n+1} = \left[ \frac{[L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}]_4}{G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^{\frac{1}{\mu}}, \quad u_{N,j+1/2}^{n+1} = 0. \quad (2.25)$$

Касательная составляющая скорости к стенке и плотность в этом случае полагаются равными соответствующим значениям промежуточных консервативных переменных в данной ячейке:

$$v_{N,j+1/2}^{n+1} = V_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}, \quad \rho_{N,j+1/2}^{n+1} = \Theta_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}. \quad (2.26)$$

В случае сверхзвукового потока вправо, т.е. когда  $\left[ (\lambda_1^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_2^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} = (\lambda_3^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0, (\lambda_4^x)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0 \right]$ , потоковые переменные вычисляются по формулам (2.24), в случае сверхзвукового потока влево (от границы), все потоковые переменные (кроме нормальной скорости) на новом временном слое полагаются равными их консервативным значениям на половинном слое по времени:

$$\begin{aligned}
p_{N,j+1/2}^{n+1} &= (\gamma - 1) \cdot \Theta_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \mathcal{E}_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}, \quad u_{N,j+1/2}^{n+1} = 0, \\
v_{N,j+1/2}^{n+1} &= V_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}, \quad \rho_{N,j+1/2}^{n+1} = \Theta_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}, \\
\mathcal{E}_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= E_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - 0.5 \cdot \left[ \left( U_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \right)^2 + \left( V_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Реализация условия «свободного вытекания». Граничное условие «свободного вытекания» ставится при расчетах течений в трубах и каналах при достижении в точках границы условий квазистационарности, которое в символьном виде, записывается как

$$\left. \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial D} = 0, \quad \vec{\phi} = (\rho, u, v, p)^T.$$

Следует отметить, что, при этом, течение может быть и вихревым. В этом случае данное условие нужно трактовать как осредненное по конечному отрезку времени  $\Delta t$ .

При свободном вытекании течение дозвуковое, поэтому на правое ребро расчетной ячейки всегда приходит, по крайней мере, одна характеристика изнутри области, которая приносит инвариант  $\left[ {}_L (\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_1 = u_{N,j+1/2}^{n+1} + G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{N,j+1/2}^{n+1})^\mu$ .

Вместо второго инварианта, значение которого неизвестно, записывается условие квазистационарности числа Маха:

$$\frac{u_{N,j+1/2}^{n+1}}{c_{N,j+1/2}^{n+1}} = \frac{U_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{C_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} = \sigma^{n+1/2}, \quad c_{N,j+1/2}^{n+1} = \sqrt{\gamma \frac{p_{N,j+1/2}^{n+1}}{\rho_{N,j+1/2}^{n+1}}}.$$

И квазистационарности второго и третьего характеристических чисел:

$$\left( \lambda_2^x \right)_{N,j+1/2}^{n+1} = \left( \lambda_3^x \right)_{N,j+1/2}^{n+1} = \left( \lambda_2^x \right)_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}.$$

Таким образом, система уравнений, определяющая потоковые переменные на границе, будет аналогична системе уравнений, описывающих «звуковую точку» (2.19)

$$u_{N,j+1/2}^{n+1} + G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{N,j+1/2}^{n+1})^\mu = \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_4,$$

$$u_{i,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \sigma_{i,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp \left[ \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_3 \right]^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot (p_{i,j+1/2}^{n+1})^\mu & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1} \geq 0 \\ \sigma_{i,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp \left[ \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty,j+1/2}^{n+1} \right]_3 \right]^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot (p_{i,j+1/2}^{n+1})^\mu & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1} < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Из этой системы находятся потоковые переменные нормальной скорости и давления:

$$p_{N,j+1/2}^{n+1} = \left[ \frac{\left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_4}{H_{N,j+1/2}^{n+1/2} + G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2}} \right]^\mu,$$

$$u_{N,j+1/2}^{n+1} = \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_4 - G_{N-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \cdot (p_{N,j+1/2}^{n+1})^\mu, \quad (2.29)$$

$$H_{N,j+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \sigma_{N,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp \left[ {}_L(I_4)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]^{\frac{1}{2\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1} \geq 0 \\ \sigma_{N,j+1/2}^{n+1/2} \cdot \sqrt{\gamma} \cdot \exp \left[ {}_\infty(I_4)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]^{\frac{1}{2\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1} < 0 \end{cases}.$$

Потоковая плотность и касательная компонента скорости определяются выражениями:

$$\rho_{N,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \frac{p_{N,j+1/2}^{n+1}}{\exp \left\{ \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_3 \right\}} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1} \geq 0 \\ \left\{ \frac{p_{N,j+1/2}^{n+1}}{\exp \left\{ \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty,j+1/2}^{n+1} \right]_3 \right\}} \right\}^{\frac{1}{\gamma}} & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1} < 0 \end{cases}, \quad (2.30)$$

$$v_{N,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \left[ {}_L(\mathbf{Inv}_x)_{N,j+1/2}^{n+1} \right]_2 & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0 \\ \left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty,j+1/2}^{n+1} \right]_2 & \text{if } (\lambda_3^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} < 0 \end{cases}.$$

Следует отметить, что если характеристическая скорость  $(\lambda_1^x)_{N,j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$ , т.е. направлена наружу области, то все потоковые переменные определяются

однозначно по информации, получаемой изнутри области. В противном случае, если в результате выхода за пределы области вихревой структуры возникают условия, при которых характеристическая скорость на короткий промежуток времени становится отрицательной, т.е. направленной внутрь области, решение будет зависеть от инвариантов  $\left[ (\mathbf{Inv}_x)_{\infty, j+1/2}^{n+1} \right]_k, k = 2, 3,$  ранее нигде не определенных. Их следует, каким либо образом доопределить. Конкретные значения этих инвариантов зависят от особенностей решаемой задачи.

Условия периодичности задаются очевидным образом, поэтому не будем на них специально останавливаться. Выписанные для правой границы граничные условия легко переписываются и для левой границы, а также для верхней и нижней.

### ***Выбор шага по времени***

Ввиду того, что построенная схема является явной, то шаг по времени должен удовлетворять критерию Куранта-Фридрихса-Леви. Последнее означает следующее, число Куранта  $\tau$  вычисленное в произвольной ячейке каждый момент времени не должно превышать 1. Числа Куранта для уравнений (2.7) в направлениях  $x$  и  $y$  будут иметь вид

$$r_x = \frac{\tau \cdot \max(|u - c|, |u|, |u + c|)_{i+1/2, j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i}, r_y = \frac{\tau \cdot \max(|v - c|, |v|, |v + c|)_{i+1/2, j+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j}.$$

Следовательно, максимальное значение числа Куранта может быть оценено как:

$$r_{\max} = \max_{i=1, N_x, j=1, N_y} \left( \frac{\tau \cdot (|u| + c)_{i+1/2, j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i}, \frac{\tau \cdot (|v| + c)_{i+1/2, j+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} \right).$$

Зададим параметр CFL:  $0 < CFL < 1$ . Если потребовать, что на каждом шаге по времени выполняется условие  $r_{\max} = CFL$ , то всегда будет выполнена

условная устойчивость схемы. Итак, выражение для шага по времени будет вычисляться как:

$$\tau_{n+1/2} = \frac{CFL}{\max_{i=1, N_x, j=1, N_y} \left( \frac{|U_{i+1/2, j+1/2}^n| + C_{i+1/2, j+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i}, \frac{|V_{i+1/2, j+1/2}^n| + C_{i+1/2, j+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} \right)}. \quad (2.31)$$

## ***Постановка тестовых примеров***

### **Задача №1. Изолированный Q-вихрь.**

Первый тестовый пример касается т.н. «локализованного изэнтропического вихря», для удобства введем обозначение Q-вихрь. По сути, речь идет о стационарном решении уравнений Эйлера для совершенного газа, имеющим вид стоячего вихря. Вихрь характеризуется параметрами радиуса  $r_0$ , амплитудой  $\alpha$  и степенным показателем экспоненты  $\beta$ .

В единичном квадрате задается равномерная расчетная сетка с числом ячеек 50x50. На границах – условие непротекания. Невозмущенный фон характеризуется следующими параметрами:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad \rho_0 = 1, \quad \varepsilon_0 = 1/(\gamma - 1), \quad P_0 = (\gamma - 1) \cdot \rho_0 \cdot \varepsilon_0$$

В центре области с координатами  $x_0=0.5, y_0=0.5$  помещается центр изэнтропического вихря, радиальная скорость вращения которого задается формулой:

$$u_r = \alpha \cdot \eta \cdot \exp\left[\beta \cdot (1 - \eta^2)\right], \quad \eta = \frac{|\mathbf{r}|}{r_0},$$

$$r_0 = 0.05, \alpha = 0.204, \beta = 0.3$$

Значения плотности, давления и удельной внутренней энергии в области вихря также отличаются от фоновых и задаются выражениями:

$$\delta T = -\frac{(\gamma-1) \cdot \alpha^2}{4 \cdot \gamma \cdot \beta} \cdot \exp\left[2 \cdot \beta \cdot (1-\eta^2)\right], \quad \rho = \rho_0 \cdot (1 + \delta T)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$P = \frac{P_0}{\rho_0} \cdot (1 + \delta T) \cdot \rho, \quad \varepsilon = \frac{P}{\rho \cdot (\gamma-1)}$$

Необходимо проверить данную задачу на устойчивость до 100 оборотов вихря. Время одного оборота оценивается из следующих соображений: ищем максимальную радиальную скорость и соответствующий ей радиус, потом оцениваем время как результат деления периметра на скорость.

$$(u_r)'_{\eta} = \alpha \cdot e^{\beta(1-\eta^2)} \cdot (1-2\beta\eta^2) = 0 \Rightarrow r = r_0 \eta = \frac{r_0}{\sqrt{2\beta}}, u_r = \frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}} e^{\beta-0.5};$$

$$T_0 = \frac{2\pi r}{u_r} = \frac{2\pi r_0}{\alpha} e^{0.5-\beta} \approx 1,881.$$

На рисунке 2.4 приведен начальный профиль давления для вихря Гаусса. Равновесное течение в данном вихре обеспечивается тем, что центробежные силы уравниваются градиентом давления. Энтропия в вихре при этом остается постоянной и равной энтропии невозмущенной среды. Известно, что такой изолированный 2-D вихрь без учета вязкости соответствует устойчивому решению для всех мод колебаний.

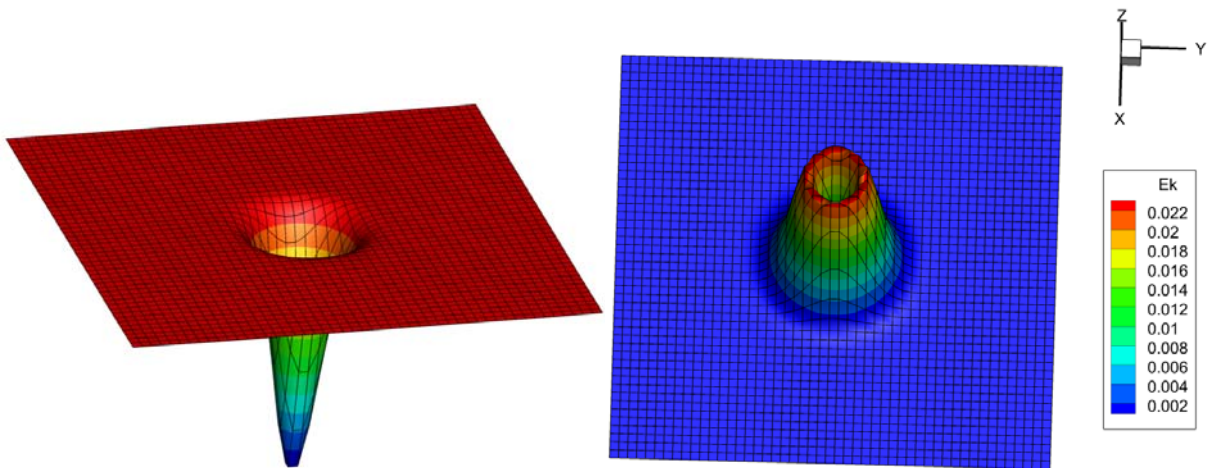
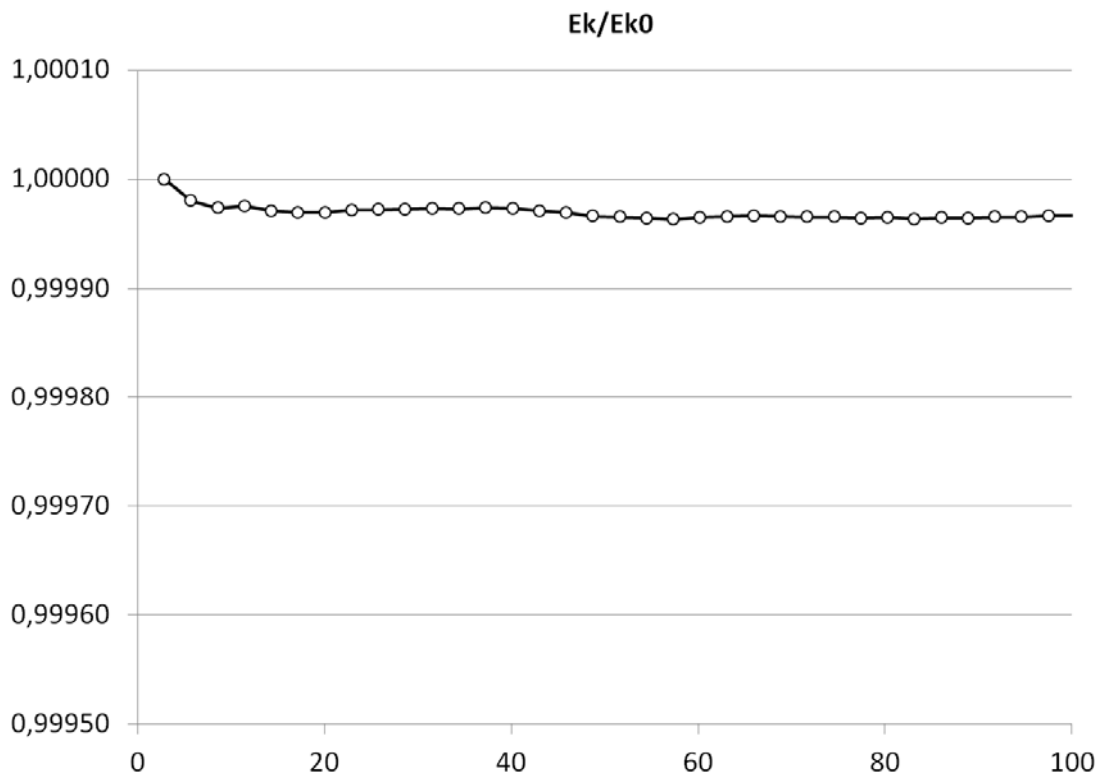


Рис. 2.4. Начальный профиль давления (слева) и кинетической энергии (справа)

При расчете вихрь полностью сохраняет свою начальную форму, как минимум, в течение 200 секунд, что соответствует более чем 100 оборотам

вихря вокруг своей оси. На рисунке 2.5 продемонстрирована зависимость интегральной кинетической энергии вихря от времени.



*Рис.2.5. Зависимость интегральной кинетической энергии вихря от времени.*

Как видно, в течение более чем 100 оборотов вихря суммарная кинетическая энергия изменяется лишь на величину порядка  $10^{-5}$ , сравнимую с вычислительной погрешностью.

На рис 2.6 приведен начальный профиль давления на расчетной сетке (50x50) расчетных ячеек. Расчеты показывают, что форма этого возмущения, как и возмущений других физических величин, в процессе расчета остается практически постоянной. В течение времени, соответствующего одному обороту, амплитуда давления уменьшается примерно на 1%, и в дальнейшем остается постоянной неограниченно долго. Фактически это означает, что на данной задаче никак не проявляется т.н. «аппроксимационная вязкость», присущая всем известным ранее схемам. Это уникальное явление можно было бы назвать проявлением «вычислительной сверхтекучести».

На рис. 2.7а – 2.7в приведены профили поля энтропии. В начальный момент возмущение энтропии находится на уровне арифметической погрешности. В процессе вращения за время первого оборота энтропия слегка возрастает, возникает довольно затейливая пространственная структура с амплитудой порядка  $10^{-6}$ . В дальнейшем, энтропия не изменяется.

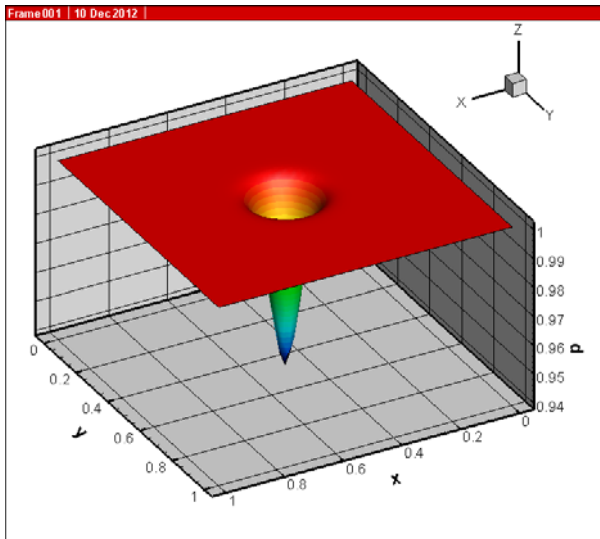


Рис.2.6

Начальный профиль давления в изолированном неподвижном вихре на сетке (50x50) расчетных ячеек

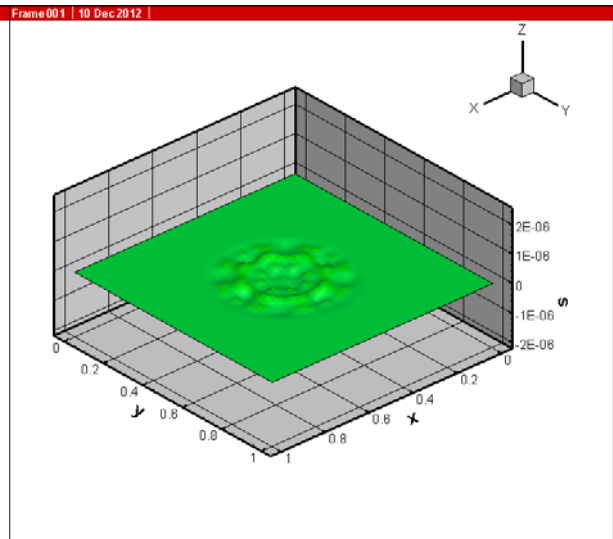


Рис.2.7а

Начальное распределение энтропии в области, возмущенной вихревым движением. Возмущения энтропии на уровне  $10^{-10}$ .

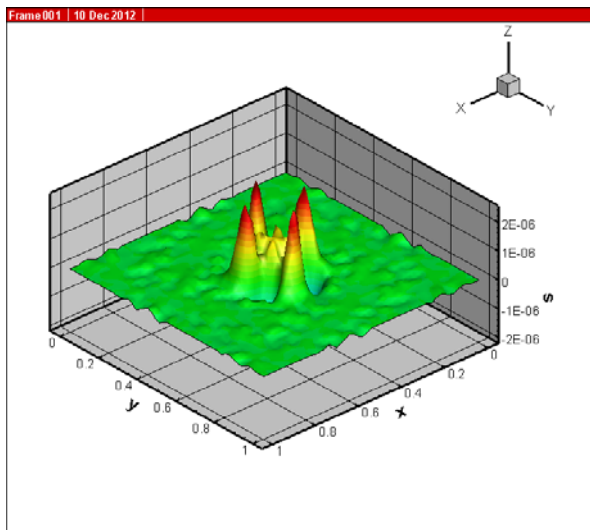


Рис.2.7б

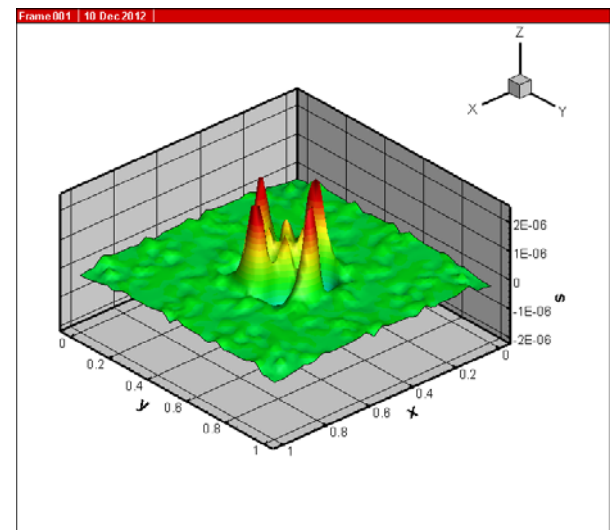
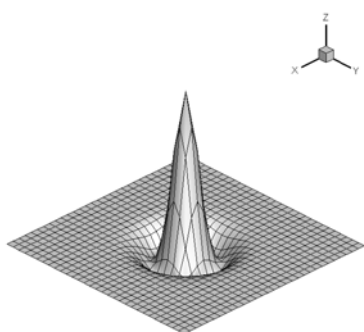


Рис 2.7в



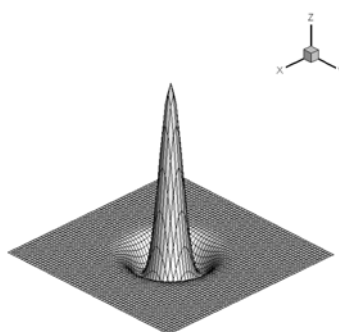
*Возмущение энтропии после половины времени оборота вихря.*      *После двух оборотов вихря возмущение энтропии выходит на стационар, отвечающий уровню  $10^{-6}$*

На рисунках 2.8а –2.8в приведены графики ротора скорости на расчетных сетках различной густоты. Явление вычислительной сверхтекучести начинает проявляться на данной задаче уже на сетке (30x30) расчетных ячеек. На более грубых сетках вихрь со временем разваливается.



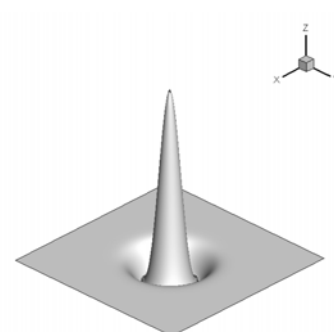
*Рис.2.8а*

*Ротор скорости, сетка (30x30)*



*Рис.2.8б*

*Ротор скорости, сетка (60x60)*



*Рис.2.8в*

*Ротор скорости, сетка (120x120)*

Кинетическая энергия вихря сохраняется в пределах 1%.

На рис.2.9а, 2.9б приведены графики ротора скорости при решении данной задачи на достаточно подробной сетке (240x240) по схеме высокой разрешающей способности Roe-MUSCL-TVD на моменты времени, соответствующие четырем и ста оборотам при задействованном TVD – лимитере. Видно, что аппроксимационная вязкость успевает почти полностью погасить вихревое движение. На рис. 2.9в приведены результаты расчета той же задачи по той же схеме и на той же сетке после четырех оборотов при отключенном TVD – лимитере. Хорошо видно, что вихрь полностью развалился под действием аппроксимационной дисперсии. Т.е. лимитером схема Roe-MUSCL-TVD слишком диссипативна, без лимитера – слишком дисперсионна

Z-axis: vorticity  
Simulation time: 4

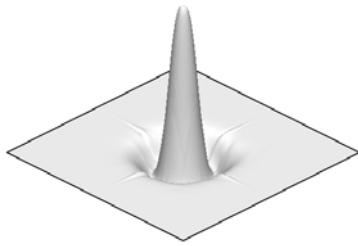


Рис.2.9а

Ротор скорости,  
сетка (240x240), TVD –  
лимитер,  $t=4$

Z-axis: vorticity  
Simulation time: 100

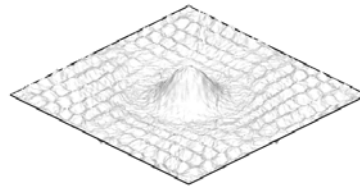


Рис.2.9б

Ротор скорости,  
сетка (240x240), TVD –  
лимитер,  $t=100$

Z-axis: vorticity  
Simulation time: t=4.76

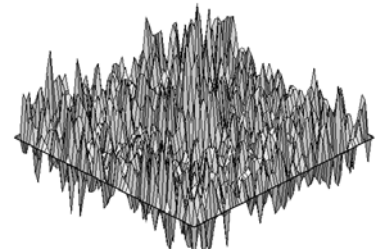


Рис.2.9в

Ротор скорости,  
сетка (240x240), без  
лимитера,  $t=4$

Если центр вихря не является неподвижным, а перемещается относительно расчетной сетки с какой – то скоростью, то явление «вычислительной сверхтекучести» исчезает. Начинает проявляться очень слабая аппроксимационная вязкость, величина которой сложным образом зависит от скорости. Для демонстрации малости этого эффекта на рис.2.10 приведены результаты расчета вихря при его перемещении по диагонали при скорости фонового течения  $u_0 = v_0 = 0.5$ . За время движения его амплитуда уменьшается на 1%.

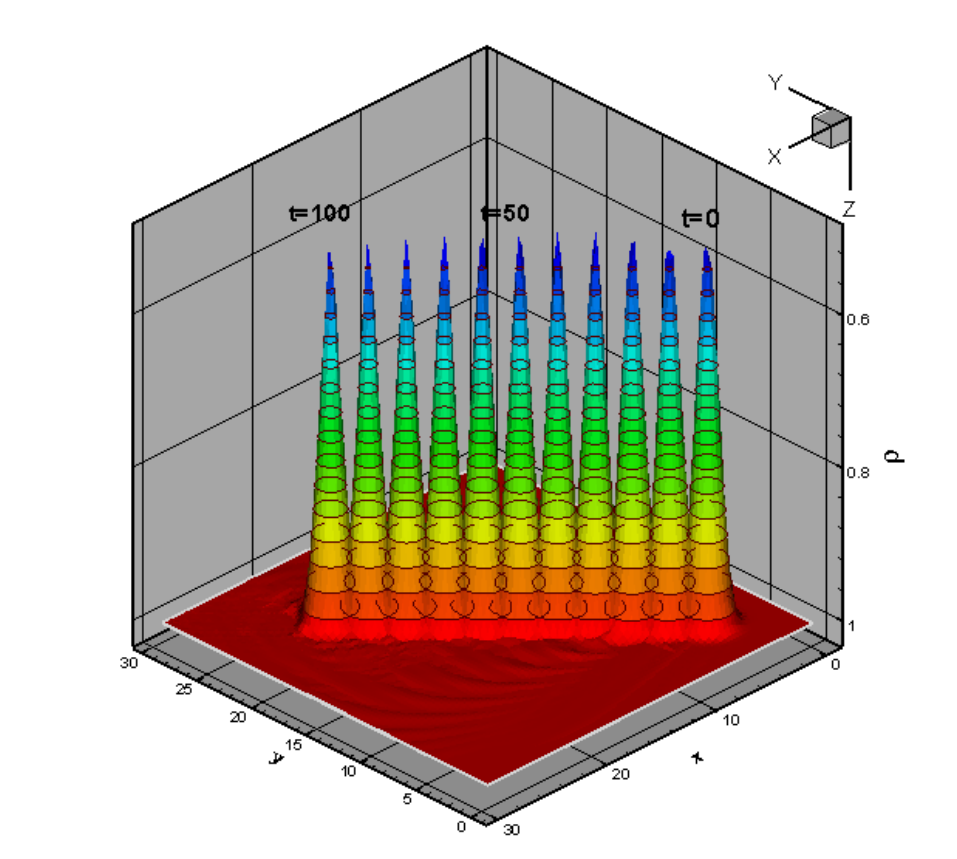
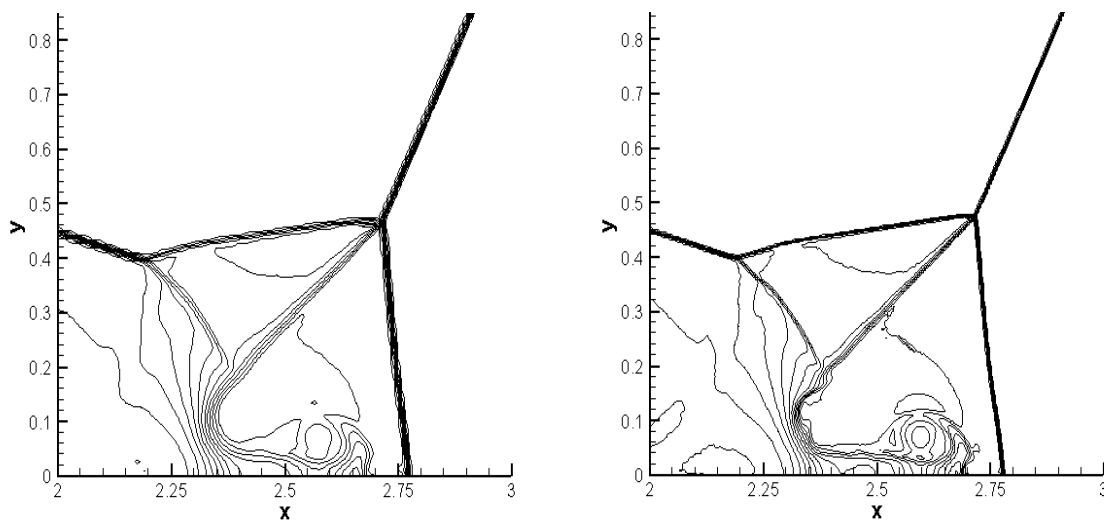


Рис.2.10 Перенос вихря по диагонали. Амплитуда уменьшается на 1%.

## Задача №2. Двойное маховское отражение

Из верхнего полупространства на твердую стенку, совпадающую с осью  $x$  падает косая ударная волна под углом в 60 градусов. Образуется двойное маховское отражение. Задача решалась на сгущающейся последовательности сеток без каких либо настроечных параметров (см.рис.2.11а-2.11в)

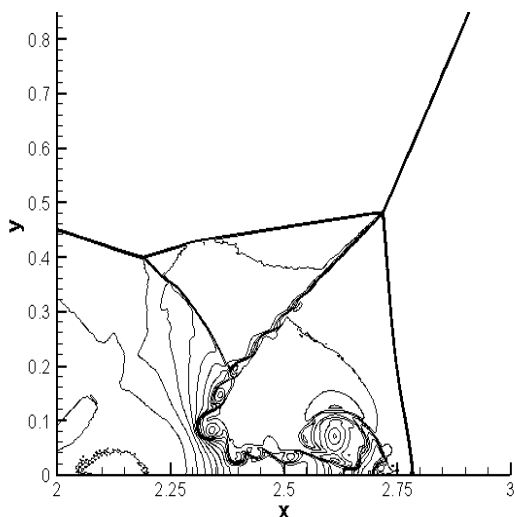


*Рис.2.11а*

*Двойное маховское отражение.  
Изолинии плотности. Расчетная  
сетка (481x121) ячеек*

*Рис.2.11б*

*Двойное маховское отражение.  
Изолинии плотности. Расчетная  
сетка (961x241) ячеек*



*Рис.2.11в*

*Двойное маховское отражение.  
Изолинии плотности. Расчетная  
сетка (1921x481) ячеек.*

Сравнение с результатами других авторов [52] и [53], полученным по схемам высокой разрешимости, указывает на высокую конкурентоспособность схемы КАБАРЕ.

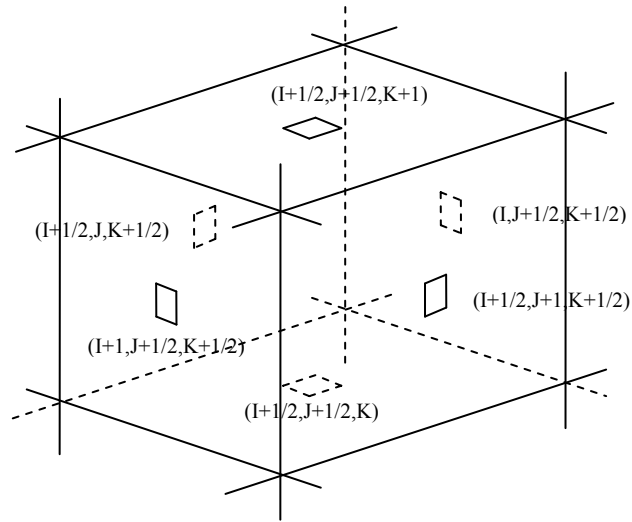
### Глава 3. Схема КАБАРЕ в трехмерной области на регулярной сетке.

В связи с необходимостью проведения трехмерных расчетов на параллельных вычислительных машинах для сокращения времени расчета, остро стоит вопрос о параллельной реализации расчетной схемы. Особенности алгоритма КАБАРЕ являются компактный вычислительный шаблон, и явный шаг по времени, что позволяет ее эффективно распараллелить.

В данной главе описывается построение трехмерного обобщения схемы КАБАРЕ на регулярной сетке. Глава содержит пример расчета задачи обтекания обратного уступа.

#### *Разностная схема*

Рассмотрим неравномерную регулярную ИЖ-сетку в параллелепипеде, определенным между точками  $(x_L, y_L, z_L)$  и  $(x_R, y_R, z_R)$ . Пусть координаты узлов определяются координатами  $(x_I, y_J, z_K)$ ,  $I=1, N_x$ ,  $J=1, N_y$ ,  $K=1, N_z$ :  
 $x_1=x_L < x_2 < \dots < x_I < x_{I+1} < \dots < x_{N_x}=x_R$ ,  
 $y_1=y_L < y_2 < \dots < y_J < y_{J+1} < \dots < y_{N_y}=y_R$ ,  
 $z_1=z_L < z_2 < \dots < z_K < z_{K+1} < \dots < z_{N_z}=z_R$ . Введем два типа переменных, потоковые и консервативные. Консервативные переменные располагаются в центрах ячеек и имеют полуцелые индексы  $(I+1/2, J+1/2, K+1/2)$ , указывающие, что минимальный индекс узла равен  $(I, J, K)$  и центр расположен от него на полпути узла с индексом  $(I+1, J+1, K+1)$ . Потокосые переменные определим в центрах граней ячеек, причем два индекса будут полуцелыми, а один целым. Более подробно особенности обозначений проясняет схематический рис.3.1:



*Рис.3.1. Расположение потоковых переменных в ячейке между  $(I, J, K)$  и  $(I+1, J+1, K+1)$ . Прямоугольниками в центрах граней представлено положение потоковых переменных.*

В центрах ячеек будем хранить набор из пяти переменных: плотность, три компоненты скорости и полную энергию. Введем обозначение  $\vec{\Psi}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} = (\rho, u, v, w, E)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^T$ . В центрах граней будет храниться другой набор переменных: плотность, три компоненты скорости и давление,  $\vec{\phi}_{i, j+1/2, k+1/2} = (\rho, u, v, w, p)_{i, j+1/2, k+1/2}^T$ . Здесь приведены индексы для граней, нормаль которых параллельна оси  $x$ .

Запишем систему уравнений Навье-Стокса в векторном виде (см. [54] §9.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} &= 0, \\ \mathbf{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T, \\ \mathbf{F} &= (\rho u, \rho u^2 + p - \tau_{xx}, \rho uv - \tau_{xy}, \rho uw - \tau_{xz}, (\rho E + p - \tau_{xx})u - v\tau_{xy} - w\tau_{xz})^T, \\ \mathbf{G} &= (\rho v, \rho uv - \tau_{xy}, \rho v^2 + p - \tau_{yy}, \rho vw - \tau_{yz}, (\rho E + p - \tau_{yy})v - u\tau_{xy} - w\tau_{yz})^T, \\ \mathbf{H} &= (\rho w, \rho uw - \tau_{xz}, \rho vw - \tau_{yz}, \rho w^2 + p - \tau_{zz}, (\rho E + p - \tau_{zz})w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz})^T. \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\tau_{ij}$  – тензор вязких напряжений.

Система уравнений (3.1) замыкается уравнением состояния идеального газа в форме:

$$p = \rho(\gamma - 1)\varepsilon, \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия, которая связана с полной энергией соотношением  $E = \varepsilon + 0.5 \cdot (u^2 + v^2 + w^2)$ .

Для системы уравнений (3.1) запишем разностную схему КАБАРЕ в неявном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{\mathbf{U}}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n}{\tau} + \frac{\overline{\mathbf{F}}_{i+1,j+1/2,k+1/2} - \overline{\mathbf{F}}_{i,j+1/2,k+1/2}}{x_{i+1} - x_i} + \\ & + \frac{\overline{\mathbf{G}}_{i+1/2,j+1,k+1/2} - \overline{\mathbf{G}}_{i+1/2,j,k+1/2}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\overline{\mathbf{H}}_{i+1/2,j+1/2,k+1} - \overline{\mathbf{H}}_{i+1/2,j+1/2,k}}{z_{k+1} - z_k} = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где верхнее подчеркивание означает полу сумму векторов по двум временным слоям  $\overline{\boldsymbol{\eta}} = (\boldsymbol{\eta}^{n+1} + \boldsymbol{\eta}^n) / 2$ . Как видно из выражения (3.3) для разрешения этой схемы нужно вычислить консервативные переменные на текущем временном слое  $t=t_n$ , а также потоковые переменные на новом временном слое  $t=t_{n+1}$ . Ниже приводится алгоритм решения разностного уравнения (3.3).

Для этого используем метод предиктор-корректор, где на шаге-предиктор вычисляем консервативные переменные на промежуточном временном слое и на шаге-корректоре вычисляем на новом временном слое. На консервативные переменные с промежуточного слоя по времени будет указывать верхний полуцелый индекс  $n+1/2$ . Промежуточные значения консервативных переменных определим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{\mathbf{U}}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n}{\tau / 2} + \frac{\mathbf{F}_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n - \mathbf{F}_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \\ & + \frac{\mathbf{G}_{i+1/2,j+1,k+1/2}^n - \mathbf{G}_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - \mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{z_{k+1} - z_k} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

После того, как мы разрешим систему уравнений (3.4), получим консервативные переменные на промежуточном слое:

$$\begin{aligned}
\rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\tau}{2} \cdot \left( \frac{(\rho u)_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n - (\rho u)_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\rho v)_{i+1/2,j+1,k+1/2}^n - (\rho v)_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} + \frac{(\rho w)_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - (\rho w)_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{z_{k+1} - z_k} \right), \\
u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \left[ (\rho u)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\tau}{2} \left( \frac{(\rho u^2 + p - \tau_{xx})_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n - (\rho u^2 + p - \tau_{xx})_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\rho uv - \tau_{xy})_{i+1/2,j+1,k+1/2}^n - (\rho uv - \tau_{xy})_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(\rho uw - \tau_{xz})_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - (\rho uw - \tau_{xz})_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{z_{k+1} - z_k} \right) \right] / \rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \\
v_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \left[ (\rho v)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\tau}{2} \left( \frac{(\rho uv - \tau_{xy})_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n - (\rho uv - \tau_{xy})_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\rho v^2 + p - \tau_{yy})_{i+1/2,j+1,k+1/2}^n - (\rho v^2 + p - \tau_{yy})_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(\rho vw - \tau_{yz})_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - (\rho vw - \tau_{yz})_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{z_{k+1} - z_k} \right) \right] / \rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \\
w_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \left[ (\rho w)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\tau}{2} \left( \frac{(\rho uw - \tau_{xz})_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n - (\rho uw - \tau_{xz})_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\rho vw - \tau_{yz})_{i+1/2,j+1,k+1/2}^n - (\rho vw - \tau_{yz})_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(\rho w^2 + p - \tau_{zz})_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - (\rho w^2 + p - \tau_{zz})_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{z_{k+1} - z_k} \right) \right] / \rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \\
E_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{\rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}} \cdot \left[ (\rho E)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\tau}{2} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left( \frac{((\rho E + p - \tau_{xx})u - v\tau_{xy} - w\tau_{xz})_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n - ((\rho E + p - \tau_{xx})u - v\tau_{xy} - w\tau_{xz})_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{((\rho E + p - \tau_{yy})v - u\tau_{xy} - w\tau_{yz})_{i+1/2,j+1,k+1/2}^n - ((\rho E + p - \tau_{yy})v - u\tau_{xy} - w\tau_{yz})_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{((\rho E + p - \tau_{zz})w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz})_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - ((\rho E + p - \tau_{zz})w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz})_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{z_{k+1} - z_k} \right) \right].
\end{aligned}$$



(3.5)

### Вычисление промежуточных значений консервативных величин

Как видно выражения (3.5) выглядят достаточно громоздкими, в дальнейшем данную запись лучше переписать в векторном виде, и через компоненты векторов определять консервативные переменные:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mathbf{F}_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n - \mathbf{F}_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{G}_{i+1/2,j+1,k+1/2}^n - \mathbf{G}_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n - \mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{z_{k+1} - z_k} \right), \\ \rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= (\mathbf{U}_1)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \mathbf{u}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \left( \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \\ \mathbf{v}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \left( \frac{\mathbf{U}_3}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \mathbf{w}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \left( \frac{\mathbf{U}_4}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \\ \mathbf{E}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \left( \frac{\mathbf{U}_5}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следующим шагом алгоритма является вычисление потоковых переменных на новом временном слое. Для этого мы будем использовать линейную экстраполяцию внутри пространственно-временной ячейки, а в качестве функций будем брать т.н. инварианты Римана. Поиск выражений для инвариантов заключается в составлении линеаризованной системы уравнений относительно первых производных и преобразование этой системы матрицей перехода. Матрица перехода будет состоять из строк, где каждая строка есть левый собственный вектор линеаризованной системы. Для системы уравнений Эйлера данные процедуры выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{C} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \Phi = (\rho, u, v, w, p)^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \rho c^2 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 1/\rho \\ 0 & 0 & 0 & \rho c^2 & w \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Свойство гиперболичности системы уравнений газовой динамики заключается в том, что в областях гладкости она приводится к т.н. характеристической форме (подробное описание процедуры приведения к характеристическому виду см.[43]):

$$\left\{ \Omega_A \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\} + \Lambda_A \left\{ \Omega_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} = -\Omega_A B \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \Omega_A C \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (3.8)$$

где  $\Omega_A$  - матрица, строки которой есть левые собственные вектора матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\Lambda_A$  - диагональная матрица из собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\Omega_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1/\rho c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/\rho c \end{pmatrix}, \Lambda_A = \begin{pmatrix} u - c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u + c \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Аналогичным образом получим характеристическую форму записи уравнений на инварианты по осям  $Y$  и  $Z$ :

$$\left\{ \Omega_B \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\} + \Lambda_B \left\{ \Omega_B \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\} = -\Omega_B A \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Omega_B C \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

$$\left\{ \Omega_C \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\} + \Lambda_C \left\{ \Omega_C \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} = -\Omega_C A \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Omega_C B \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (3.10)$$

Итак, получены характеристические уравнения (3.8), (3.10) для каждой оси X,Y,Z. Полученные уравнения приведем к удобному представлению, введя функции инвариантов Римана. Уравнение (3.8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \aleph_A}{\partial t} + \Lambda_A \frac{\partial \aleph_A}{\partial x} &= \mathbf{g}_A, \\ \aleph_A &= \left( u - G \cdot p^\mu, v, w, \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right), u + G \cdot p^\mu \right)^T, \\ G &= \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(\frac{p_C}{\rho_C^\gamma}\right)^{\frac{1}{2\gamma}}, \mu = \frac{\gamma-1}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Характеристические уравнения (3.10) также преобразовываем с помощью матриц  $\Omega_B, \Omega_C$ , в результате получаем характеристические уравнения через инварианты Римана в соответствующих направлениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \aleph_B}{\partial t} + \Lambda_B \frac{\partial \aleph_B}{\partial y} &= \mathbf{g}_B, \aleph_B = \left( v - G \cdot p^\mu, u, w, \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right), v + G \cdot p^\mu \right)^T, \\ \frac{\partial \aleph_C}{\partial t} + \Lambda_C \frac{\partial \aleph_C}{\partial z} &= \mathbf{g}_C, \aleph_C = \left( w - G \cdot p^\mu, u, v, \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right), w + G \cdot p^\mu \right)^T. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Где  $\Lambda_B = \text{diag}(v-c, v, v, v, v+c)$ ,  $\Lambda_C = \text{diag}(w-c, w, w, w, w+c)$ , вектора  $\aleph_B, \aleph_C$  - выражения для инвариантов Римана в направлении осей y и z, соответственно.

Линеаризуем характеристические уравнения (3.11), (3.12) внутри пространственно-временной ячейки

$$D = \left\{ (t, x, y, z) \in [t_n, t_{n+1}] \times [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}] \right\} :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \aleph_A}{\partial t} + [\Lambda_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \frac{\partial \aleph_A}{\partial x} &= [\mathbf{g}_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}, \\ \frac{\partial \aleph_B}{\partial t} + [\Lambda_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \frac{\partial \aleph_B}{\partial y} &= [\mathbf{g}_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}, \\ \frac{\partial \aleph_C}{\partial t} + [\Lambda_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \frac{\partial \aleph_C}{\partial z} &= [\mathbf{g}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выражения для векторов правых частей характеристических уравнений  $\mathbf{g}_A, \mathbf{g}_B, \mathbf{g}_C$  аппроксимируем из значений инвариантов Римана  $\mathfrak{N}_A, \mathfrak{N}_B, \mathfrak{N}_C$  с текущего временного слоя и полу слоя как:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{g}_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{[\mathfrak{N}_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n}{\tau / 2} + \\
&+ [\Lambda_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{[\mathfrak{N}_A]_{i+1, j+1/2, k+1/2}^n - [\mathfrak{N}_A]_{i, j+1/2, k+1/2}^n}{x_{i+1} - x_i}, \\
[\mathbf{g}_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{[\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n}{\tau / 2} + \\
&+ [\Lambda_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{[\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j+1, k+1/2}^n - [\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j, k+1/2}^n}{y_{j+1} - y_j}, \\
[\mathbf{g}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} &= \frac{[\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n}{\tau / 2} + \\
&+ [\Lambda_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \cdot \frac{[\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1}^n - [\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k}^n}{z_{k+1} - z_k}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили линеаризованные характеристические уравнения (3.13) с заданными правыми частями (3.14). Далее мы предполагаем, что функции инвариантов Римана являются достаточно гладкие, что внутри пространственно-временной ячейки верны соотношения вида:

$$[\mathfrak{N}_A]_{i, j+1/2, k+1/2}^{n+1} = 2[\mathfrak{N}_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_A]_{i+1, j+1/2, k+1/2}^n, \quad (3.15)$$

$$[\mathfrak{N}_A]_{i+1, j+1/2, k+1/2}^{n+1} = 2[\mathfrak{N}_A]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_A]_{i, j+1/2, k+1/2}^n.$$

$$[\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} = 2[\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j+1, k+1/2}^n, \quad (3.16)$$

$$[\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j+1, k+1/2}^{n+1} = 2[\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_B]_{i+1/2, j, k+1/2}^n.$$

$$[\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} = 2[\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1}^n, \quad (3.17)$$

$$[\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1}^{n+1} = 2[\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - [\mathfrak{N}_C]_{i+1/2, j+1/2, k}^n.$$

Другими словами, новые значения инвариантов Римана связаны со значениями инвариантов с текущего слоя и полу слоя путем линейной

экстраполяцией. Точность такого преобразования имеет второй порядок аппроксимации по временному и пространственному шагам.

Полученных уравнений (3.15), (3.16), (3.17) относительно инвариантов Римана на новом временном слое вдвое больше неизвестных  $[\mathfrak{N}_A]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, [\mathfrak{N}_B]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}, [\mathfrak{N}_C]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1}$ . Поэтому для разрешения полученного несоответствия количества уравнений и неизвестных введем правило отбора уравнений, основываясь на определении характеристик. Характеристика в рассматриваемой грани приходит со стороны той ячейки, откуда положительно направлена характеристическое число. Таким образом, система уравнений относительно инвариантов примет вид:

$$[(\mathfrak{N}_A)_l]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} = \begin{cases} 2 \cdot [(\mathfrak{N}_A)_l]_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - [(\mathfrak{N}_A)_l]_{i-1,j+1/2,k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^x \geq 0, \\ 2 \cdot [(\mathfrak{N}_A)_l]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - [(\mathfrak{N}_A)_l]_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^x < 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Где  $\lambda_l^x$  – характеристическое число, соответствующее инварианту Римана  $(\mathfrak{N}_A)_l$  в уравнении (3.11). Характеристические числа аппроксимируем диагональными элементами матриц  $[\Lambda_A]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, [\Lambda_A]_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}$  то есть верны соотношения:

$$\lambda_1^x = \frac{U_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + U_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - C_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$\lambda_{2,3,4}^x = \frac{U_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + U_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$\lambda_5^x = \frac{U_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + U_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + C_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{2}.$$

Аналогично выводятся соотношения для  $[\mathfrak{N}_B]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}, [\mathfrak{N}_C]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
\left[ (\mathfrak{S}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} 2 \cdot \left[ (\mathfrak{S}_B)_l \right]_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{S}_B)_l \right]_{i+1/2, j-1, k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^y \geq 0, \\ 2 \cdot \left[ (\mathfrak{S}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{S}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1, k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^y < 0, \end{cases} \\
\left[ (\mathfrak{S}_C)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= \begin{cases} 2 \cdot \left[ (\mathfrak{S}_C)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{S}_C)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k-1}^n, & \text{if } \lambda_l^z \geq 0, \\ 2 \cdot \left[ (\mathfrak{S}_C)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{S}_C)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1}^n, & \text{if } \lambda_l^z < 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Выражения для характеристических чисел  $\lambda_l^y, \lambda_l^z$  аппроксимируем как:

$$\lambda_1^y = \frac{V_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + V_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$\lambda_{2,3,4}^y = \frac{V_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + V_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$\lambda_5^y = \frac{V_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + V_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$\lambda_1^z = \frac{W_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + W_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$\lambda_{2,3,4}^z = \frac{W_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + W_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2}}{2},$$

$$\lambda_5^z = \frac{W_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + W_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2, j+1/2, k-1/2}^{n+1/2}}{2}.$$

### Вычисление потоковых переменных вдоль оси x

Рассмотрим теперь грань с индексами  $(I, J+1/2, K+1/2)$ , для этой грани верны равенства (3.18). Но полученные значения инвариантов Римана, вообще говоря, не удовлетворяют принципу максимума. Чтобы удовлетворить этому условию монотонности нужно произвести коррекцию значений:

$$\begin{aligned}
\left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} 2 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i-1,j+1/2,k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^x \geq 0, \\ 2 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^x < 0, \end{cases} \\
\left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} \min(\mathfrak{N}_A)_l, & \text{if } \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} < \min(\mathfrak{N}_A)_l, \\ \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, & \text{if } \min(\mathfrak{N}_A)_l \leq \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} \leq \max(\mathfrak{N}_A)_l, \\ \max(\mathfrak{N}_A)_l, & \text{if } \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} > \max(\mathfrak{N}_A)_l. \end{cases} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

где  $\min(\mathfrak{N}_A)_l$  и  $\max(\mathfrak{N}_A)_l$  есть оценки минимального и максимального значения инварианта  $(\mathfrak{N}_A)_l$  внутри пространственно-временной ячейки, откуда приходит характеристика. Рассмотрим ячейку с индексами  $(I+1/2, J+1/2, K+1/2)$  и выпишем для нее выражения для величин  $\min(\mathfrak{N}_A)_l$  и  $\max(\mathfrak{N}_A)_l$ :

$$\begin{aligned}
\min(\mathfrak{N}_A)_l &= \min\left(\left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n\right) + \tau \cdot \left[ \mathbf{g}_A \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\
\max(\mathfrak{N}_A)_l &= \max\left(\left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_A)_l \right]_{i+1,j+1/2,k+1/2}^n\right) + \tau \cdot \left[ \mathbf{g}_A \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}
\end{aligned}$$

После процедуры нелинейно коррекции (3.20) осталось выразить неизвестные значения потоковых переменных  $(\rho, u, v, w, p)_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}$  через инварианты Римана (3.11)<sub>2</sub>. Данный этап имеет множество вариантов записи в зависимости от набора уравнений. Для упрощения выражений выпишем решение в квадратурах. Пусть нам известны значения  $\lambda_l^x$  на грани  $(I, J+1/2, K+1/2)$  и мы имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\left[ (\mathfrak{S}_A)_1 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= u_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - G_1 \cdot \left( p_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} \right)^\mu, \\
\left[ (\mathfrak{S}_A)_2 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= v_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, \\
\left[ (\mathfrak{S}_A)_3 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= w_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, \\
\left[ (\mathfrak{S}_A)_4 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \ln \left( \frac{p_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}}{\left( \rho_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} \right)^\gamma} \right), \\
\left[ (\mathfrak{S}_A)_5 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= u_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} + G_2 \cdot \left( p_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} \right)^\mu.
\end{aligned}$$

Тогда решением этой системы будут следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
p_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left[ (\mathfrak{S}_A)_5 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - \left[ (\mathfrak{S}_A)_1 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}}{G_1 + G_2} \right\}^{1/\mu}, \\
u_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \frac{G_1 \cdot \left[ (\mathfrak{S}_A)_5 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} + G_2 \cdot \left[ (\mathfrak{S}_A)_1 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}}{G_1 + G_2}, \\
v_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \left[ (\mathfrak{S}_A)_2 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, \\
w_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \left[ (\mathfrak{S}_A)_3 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, \\
\rho_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}}{e^{\left[ (\mathfrak{S}_A)_4 \right]_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}}} \right\}^{1/\gamma}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Соотношения для граней, ориентированных по другим осям  $y, z$  будут аналогичными. Отдельно рассмотрим грань с индексом  $(I+1/2, J, K+1/2)$  и  $(I+1/2, J+1/2, K)$ .

### Вычисление потоковых переменных вдоль оси $y$

Для грани с индексом  $(I+1/2, J, K+1/2)$  вычисляем инварианты Римана согласно  $(3.19)_1$ , далее подвергаем инварианты процедуре коррекции:



$$\begin{aligned} \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} 2 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j-1, k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^y \geq 0, \\ 2 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1, k+1/2}^n, & \text{if } \lambda_l^y < 0, \end{cases} \\ \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} \min(\mathfrak{N}_B)_l, & \text{if } \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} < \min(\mathfrak{N}_B)_l, \\ \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1}, & \text{if } \min(\mathfrak{N}_B)_l \leq \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} \leq \max(\mathfrak{N}_B)_l, \\ \max(\mathfrak{N}_B)_l, & \text{if } \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} > \max(\mathfrak{N}_B)_l. \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\min(\mathfrak{N}_B)_l$  и  $\max(\mathfrak{N}_B)_l$  - оценка минимума и максимума инварианта  $(\mathfrak{N}_B)_l$  внутри ячейки, откуда приходит характеристика  $\lambda_l^y$ . Выражения для  $\min(\mathfrak{N}_B)_l$  и  $\max(\mathfrak{N}_B)_l$  внутри ячейки с индексами  $(I+1/2, J+1/2, K+1/2)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \min(\mathfrak{N}_B)_l &= \min\left(\left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1, k+1/2}^n\right) + \tau \cdot \left[ \mathbf{g}_B \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \\ \max(\mathfrak{N}_B)_l &= \max\left(\left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_B)_l \right]_{i+1/2, j+1, k+1/2}^n\right) + \tau \cdot \left[ \mathbf{g}_B \right]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2} \end{aligned}$$

Допустим, что мы получили систему уравнений инвариантов Римана в рассматриваемой грани и она имеет вид:

$$\begin{aligned} \left[ (\mathfrak{N}_B)_1 \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= v_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} - G_1 \cdot \left( p_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} \right)^\mu, \\ \left[ (\mathfrak{N}_B)_2 \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= u_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1}, \\ \left[ (\mathfrak{N}_B)_3 \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= w_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1}, \\ \left[ (\mathfrak{N}_B)_4 \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= \ln \left( \frac{p_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1}}{\left( \rho_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} \right)^\gamma} \right), \\ \left[ (\mathfrak{N}_B)_5 \right]_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} &= v_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} + G_2 \cdot \left( p_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1} \right)^\mu. \end{aligned}$$

Тогда решением этой системы уравнений будут выражения:

$$\begin{aligned}
p_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{\left[ (\mathfrak{N}_B)_5 \right]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} - \left[ (\mathfrak{N}_B)_1 \right]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}}{G_1 + G_2} \right\}^{1/\mu}, \\
u_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} &= \left[ (\mathfrak{N}_B)_2 \right]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}, \\
v_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} &= \frac{G_1 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_B)_5 \right]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} - G_2 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_B)_1 \right]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}}{G_1 + G_2}, \\
w_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} &= \left[ (\mathfrak{N}_B)_3 \right]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}, \\
\rho_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}}{e^{\left[ (\mathfrak{N}_B)_4 \right]_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}}} \right\}^{1/\gamma}.
\end{aligned}$$

### Вычисление потоковых переменных вдоль оси z

Для грани с индексом (I+1/2,J+1/2,K) вычисляем инварианты Римана согласно (3.19)<sub>2</sub>, и снова проводим процедуру коррекции:

$$\begin{aligned}
\left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} &= \begin{cases} 2 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k-1}^n, & \text{if } \lambda_l^z \geq 0, \\ 2 \cdot \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n, & \text{if } \lambda_l^z < 0, \end{cases} \\
\left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} &= \begin{cases} \min(\mathfrak{N}_C)_l, & \text{if } \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} < \min(\mathfrak{N}_C)_l, \\ \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1}, & \text{if } \min(\mathfrak{N}_C)_l \leq \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} \leq \max(\mathfrak{N}_C)_l, \\ \max(\mathfrak{N}_C)_l, & \text{if } \left[ (\tilde{\mathfrak{N}}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} > \max(\mathfrak{N}_C)_l. \end{cases}
\end{aligned}$$

где  $\min(\mathfrak{N}_C)_l$  и  $\max(\mathfrak{N}_C)_l$  - минимум и максимум инварианта  $(\mathfrak{N}_C)_l$  в ячейке, откуда приходит характеристика  $\lambda_l^z$ . Выражения для  $\min(\mathfrak{N}_C)_l$  и  $\max(\mathfrak{N}_C)_l$  внутри ячейки (I+1/2,J+1/2,K+1/2) можно аппроксимировать как:

$$\begin{aligned}
\min(\mathfrak{N}_C)_l &= \min\left(\left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^n, \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n\right) + \tau \cdot [\mathbf{g}_C]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}, \\
\max(\mathfrak{N}_C)_l &= \max\left(\left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k}^n, \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^n, \left[ (\mathfrak{N}_C)_l \right]_{i+1/2,j+1/2,k+1}^n\right) + \tau \cdot [\mathbf{g}_C]_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

Пусть после процедуры коррекции система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} [(\mathfrak{N}_C)_1]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= w_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} - G_1 \cdot (p_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1})^\mu, \\ [(\mathfrak{N}_C)_2]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= u_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}, \\ [(\mathfrak{N}_C)_3]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= v_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}, \\ [(\mathfrak{N}_C)_4]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= \ln \left( \frac{p_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}}{(\rho_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1})^\gamma} \right), \\ [(\mathfrak{N}_C)_5]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= w_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} + G_2 \cdot (p_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1})^\mu. \end{aligned}$$

Решением полученной системы уравнений являются соотношения:

$$\begin{aligned} p_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= \left\{ \frac{[(\mathfrak{N}_C)_5]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} - [(\mathfrak{N}_C)_1]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}}{G_1 + G_2} \right\}^{1/\mu}, \\ u_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= [(\mathfrak{N}_C)_2]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}, \\ v_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= [(\mathfrak{N}_C)_3]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}, \\ w_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= \frac{G_1 \cdot [(\mathfrak{N}_C)_5]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} + G_2 \cdot [(\mathfrak{N}_C)_1]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}}{G_1 + G_2}, \\ \rho_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1} &= \left\{ \frac{p_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}}{e^{[(\mathfrak{N}_C)_4]_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1}}} \right\}^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

### Вычисление новых значений консервативных величин.

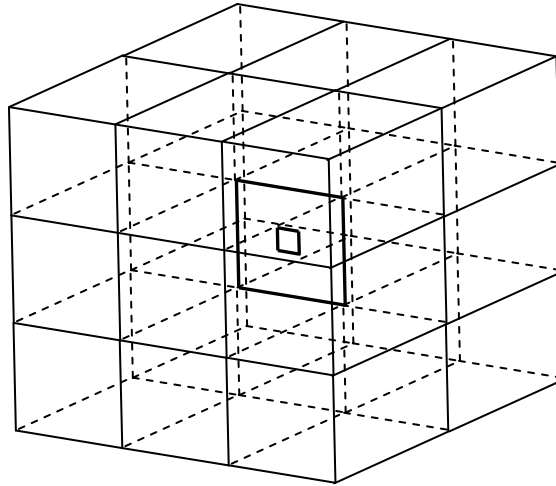
Заключительный этап, он же шаг-корректор представляет собой вычисление переменных в центрах ячеек на новом временном слое:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\mathbf{F}_{i+1,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - \mathbf{F}_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{G}_{i+1/2,j+1,k+1/2}^{n+1} - \mathbf{G}_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k+1}^{n+1} - \mathbf{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1}}{z_{k+1} - z_k} \right), \\
\rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= (\mathbf{U}_1)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, \\
v_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \left( \frac{\mathbf{U}_3}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, w_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} = \left( \frac{\mathbf{U}_4}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1}, \\
E_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \left( \frac{\mathbf{U}_5}{\mathbf{U}_1} \right)_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

### ***Аппроксимация тензора вязкости***

В системе уравнений (3.1) присутствуют т.н. вязкостные члены уравнения Навье-Стокса. Для того, чтобы алгоритм вычисления по разностной схеме КАБАРЕ (3.3) был полностью описан, не хватает определения способа аппроксимации тензора вязких напряжений  $\tau_{ij}$ . Ниже приводится один из возможных вариантов реализации аппроксимации тензора вязкости.

Согласно выражениям (3.4) и (3.22) тензор вязкости фигурирует только при вычислении потоковых переменных, следовательно, аппроксимацию данного тензора следует вычислять на гранях ячеек. Рассмотрим грань с индексом  $(I, J+1/2, K+1/2)$  и ячейки содержащие узлы этой грани (см.рис.3.2).



*Рис.3.2. Шаблон для вычисления тензора вязкости на грани  
(I,J+1/2,K+1/2).*

В каждом из узлов рассматриваемой грани аппроксимируем значения пространственных производных  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Далее из этих производных комбинируем выражения для тензора вязких напряжений как<sup>1</sup>:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.23)$$

Процедура аппроксимации пространственных величин в узле (I,J,K) имеет следующий вид:

---

<sup>1</sup> Здесь в определении тензора вязких напряжений символ  $\mu$  обозначает динамическую вязкость среды.

$$f = U, V, W$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_{i,j,k} &= \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1})} \left\{ \left( f_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + f_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} + f_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + f_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} \right) / 4 - \right. \\ &\quad \left. - \left( f_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} + f_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} + f_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} + f_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} \right) / 4 \right\}, \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle_{i,j,k} &= \frac{2}{(y_{j+1} - y_{j-1})} \left\{ \left( f_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + f_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} + f_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} + f_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} \right) / 4 - \right. \\ &\quad \left. - \left( f_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} + f_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} + f_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} + f_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} \right) / 4 \right\}, \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle_{i,j,k} &= \frac{2}{(z_{k+1} - z_{k-1})} \left\{ \left( f_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} + f_{i-1/2,j+1/2,k+1/2} + f_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} + f_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} \right) / 4 - \right. \\ &\quad \left. - \left( f_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} + f_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} + f_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} + f_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} \right) / 4 \right\}. \end{aligned}$$

где в скобках в числителе стоит разность средних значений переменных, а в знаменателе расстояние между точками, где берется среднее. Точность вычисления пространственных производных подобным образом имеет формально второй порядок точности по пространственной переменной.

### **Выбор шага по времени**

Критерий выбора шага по времени базируется на характеристических числах. Из системы линейных уравнений (3.13) относительно первых производных от инвариантов следует, что необходимым условием устойчивости является выполнение неравенств:

$$\frac{\tau \cdot |\lambda_i^x|_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{x_{i+1} - x_i} < 1, \quad \frac{\tau \cdot |\lambda_i^y|_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{y_{j+1} - y_j} < 1, \quad \frac{\tau \cdot |\lambda_i^z|_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{z_{k+1} - z_k} < 1. \quad (3.24)$$

или что числа Куранта для трех уравнений лежит в диапазоне от 0 до 1, где модули характеристических чисел  $|\lambda_i^x|, |\lambda_i^y|, |\lambda_i^z|$  аппроксимируем через консервативные переменные на полу слое. Таким образом, имеем соотношения:

$$\begin{aligned}
|\lambda_1^x| &= \left| U_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, |\lambda_{2,3}^x| = \left| U_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, \\
|\lambda_4^x| &= \left| U_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, \\
|\lambda_1^y| &= \left| V_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, |\lambda_{2,3}^y| = \left| V_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, \\
|\lambda_4^y| &= \left| V_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, \\
|\lambda_1^z| &= \left| W_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, |\lambda_{2,3}^z| = \left| W_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|, \\
|\lambda_4^z| &= \left| W_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + C_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right|.
\end{aligned}$$

Вышеуказанный критерий можно параметризовать, введя некоторую константу CFL:  $0 < CFL < 1$ . Если определить шаг по времени как:

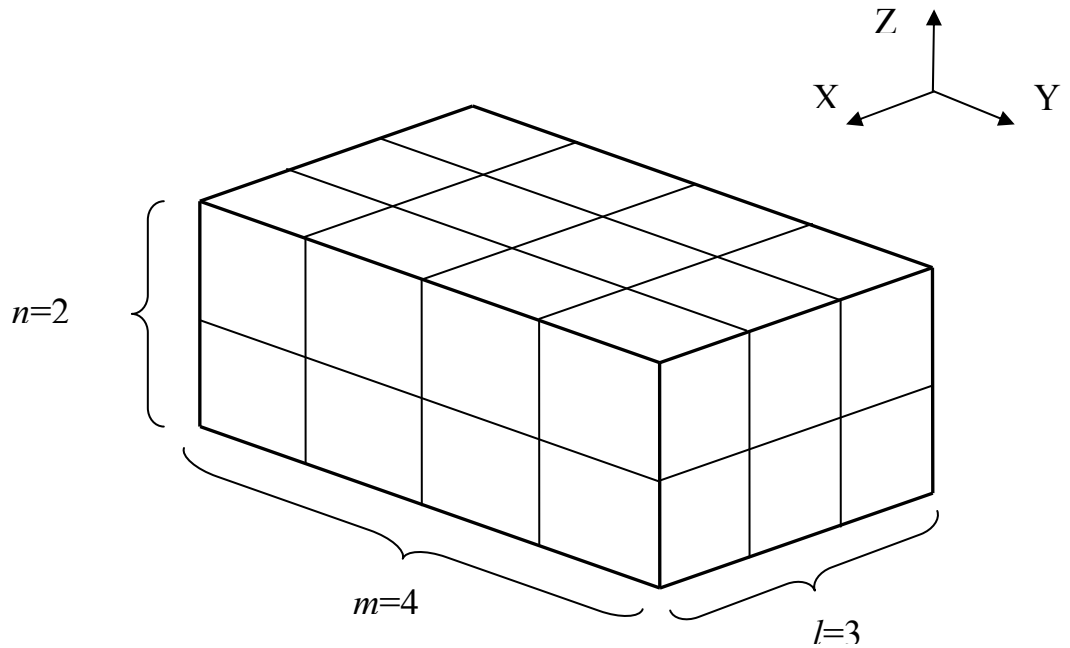
$$\tau = \frac{CFL}{\max_{i,j,k,l} \left( \frac{|\lambda_l^x|^{n+1/2}}{x_{i+1} - x_i}, \frac{|\lambda_l^y|^{n+1/2}}{y_{j+1} - y_j}, \frac{|\lambda_l^z|^{n+1/2}}{z_{k+1} - z_k} \right)}, \quad (3.25)$$

то условия (3.24) будут удовлетворены.

### **Особенности распараллеливания**

Параллельная программа для расчета течения среды в прямоугольном канале должна представлять собой рекуррентный алгоритм расчета в произвольно взятой подобласти и содержащей передачу данных со смежными подобластями. Другими словами, всю расчетную область декомпозируем (разбиваем) на подобласти и организуем передачу данных между этими подобластями.

Данная реализация параллельной версии разностной схемы КАБАРЕ была основана на декартовом разбиении на подобласти. Каждая подобласть имеет свои декартовы координаты. Допустим, что мы разбили расчетную область на  $(l, m, n)$  частей соответственно по осям  $(X, Y, Z)$  (см.рис.3.3).



*Рис.3.3. Декартова декомпозиция расчетной области на  $l*m*n$  частей.*

Тогда каждая подобласть имеет свои декартовы координаты  $(i,j,k)$ . Введем сквозную нумерацию подобластей начиная с нуля, такую, что для подобласти с координатами  $(i,j,k)$  возвращает номер  $n_p=i-1+(j-1)*l+(k-1)*l*m$ ,  $i=1,l$ ,  $j=1,m$ ,  $k=1,n$ . Такая нумерация соответствует тройному вложенному циклу по  $(i,j,k)$  с последовательным перебором номеров подобластей сперва по оси X, потом сдвиг на один индекс по оси Y в конце цикла по оси X, и сдвиг по оси Z в конце цикла по оси Y. Также легко проверяется, что при  $i=j=k=1$  выполнено  $n_p=0$ , а при  $i=l$ ,  $j=m$ ,  $k=n$  имеем  $n_p=l*m*n-1$ . Таким образом, мы пронумеровали подобласти от 0 до  $l*m*n-1$ .

### ***Обтекание обратного уступа***

#### **Постановка задачи и примеры расчетов в литературе**

Течение жидкости в канале с внезапным расширением по высоте представляет интерес ввиду того, что при достаточно большом числе Рейнольдса в области за ступенькой образуются регулярные вихревые



структуры. Качественное изучение поведения этих вихрей требует моделирования трехмерного турбулентного течения жидкости.

В этой работе предлагается описание численной методики, основанной на конечно-разностной аппроксимации уравнений Навье-Стокса (3.1) в приближении среды с уравнением состояния идеального газа (3.2) и тензором вязких напряжений в форме (3.23). Схема КАБАРЕ является явной монотонной схемой второго порядка точности по пространству и времени. Таким образом, ее можно отнести к LES-схемам, которые разрешают вихри размерами порядка нескольких ячеек. Следовательно, с измельчением размера сетки мы в теории можем получить достаточно неплохое разрешение сетки, при котором можно говорить о моделировании турбулентности. В данной главе мы не будем анализировать, является ли течение достаточно «турбулентным», а предположим, что оно заведомо турбулентное и произведем осреднение решения по времени. По этим средним полям скорости будем вычислять характеристики для сравнительного анализа.

Экспериментальные данные измерения характеристик течения за обратным уступом в достаточно полном объеме впервые были представлены в работе [55]. В этой работе изучалась зависимость характерных размеров областей рециркуляции от числа Рейнольдса в диапазоне от 100 до 3500. Помимо всего, были представлены профили осредненной скорости в различных сечениях канала. Позднее в многочисленных работах (см. [56, 57]), посвященных численным методам, проводилось сравнение результатов расчета с вышеуказанной работой.

В работе [58]<sup>2</sup> были представлены экспериментальные данные по измерению параметров турбулентного течения при числе Рейнольдса 5000. В данном эксперименте изучалось влияние градиента давления на длину присоединения потока.

---

<sup>2</sup> Далее сокращенно будем писать как D&S

В работе [59]<sup>3</sup> представлены экспериментальные данные трехмерного турбулентного течения. На основе данного эксперимента было верифицировано большое количество моделей турбулентности (см. [60, 61]).

Во всех вышеуказанных экспериментах присутствует такой параметр как длина присоединения потока. Опыты показывают высокую чувствительность длины присоединения от множества параметров, где основным является число Рейнольдса. На следующем графике (см.рис. 3.4), взятом из статьи [55], представлены зависимости длины присоединения потока от числа Рейнольдса.

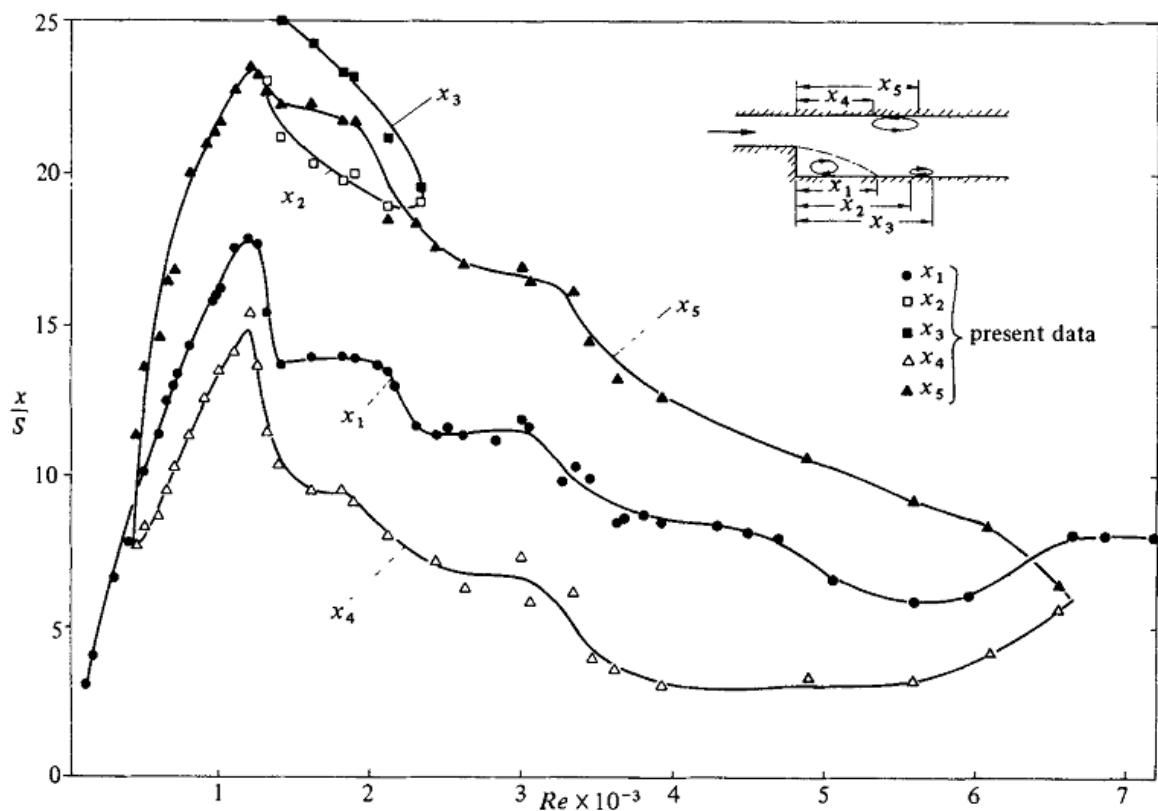


FIGURE 4. Location of detachment and reattachment of the flow at the centre of the test section; variation of locations with Reynolds number.

Рис.3.4. Графики зависимости длин отсоединения и присоединения потока от числа Рейнольдса вдоль центральной линии.

Как видно из графика (данные обозначены жирными кружками) длина присоединения линейно растет в ламинарной области и падает в

<sup>3</sup> Сокращенно J&D

промежуточной области, выходя на постоянное значение при развитой турбулентности.

На другом графике (из работы D&S [58]) изображена зависимость длины присоединения от угла отклонения верхней стенки:

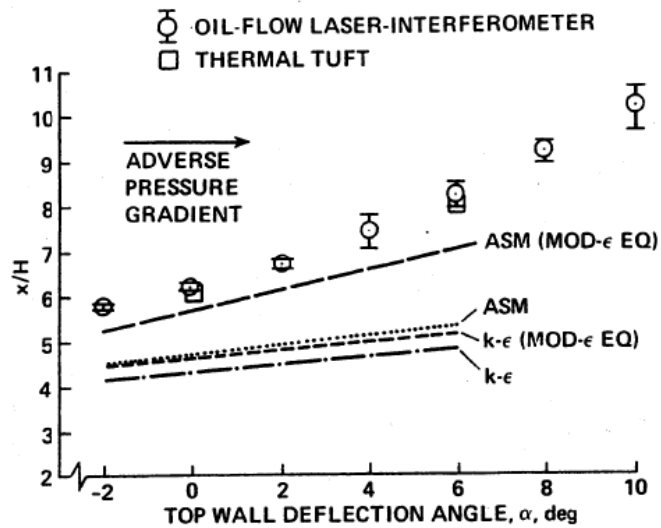


Fig. 2 Reattachment location vs top-wall deflection angle.

Рис.3.5. График зависимости длины присоединения от угла наклона верхней стенки.

Из эксперимента следует, что с увеличением градиента давления увеличивается значение длины присоединения.

В приведенной ниже таблице (из работы J&D [59]) представлены значения основных параметров течения при различных числах Рейнольдса:

Таблица № 3.1. Результаты эксперимента J&D.

Table 1. Summary of flow parameters

No.	$Re_h$	$\delta/h$	$Re_\theta$	$U_0$ (m/s)	$h$ (mm)	$E_r$	$x_r/h$
1	5000	1.20	600	7.70	9.65	1.20	6.00
2	6800	2.00	1650	6.00	17.0	1.09	5.35
3	10400	1.27	1650	6.00	26.0	1.14	6.35
4	25500	1.20	3600	14.60	26.0	1.14	6.90
5	25500	0.82	2400	10.00	38.0	1.20	6.70
6	37200	0.82	3600	14.60	38.0	1.20	6.84
D&S	37500	1.50	5000	44.20	12.7	1.11	6.26

Как мы видим при увеличении числа Рейнольдса длина присоединения  $x_r$  слабо изменяется, оставаясь примерно равной шести высотам ступеньки  $h$ .

Ниже представлена схема экспериментальной установки [62], течения за обратным уступом:

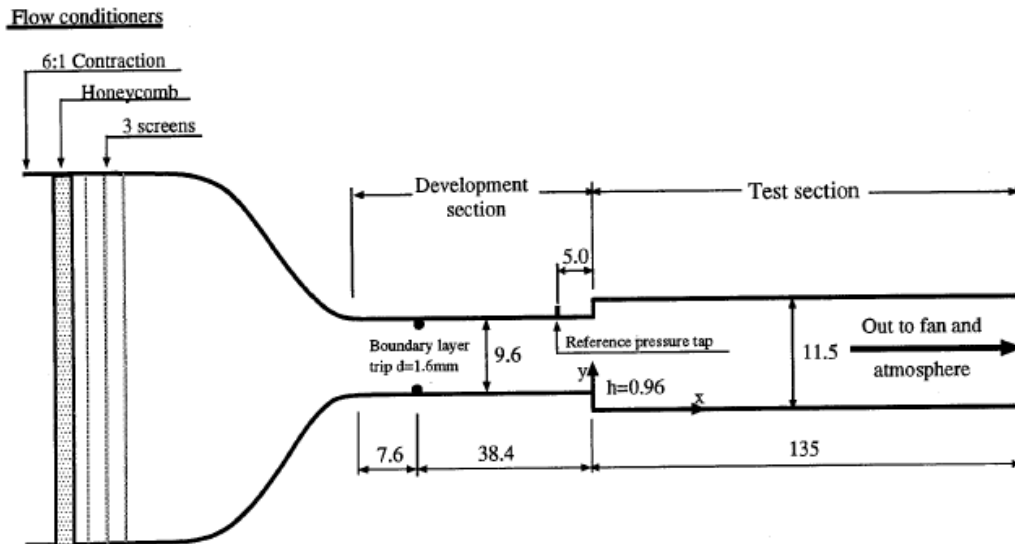


Figure 1. Wind tunnel schematic (all dimensions are in centimeters; drawing is not to scale).

Рис.3.6. Размеры экспериментальной установки эксперимента J&D.

Измеренные параметры течения из эксперимента выглядят как:

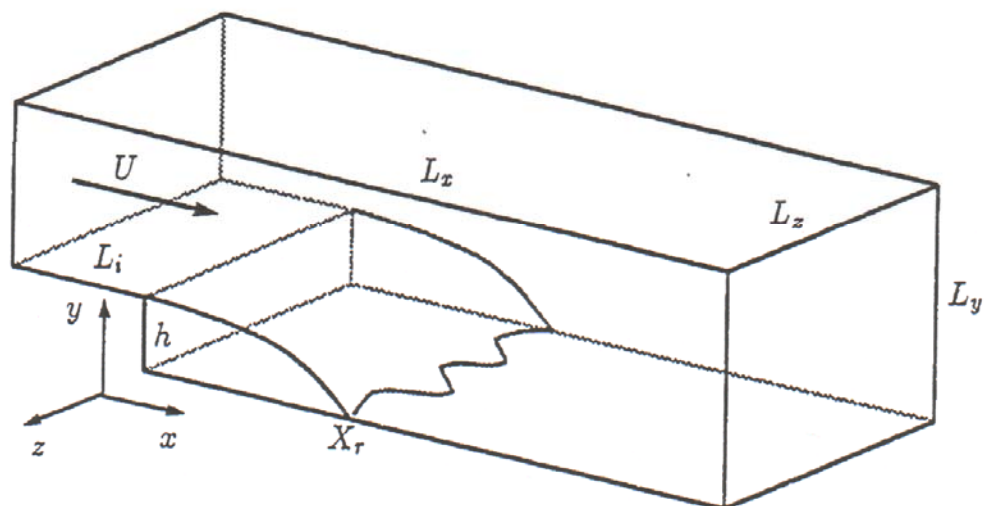
$$U_0=7.72\text{m/s} \quad h=0.98\text{cm} \quad Re_h= 5000 \quad x_r/h= 6.0$$

### Постановка задачи

Из анализа литературы по экспериментальным данным следует, что одним из важных параметров при моделировании турбулентного течения за обратным уступом является длина присоединения потока  $X_r$ . Данная величина согласно нескольким источникам должна лежать в небольшом интервале от длины, равной шести высотам ступеньки или  $\frac{X_r}{H} \approx 6$ . Поэтому для верификации, предложенной в этой главе схемы (обобщение схемы

КАБАРЕ в 3D) мы рассмотрим задачу обтекания обратного уступа при заданном значении числа Рейнольдса  $Re_h=5000$ . Для заданного режима течения необходимо вычислить отношение длины присоединения к высоте ступеньки  $X_r/H$ .

$$Re_h = U_0 h / \nu$$



*Рис.3.7. Вид расчетной области.*

Размеры расчетной области зададим как:

*Таблица 3.2. Размеры расчетной области.*

H	$L_{in}$	$L_x$	$L_y$	$L_z$
1	10	20	2	2

## Результаты расчета

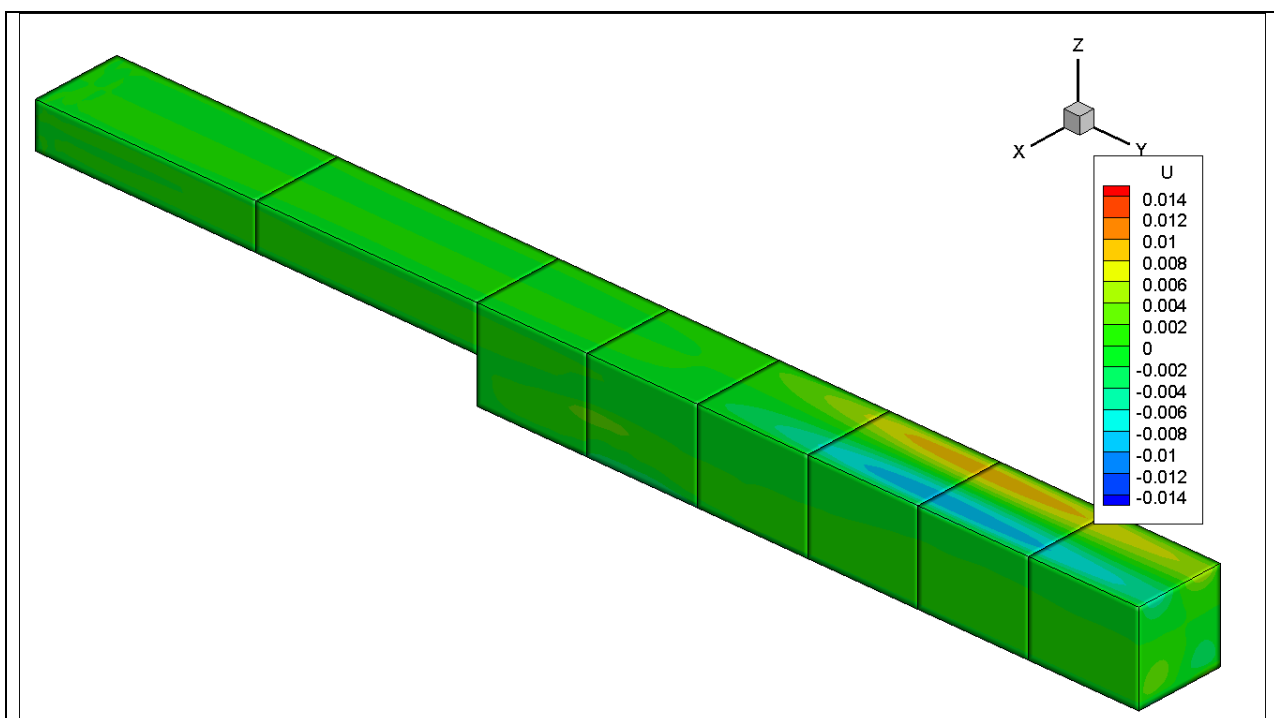


Рис.3.8а. Распределение  $x$ -компоненты скорости.

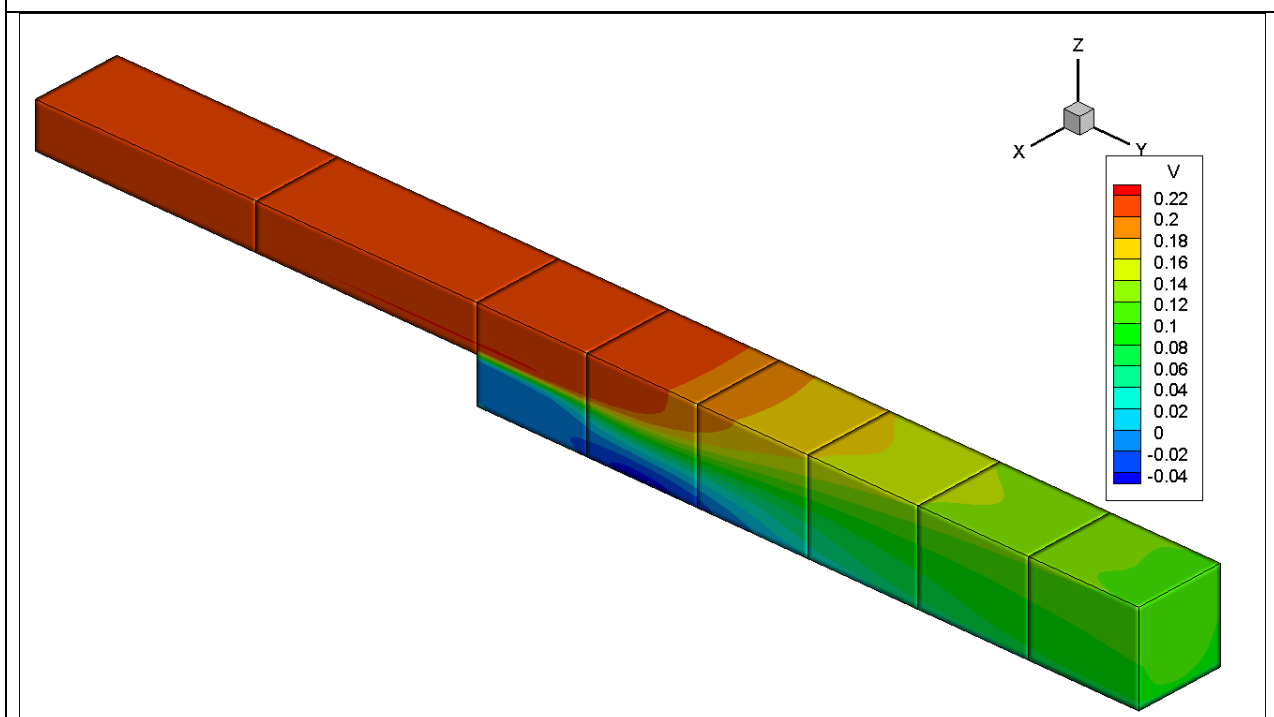


Рис.3.8б. Распределение  $y$ -компоненты скорости.

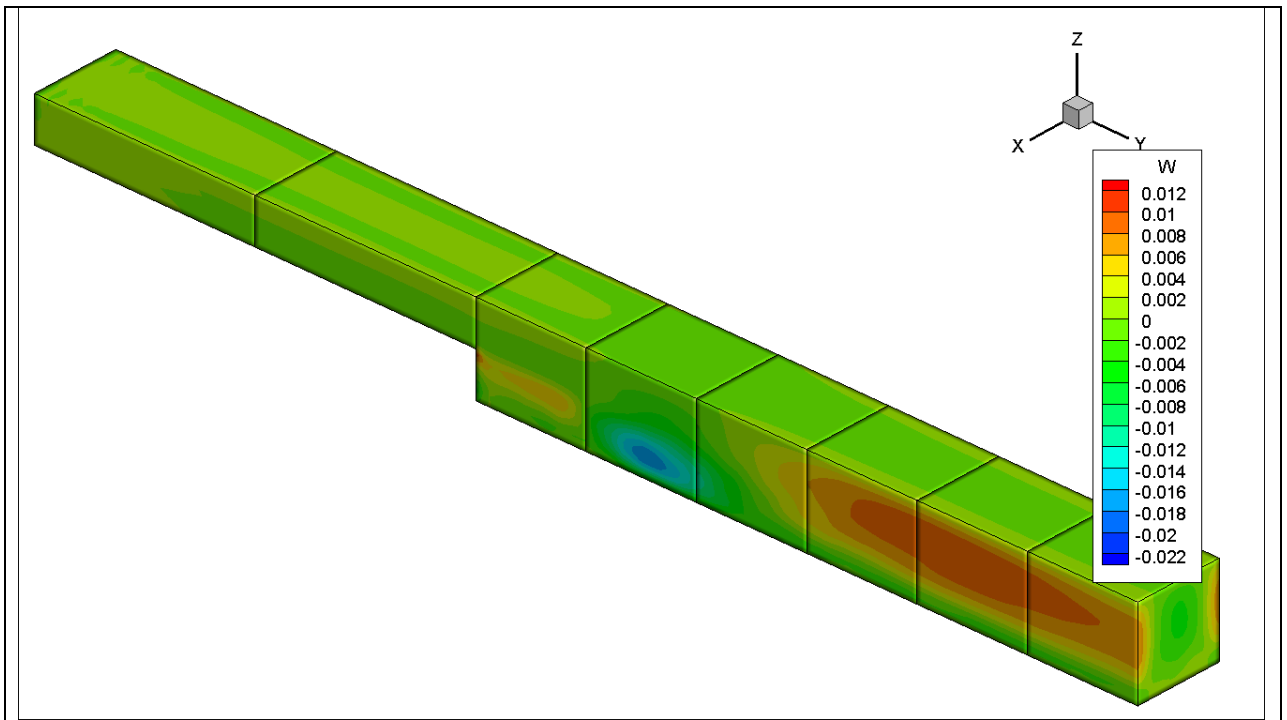


Рис.3.8в. Распределение z-компоненты скорости.

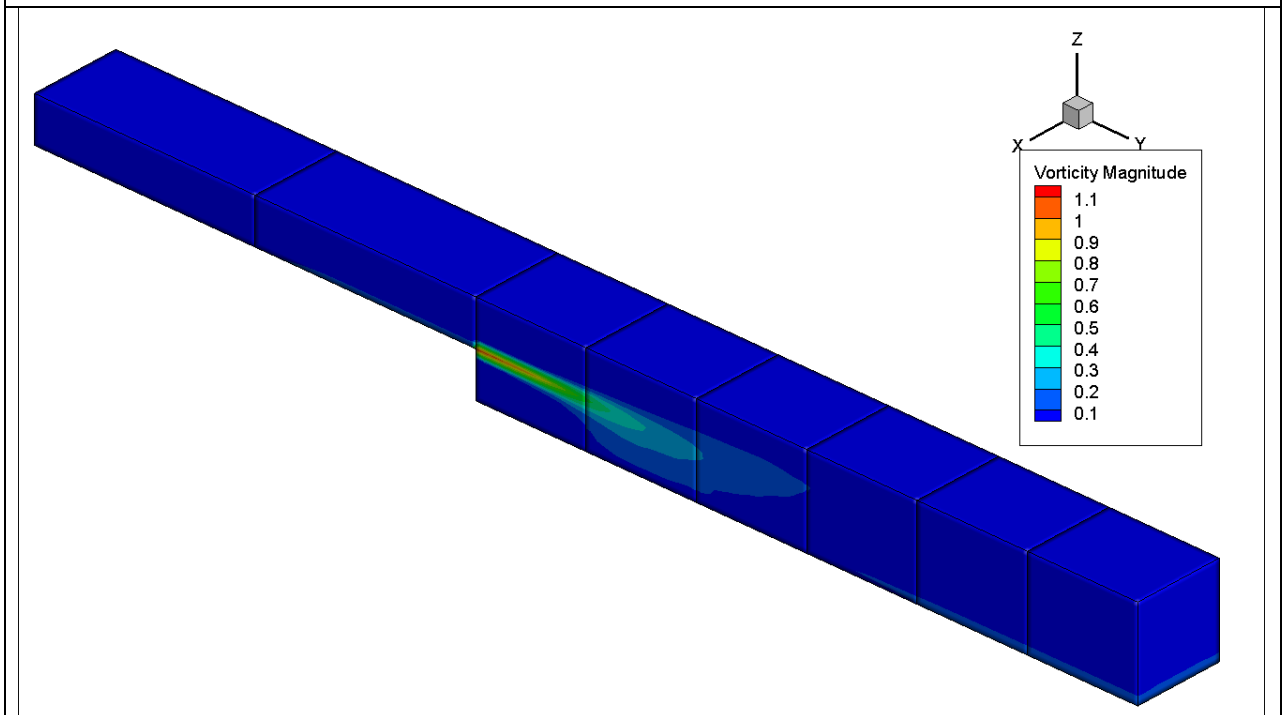
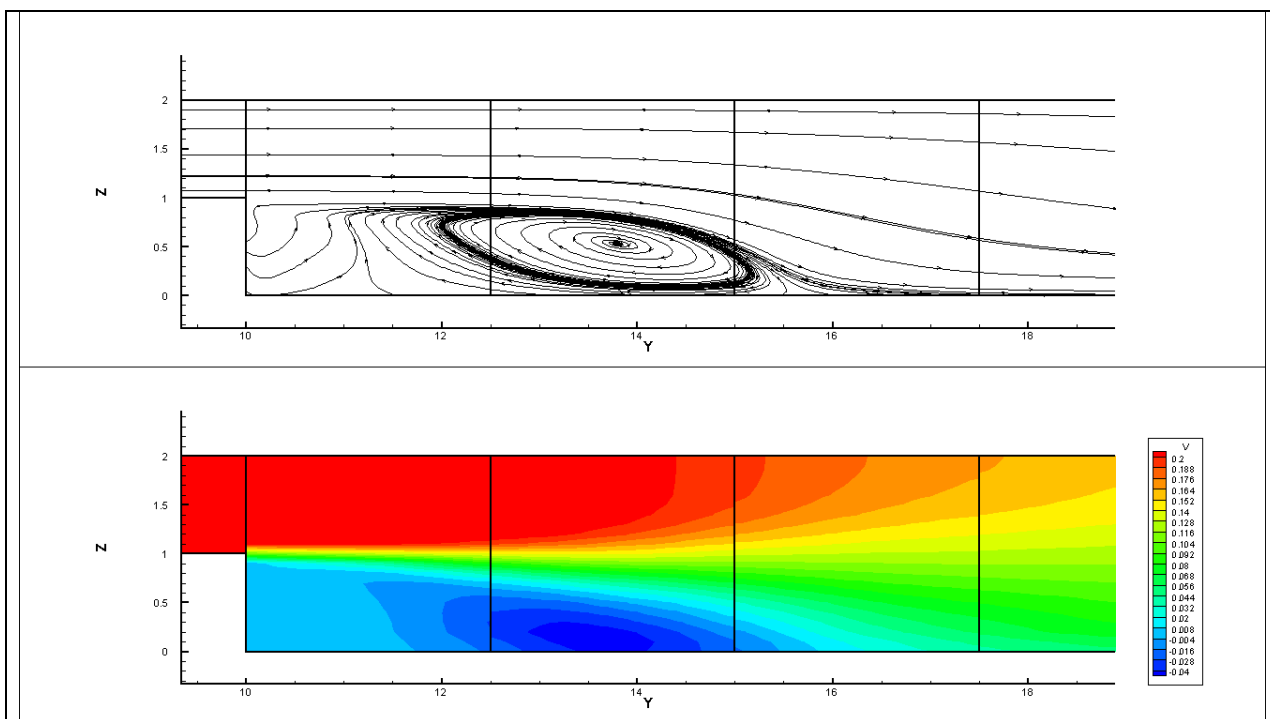


Рис.3.8г. Распределение модуля ротора скорости(завихренность).



*Рис.3.9. Измерение длины присоединения потока путем построения линий тока на сечении  $x=1$  (плоскость симметрии области).*

### ***Заключение к Главе 3***

На основе одномерной разностной схемы КАБАРЕ для уравнения газовой динамики, получено обобщение на случай трехмерного течения идеального газа на ортогональной структурированной сетке. Новый алгоритм реализован на компактном шаблоне, внутри одной пространственно-временной ячейки. Обобщение схемы КАБАРЕ имеет формально второй порядок точности по пространственным и временному шагам. В отличие от большинства схем второго порядка точности обобщение схемы КАБАРЕ имеет в 4 раза большее количество переменных: консервативные (в центрах ячеек) и три типа потоковых переменных (в центрах граней ячейки). Компактность вычислительного шаблона позволяет без особых усилий распараллелить новый алгоритм путем пространственной декомпозиции.

Схема была верифицирована на примере задачи обтекания обратного уступа. Для течения с числом Рейнольдса 5000 (турбулентное течение) была



получена оценка длины присоединения потока, которая оказалась в хорошем согласии с экспериментальными данными.

## **Глава 4. Схема КАБАРЕ в трехмерной области на произвольной сетке с гексагональными ячейками.**

В данной главе рассматривается трехмерная модель идеального газа на произвольной расчетной сетке с гексагональными ячейками. Особенностью вычислений является переход в криволинейные координаты, с дальнейшим решением полученной системы уравнений на инварианты относительно новых значений потоковых переменных. Схема КАБАРЕ состоит из трех этапов: первый этап – это вычисления консервативных переменных на временном полуслое из интегральных дивергентных уравнений, второй этап заключается в решении характеристических уравнений, третий этап выдает в качестве результата значения консервативных переменных на новом временном слое. Следует заметить, что интегральные уравнения составляются в самой ячейке, не используя дополнительной информации из окружения (компактность шаблона вычислений). Серьезным допущением в данной реализации метода является предположение о изэнтропичности газа в объеме ячейки, которое нам позволяет записать инварианты Римана в явном виде.

Во второй части главы будет рассмотрен тензор вязкости. Будет предложена разностная схема для расчета вязких членов в уравнениях сохранения импульса и энергии.

Целью является разработка и тестирование схемы на гексагональной ячейке, что позволит решать газодинамические задачи в более сложных геометрических областях. Введение тензора вязкости расширяет класс задач решаемых данной методикой, позволяя при этом оценивать точность схемы Кабаре на тестовых примерах.

## Разностная схема

Нестационарная система уравнений Эйлера газовой динамики (см.[43], 147-149 с.), описывающая трехмерные течения идеального газа, имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v} + p \hat{I}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}[(\rho E + p) \vec{v}] &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

где  $\rho = \rho(t, x, y, z)$  – плотность,  $t$  – время,  $(x, y, z)$  – декартовы координаты в пространстве,  $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z) = [u, v, w]^T$  – скорость,  $\hat{I} = \operatorname{diag}(1, 1, 1)$  – единичный тензор размерности  $3 \times 3$ ,  $E = \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$  – удельная полная энергия,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $p = p(\rho, \varepsilon)$  – давление.

Соотношение между  $p$ ,  $\rho$  и  $\varepsilon$ , в форме  $p = p(\rho, \varepsilon)$  называется уравнением состояния. В частности, УРС идеального совершенного газа имеет вид:

$$p = \rho(\gamma - 1)\varepsilon\tag{4.2}$$

Далее нам понадобится интегральная форма уравнений (4.1), которую можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \iiint_G \rho dG \right) + \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \iiint_G \rho \vec{v} dG \right) + \oint_S (\rho \vec{v} \vec{v} + p \hat{I}) \cdot d\vec{S} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left( \iiint_G \rho E dG \right) + \oint_S (\rho E + p) \vec{v} \cdot d\vec{S} &= 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Здесь  $G$  – это конечная область в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$ ,  $dG = dx \cdot dy \cdot dz$  – элемент объема,  $S$  – поверхность ограничивающая область  $G$ ,  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$  – ориентированный элемент поверхности  $S$ , где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к  $S$ , а  $dS$  – элемент площади.

Данная схема будет реализована на гексагональных ячейках, где в центре масс ячеек будут находиться консервативные переменные, а в центрах граней ячейки – потоковые (см.рис.4.1.):

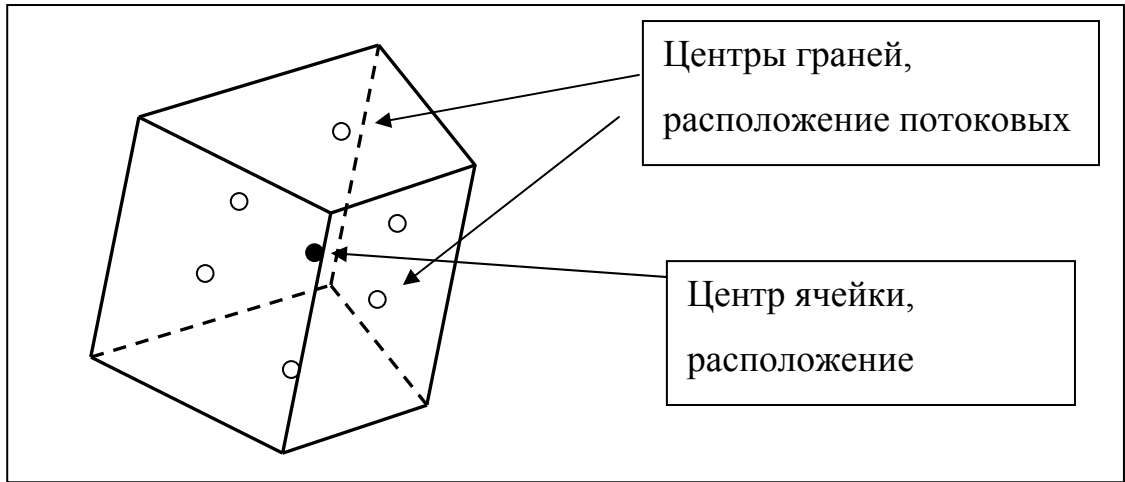


Рис.4.1. Гексагональная ячейка.

Первый этап схемы Кабаре будет заключаться в вычислении промежуточных значений консервативных величин  $(\rho, u, v, w, E)^{n+1/2}$ . Для построения схемы применим к уравнениям (4.3) интегро-интерполяционный метод (см. [42]). Для этого покроем всю вычислительную область дискретными гексагональными ячейками  $G_i$ ,  $i=1,2,\dots$ , и гранями с площадями  $S_j$ ,  $j=1,2,3,4,5,6$ . Аппроксимируем интегральные уравнения в каждом из многогранников следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_i \frac{\rho_i^{n+1/2} - \rho_i^n}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 R_j^n (\vec{V}_j^n \cdot \vec{S}_j^n) &= 0, \\
 G_i \frac{(\rho \vec{v})_i^{n+1/2} - (\rho \vec{v})_i^n}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 (R \vec{V})_j^n (\vec{V}_j^n \cdot \vec{S}_j^n) + \sum_{j=1}^6 P_j^n \vec{S}_j^n &= 0, \\
 G_i \frac{(\rho E)_i^{n+1/2} - (\rho E)_i^n}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 (E_j^n + P_j^n) (\vec{V}_j^n \cdot \vec{S}_j^n) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где  $\vec{S}_j = \vec{n}_j S_j$ , а  $\tau$  – шаг по времени. Нижний целый индекс  $i$  в уравнениях (4.4) обозначает величины функций, отнесенные к центру масс  $i$ -го многогранника, а нижний целый индекс  $j$  обозначает величины функций,

отнесенные к центру  $j$ -й грани дискретной ячейки. Верхний индекс  $n$  обозначает номер шага по времени. Соответствующие большие буквы в формулах обозначают плотность  $R$ , скорость  $\vec{V}$ , давление  $P$  и полную энергию  $E$  на гранях дискретной сеточной ячейки.

Свойство гиперболичности системы уравнений состоит в том, что в областях гладкости она приводится к т.н. характеристическому виду. Процедура приведения к характеристическому виду изложена ниже:

- раскладываем консервативную форму записи в виде дифференциальных линейных уравнений относительно производных
- переходим в локальную криволинейную систему координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , которая определяется для каждой грани
- составляем матричное уравнение относительно вектора  $\vec{\varphi} = (\rho, u, v, w, P)^T$ , оно примет вид: 
$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \alpha} + \mathbf{B} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \beta} + \mathbf{C} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \gamma} = 0$$
- находим собственные значения и независимые левые собственные вектора к матрице  $\mathbf{A}$
- составляем матрицу  $\Omega$  из левых собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$
- преобразовываем матричное уравнение, умножив слева на матрицу  $\Omega$ .

Линеаризованная система уравнений Эйлера имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} + \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Перейдем в локальную систему координат, для этого потребуем, чтобы якобиан преобразования был отличен от нуля  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \neq 0$ . Тогда производные по координатам  $x, y, z$  преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial(f, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(f, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{J} \frac{\partial(f, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \\
\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(\beta, \gamma)} \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \gamma)} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)} \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Покажем, что величины  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(\beta, \gamma)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \gamma)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)}$  это  $x$ -компоненты векторов нормалей к локальным плоскостям  $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$  умноженные на соответствующую площадь сечения объема элемента.

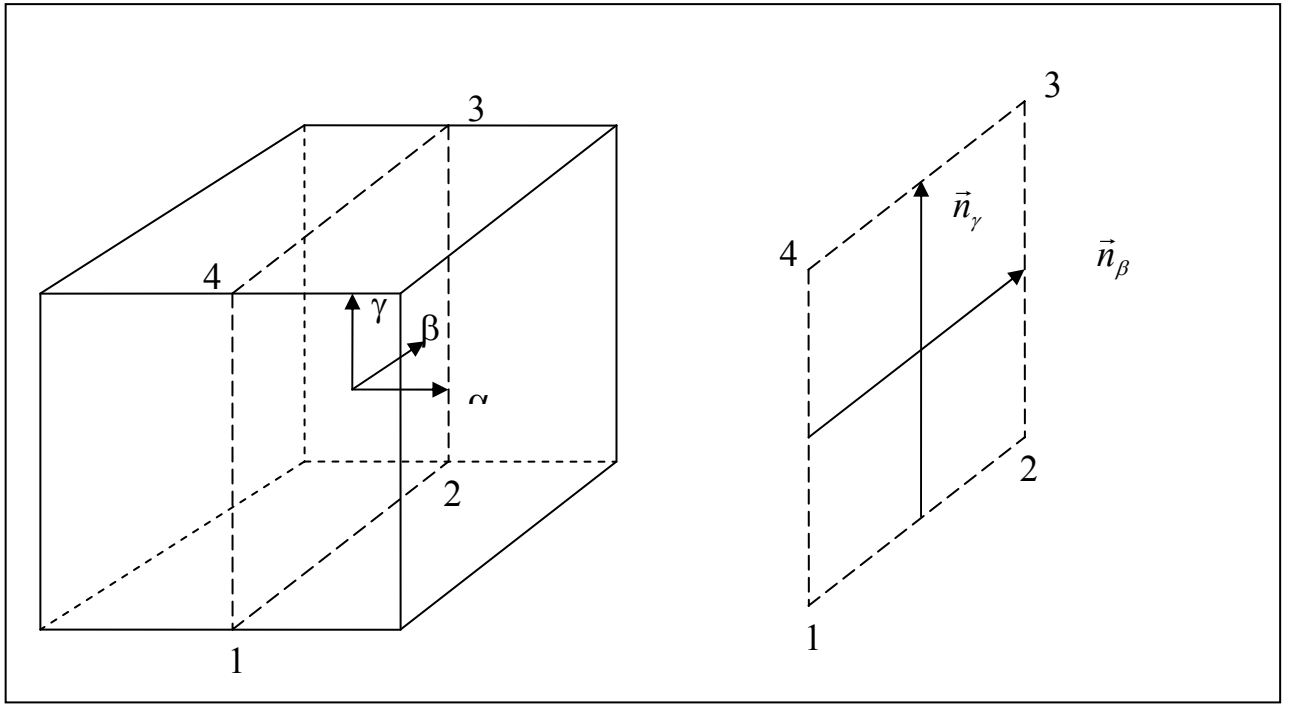


Рис.4.2.  $x$ -компонента вектора нормали к плоскости умноженная на площадь сечения.

Выражение  $\frac{\partial(y,z)}{\partial(\beta,\gamma)}$  может быть аппроксимировано на шаблоне,

нарисованном на рис.2 справа:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\beta,\gamma)} = \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial z}{\partial \gamma} - \frac{\partial y}{\partial \gamma} \frac{\partial z}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\beta,\gamma)} = \left( \frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{y_1 + y_4}{2} \right) \left( \frac{z_3 + z_4}{2} - \frac{z_1 + z_2}{2} \right) - \left( \frac{y_3 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \left( \frac{z_2 + z_3}{2} - \frac{z_1 + z_4}{2} \right),$$

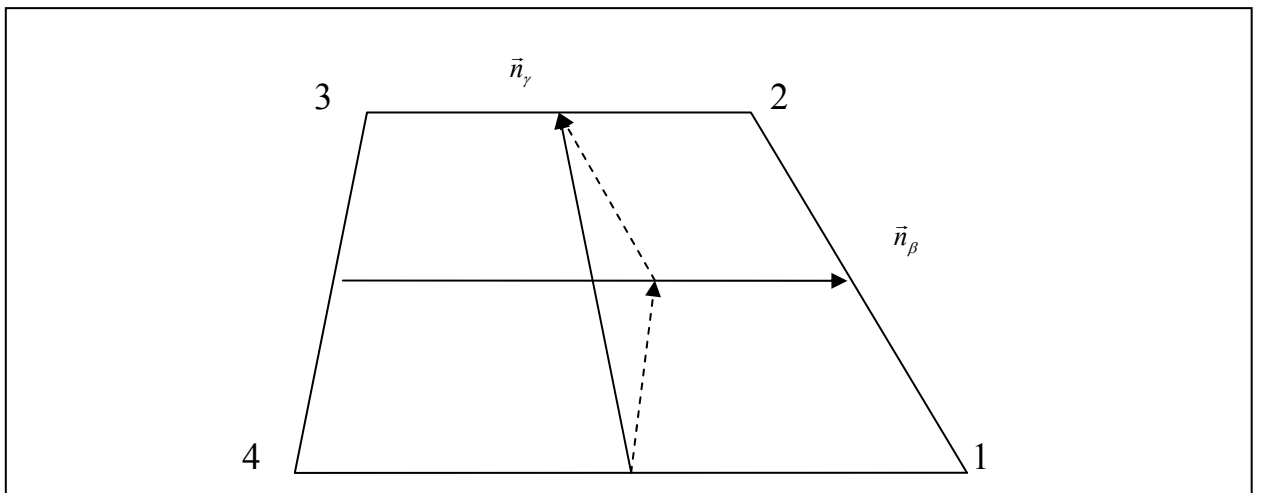
данное выражение может быть написано через компоненты векторов  $\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma$ :

$$n_\beta^x = \left( \frac{x_2 + x_3}{2} - \frac{x_1 + x_4}{2} \right), n_\beta^y = \left( \frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{y_1 + y_4}{2} \right), n_\beta^z = \left( \frac{z_2 + z_3}{2} - \frac{z_1 + z_4}{2} \right),$$

$$n_\gamma^x = \left( \frac{x_3 + x_4}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), n_\gamma^y = \left( \frac{y_3 + y_4}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2} \right), n_\gamma^z = \left( \frac{z_3 + z_4}{2} - \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\beta,\gamma)} = n_\beta^y n_\gamma^z - n_\gamma^y n_\beta^z = [\vec{n}_\beta \times \vec{n}_\gamma]_x. \quad (4.7)$$

Как видно из тождества (4.7), выражение  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(\beta, \gamma)}$  есть  $x$ -компонента векторного произведения  $[\vec{n}_\beta \times \vec{n}_\gamma]$ . Аналогично получим, что  $-\frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \gamma)} = [\vec{n}_\gamma \times \vec{n}_\alpha]_x$ ,  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)} = [\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta]_x$ . Теперь осталось доказать, что векторное произведение срединных векторов  $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma$  дает вектор длиной, равной площади сечения объема ячейки. Будем предполагать, что сечение ячейки всегда есть четырехугольник и вектора  $\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma$  лежат на одной плоскости. Тогда векторное произведение срединных векторов есть площадь четырехугольника. Ниже приведено доказательство:



*Рис.4.3. Определение площади четырех угольника через векторное произведение срединных векторов.*

Из рисунка 4.3 следует, что срединный вектор  $\vec{n}_\gamma$  составлен из векторов половин боковых ребер (см. пунктирные линии). Аналогично, это справедливо применительно и к  $\vec{n}_\beta$ .

Площадь четырехугольника представим как сумма площадей треугольников, образуемых диагоналями. Тут возможно, два отличных друг от друга выражения:

$$S_{1234} = S_{123} + S_{341} = S_{234} + S_{412}.$$



В свою очередь площадь треугольника можно выразить через векторное произведение его сторон:

$$S_{123} = \frac{1}{2} [\vec{12} \times \vec{23}], S_{341} = \frac{1}{2} [\vec{34} \times \vec{41}],$$

$$S_{234} = \frac{1}{2} [\vec{23} \times \vec{34}], S_{412} = \frac{1}{2} [\vec{41} \times \vec{12}].$$

Выразим площадь четырехугольника через полу сумму площадей представленных двумя различными способами:

$$S_{1234} = \frac{1}{2} (S_{123} + S_{341} + S_{234} + S_{412}),$$

$$\begin{aligned} S_{1234} &= \frac{1}{4} ([\vec{12} \times \vec{23}] + [\vec{34} \times \vec{41}] + [\vec{23} \times \vec{34}] + [\vec{41} \times \vec{12}]) = \\ &= \frac{1}{4} ([(\vec{12} - \vec{34}) \times \vec{23}] + [(\vec{34} - \vec{12}) \times \vec{41}]) = \\ &= \frac{1}{4} [(\vec{12} - \vec{34}) \times (\vec{23} - \vec{41})] = \frac{1}{4} [(\vec{12} + \vec{43}) \times (\vec{23} + \vec{14})], \\ S_{1234} &= \left[ \frac{(\vec{12} + \vec{43})}{2} \times \frac{(\vec{23} + \vec{14})}{2} \right] = [\vec{n}_\beta \times \vec{n}_\gamma]. \end{aligned}$$

Из вышеуказанных выкладок следует, что площадь четырехугольника есть произведение срединных векторов. Что и требовалось доказать.

Итак, мы показали, что производная функции  $f$  по координате  $x$  может быть представлена следующим виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( S_\alpha^x \frac{\partial f}{\partial \alpha} + S_\beta^x \frac{\partial f}{\partial \beta} + S_\gamma^x \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right), \quad (4.8)$$

$$S_\alpha^x \equiv \frac{\partial(y, z)}{\partial(\beta, \gamma)} = [\vec{n}_\beta \times \vec{n}_\gamma]_x, S_\beta^x \equiv -\frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \gamma)} = [\vec{n}_\gamma \times \vec{n}_\alpha]_x, S_\gamma^x \equiv \frac{\partial(y, z)}{\partial(\alpha, \beta)} = [\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta]_x$$

Аналогично получаем выражения для производных по остальным локальным координатам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left( S_\alpha^y \frac{\partial f}{\partial \alpha} + S_\beta^y \frac{\partial f}{\partial \beta} + S_\gamma^y \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{J} \left( S_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial \alpha} + S_\beta^z \frac{\partial f}{\partial \beta} + S_\gamma^z \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Теперь имея перед собой выражения для производных через локальные координаты, мы запишем систему (4.5) в матричном виде:

$$J \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \alpha} + \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \beta} + \mathbf{C} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\vec{v}\vec{S}_\alpha) & \rho S_\alpha^x & \rho S_\alpha^y & \rho S_\alpha^z & 0 \\ 0 & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) & 0 & 0 & S_\alpha^x / \rho \\ 0 & 0 & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) & 0 & S_\alpha^y / \rho \\ 0 & 0 & 0 & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) & S_\alpha^z / \rho \\ 0 & \rho c^2 S_\alpha^x & \rho c^2 S_\alpha^y & \rho c^2 S_\alpha^z & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) \end{pmatrix}$$

где  $(\vec{v}\vec{S}_\alpha) = uS_\alpha^x + vS_\alpha^y + wS_\alpha^z$ .

Далее для матрицы  $\mathbf{A}$  составим характеристическое уравнение и определим собственные значения:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} (\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda & \rho S_\alpha^x & \rho S_\alpha^y & \rho S_\alpha^z & 0 \\ 0 & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda & 0 & 0 & S_\alpha^x / \rho \\ 0 & 0 & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda & 0 & S_\alpha^y / \rho \\ 0 & 0 & 0 & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda & S_\alpha^z / \rho \\ 0 & \rho c^2 S_\alpha^x & \rho c^2 S_\alpha^y & \rho c^2 S_\alpha^z & (\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$((\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda)^2 \cdot \left\{ ((\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda)^3 - c^2 ((\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda) \cdot ((S_\alpha^y)^2 + (S_\alpha^z)^2) - c^2 ((\vec{v}\vec{S}_\alpha) - \lambda) (S_\alpha^x)^2 \right\} = 0.$$

Из последнего уравнения получим три различных корня:

$$\begin{cases} \lambda_1 = (\vec{v}\vec{S}_\alpha) = uS_\alpha^x + vS_\alpha^y + wS_\alpha^z, \\ \lambda_2 = \sqrt{(S_\alpha^x)^2 + (S_\alpha^y)^2 + (S_\alpha^z)^2} ((\vec{v}\vec{n}_\alpha) + c), \\ \lambda_3 = \sqrt{(S_\alpha^x)^2 + (S_\alpha^y)^2 + (S_\alpha^z)^2} ((\vec{v}\vec{n}_\alpha) - c), \end{cases}\tag{4.10}$$

где вектор  $\vec{n}_\alpha$  есть нормированный вектор  $\vec{S}_\alpha$ .

Теперь составим уравнения для поиска левых собственных векторов соответствующим данным корням:

$$\lambda = \lambda_1$$

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5) \begin{pmatrix} 0 & \rho S_\alpha^x & \rho S_\alpha^y & \rho S_\alpha^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_\alpha^x / \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_\alpha^y / \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_\alpha^z / \rho \\ 0 & \rho c^2 S_\alpha^x & \rho c^2 S_\alpha^y & \rho c^2 S_\alpha^z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + c^2 a_5 = 0, a_2 S_\alpha^x + a_3 S_\alpha^y + a_4 S_\alpha^z = 0.$$

Из последних уравнений необходимо получить три независимых вектора. Первый вектор очевиден, это вектор  $(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1/c^2)$ . Как видно из последнего равенства трехмерный вектор  $(a_2 \ a_3 \ a_4)$  ортогонален к вектору нормали  $\vec{S}_\alpha$ . Поэтому нас устроят любые два вектора  $(a_2 \ a_3 \ a_4)$ , которые будут ортогональны и к норме  $\vec{n}_\alpha$ . В качестве таковых возьмем вектор произведения норм  $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$  и вектор двойного векторного произведения  $(\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta) \times \vec{n}_\alpha$ .

$$\lambda = \lambda_2$$

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5) \begin{pmatrix} -c S_\alpha^2 & \rho S_\alpha^x & \rho S_\alpha^y & \rho S_\alpha^z & 0 \\ 0 & -c S_\alpha^2 & 0 & 0 & S_\alpha^x / \rho \\ 0 & 0 & -c S_\alpha^2 & 0 & S_\alpha^y / \rho \\ 0 & 0 & 0 & -c S_\alpha^2 & S_\alpha^z / \rho \\ 0 & \rho c^2 S_\alpha^x & \rho c^2 S_\alpha^y & \rho c^2 S_\alpha^z & -c S_\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 0, a_2 = \rho c^2 S_\alpha^x / S_\alpha^2 a_5, a_3 = \rho c^2 S_\alpha^y / S_\alpha^2 a_5, a_4 = \rho c^2 S_\alpha^z / S_\alpha^2 a_5.$$

Пусть компонента левого собственного вектора  $a_5 = S_\alpha^2 / \rho c$ . Тогда остальные компоненты вектора примут значения  $a_2 = S_\alpha^x, a_3 = S_\alpha^y, a_4 = S_\alpha^z$ .

$$\lambda = \lambda_3$$

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5) \begin{pmatrix} cS_\alpha^2 & \rho S_\alpha^x & \rho S_\alpha^y & \rho S_\alpha^z & 0 \\ 0 & cS_\alpha^2 & 0 & 0 & S_\alpha^x / \rho \\ 0 & 0 & cS_\alpha^2 & 0 & S_\alpha^y / \rho \\ 0 & 0 & 0 & cS_\alpha^2 & S_\alpha^z / \rho \\ 0 & \rho c^2 S_\alpha^x & \rho c^2 S_\alpha^y & \rho c^2 S_\alpha^z & cS_\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 0, a_2 = -\rho c^2 S_\alpha^x / S_\alpha^2 a_5, a_3 = -\rho c^2 S_\alpha^y / S_\alpha^2 a_5, a_4 = -\rho c^2 S_\alpha^z / S_\alpha^2 a_5.$$

Пусть компонента левого собственного вектора  $a_5 = -1/\rho c$ . Тогда остальные компоненты вектора примут значения  $a_2 = n_\alpha^x, a_3 = n_\alpha^y, a_4 = n_\alpha^z$ .

Итак, мы получили пять левых собственных векторов к матрице  $\mathbf{A}$ , составим из них матрицу  $\mathbf{\Omega}_A$ :

$$\mathbf{\Omega}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & n_1^x & n_1^y & n_1^z & 0 \\ 0 & n_2^x & n_2^y & n_2^z & 0 \\ 0 & n_\alpha^x & n_\alpha^y & n_\alpha^z & 1/\rho c \\ 0 & n_\alpha^x & n_\alpha^y & n_\alpha^z & -1/\rho c \end{pmatrix}.$$

Теперь умножим матричное уравнение на матрицу  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} \left( \mathbf{J} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \alpha} + \mathbf{B} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \beta} + \mathbf{C} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \gamma} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{J} \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \mathbf{A} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \alpha} &= -\mathbf{\Omega} \left( \mathbf{B} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \beta} + \mathbf{C} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \gamma} \right) \\ \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{J} \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \mathbf{A} \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \alpha} = \vec{f}, \\ \vec{f} = -\mathbf{\Omega} \left( \mathbf{B} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \beta} + \mathbf{C} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \gamma} \right), \end{cases} \\ \Rightarrow \mathbf{J} \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mathbf{\Omega} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \alpha} &= \vec{f}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения мы получим пять уравнений на инварианты:

$$\left\{ \begin{array}{l}
J \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \lambda_1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right) = f_1, \\
J \left( n_1^x \frac{\partial u}{\partial t} + n_1^y \frac{\partial v}{\partial t} + n_1^z \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \lambda_1 \left( n_1^x \frac{\partial u}{\partial \alpha} + n_1^y \frac{\partial v}{\partial \alpha} + n_1^z \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = f_2, \\
J \left( n_2^x \frac{\partial u}{\partial t} + n_2^y \frac{\partial v}{\partial t} + n_2^z \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \lambda_1 \left( n_2^x \frac{\partial u}{\partial \alpha} + n_2^y \frac{\partial v}{\partial \alpha} + n_2^z \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = f_3, \\
J \left\{ \left( n_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial t} + n_\alpha^y \frac{\partial v}{\partial t} + n_\alpha^z \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} \right\} + \lambda_2 \left\{ \left( n_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial \alpha} + n_\alpha^y \frac{\partial v}{\partial \alpha} + n_\alpha^z \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right\} = f_4, \\
J \left\{ \left( n_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial t} + n_\alpha^y \frac{\partial v}{\partial t} + n_\alpha^z \frac{\partial w}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} \right\} + \lambda_3 \left\{ \left( n_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial \alpha} + n_\alpha^y \frac{\partial v}{\partial \alpha} + n_\alpha^z \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right\} = f_5.
\end{array} \right.$$

(4.11)

Как видно из уравнений (4.11), в скобках стоят функции, первообразные которых и есть инварианты Римана. Ниже приведены инварианты для двух моделей газа.

### Идеальный газ

Уравнение состояния  $P = \rho(\gamma - 1)\varepsilon$ , скорость звука определяется, как  $c = \sqrt{\gamma P / \rho} = \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon}$ . Первый инвариант вычислим из следующих преобразований:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\rho}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\rho}{\gamma} \left( \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right),$$

аналогично производной по времени находим выражение и для производной по локальной координате  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right).$$

Следовательно, характеристическое уравнение примет вид:

$$J \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = \tilde{f}_1,$$

откуда следует, что выражение  $S = \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right)$  и есть искомый инвариант Римана.

Второй инвариант, также очевиден это выражение  $V = (n_1^x u + n_1^y v + n_1^z w)$  или скалярное произведение скорости на единичный вектор  $(\vec{n}_1, \vec{v})$ . Третий инвариант равен  $W = (\vec{n}_2, \vec{v}) = (n_2^x u + n_2^y v + n_2^z w)$ . Четвертый инвариант требует некоторых преобразований:

$$\left( n_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial t} + n_\alpha^y \frac{\partial v}{\partial t} + n_\alpha^z \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) + \frac{1}{\sqrt{\rho \gamma P}} \frac{\partial P}{\partial t}.$$

В дальнейшем, будем предполагать, что газ изоэнтропический. Данное обстоятельство может быть выражено следующим образом:

$$S = \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = const$$

Значит, если в начальный момент газ имел давление в некоторой точке  $P_0$  и плотность  $\rho_0$ , то в следующий момент энтропия в этой точке останется постоянной:

$$\begin{aligned} S &= \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = \ln\left(\frac{P_0}{\rho_0^\gamma}\right), \\ \Rightarrow \rho &= \rho_0 (P / P_0)^{1/\gamma}, \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\gamma \rho P}} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma \rho_0 (P / P_0)^{1/\gamma} P}} \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned}$$

Данное выражение примет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma \rho P}} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P^{-(\gamma+1)/2\gamma}}{\sqrt{\gamma \rho_0 P_0^{1/\gamma}}} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left(\frac{P_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} P^{(\gamma-1)/2\gamma}$$

Откуда следует, что выражение вида  $R = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) + G \cdot P^{(\gamma-1)/2\gamma}$  и будет искомым инвариантом, где  $G = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \right)^{1/2\gamma}$ . Аналогично получим, что для характеристического числа  $\lambda_3$  инвариантом будет выражение  $Q = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) - G \cdot P^{(\gamma-1)/2\gamma}$ .

Таким образом, мы получили пять характеристических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} J \frac{\partial S}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial S}{\partial \alpha} = f_1, S = \ln \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right), \\ J \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha} = f_2, V = (\vec{n}_1, \vec{v}), \\ J \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \alpha} = f_3, W = (\vec{n}_2, \vec{v}), \\ J \frac{\partial R}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial R}{\partial \alpha} = f_4, R = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) + G \cdot P^{(\gamma-1)/2\gamma}, \\ J \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = f_5, Q = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) - G \cdot P^{(\gamma-1)/2\gamma}. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

### Слабосжимаемый газ

Уравнение состояния слабо сжимаемого газа  $P = c^2(\rho - \rho_0)$ , скорость звука константа. В первом уравнении, очевиден инвариант  $\rho - P/c^2$ , который равен константе  $\rho_0$ . Второй и третий инварианты совпадают с инвариантами идеального газа. Четвертый инвариант получим с помощью уравнения состояния:

$$\begin{aligned} & \left( n_\alpha^x \frac{\partial u}{\partial t} + n_\alpha^y \frac{\partial v}{\partial t} + n_\alpha^z \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial c^2(\rho - \rho_0)}{\partial t} = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha^x u + n_\alpha^y v + n_\alpha^z w) + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \{ (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) + c \ln \rho \}. \end{aligned}$$

Итак, мы видим, что выражение  $R = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) + c \ln \rho$  играет роль инварианта. Аналогично получим и пятый инвариант  $Q = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) - c \ln \rho$ . Заметим, что первые три инварианта отвечают собственному числу  $\lambda_1$ , а четвертый и пятый – числам  $\lambda_2, \lambda_3$ . Перепишем характеристические уравнения через новые обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} J \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha} = f_2, V = (\vec{n}_1, \vec{v}), \\ J \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \alpha} = f_3, W = (\vec{n}_2, \vec{v}), \\ J \frac{\partial R}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial R}{\partial \alpha} = f_4, R = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) + c \ln \rho, \\ J \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = f_5, Q = (\vec{n}_\alpha, \vec{v}) - c \ln \rho. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Теперь, зная выражения для локальных инвариантов Римана, мы можем приступить к вычислению потоковых величин на новом временном слое. Рассмотрим  $j$ -ую грань из всего множества граней расчетной области, найдем ячейки, прилегающие к данной грани, обозначим их номера как L и R. Возьмем нормаль  $\vec{n}$  к этой грани, для которой ячейка L является задней, а ячейка R - передней. Также определим каким-нибудь способом (см.прил.) два единичных вектора  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ , которые будут составлять вместе с  $\vec{n}_j$  ортонормированный базис. Следовательно, мы теперь можем определить локальные инварианты Римана в каждой из прилегающих ячеек.

Характеристическое число  $\lambda_1$  будем оценивать как полусумму проекций скоростей ячеек  $\frac{(\vec{v}_{LC}^{n+1/2}, \vec{n}) + (\vec{v}_{RC}^{n+1/2}, \vec{n})}{2}$  на вектор нормали. Если это число будет отрицательным  $\lambda_1 < 0$ , то инварианты S, V, W, отвечающие данному числу будем определять из задней ячейки L. Иначе  $\lambda_1 \geq 0$  локальные инварианты S, V, W будут найдены из передней ячейки R.



Характеристические числа  $\lambda_2, \lambda_3$  для дозвуковых скоростей всегда будут определенного знака, в этом обстоятельстве легко убедиться из следующих неравенств:

$$|(\vec{v}, \vec{n})| \leq |\vec{v}| < c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{v}, \vec{n}) + c > 0 \\ (\vec{v}, \vec{n}) - c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 > 0 \\ \lambda_3 < 0 \end{cases}.$$

Поэтому локальный инвариант R будет определяться из задней ячейки, а инвариант Q из передней. Поскольку на данном этапе вычислений известны значения консервативных переменных с промежуточного уровня, то известны значения локальных инвариантов на промежуточном уровне (в центре ячеек) обозначим их как  $R_{LC}^{n+1/2}, Q_{RC}^{n+1/2}, S_{LC}^{n+1/2}, S_{RC}^{n+1/2}, V_{LC}^{n+1/2}, V_{RC}^{n+1/2}, W_{LC}^{n+1/2}, W_{RC}^{n+1/2}$ . Также знаем значения инвариантов на текущем временном слое  $R_L^n, Q_R^n, S_L^n, S_R^n, V_L^n, V_R^n, W_L^n, W_R^n$ . Расположение значений инвариантов представлены на рисунке:

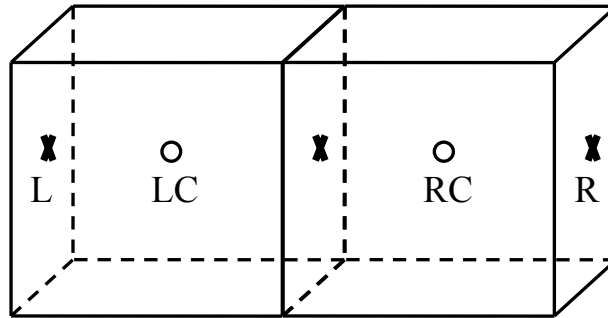


Рисунок 4.4. Расположение инвариантов.

Следовательно, мы можем вычислить значения инвариантов на новом временном слое путем линейной экстраполяции:

$$\begin{aligned}
R^{n+1} &= 2R_{LC}^{n+1/2} - R_L^n, \\
Q^{n+1} &= 2Q_{RC}^{n+1/2} - Q_R^n, \\
S^{n+1} &= \begin{cases} 2S_{LC}^{n+1/2} - S_L^n, \lambda_1 < 0, \\ 2S_{RC}^{n+1/2} - S_R^n, \lambda_1 \geq 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Полученные значения инвариантов необходимо подвергнуть коррекции с учетом правой части в характеристических уравнениях (4.12). Данная процедура коррекции может быть осуществлена таким образом:

$$R^{n+1} = \begin{cases} \tilde{R}^{n+1}, R_{\min} \leq \tilde{R}^{n+1} \leq R_{\max} \\ R_{\min}, \tilde{R}^{n+1} < R_{\min} \\ R_{\max}, \tilde{R}^{n+1} > R_{\max} \end{cases}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
R_{\min} &= \min(R_L^n, R_{LC}^n, R^n) + \tau R_{well}, \\
R_{\max} &= \max(R_L^n, R_{LC}^n, R^n) + \tau R_{well}, \\
R_{well} &= \frac{R_{LC}^{n+1/2} - R_{LC}^n}{\tau / 2} + \frac{\lambda_2}{J} (R^n - R_L^n).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

где  $R_{well}$  - оценка правой части в характеристическом уравнении, волновым знаком отмечены значения инвариантов, полученные после линейной экстраполяции. Аналогично получим алгоритм коррекции и для оставшихся инвариантов:

$$Q^{n+1} = \begin{cases} \tilde{Q}^{n+1}, Q_{\min} \leq \tilde{Q}^{n+1} \leq Q_{\max} \\ Q_{\min}, \tilde{Q}^{n+1} < Q_{\min} \\ Q_{\max}, \tilde{Q}^{n+1} > Q_{\max} \end{cases}, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\min} &= \min(Q_R^n, Q_{RC}^n, Q^n) + \tau Q_{well}, \\
Q_{\max} &= \max(Q_R^n, Q_{RC}^n, Q^n) + \tau Q_{well}, \\
Q_{well} &= \frac{Q_{RC}^{n+1/2} - Q_{RC}^n}{\tau / 2} + \frac{\lambda_3}{J} (Q^n - Q_R^n).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$S^{n+1} = \begin{cases} \tilde{S}^{n+1}, S_{\min} \leq \tilde{S}^{n+1} \leq S_{\max} \\ S_{\min}, \tilde{S}^{n+1} < S_{\min} \\ S_{\max}, \tilde{S}^{n+1} > S_{\max} \end{cases}, \quad (4.19)$$

$$if(\lambda_1 > 0) \begin{cases} S_{\min} = \min(S_L^n, S_{LC}^n, S^n) + \tau S_{well}, \\ S_{\max} = \max(S_L^n, S_{LC}^n, S^n) + \tau S_{well}, \\ S_{well} = \frac{S_{LC}^{n+1/2} - S_{LC}^n}{\tau / 2} + \frac{\lambda_1}{J} (S^n - S_L^n). \end{cases} \quad (4.20)$$

$$if(\lambda_1 \leq 0) \begin{cases} S_{\min} = \min(S_R^n, S_{RC}^n, S^n) + \tau S_{well}, \\ S_{\max} = \max(S_R^n, S_{RC}^n, S^n) + \tau S_{well}, \\ S_{well} = \frac{S_{RC}^{n+1/2} - S_{RC}^n}{\tau / 2} + \frac{\lambda_1}{J} (S^n - S_R^n). \end{cases} \quad (4.21)$$

Коррекция для инвариантов  $V$ ,  $W$  аналогична коррекции энтропийного инварианта  $S$ . Теперь осталось разрешить систему уравнений относительно новых значений потоковых переменных:

$$\begin{cases} (\vec{v}^{n+1}, \vec{n}) + G_L [P^{n+1}]^{(\gamma-1)/2\gamma} = R^{n+1}, G_L = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( P_{LC}^{n+1/2} / (\rho_{LC}^{n+1/2})^\gamma \right)^{1/2\gamma}, \\ (\vec{v}^{n+1}, \vec{n}) - G_R [P^{n+1}]^{(\gamma-1)/2\gamma} = Q^{n+1}, G_R = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma-1} \left( P_{RC}^{n+1/2} / (\rho_{RC}^{n+1/2})^\gamma \right)^{1/2\gamma}, \\ \ln \left( P^{n+1} / (\rho^{n+1})^\gamma \right) = S^{n+1}, \\ (\vec{v}^{n+1}, \vec{n}_1) = V^{n+1}, \\ (\vec{v}^{n+1}, \vec{n}_2) = W^{n+1}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Из первых двух уравнений выразим  $(\vec{v}^{n+1}, \vec{n})$ , убрав выражения содержащие  $P^{n+1}$ :

$$(\vec{v}^{n+1}, \vec{n}) = \frac{G_R R^{n+1} + G_L Q^{n+1}}{G_R + G_L}.$$

Объединив последнее выражение с двумя последними равенствами из системы (4.22), мы получим систему линейных уравнений относительно компонент скорости  $u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}$ :

$$\begin{cases} u^{n+1}n_x + v^{n+1}n_y + w^{n+1}n_z = \frac{G_R R^{n+1} + G_L Q^{n+1}}{G_R + G_L}, \\ u^{n+1}n_{1x} + v^{n+1}n_{1y} + w^{n+1}n_{1z} = V^{n+1}, \\ u^{n+1}n_{2x} + v^{n+1}n_{2y} + w^{n+1}n_{2z} = W^{n+1}. \end{cases} \quad (4.23)$$

или в матричном виде

$$\mathbf{A}\vec{v} = \vec{f}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{G_R R^{n+1} + G_L Q^{n+1}}{G_R + G_L} \\ V^{n+1} \\ W^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Поскольку матрица  $\mathbf{A}$  составлена из векторов ортонормированного базиса, то обратная матрица будет равна транспонированной матрице  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ . Последнее утверждение легко проверить:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \\ n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x & n_{1x} & n_{2x} \\ n_y & n_{1y} & n_{2y} \\ n_z & n_{1z} & n_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha) & (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_1) & (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_2) \\ (\vec{n}_1, \vec{n}_\alpha) & (\vec{n}_1, \vec{n}_1) & (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \\ (\vec{n}_2, \vec{n}_\alpha) & (\vec{n}_2, \vec{n}_1) & (\vec{n}_2, \vec{n}_2) \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Значит, новое значение скорости будет равно:

$$\vec{v} = \mathbf{A}^{-1} \vec{f} = \mathbf{A}^T \vec{f} = \begin{pmatrix} n_x & n_{1x} & n_{2x} \\ n_y & n_{1y} & n_{2y} \\ n_z & n_{1z} & n_{2z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{G_R R^{n+1} + G_L Q^{n+1}}{G_R + G_L} \\ V^{n+1} \\ W^{n+1} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} n_x \frac{G_R R^{n+1} + G_L Q^{n+1}}{G_R + G_L} + n_{1x} V^{n+1} + n_{2x} W^{n+1} \\ n_y \frac{G_R R^{n+1} + G_L Q^{n+1}}{G_R + G_L} + n_{1y} V^{n+1} + n_{2y} W^{n+1} \\ n_z \frac{G_R R^{n+1} + G_L Q^{n+1}}{G_R + G_L} + n_{1z} V^{n+1} + n_{2z} W^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Новое значение давления получается из первых двух уравнений системы (4.22) путем исключения выражения  $(\vec{v}^{n+1}, \vec{n})$ :

$$P^{n+1} = \left( \frac{R^{n+1} - Q^{n+1}}{G_R + G_L} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (4.26)$$

И наконец вычисляем новое значение плотности из выражения для энтропийного инварианта:

$$\rho^{n+1} = \left( \frac{P^{n+1}}{e^{S^{n+1}}} \right)^{1/\gamma}. \quad (4.27)$$

Заключительный третий этап схемы получается методом конечных объемов, аналогично системе (4.4):

$$G_i \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^{n+1/2}}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 R_j^{n+1} (\vec{V}_j^{n+1} \cdot \vec{S}_j) = 0,$$

$$G_i \frac{(\rho \vec{v})_i^{n+1} - (\rho \vec{v})_i^{n+1/2}}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 (R \vec{V})_j^{n+1} (\vec{V}_j^{n+1} \cdot \vec{S}_j) + \sum_{j=1}^6 P_j^{n+1} \vec{S}_j = 0, \quad (4.28)$$

$$G_i \frac{(\rho E)_i^{n+1} - (\rho E)_i^{n+1/2}}{\tau/2} + \sum_{j=1}^6 (E_j^{n+1} + P_j^{n+1}) (\vec{V}_j^{n+1} \cdot \vec{S}_j) = 0,$$

## Тензор вязких напряжений

В данной главе будет рассмотрена система нестационарных уравнений Эйлера с учетом вязкости среды. Для каждого вязкого члена из уравнения будет предложена численная аппроксимация. Будет проведен анализ на устойчивость схемы с учетом тензора вязких напряжений. И в конце главы будут представлены результаты тестов сравнения ламинарного течения в канале с теоретическим решением.

Систему уравнений составляем из трех законов сохранения. Первое – уравнение неразрывности, которое получается из применения закона сохранения массы к среде, протекающей через фиксированный бесконечно малый контрольный объем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.29)$$

где  $\rho$  – плотность среды, а  $\vec{v}$  – ее скорость. Первый член этого уравнения дает увеличение плотности в контрольном объеме за единицу времени, второй – поток массы через поверхность контрольного объема за единицу времени, отнесенный к единице объема. В развернутой форме данное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (4.30)$$

Применение второго закона Ньютона к среде, протекающей через бесконечно малый фиксированный контрольный объем, приводит к уравнению количества движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}, \quad (4.31)$$

которое в упрощенной форме имеет вид:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}. \quad (4.32)$$

Первый член в правой части уравнения (4.32) есть отнесенная к единице объема массовая сила. Вторым членом в правой части даны отнесенные к единице объема поверхностные силы. Это силы суть механические напряжения, действующие на выделенный жидкий объем со стороны внешней по отношению к нему жидкости. Они образованы нормальными и сдвиговыми напряжениями и задаются компонентами тензора напряжений  $\Pi_{ij}$ .

Приведенное выше уравнение выписано для общего случая и пригодно как для течений с разрывами, так и без таковых. Для всех газов, которые можно считать сплошной средой, и большинства жидкостей замечено, что напряжение в некоторой точке линейно зависит от скорости деформации жидкости. Такая жидкость называется ньютоновской. При этом допущении можно вывести общий закон деформации, который связывает тензор напряжений с давлением и компонентами скорости:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \mu' \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (4.33)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора скорости  $\vec{v}$ ;  $x_1, x_2, x_3$  – координаты радиус-вектора точки;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\mu'$  – второй коэффициент вязкости. Эти два коэффициента вязкости связаны с коэффициентом объемной вязкости  $\chi$  выражением

$$\chi = \frac{2}{3}\mu + \mu' \quad (4.34)$$

Обычно коэффициент объемной вязкости полагают пренебрежимо малым, за исключением тех случаев, когда изучается структура ударных волн, а также поглощение и затухание акустических волн. Поэтому в

дальнейшем мы будем им пренебрегать. При  $\chi = 0$  второй коэффициент вязкости станет равным

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu, \quad (4.35)$$

а тензор напряжений можно записать как

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], \quad (4.36)$$

Тензор напряжений разделяют часто на две части:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (4.37)$$

где  $\tau_{ij}$  – тензор вязких напряжений, задаваемый выражением

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \quad (4.38)$$

Подставляя (4.36) в уравнение (4.31), получим дивергентную форму записи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw - \tau_{xz}) &= \rho f_x, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw - \tau_{yz}) &= \rho f_y, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uw - \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vw - \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 + p - \tau_{zz}) &= \rho f_z, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где компоненты тензора вязких напряжений задаются выражениями

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$



Применение первого закона термодинамики к жидкости, протекающей через бесконечно малый фиксированный объем, приводит к уравнению энергии такого вида

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \nabla \cdot E_t \vec{v} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (\Pi_{ij} \vec{v}), \quad (4.41)$$

где  $E_t$  – полная энергия единицы объема.

Первый член в левой части уравнения (4.41) есть изменение полной энергии единицы контрольного объема в единицу времени, тогда как второй — изменение полной энергии за счет конвекции через контрольную поверхность (в единицу времени и отнесенная к единице объема). Первый член в правой части уравнения (4.41) есть скорость тепловыделения внешних источников, отнесенная к единице объема, а второй член  $(\nabla \cdot \vec{q})$  — тепловые потери за счет теплопроводности через контрольную поверхность в единицу времени (отнесенные к единице объема). Третий член в правой части (4.41) есть отнесенная к единице объема работа массовых сил, совершаемая над контрольным объемом. Четвертый — отнесенная к единичному объему работа поверхностных сил, совершаемая над контрольным объемом. Очевидно, что уравнение (4.41) есть просто первый закон термодинамики, записанный для контрольного объема, т. е. изменение энергии системы равно подводимому к системе теплу плюс совершаемая над системой работа массовых и поверхностных сил.

В декартовой системе координат уравнение (4.41) запишется в дивергентном виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_t}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial t} - \rho(f_x u + f_y v + f_z w) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x}(E_t u + pu - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}(E_t v + pv - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z}(E_t w + pw - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} + q_z) = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Введем переменную удельной полной энергии  $E$ , которая соотносится с полной энергией единицы объема по формуле  $E_t = \rho E$ . Тогда в предположении, что пренебрежимо малы массовые силы и тепловые потери, а также что нет внешних источников, уравнение (4.42) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho E u + p u - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} - w \tau_{xz}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\rho E v + p v - u \tau_{yx} - v \tau_{yy} - w \tau_{yz}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\rho E w + p w - u \tau_{zx} - v \tau_{zy} - w \tau_{zz}) = 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

В итоге, объединяя уравнения (4.30), (4.39) и (4.43), получим систему дифференциальных уравнений, описывающую идеальный газ в отсутствие внешних источников и тепловых потерь.

Как видно из этих уравнений в них присутствуют коэффициенты тензора вязких напряжений  $\tau_{ij}$ . Поэтому для вычисления промежуточных значений консервативных переменных нам будет нужна разностная аппроксимация данных коэффициентов. Проинтегрировав систему уравнений по ячейке, мы приходим к выводу, что тензор вязких напряжений нужно вычислять в центрах граней или в потоковых переменных. Действительно, например, если взять первое уравнение из системы (4.39) и проинтегрировать, то получим следующее выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_G \rho u dx dy dz \right) + \oint_S (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) dy dz + \oint_S (\rho u v - \tau_{xy}) dx dz + \oint_S (\rho u w - \tau_{xz}) dx dy = 0,$$

или

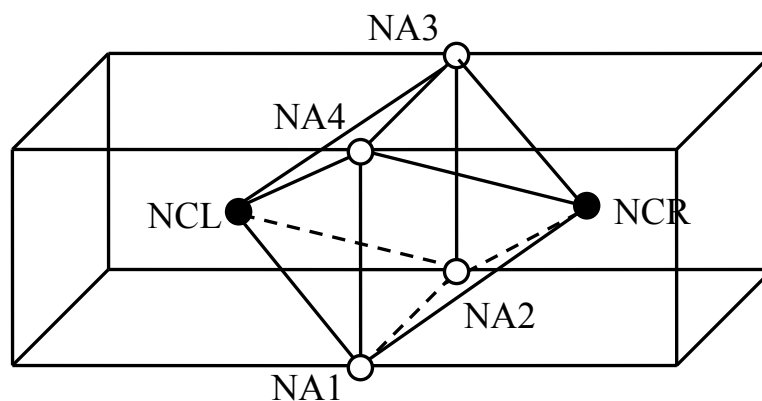
$$\frac{(\rho u)_l^{n+1/2} - (\rho u)_l^n}{\tau / 2} + \frac{(\rho u^2 + p - \tau_{xx})_{i+1}^n - (\rho u^2 + p - \tau_{xx})_i^n}{h_x} +$$

$$+ \frac{(\rho uv - \tau_{xy})_{j+1}^n - (\rho uv - \tau_{xy})_j^n}{h_y} + \frac{(\rho uw - \tau_{xz})_{k+1}^n - (\rho uw - \tau_{xz})_k^n}{h_z} = 0$$

где  $l$  – номер ячейки, индексы  $i, j, k$  – указывают на грани перпендикулярные соответственно осям  $0x, 0y, 0z$ . Из последнего соотношения следует, что нужно знать значения коэффициентов тензора вязких напряжений в центрах граней ячейки.

### Вычисление тензора вязких напряжений

Коэффициенты тензора вязких напряжений суть комбинации из производных скоростей по декартовым координатам, умноженные на коэффициент вязкости (см.(4.40)). Поэтому задача вычисления тензора вязких напряжений разбивается на подзадачи по вычислению производных скоростей. На представленном ниже шаблоне и будут вычисляться производные скоростей.



*Рис.4.5. Шаблон вычисления коэффициентов тензора вязких напряжений*

NA1,NA2,NA3,NA4 – номера узлов образующих рассматриваемую грань, NCL,NCR – номера задней и передней ячеек образующих грань.

Из шаблона следует, что необходимо определить консервативные скорости в узлах сетки. Для этого на каждом шаге по времени мы будем экстраполировать переменные в узловые точки. Экстраполяцию организуем, так чтобы каждая ячейка, к которой принадлежит узел, вносила свое значение консервативных переменных с весами. Так как узлов в ячейке 8 штук, то пусть вклад одной ячейки будет следующим

$$\delta\vec{\varphi}_C = \vec{\varphi}_C \cdot \frac{Volume}{8}, \vec{\varphi}_C = (u, v, w, \rho, E)^T.$$

Далее в цикле по всем ячейкам суммируем вклады каждой ячейки в узловые точки, в конце концов, получим экстраполяцию консервативных переменных. Полученные значения в узлах следует поделить на прилегающий к узлу объем. Если, например, узел внутренний, то к нему прилегает объем одной ячейки, иначе если узел является угловым, то прилегает лишь восьмая часть объема ячейки. Будем обозначать значения переменных в узлах через целочисленные индексы  $\vec{\varphi}_{i,j,k}, \vec{\varphi}^T = (u, v, w, \rho, E)$ .

Чтобы вычислить пространственные производные компонент скорости  $\partial u_i / \partial x_j, i, j = 1, 2, 3$  в центрах граней, проинтегрируем их по объему из шаблона на рис.1 и поделим на объем

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\iiint_G \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV}{\iiint_G dV}$$

где через G обозначен восьмигранник NA1 NA2 NA3 NA4 NA5 NA6 NA7 NA8 NCL NCR из рис.5.

Применим теорему Остроградского-Гаусса для тройного интеграла по объему производной скорости

$$\iiint_G \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \oint_{\partial G} u_i dx_k dx_l, i, j = 1, 2, 3, k \neq l \neq j,$$

а объем восьмигранника составляет треть объема ячейки VOLUME/3.

Следовательно, производная скорости на грани будет равна

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle = 3 \oint_{\partial G} u_i dx_k dx_l / Volume, i, j = 1, 2, 3, k \neq l \neq j,$$

Интеграл по поверхности будет равен следующему выражению

$$\begin{aligned} \iiint_G \nabla \vec{f} dV &= \oint_{\partial G} \vec{f} d\vec{s} = \sum_{k=1}^8 \vec{f}_k \vec{s}_k, \\ \vec{f}_k^T &= (u_i, 0, 0), j=1, \vec{f}_k^T = (0, u_i, 0), j=2, \vec{f}_k^T = (0, 0, u_i), j=3 \end{aligned} \quad (4.44)$$

где индекс k нумерует грани восьмигранника, а вектор  $\vec{s}_k$  – обозначает внешнюю нормаль грани k, длина которой равна площади грани k. Компоненты скорости в (4.44) относятся к центрам граней восьмигранника. Их значения будем брать средним между тремя узлами восьмигранника, образующими грань. Среднее значение в треугольнике равно одной трети от суммы скоростей в узловых точках

$$(u_i)_k = \frac{u_i^1 + u_i^2 + u_i^3}{3},$$

где верхний индекс соответствует внутренней нумерации узлов грани.

### **Вычисление шага по времени**

Рассмотрим характеристические уравнения (4.12) и (4.13) формально их можно объединить в выражение типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} + ((\vec{v}, \vec{n}_\alpha) + c) \frac{\sigma}{J} \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + ((\vec{v}, \vec{n}_\alpha) - c) \frac{\sigma}{J} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{n}_\alpha) \frac{\sigma}{J} \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\sigma$  – площадь рассматриваемой грани, J – якобиан преобразования в локальные координаты  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , S, R, Q – локальные инварианты Римана

отвечающие

собственным

числам

$\lambda_1 = (\vec{v}, \vec{n}_\alpha)\sigma, \lambda_2 = ((\vec{v}, \vec{n}_\alpha) + c)\sigma, \lambda_3 = ((\vec{v}, \vec{n}_\alpha) - c)\sigma$  (см.(4.10)) соответственно.

Числа Куранта для этих уравнений получатся следующего вида:

$$CFL_\alpha = \max_{l, k_\alpha} \left( \frac{(|(\vec{v}, \vec{n}_\alpha)| + c)_l^{n+1/2} \sigma_{k_\alpha} \tau}{J_l^{n+1/2}} \right),$$

где  $l$  – номер ячейки,  $k_\alpha$  – внутренний номер грани, перпендикулярной локальной оси  $\alpha$  (всегда есть ровно две таких грани).

Аналогично получим выражения для чисел Куранта по локальным координатам  $\alpha, \beta$

$$CFL_\beta = \max_{l, k_\beta} \left( \frac{(|(\vec{v}, \vec{n}_\beta)| + c)_l^{n+1/2} \sigma_{k_\beta} \tau}{J_l^{n+1/2}} \right),$$

$$CFL_\gamma = \max_{l, k_\gamma} \left( \frac{(|(\vec{v}, \vec{n}_\gamma)| + c)_l^{n+1/2} \sigma_{k_\gamma} \tau}{J_l^{n+1/2}} \right),$$

Условия  $CFL_\alpha < 1, CFL_\beta < 1, CFL_\gamma < 1$  являются необходимыми для устойчивости разностной схемы. Зададимся некоторым определенным числом CFL, которое будет характеризовать число Куранта общей системы. Тогда шаг по времени будет определяться как

$$\tau = CFL \cdot \min_{l, k_\alpha, k_\beta, k_\gamma} \left( \frac{J_l^{n+1/2}}{\sigma_{k_\alpha} (|(\vec{v}, \vec{n}_\alpha)| + c)_l^{n+1/2}}, \frac{J_l^{n+1/2}}{\sigma_{k_\beta} (|(\vec{v}, \vec{n}_\beta)| + c)_l^{n+1/2}}, \frac{J_l^{n+1/2}}{\sigma_{k_\gamma} (|(\vec{v}, \vec{n}_\gamma)| + c)_l^{n+1/2}} \right) \quad (4.45)$$

или

$$\tau = CFL \cdot \min_{l, i} \left( \frac{J_l^{n+1/2}}{\sigma_{k_{x_i}} (|(\vec{v}, \vec{n}_{x_i})| + c)_l^{n+1/2}} \right) \quad (4.46)$$

где через  $x_i$  обозначены локальные координаты  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Отметим, что якобиан  $J_l^{n+1/2}$  в ячейке равен ее объему.

Последнее выражение для шага по времени не является окончательным, свой вклад вносит и наличие вязкости в дивергентных уравнениях. Критерием устойчивости для явных аппроксимационных схем с правой частью, типа уравнения теплопроводности (см.[63])

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

служит выражение

$$\frac{\mu \cdot \tau}{h^2} \leq 0,5.$$

В качестве практического критерия устойчивости в нашем случае будем брать выражение

$$\frac{\mu \cdot \tau}{h_{\min}^2} \leq 0,5. \quad (4.47)$$

где  $h_{\min}$  – минимальный линейный размер ячейки по всей области. Если шаг по времени не удовлетворяет условию (4.47), то его нужно изменить на  $\tau = 0,5 \cdot h_{\min}^2 / \mu$ .

## **Глава 5. Моделирование высокоскоростной турбулентной струи из одноконтурного сопла, эксперимент JEAN.**

### ***Постановка задачи и примеры расчетов в литературе***

Рассматривается так называемая простая статическая изотермическая струя из осесимметричного конического сопла. Данная струя отвечает истечению газа из одноконтурного сопла двигателя в покоящуюся среду при условии равенства температуры на выходе из сопла температуре окружающего воздуха. Струя соответствовала числу Маха 0,75 на срезе сопла и числу Рейнолдса, определённого по диаметру сопла,  $Re=10^6$ .

Условия истечения струи и геометрия сопла отвечают условиям эксперимента, проведенного в рамках эксперимента JEAN [41] (Power, O., Kerherve, F., Fitzpatrick, J., and Jordan, P., Measurements of turbulence statistics in high subsonic jets, AIAA-2004-3021, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, UK, June 2004), проводившегося для создания единой европейской базы данных по моделированию турбулентных струй.

В частности, течение данной турбулентной струи ранее уже моделировалось на основе метода крупных вихрей (LES) [64], с использованием стандартной методики проведения подобных расчетов, описание которой приведено ниже. Для моделирования турбулентности в ней использовался классический подход на основе решения уравнения Навье-Стокса с введением замыкающих соотношений на основе модели Смагоринского, с коэффициентом (CS) 0,15. Для предотвращения нефизичного отрыва пограничного слоя у границ сопла использовалась дополнительная пристеночная вязкость [65].

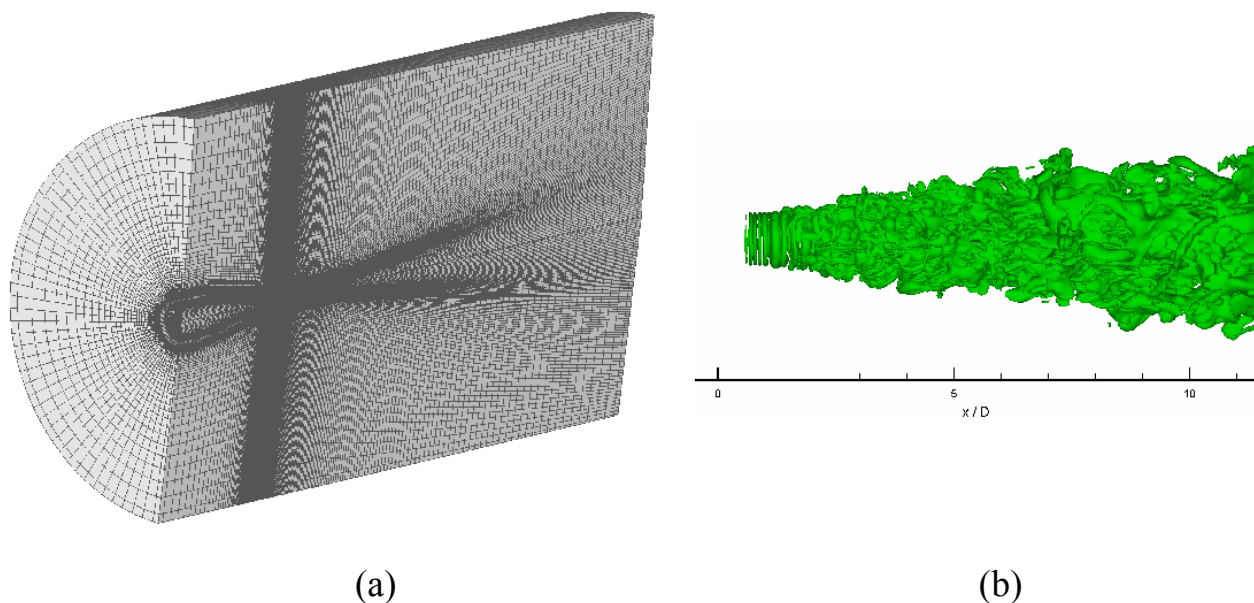
Для решения самих уравнений Навье-Стокса использовался метод второго порядка аппроксимации уравнений массы, импульса и энергии на основе направленных разностей по пространству. Численное решение было



получено на многоблочной гексагональной структурированной сетке, позволяющей обеспечивать достаточно малую диссипативность решения по сравнению с тетраэдральными сетками. Для интегрирования по времени использовалась схема Рунге-Кутты третьего порядка. Численный алгоритм был реализован с использованием технологии распараллеливания MPI на многопроцессорном кластере, так, что каждый блок сетки соответствовал одному процессору. Область решения от выхода из сопла до правой свободной границы соответствовала размерам  $30D \times 10D$  в аксиальном и радиальном направлениях. Геометрия кромки сопла была включена в расчётную область. У границы сопла использовалось сгущение сетки в радиальном направлении. Плотность сетки в азимутальном направлении подбиралась так, чтобы сетка в окрестности выхода из сопла, была максимально однородной. Размеры шага сетки у выхода струи из сопла составляли  $0,0045D$ ,  $0,004D$ ,  $0,0087D$  в аксиальном, радиальном и азимутальном направлениях соответственно. Размеры шага сетки, покрывающие область от выхода из сопла до правой свободной границы, соответствовали  $314 \times 102 \times 360$  (в аксиальном, радиальном и азимутальном направлениях). Полный размер сетки с учетом сопла для этого расчета соответствовал  $16,5 \times 10^6$  ячеек. Несмотря на отсутствие дополнительного сеточного блока квадратной топологии на оси симметрии цилиндрической сетки, в силу консервативности используемого метода численных проблем при решении отмечено не было. На входе в сопло задано давление торможения, соответствующее требуемой величине скорости выхода струи из сопла. На всех открытых границах задавалось постоянное статическое давление, соответствующее условию на бесконечности. Для уменьшения численных отражений использовалось локальное разрежение сетки в окрестности открытых границ.

Время расчета для выхода решения в режим статистически стационарности относительно средних и средне-квадратичных моментов решения и отбора полезных данных для усреднения составляло примерно 300

$D/U_j$ , где  $D/U_j$  - характерное время, за которое элементарный объём газа, содержащий вихрь скорости, движущийся со скоростью  $U_j$ , проходит расстояние, равное одному диаметру сопла. На компьютерном кластере средних размеров такой расчет занимал порядка 2х месяцев физического времени.



*Рис. 5.1. Расчет турбулентной струи методом крупных вихрей (a) расчётная сетка в половине области, (b) изоповерхность завихренности. В (b) на выходе из сопла хорошо видны вихревые кольца, двумерность которых говорит о том, что уровень турбулентности струи в решении на выходе из сопла недостаточно высок. Ниже по течению двумерная симметрия решения быстро исчезает, возникают трёхмерные филаменты завихренности, свидетельствующие о турбулизации решения*

Независимо от решения LES было получено стационарное решение струи на основе уравнений Навье-Стокса, усреднённых по числу Рейнольдса (RANS). В численном решении RANS усреднение по Рейнольдсу заменялось усреднением по времени, и решалась система стационарных уравнений Навье-Стокса. Для моделирования турбулентности использовалась стандартная k-ε модель турбулентности. Вычисления проводились с использованием коммерческого программного пакета Fluent

6.2. Для решения системы уравнений RANS выбирался численный алгоритм на основе конечно-объемной схемы с направленными разностями второго порядка аппроксимации и явным шагом по времени. Расчёт проводился в осесимметричной постановке на сетке 271x120 ячеек в аксиальном и радиальном направлениях и включал часть сопла. Левая граница расчётной области соответствовала расстоянию пяти диаметров сопла вверх по течению струи от выхода сопла. На входе сопла задавалось та же температура торможения, что и в расчете LES, а также начальная интенсивность турбулентности ( $k^{1/2}/U_{jet}$ ), равная 6%. Пространственный масштаб турбулентных пульсаций принимался равным 0,01D. Начальные параметры интенсивности турбулентной энергии и пространственного масштаба соответствуют рекомендациям, выработанным для расчета струйных турбулентных течений в рамках документации ERCOFTAC (ERCOFTAC Special Interest Group on Quality and Trust in industrial CFD, Best Practice Guidelines, 1999). На персональном серийном компьютере расчёт RANS осесимметричной струи занимал несколько часов физического времени.

Сравнение решения LES и RANS с экспериментом для средней аксиальной скорости и турбулентной кинетической энергии для ряда сечений струи показано на рис. 5.2, 5.3. Видно, что решение LES приводит к более тонкому слою смешения и меньшей длине потенциального ядра струи по сравнению с RANS.

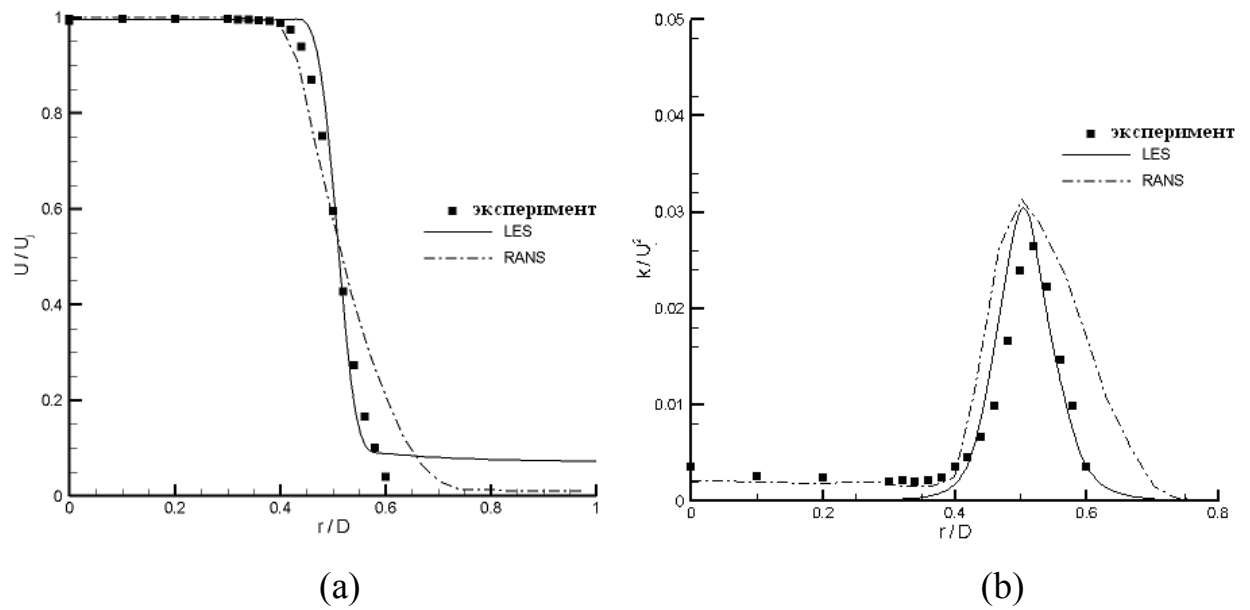


Рис. 5.2. Расчет радиального распределения на расстоянии  $x/D=1$  от конца сопла для (a) средней скорости и (b) турбулентной кинетической энергии при использовании нестационарного (LES) и стационарного (RANS) методов решения, которые использовались при построении модели акустического источника

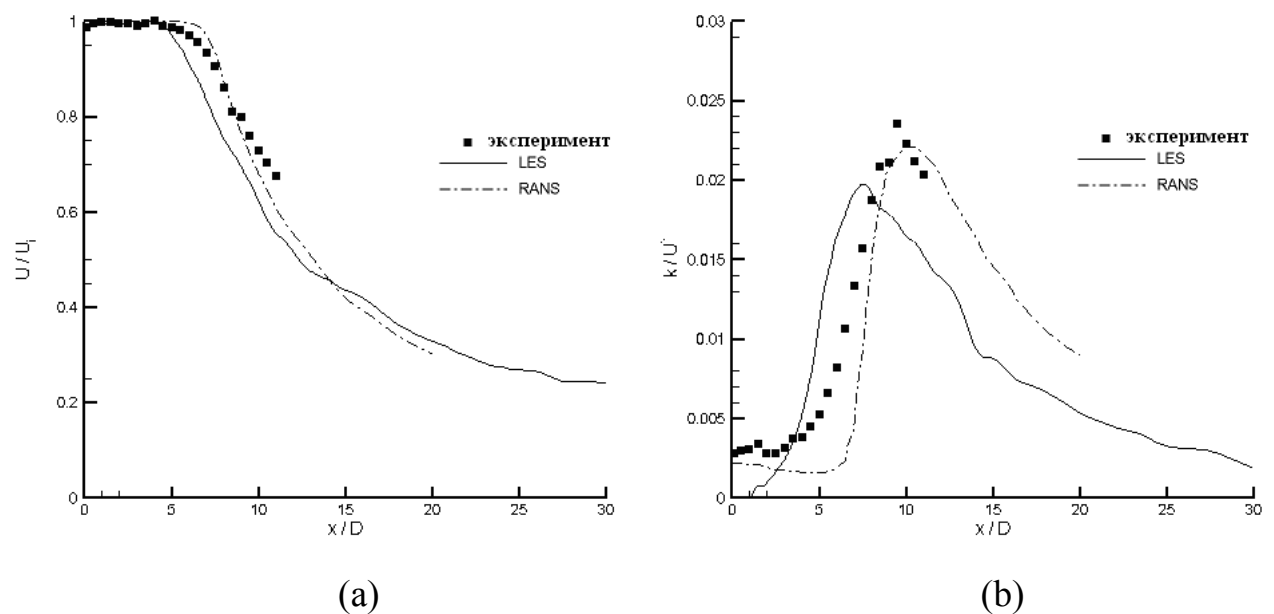


Рис. 5.3. Расчет аксиального распределения в центре струи.

Обозначения те же, что и на рис. 5.2

По сравнению с экспериментом решение приводит к более короткому начальному участку/ядра струи, что является довольно типичным для методов прямого моделирования на основе методов разрешения крупных вихрей. В частности в данном случае, как видно из данных эксперимента, на срезе сопла присутствует некоторый ненулевой уровень турбулентных пульсаций, который в методе LES никак не учитывался, и который мог послужить причиной различий между результатами расчета LES и эксперимента. С другой стороны, несколько замедленный переход к хаотизации в решении, выражающийся в слишком двумерной структуре решения на длине первых 1-2 калибров от среза сопла (рис. 5.1), говорит о том, что одной из причин более короткого ядра струи также могло быть недостаточное сеточное разрешение решения LES. В частности, наличие диссипативных и дисперсионных ошибок, проявляющихся на слишком грубой сетке, может привести к неправильному описанию нестационарных гидродинамических процессов в тонких слоях смешения струи, что, в свою очередь, может приводить к слишком бурному развитию неустойчивости в конце слоя смешения и, как следствие, к более раннему срыву струи в быстродиссипирующий каскад вихрей в конце начального участка струи. Для проверки последней гипотезы, в настоящей работе данная задача была решена методом высокого разрешения - Кабаре с коррекцией потоков на основе принципа максимума на ряде сгущающихся сеток.

### ***Результаты расчетов по методу Кабаре***

Для моделирования турбулентности в рамках расчетов по схеме Кабаре использовался метод крупных вихрей. Роль замыкающих соотношений при решении уравнений Навье-Стокса играет алгоритм коррекции потоков на основе прямого использования принципа максимума в соответствии с подходом Monotonically Integrated LES, MILES [66](Fureby, C and Grinstein, F.F. Large Eddy Simulation of High-Reynolds-Number Free and Wall-Bounded

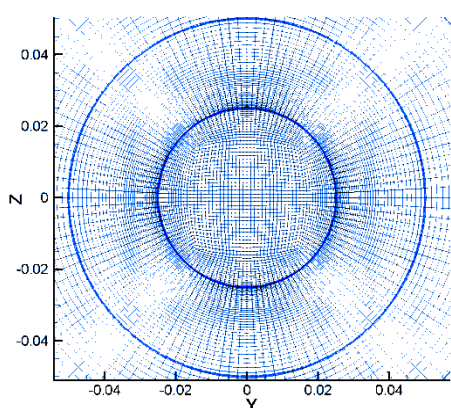
Flows, Volume 181, Issue 1, 1 September 2002, Pages 68–97). Расчетная сетка для решения уравнений Навье-Стокса имела цилиндрическую топологию в сечении струи ( $y, z$ ) с включением декартового блока сетки прямоугольной топологии вдоль оси струи. Область решения имела топологически цилиндрическую форму, размер которой в плоскости симметрии ( $x, r$ ) примерно составлял  $30D \times 10D$ .

Вдоль оси струи расчетная сетка имела  $H$ -топологию со сгущением в районе кромки сопла. Примеры использовавшихся сеток в срезах  $x$ - $y$  и  $x$ - $z$  со сгущением в окрестности слоя смещения и без сгущения - равномерной цилиндрической сетки показаны на рис. 5.4. Обе сетки состоят из  $3,6 \cdot 10^6$  ячеек, различие - только в степени неоднородности. На неоднородной сетке отношение минимальной ячейки в слое смещения струи к радиусу сопла составляет  $\sim 1\%$ , на однородной сетке эта величина  $\sim 5\%$ .

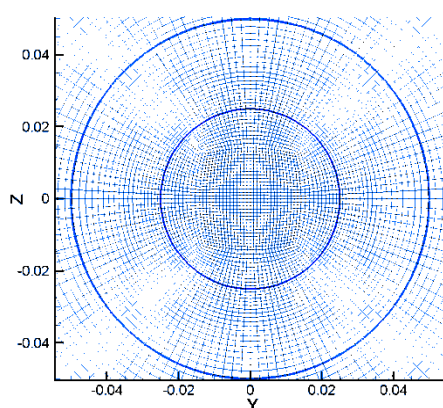
На открытых границах области задавались безотражающие характеристические граничные условия с использованием разнесенного шаблона Кабаре и линейного расширения сетки у границ области для уменьшения паразитных отражений от границ области. На границе сопла задавалось классическое адиабатическое условие прилипания. Для сетки со сгущением в окрестности слоя смещения струи в силу положительных свойств Кабаре этого условия оказывалось достаточно, и паразитных отрывов потока от кромки сопла не возникало. В случае однородной сетки, которая была слишком грубой в районе кромки сопла, условие полного прилипания заменялось на условие частичного проскальзывания для предотвращения отрывов.

Мгновенные распределения модуля завихренности в плоскости  $x$ - $z$ , полученные по методу Кабаре для обеих сеток, показаны на рис. 5.4 e,f. Видно, что решение на однородной сетке с крупными ячейками в слое смещения отвечает более ламинарному поведению струи на выходе из сопла, неустойчивость струи, сопровождающаяся возникновением достаточно крупных вихрей, возникает уже только на расстоянии 1-2 калибра струи от

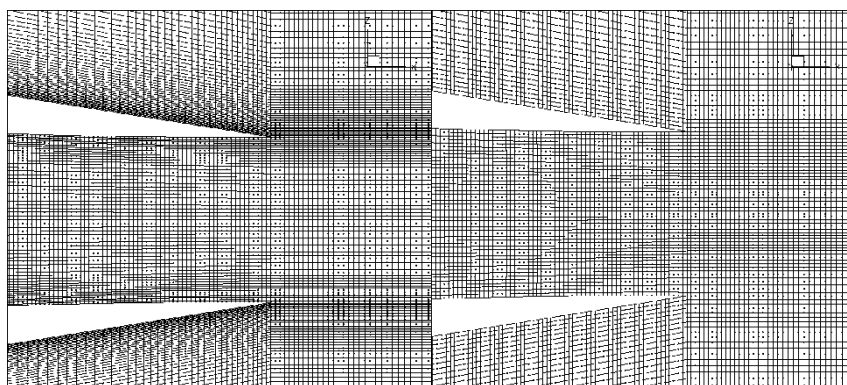
среза сопла. Качественно это поведение напоминает результаты предыдущего расчета на рис. 5.1. Вихри начинают интенсивное взаимодействие в результате которого струя достаточно быстро распадется. В отличие от однородной сетки, на сетке с мелким разрешением слоя смешения тонкие вихревые структуры порождаются уже начиная с 0,1-0,2 калибра струи, нарастание неустойчивости слоя смешения происходит более плавно, без резких скачков, а расширение слоя смешения происходит более линейно, и ядро струи становится более вытянутым.



(a)

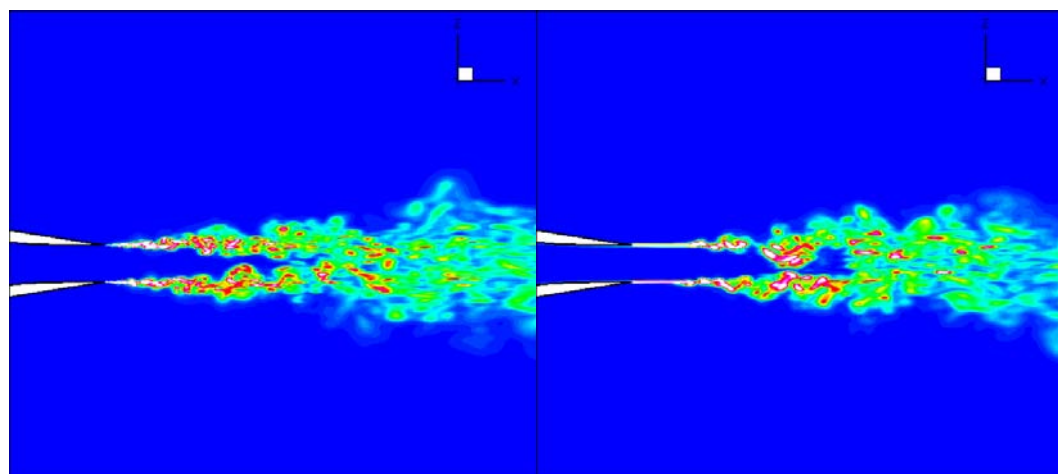


(b)



(c)

(d)



(e)

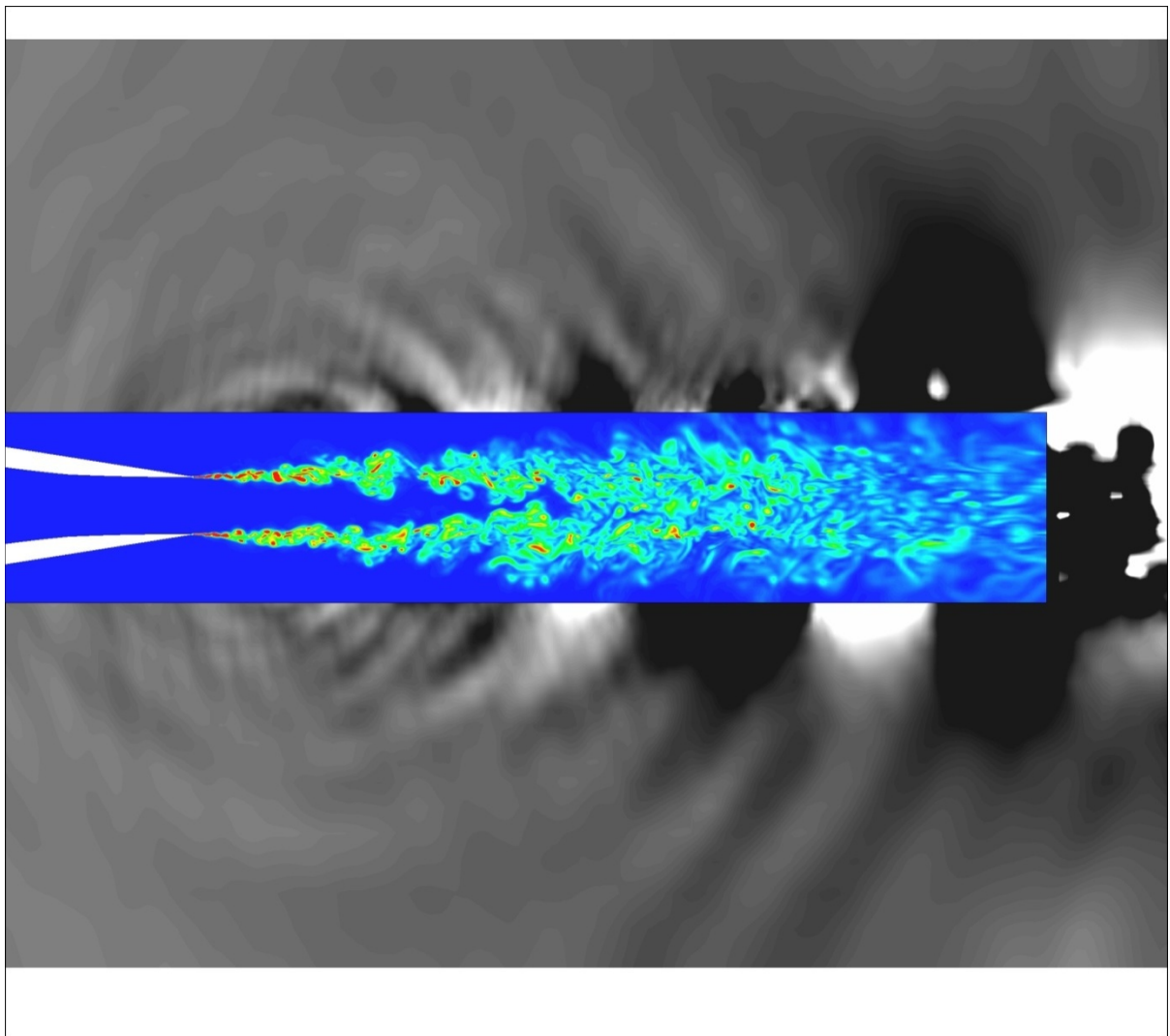
(f)

*Рис. 5.4 Вычислительная сетка со сгущением (a),(c) и без сгущения (b),(d) в районе кромки сопла и соответствующие распределения полей завихренности, (e) и (f), в плоскости симметрии струи.*

На рис. 5.5 показано мгновенное распределение завихренности в ближнем поле струи и контуров давления в акустическом диапазоне  $0,999 < p / p_{\infty} < 1,001$  на следующей по объёму сетке –  $7,8 \cdot 10^6$  ячеек. Эта сетка получена из сетки плотности  $3,6 \cdot 10^6$  ячеек со сгущением в слое смешения путём увеличения количества точек по оси  $x$  в окрестности конца потенциального ядра струи, что позволяет сделать сетку в этой области более равномерной.

Хорошо заметны мелкомасштабные пульсации в начале струе, визуально соответствующие мелкомасштабным акустическим возмущениям. Мелкомасштабные возмущения переходят в крупные вихри интенсивно перемешивающиеся в конце начального отрезка струи, соответствующие крупномасштабным акустическим возмущениям, переносимым под малыми углами к струе.



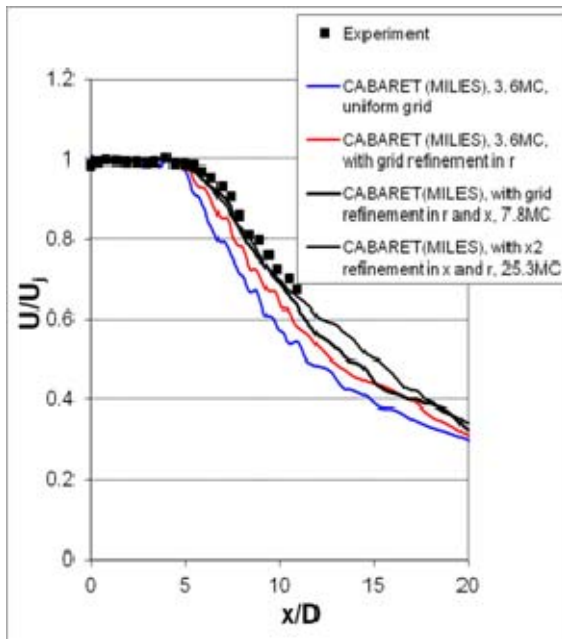


*Рис. 5.5 Мгновенное распределение гидродинамических (завихренности) и акустических (давления в акустическом диапазоне) пульсаций с плоскости симметрии струи*

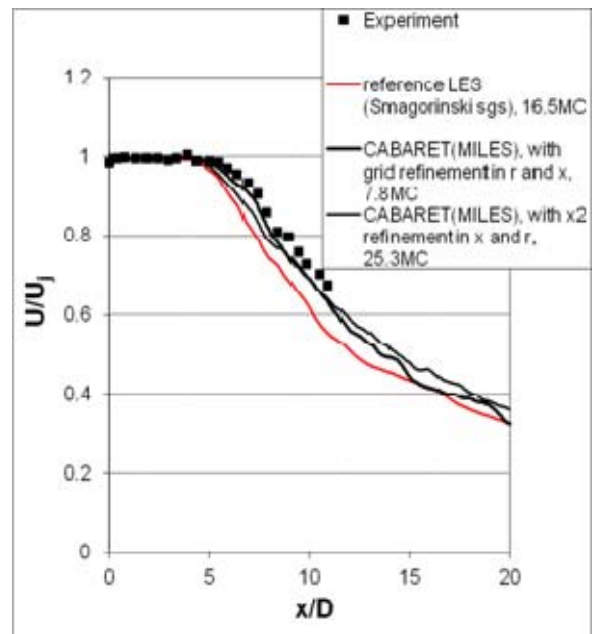
На следующих рис. 5.6 представлены результаты сравнения решения Кабаре для усреднённой по времени аксиальной компоненты скоростей на сетках  $3,6 \cdot 10^6$  ячеек со сгущением в районе кромки сопла и без, на сетке  $7,8 \cdot 10^6$  ячеек и на сетке  $25,3 \cdot 10^6$  ячеек. Последняя сетка получена удвоением количества ячеек сетки  $7,8 \cdot 10^6$  ячеек в радиальном,  $r$  и аксиальном,  $x$  направлении. Ниже результаты расчетов по Кабаре сравниваются с результатами эксперимента и предыдущего расчета на основе крупных вихрей. Видно, что решения Кабаре на двух последних сетках хорошо согласуются между собой и экспериментом на протяжении первых 10

калибров струи. Как и ожидалось, использование грубых сеток  $3,6 \cdot 10^6$  ячеек приводит к несколько укороченному ядру струи по сравнению с экспериментом, при этом грубая сетка без попытки разрешения тонкого слоя смешения на срезе сопла приводит к наибольшей ошибке в длине начального участка. Расчеты по схеме Кабаре проводились с разбиением гексаэдральной сетки на 512 и 992 ядер с использованием библиотеки METIS в случае сеток  $3,6-7,8 \cdot 10^6$  и  $25,3 \cdot 10^6$  ячеек соответственно. Выход решения на статистически установившийся режим и отбор результатов для усреднения соответствовали примерно 300 характерным временам  $D/U_j$ , что соответствовало примерно 72-96 часам физического времени расчета на британском суперкомпьютере HECToR.

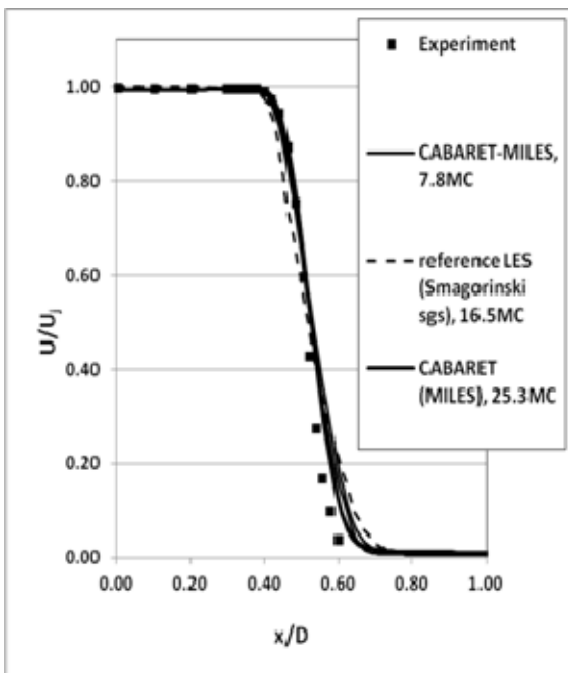
Сравнение для турбулентной кинетической энергии струи в разных ее сечениях (значениям азимутального угла в цилиндрической системе координат струи  $0$  и  $180^\circ$ ) для схемы Кабаре на сетке  $7,8 \cdot 10^6$  ячеек, эксперимента и предыдущего решения LES приведено на рис. 5.7. Сравнение с экспериментом говорит о том, что использование схемы Кабаре даже на более грубой сетке позволяет более правильно описывать развитие неустойчивости в тонких слоях смешения струи и переход к турбулентности, относительно ранее проведенного расчета LES на более мелкой сетке.



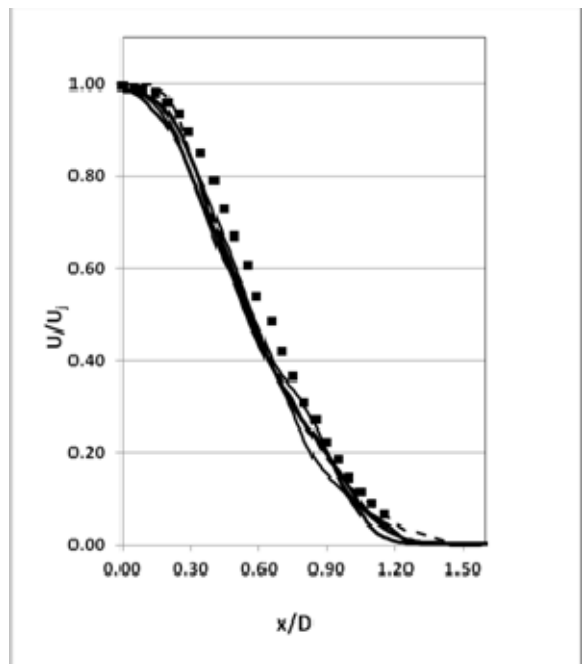
(a)



(b)

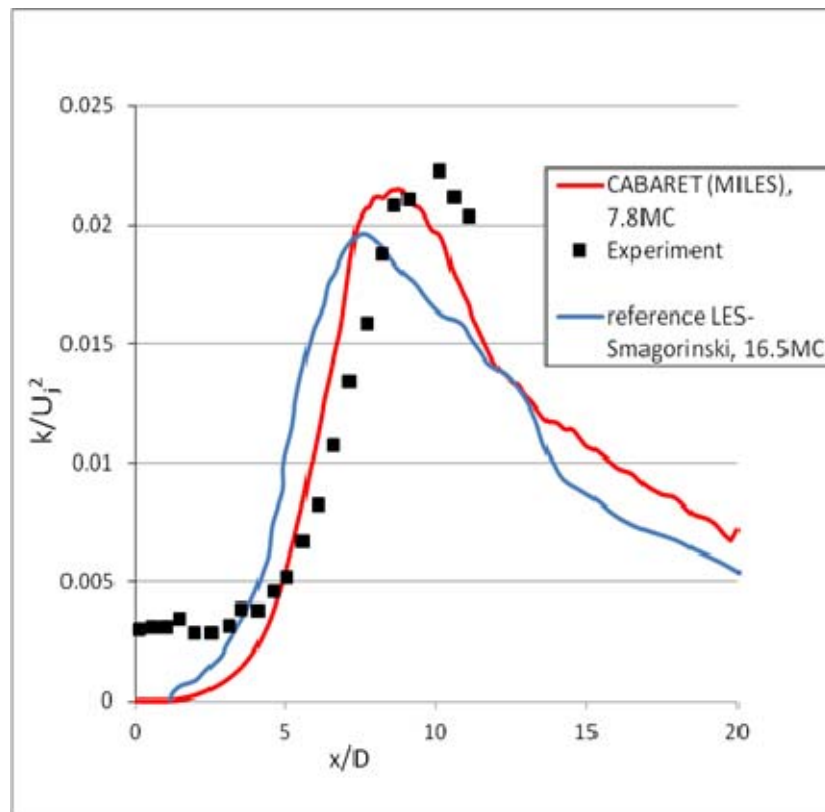


(c)

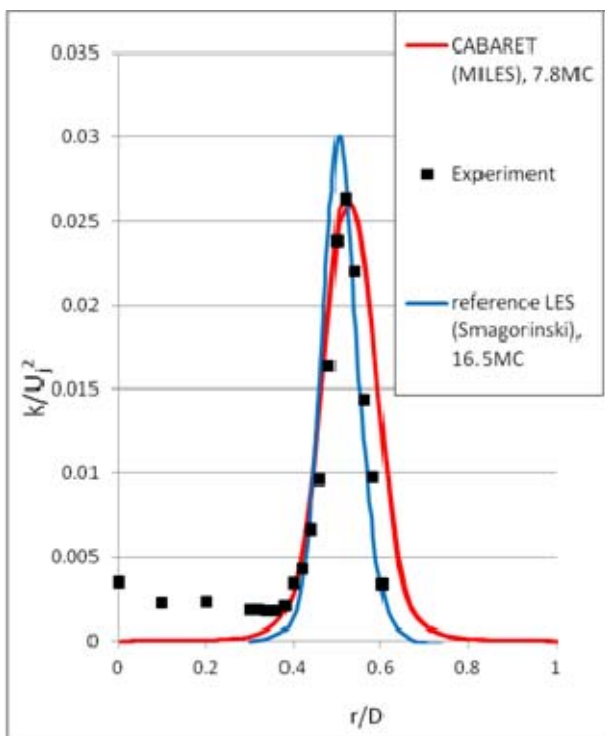


(d)

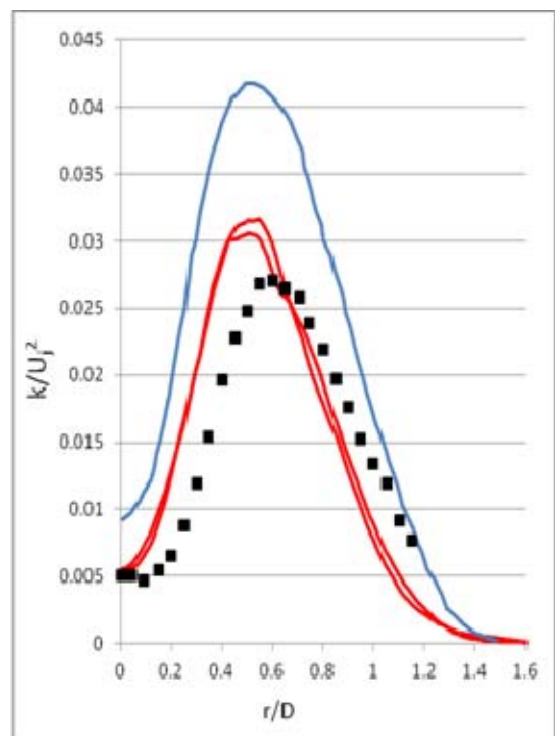
Рис. 5.6 Сравнение распределений усредненной по времени аксиальной компоненты скорости (a),(b) вдоль оси струи и радиальных профилей скорости на расстоянии (c) 1 и (d) 5 калибров от среза сопла



(a)



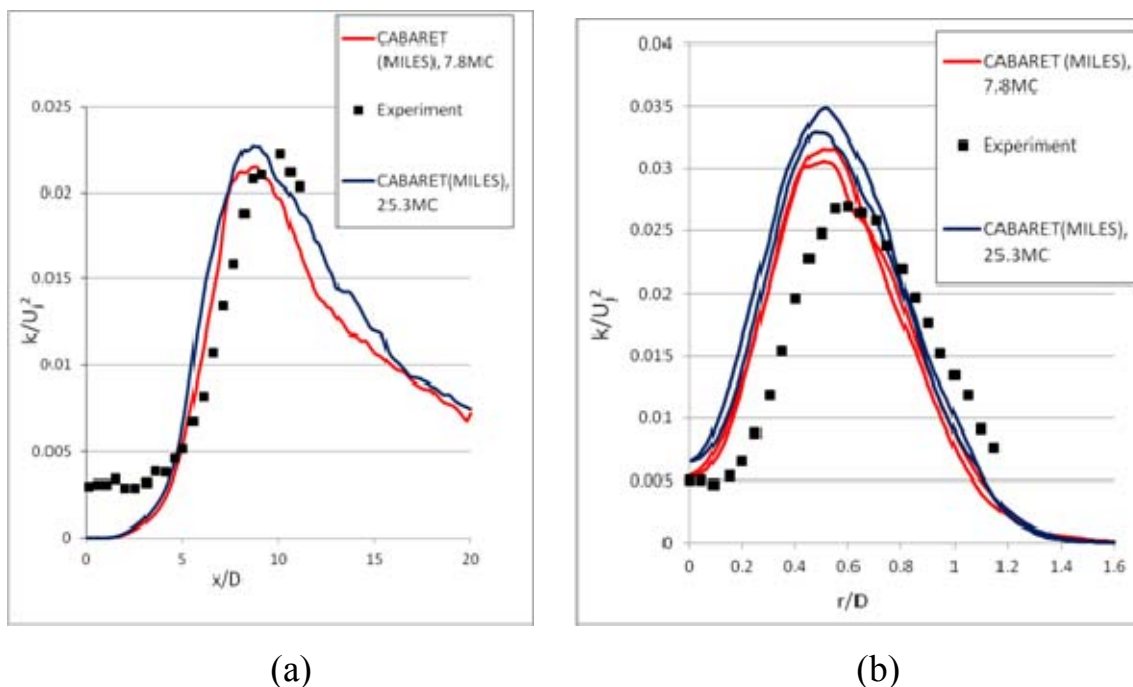
(b)



(c)

*Рис. 5.7 Сравнение распределений усредненной по времени турбулентной кинетической энергии (a) вдоль оси струи и соответствующих радиальных профилей на расстоянии (b) 1 и (c) 5 калибров от среза сопла*

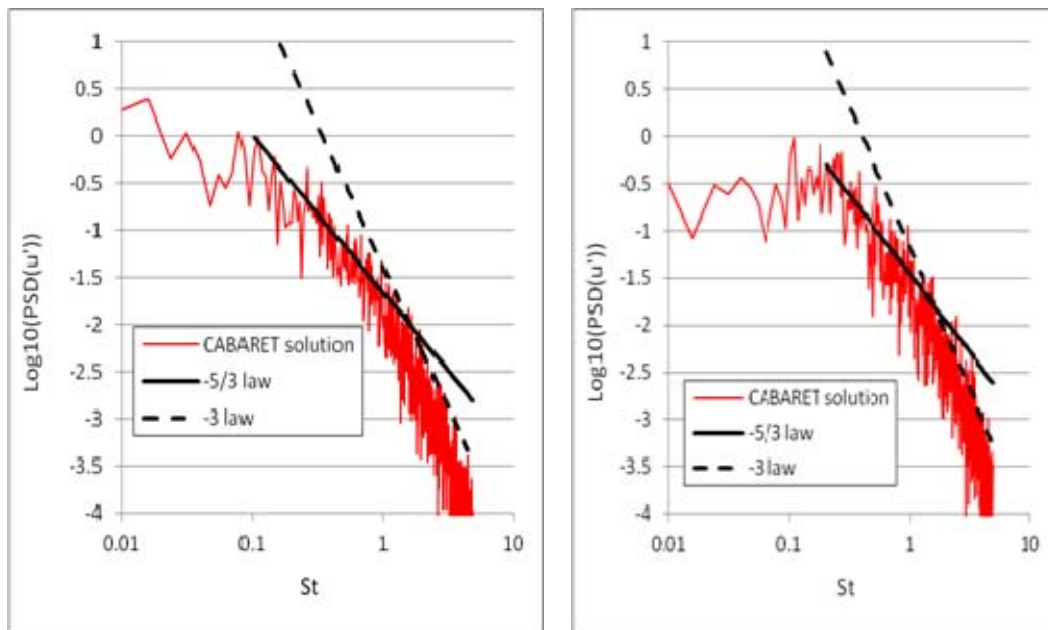
На рисунке 5.8 показаны осевой профиль турбулентной кинетической энергии полученный в модели расчета по схеме КАБАРЕ на двух сетках – 7,8 и 25,3 млн ячеек. Видно, что оба решения КАБАРЕ находятся в удовлетворительном согласии друг с другом и экспериментальными данными. Это показывает что по ключевым параметрам таким как среднеквадратичные момент пульсаций в районе развитого перемешивания решение КАБАРЕ на сетке 7,8 млн уже является достаточно слабо зависящим от плотности сетки. Два разных профиля решения КАБАРЕ соответствуют верхней и нижней полуплоскости (значениям азимутального угла в цилиндрической системе координат струи  $0^\circ$  и  $180^\circ$ ).



*Рис. 5.8 Сравнение распределений усредненной по времени турбулентной кинетической энергии (a) вдоль оси струи и (b) соответствующих радиальных профилей на расстоянии 5 калибров от среза сопла*

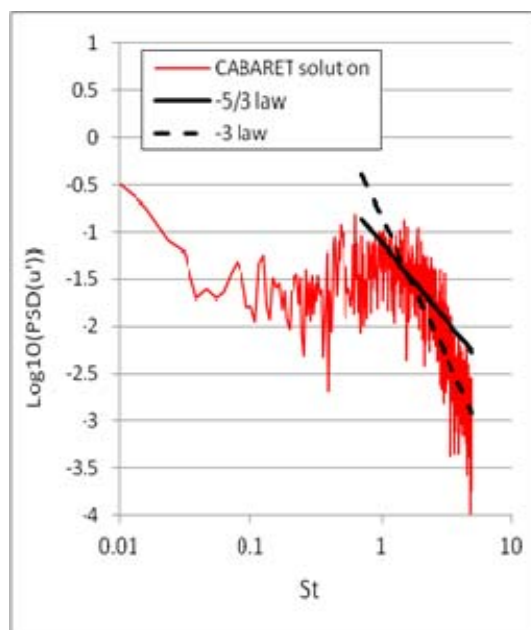
Наряду со вторыми моментами, которые, как обсуждалось ранее, в принципе можно получить из решения усредненных уравнений с соответствующим образом откалиброванной моделью замыкания (RANS), мерой качества вихреразрешающего решения (LES), полученного из первых принципов, является спектральная информация. В частности много важной

информации несут пульсации скорости в слое смешения: по закону убывания спектральной мощности пульсации скорости в зависимости от частоты можно сделать вывод о соответствии решения масштабным законам известным для однородной изотропной турбулентности (т.н. закон  $-5/3$  Колмогорова в случае 3х мерной турбулентности). На рис.5.9, для решения КАБАРЕ на сетке на сетке 7,8 млн. ячеек, в логарифмическом масштабе показаны спектры аксиальной компоненты скорости  $Log_{10}PSD$ , где  $PSD = 2 \cdot SS^* / T, S = \int u'(t)e^{i2\pi \cdot f \cdot t} dt$ , в трёх сечениях струи: близко от среза сопла (0,5 калибра), в районе конца начально участка (4 калибра) и за начальным участком в области выхода на автомоделное изменение скорости струи (8 калибров). Частота обезразмерена на калибр струи, D и на скорость струи на срезе сопла, U:  $St = f \cdot D / U$ . Видно, что для области развитого перемешивания как минимум одна октава спектра пульсаций скорости отвечает закону  $-5/3$ , в соответствии с теорией [67](Колмогоров, А. Н., Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости, УМН, 59:1(355) (2004), 5–10). По мере расширения струи эта зона трехмерной турбулентности все больше растёт (а, b). Наряду с  $-5/3$ , частично наблюдается также наклон близкий к  $-3$ , который соответствует двумерной турбулентности. Этот наклон особенно заметен в сечении вблизи среза сопла (с), отвечающему очень тонкому слою смешения относительно радиуса струи, где теоретическое предположение об однородной изотропности пульсаций явно не выполняется.



(a)

(b)



(c)

Рис. 5.9. Спектры аксиальной компоненты скорости пульсаций из расчета КАБАРЕ на сетке 7,8 млн. ячеек в слое смешения на разных расстояниях от среза сопла: (a)  $x=8D$ , (b)  $x=4D$ , (c)  $x=0,5D$

Наконец еще одной важной характеристикой турбулентных струй является двухточечная корреляционная функция скоростей.

Соответствующие формулы для корреляций второго и четвертого порядка выписаны ниже

$$R_{ij}(\mathbf{y}, \Delta, dt) = \overline{\sqrt{\rho(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)v_i''(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)}\sqrt{\rho(\mathbf{y}, \tau)v_j''(\mathbf{y}, \tau)}}$$

$$R_{ijkl}(\mathbf{y}, \Delta, dt) = \overline{\rho(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)v_i''(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)v_j''(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)\rho(\mathbf{y}, \tau)v_k''(\mathbf{y}, \tau)v_l''(\mathbf{y}, \tau)} - \overline{\rho(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)v_i''(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)v_j''(\mathbf{y} + \Delta, \tau + dt)} \cdot \overline{\rho(\mathbf{y}, \tau)v_k''(\mathbf{y}, \tau)v_l''(\mathbf{y}, \tau)}$$

где черта обозначает усреднение по времени расчёта.

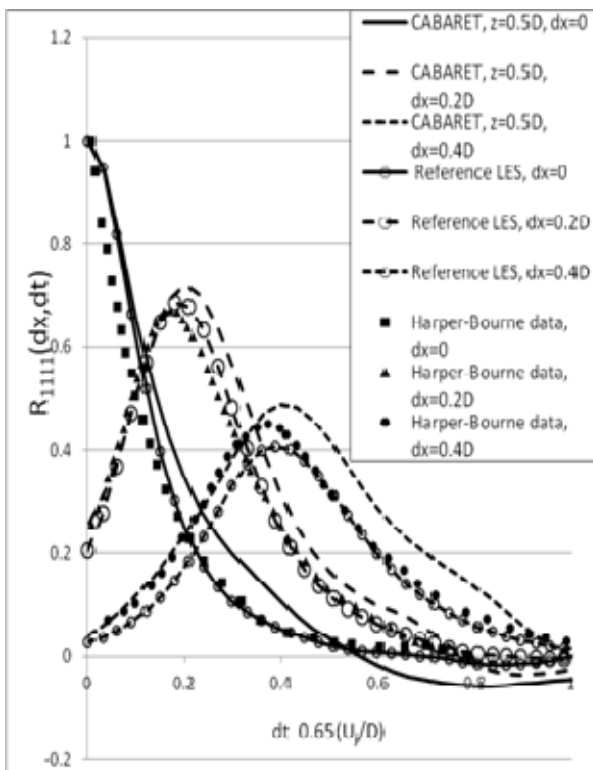
В частности, в соответствии с теорией порождения звука аэродинамическим потоком в рамках акустической аналогии [68], корреляционная функция четвертого порядка функция характеризует источники звука в струе. При анализе корреляций, особое внимание уделяется анализу коэффициентов корреляции в аксиальном направлении струи ( $R_{1111}$ ), отвечающему направлению переноса вихрей в струе.

На рис. 5.10 показано сравнение нормализованных коэффициентов корреляции второго и четвертого порядков, полученных обработкой решения КАБАРЕ на сетке 7,8 млн. ячеек, расчета LES на сетке 16,4 млн ячеек из [64], и аналогичной функции, полученной при обработке данных эксперимента, с использованием термоанемометра, другой изотермической осесимметричной струи[69]. Все графики построены в координатах пространственного и временного смещения, обезразмеренных на диаметр сопла и скорость на выходе из него. Два решения КАБАРЕ соответствуют верхней и нижней полуплоскости (значениям азимутального угла в цилиндрической системе координат струи 0 и 180<sup>0</sup>). Решение из [64] соответствует азимутальному усреднению по всем углам струи, чтобы восполнить недостаток временной реализации осреднением по углу. Усреднение данных обоих расчетов, использовавшееся при вычислении корреляций - и КАБАРЕ и [64], отвечало примерно одному и тому же интервалу времени, которое в безразмерных единицах составляло  $T \sim 300 \cdot D/U$ . Эксперимент соответствует одному аксиальному углу, но гораздо более длинному времени реализации. Аксиальная координата точки, где мерялись корреляции соответствует

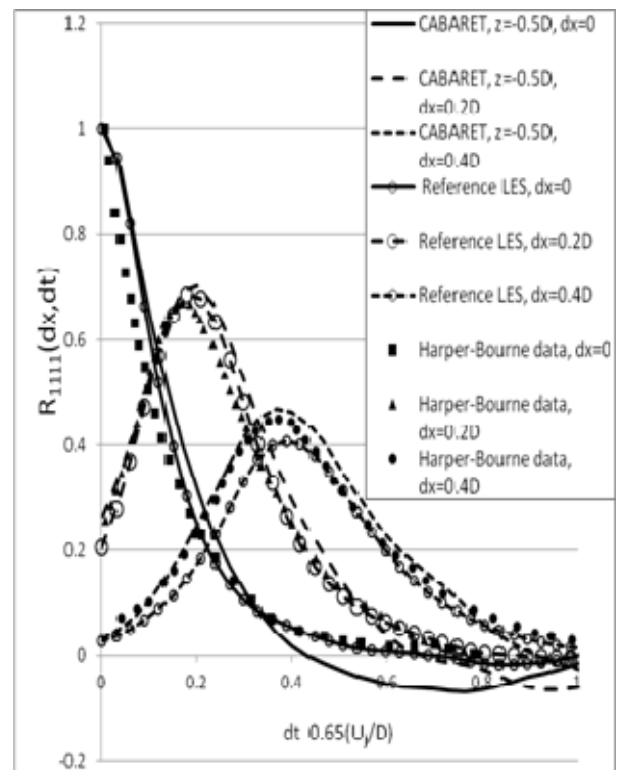


одному и тому же положению внутри потенциального ядра струи,  $x=4D$ , радиальная - середине слоя смешения.

Существенно, что параметры струй, отвечающих сравниваемым корреляционным функциям, сильно отличаются. Как отмечалось выше, оба решения LES соответствуют струе с числом Рейнольдса  $Re=10^6$  и числом Маха на выходе сопла  $M=0,75$ , а эксперимент [69] соответствовал  $Re=2 \cdot 10^5$  и  $M=0,18$ . Хорошее соответствие между корреляционными характеристиками разных изотермических осесимметричных струй свидетельствует о слабом влиянии числа Маха и числа Рейнольдса (выше некоторого порогового значения) на характерные временные и пространственные масштабы корреляции пульсаций скорости. Также хорошее совпадение результатов расчета такой тонкой характеристики как корреляционная функция четвертого порядка на сетке 7,8 млн., являющейся достаточно грубой по стандартам такого рода расчетов, еще раз подчеркивает хорошие свойства схемы КАБАРЕ.



(a)



(b)

*Рис. 5.10. Сравнение рассчитанных корреляционных функций  $R_{1111}(\mathbf{x}, \mathbf{dx}, dt)$  турбулентных пульсаций скорости в струе с использованием решения LES - КАБАРЕ на сетке 7,8 млн. ячеек и предыдущего решения в литературе на более подробной сетке с результатами измерений с использованием термоанемометра, где данные КАБАРЕ получены для углов струи (a)  $0^\circ$  и (b)  $180^\circ$*

### ***Заключение к Главе 5***

Рассмотрено использование метода КАБАРЕ для решения уравнений Навье-Стокса в рамках приближения крупных вихрей для задачи об истечении высокоскоростной струи в затопленное пространство. Рассмотренная задача соответствует данным европейского эксперимента JEAN. Проведено сравнение результатов расчета как между двумя моделями КАБАРЕ на разных сетках, так и с данными эксперимента и другими имеющимися данными в литературе. Это сравнение, проведенное как в норме простых средних, так и в норме среднеквадратичных моментов, показало хорошую точность метода КАБАРЕ. Также продемонстрирована способность метода КАБАРЕ на довольно грубых сетках правильно описывать моменты более высокого порядка - двухточечную функцию корреляции четвертого момента скорости, имеющее прямое отношение к источникам звука в турбулентной струе.

## Защищаемые положения

1. Предложено обобщение схемы КАБАРЕ для уравнений газовой динамики в двумерном и трехмерном случаях. Улучшена процедура реконструкции потоков при наличии звуковой точки.
2. Проведена серия двумерных расчетов изолированных вихрей и их взаимодействия с ударными волнами, на которых подтверждены такие положительные качества алгоритмов Кабаре, как малая диссипативность и отсутствие паразитных осцилляций при наличии больших градиентов решения.
3. Разработаны параллельные алгоритмы для решения, на основе схемы Кабаре, трехмерных уравнений Навье-Стокса.
4. Решена прикладная задача о турбулентном истечении реактивной струи из сопла авиадвигателя. Проведена статистическая обработка решения для нескольких сеток и показано хорошее совпадение результатов расчета с данными европейского верификационного эксперимента JEAN.

## Литература

1. И.Г.Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными* 1961, Москва: ФИЗМАТГИЗ.
2. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко, *Системы квазилинейных уравнений* 1968, Москва: Наука.
3. А.А.Самарский, *Введение в численные методы* 1987, Москва: Наука.
4. Hirsh, C., *The fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. 2 ed 2007: John Wiley & Sons Ltd.
5. А.И.Толстых, *О методе численного решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса*. ДАН СССР, 1973. **210**(1): p. 48-51.
6. S.K.Lele, *Compact finite-difference scheme with spectral-like resolution*. Comput. Phys., 1992. **103**: p. 16-42.
7. C.K.W.Tam and J.C.Webb, *Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics*. Comput. Phys., 1993. **107**: p. 262-281.
8. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, *О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов*. ДАН СССР, 1954. **99**(1): p. 27-30.
9. А.А.Самарский, Ю.П.Попов, *Разностные схемы газовой динамики* 1975, Москва: Наука.
10. К.М.Магомедов, *Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа*. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1966. **6**(2): p. 313-325.
11. Н.Н.Яненко, Е.В.Ворожцов, В.М.Фомин, *Дифференциальные анализаторы ударных волн*. ДАН СССР, 1976. **227**(1): p. 50-53.
12. Е.В.Ворожцов, Н.Н.Яненко, *Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики*. НАУКА 1985, Новосибирск.
13. J.P.Boris and D.L.Book, *Flux-corrected transport.I.SHASTA, a fluid transport algorithm that works*. Comput. Phys., 1973. **11**(1): p. 38-69.

14. J.P.Boris and D.L.Book, *Flux-corrected transport. II. Generalizations of the method*. Comput. Phys., 1975. **18**(3): p. 248-283.
15. J.P.Boris and D.L.Book, *Flux-corrected transport.III.Minimal-error FCT algorithms*. Comput. Phys., 1976. **20**(4): p. 397-431.
16. В.П.Колган, *Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики*. Уч.зап.ЦАГИ, 1972. **3**(6): p. 68-77.
17. Leer, B.v., *Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method*. Comput. Phys., 1979. **32**: p. 101-136.
18. A.Harten, et al., *Uniformly High Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes III*. Comput. Phys., 1987. **71**: p. 231-303.
19. К.В.Вязников, В.Ф.Тишкин, А.П.Фаворский, *Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа*. Математическое моделирование, 1989. **1**(5): p. 95-120.
20. C.W.Shu, *TVB uniformly high-order schemes for conservation laws*. Math. Comp., 1987. **49**(179): p. 105-121.
21. M.-S.Liou, *A sequel to AUSM: AUSM<sup>+</sup>*. Comput. Phys., 1996. **129**(2): p. 364-382.
22. X.-D.Liu, S.Osher, and T.Chan, *Weighted essentially non-oscillatory schemes*. Comput. Phys., 1994. **115**(1): p. 200-212.
23. E.F.Toro, *A weighted averaged flux method for hyperbolic conservation laws*. Proc. Royal Soc. London, 1989. **A423**(1865): p. 401-418.
24. B.Cockburn and C.W.Shu, *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems*. Journal of Scientific Computing, 2001. **16**(3): p. 173-261.
25. P.Colella and P.R.Woodward, *The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations*. Comput. Phys., 1984. **54**: p. 174-201.

26. A.Iserles, *Generalized Leapfrog Methods*. IMA Journal of Numerical Analysis, 1986. **6**(3): p. 381-392.
27. В.М.Головизнин, А.А.Самарский, *Некоторые свойства разностной схемы КАБАРЕ*. Математическое моделирование, 1998. **10**(1): p. 101-116.
28. В.М.Головизнин, А.А.Самарский, *Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной*. Математическое моделирование, 1998. **10**(1): p. 86-100.
29. В.М.Головизнин, С.А.Карабасов, И.М.Кобринский, *Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными*. Математическое моделирование, 2003. **15**(9): p. 29-48.
30. В.М.Головизнин, С.А. Карабасов, *Нелинейная коррекция схемы «КАБАРЕ»*. Математическое моделирование, 1998. **12**(1): p. 107-123.
31. В.М.Головизнин, С.А. Карабасов, *Балансно – характеристические схемы на кусочно-постоянных начальных данных. Прыжковый перенос*. Математическое моделирование, 2003. **15**(10): p. 71-83.
32. P.L.Roe, *Linear bicharacteristic schemes without dissipation*. Journal of Scientific Computing, 1998. **19**: p. 1405-1427.
33. Q.H.Tran and B.Scheurer, *High-Order Monotonicity-Preversing Compact Schemes for Linear Scalar Advection on 2D Irregular Meshes*. Comput. Phys., 2002. **175**(2): p. 454-486.
34. S.Kim, *High-order upwind leapfrog methods for multidimensional acoustic equations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids 2004. **44**: p. 505-523.
35. В.М.Головизнин, *Балансно – характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных*. Математическое моделирование, 2006. **18**(11): p. 14-30.

36. V.M.Goloviznin, S.A. Karabasov, *Compact Accutately Boundary-Adjusting high-Resolution Technique for fluid dynamics*. Comput. Phys., 2009.
37. V.M.Goloviznin, et al., *A novel computational method for modelling stochastic advection in heterogeneous media*. Transport in Porous Media, 2007. **66**(3): p. 439-456.
38. S.A.Karabasov, V.M. Goloviznin, *New efficient High-Resolution Method for Nonlinear Problems in Aeroacoustics*. AIAA, 2007. **45**(12): p. 2861-2871.
39. V.M.Goloviznin, S.A.Karabasov, and V.G.Kondakov, *Generalization of CABARET scheme for two-dimensional orthogonal computational grid*. Computational Mathematics, 2013. **25**(7): p. 103-136.
40. G.A.Faranosov, et al., *CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation*. Computers & fluids, 2013. **88**: p. 165-179.
41. O.Power, et al., *Measurements of turbulence statistics in high subsonic jets*. 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2004(AIAA-2004-3021).
42. А.А.Самарский, Ю.П.Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*. 1992, Москва: НАУКА.
43. А.Г.Куликовский, Н.В.Погорелов, Ф.Ю.Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систему уравнений*. Vol. 607. 2001, Москва: Физматлит.
44. А.И.Жуков, *Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики*. Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, 1960. **58**.
45. К.М.Магомедов, А.С.Холодов, *Сеточно-характеристические численные методы* 1988, Москва: НАУКА.
46. В.М.Головизнин, *Балансно – характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики* in ДАН СССР 2005.
47. C.-W.Shu and S.Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II*. Comput. Phys., 1988. **83**(1): p. 32-78.

48. В.М.Головизнин, А.А. Канаев, *Принцип минимума парциальных локальных вариаций для определения конвективных потоков при численном решении одномерных нелинейных скалярных гиперболических уравнений*. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011. **51**(5): с. 881-897.
49. А.И.Жуков, *Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики*. Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР, 1960. **58**.
50. К.М.Магомедов, А.С. Холодов, *Сеточно-характеристические численные методы* 1988, Москва: НАУКА.
51. V.M.Goloviznin, T.P. Hynes, and S.A. Karabasov, *CABARET finite-difference schemes for the one-dimensional Euler equations*. Mathematical Modelling and Analysis, 2001. **6**(2): p. 210-220.
52. Toro, E.F. and V.A. Titarev, *Solution of the generalized Riemann problem for advection-reaction equations*. Proc. Roy. Soc., 2002. **458**(2018): p. 271-281.
53. Qiu, J. and C.-W. Shu, *Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one dimensional case*. Comput. Phys., 2003. **193**: p. 115-135.
54. Д.Андерсон, Д.Таннехилл, Р. Плетчер, *Вычислительная гидромеханика и теплообмен*. Vol. 2. 1990, Москва: МИР.
55. B.F.Armaly, et al., *Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow*. Fluid Mechanics, 1983. **127**: p. 473-496.
56. T.P.Chiang and T.W.H.Sheu, *A numerical revisit of backward-facing step flow problem*. Physics of Fluids, 1998. **11**(4): p. 862-874.
57. T.Lee and D.Mateescu, *Experimental and numerical investigation of 2d backward-facing step flow*. Fluid and Structures, 1998. **12**: p. 703-716.
58. Driver, D.M. and H.L. Seegmiller, *Features of reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow*. AIAA, 1985. **23**(2): p. 163-171.



59. Jovic, S. and D.M. Driver, *Reynolds number effect on the skin friction in separated flows behind a backward-facing step*. Experiments in Fluids, 1995. **18**: p. 464-467.
60. Grigoriadis, D.G.E., J.G. Bartzis, and A. Goulas, *Efficient treatment of complex geometries for large eddy simulations of turbulent flows*. Computers & fluids, 2004. **33**: p. 201-222.
61. Le, H., P. Moin, and J. Kim, *Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step*. Fluid Mechanics, 1997. **330**: p. 349-374.
62. Jovich, S. and D.M. Driver, *Backward-Facing Step Measurements at Low Reynolds Number,  $Re_h=5000$* , 1994.
63. А.А. Самарский, А.В. Гулин, *Численные методы математической физики* 2000, Москва: Научный мир.
64. S.A.Karabasov, *Jet Noise - Acoustic Analogy informed by Large Eddy Simulation*. AIAA, 2010. **48(7)**: p. 1312-1325.
65. W.A.McMullan, *Large eddy simulation of a high Reynolds number subsonic turbulent jet for acoustic source capture*. 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2008.
66. C.Fureby and F.F.Grinstein, *Large Eddy simulation of High-Reynolds-Number Free and Wall-Bounded Flows*. Comput. Phys., 2002. **181(1)**: p. 68-97.
67. А.Н.Колмогоров, *Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости*. Успехи Математических Наук, 2004. **59(355)**: p. 5-10.
68. M.E.Goldstein, *A generalized acoustic analogy*. Fluid Mechanics, 2003. **488**: p. 315-333.
69. M.Harper-Bourne, *Jet noise turbulence measurements*. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2003.