Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

На правах рукописи

УДК 517.927.4; 517.958

Валовик Дмитрий Викторович

Нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Пенза – 2014

Работа выполнена на кафедре математики и суперкомпьютерного моделирования Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Пензенский государственный университет».

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Математика и суперкомпьютерное моделирование» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет» **Смирнов Юрий Геннадьевич**
Официальные оппоненты:	**Карчевский Евгений Михайлович**, доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (г. Казань), профессор кафедры «Прикладная математика»;
	Тихонравов Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» (г. Москва), директор Научно-исследовательского вычислительного центра (НИВЦ);
	Шестопалов Юрий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики» (МГТУ МИРЭА) (г. Москва), ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Институт вычислительной математики (ИВМ) РАН (г. Москва)

Защита состоится «15» октября 2014 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.43 ФГБОУ ВПО «Московский государственный университета им. М. В. Ломоносова» по адресу: г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в Научной библиотеке ФГБОУ ВПО «Московский государственный университета им. М. В. Ломоносова», а также на официальном сайте факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова: http://cs.msu.ru в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «_ _» сентября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор Захаров Евгений Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла возникают при изучении распространения электромагнитных волн в неоднородных волноведущих структурах. К таким задачам относится распространение поляризованных TE- и/или TM-волн в плоских диэлектрических слоях и диэлектрических цилиндрических волноводах[1] (интерес представляют в том числе и многослойные структуры[2]).

Задачи для сред с постоянной диэлектрической проницаемостью (слой, круглый цилиндрический волновод и др.) являются классическими в электродинамике и хорошо изучены[3]. На базе результатов этой теории разработано и функционирует множество волноведущих устройств в тех-нике СВЧ и оптике.

Начиная с 60-х гг. прошлого века после создания лазера стали активно изучаться электромагнитные явления в нелинейных средах.

Актуальность исследования задач о распространении TE- и/или TM-волн в нелинейных волноведущих структурах обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, разработка новых методов исследования таких нелинейных задач на собственные значения актуальна с математической точки зрения, поскольку отсутствуют общие методы исследования указанного класса задач. В данной диссертации предложен общий метод исследования указанного класса задач. Эти нелинейные задачи сводятся к отысканию собственных значений (значений постоянной распространения), при которых волна может распространяться. Отметим, что рассматриваемые задачи являются нелинейными как по искомым функциям, так и по спектральному параметру (или паре спектральных параметров). Во-вторых, задачи с «простой» геометрией (плоские слои, круглые цилиндрические волноводы) имеют широкие практические приложения[1]. Центральной проблемой здесь является определение условий существования постоянных распространения. Знание постоянных распространения необходимо при конструировании волноведущих структур.

[1]**Ахмедиев Н. Н., Анкевич А.** Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. – М.: Физматлит, 2003 ; **Шен И. Р.** Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989 ; **Ponath H.-E., Stegeman G. I.** (editors) Modern problems in condensed matter sciences. Vol. 29. Nonlinear surface electromagnetic phenomena. – North-Holland: Elsevier Science Publishers, 1991.

[2]**Joannopoulos J. D. et al.** Photonic Crystals. Molding the flow of light. – Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2008 ; **Lourtioz J.-M. et al.** Photonic Crystals. Towards nanoscale photonic devices. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[3]**Адамс М.** Введение в теорию оптических волноводов. – М.: Мир, 1984 ; **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988 ; **Стрэттон Дж. А.** Теория электромагнетизма. – Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1948.

В последние десятилетия предпринимались попытки обобщения известных результатов линейной теории на случай нелинейных задач. Первые фундаментальные результаты были получены В. М. Елеонским, Л. Г. Оганесьянцем и В. П. Силиным[4]. Первые математически строгие решения задач сопряжения на собственные значения для ТЕ-волн были получены в работах В. С. Серова, Ю. Г. Смирнова, Ю. В. Шестопалова, H.-W. Schürmann[5]. Также важные результаты получены в работах A. D. Boardman, D. N. Christodoulides, K. M. Leung[6]. Заметим однако, что общего метода исследования предложено не было, так же как не было получено общих результатов о существовании и локализации собственных значений.

Как известно, в линейной среде ТЕ- и ТМ-волны распространяются не взаимодействуя. Явление нелинейности приводит к новому, принципиально важному результату: существует режим распространения ТЕ- и ТМ-волн, в котором ТЕ- и ТМ-волны, распространяясь каждая со своей постоянной распространения и на своей частоте, взаимодействуют, но сохраняют структуру поверхностных волн, образуя связанную волну. Изучение связанных волн, с одной стороны, интересно с физической точки зрения, поскольку они описывают новые режимы распространения волн в волноведущих структурах, которые, в частности, могут оказаться полезными на практике. С другой стороны, возникает новый класс математических задач на собственные значения. Постоянные распространения в такой задаче существуют дискретными парами, что соответствует парным собственным значениям, или двухпараметрической задаче на собственные значения[7]. Математические методы исследования таких задач пока также не разработаны.

Взаимодействие между ТЕ- и ТМ-волнами в нелинейной волноведущей структуре с керровской нелинейностью рассматривалось как у нас[8],

---

[4]**Eleonskii P. N., Oganes'yants L. G., Silin V. P.** // Soviet Physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.

[5]**Смирнов Ю. Г., Куприянова С. Н.** // Жур. выч. мат. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1850–1860 ; **Schürmann H.-W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V.** // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58, № 1. – P. 1040–1050 ; **Schürmann H.-W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V.** // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – V. 35, № 50. – P. 10789–10801 ; **Schürmann H.-W., Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V.** // Phys. Rev. E. – 2005. – V. 71, № 1. – P. 016614-1–10 ; **Serov V. S., Shestopalov Yu. V., Schürmann H.-W.** // Dokl. Math. – 1999. – V. 60. – P. 742–744 ; **Smirnov Yu. G., Valovik D. V.** // ISRN Math. Phys. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–7.

[6]См., например, **Leung K. M.** // Phys. Rev. B. – 1985. – Vol. 32, № 8. – P. 5093–5101 ; **Joseph R. I., Christodoulides D. N.** // Optics Letters. – 1987. – V. 12, № 10. – P. 826–828.

[7]**Atkinson F. V., Mingarelli A. B.** Multiparameter eigenvalue problems. Sturm – Liouville theory. – NW: CRC Press, 2011.

[8]**Елеонский В. М., Оганесьянц Л. Г., Силин В. П.** // Успехи физ. наук. – 1972. – Т. 107, № 3. – С. 516–518 ; **Eleonskii V. M., Oganes'yants L. G., Silin V. P.** // Soviet Phys. JETP. – 1973. – Vol. 36. № 2. – P. 282–285.

так и за рубежом[9]. В указанных работах отсутствуют результаты о разрешимости такой задачи. Использование предложенного в диссертации метода позволило доказать существование дискретных пар собственных значений, а также предсказать и теоретически обосновать существование нового волноводного режима для нелинейных волноведущих структур.

Цель работы

Основной целью диссертации является *разработка общего математического аппарата для исследования нелинейных одно- и двухпараметрических задач сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла в слое.*

Методы исследования

Проведенные исследования опираются на методы решения краевых задач на собственные значения для уравнений в частных производных; классические результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений; методы теории интегральных уравнений; методы функционального анализа; численные методы исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна работы

Результаты работы являются новыми и получены автором лично. В работе предложен и развит новый математический подход, позволяющий исследовать нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла. Разработанный подход обладает большой теоретической общностью и позволяет исследовать широкий класс нелинейных задач.

Основные результаты диссертации

Результаты диссертации состоят в следующем:

- предложен и развит новый математический подход – метод интегральных дисперсионных уравнений, позволяющий исследовать нелинейные одно- и двухпараметрические задачи сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла;
- введены понятия собственного значения и парных (или связанных) собственных значений для некоторых классов нелинейных задач сопряжения на собственные значения;

[9]**Boardman A. D., Twardowski T.** // J. Opt. Soc. Am. B. – 1988. – Vol. 5, № 2. – P. 523–528 ; **Boardman A. D., Twardowski T.** // Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 39, № 5. – P. 2481–2491.

- доказаны теоремы об эквивалентности соответствующей однопараметрической задачи сопряжения на собственные значения и дисперсионного уравнения, о существовании и локализации собственных значений, о распределении нулей и периодичности собственных функций в однопараметрических задачах, исследованы некоторые конкретные типы нелинейностей, а также связь между решениями нелинейных задач и решениями соответствующих линейных задач;
- доказаны теоремы об эквивалентности соответствующей двухпараметрической задачи сопряжения на собственные значения и дисперсионного уравнения, о существовании и локализации парных собственных значений в двухпараметрической задаче, исследована связь между решениями нелинейной задачи и решениями соответствующей линейной задачи, предложены и обоснованы численные методы нахождения приближенных собственных значений;
- в результате исследования найдены новые типы нелинейных волн (TE-, TM-, TE-TM-волн) в изученных волноведущих структурах.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Ее теоретическая значимость заключается в создании и обосновании принципиального нового математического метода для изучения нелинейных спектральных задач теории волноводов. Введены понятия собственного значения и парных собственных значений для некоторых классов нелинейных спектральных задач. Также предложен, обоснован и реализован численный метод нахождения приближенных собственных значений в рассматриваемых задачах. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях по теории нелинейных спектральных и краевых задач.

Практическая значимость работы состоит в том, что построенный математический аппарат позволил доказать существование нелинейных режимов распространения электромагнитных волн и предсказать существование новых типов нелинейных волн.

Обоснованность и достоверность результатов

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами, сравнением результатов с простейшими модельными задачами.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

• семинаре кафедры физики Osnabrück University, руководитель – проф. H.-W. Schürmann (Германия, г. Оснабрюк, 2010, 2011);

• семинаре по электродинамике факультета ВМК, МГУ им. М. В. Ломоносова, руководители – проф. Е. В. Захаров и проф. А. С. Ильинский (Россия, г. Москва, 2012);

• семинаре кафедры «Прикладная математика» Казанского (Приволжского) федерального университета, руководитель – проф. Н. Б. Плещинский (Россия, г. Казань, 2013);

• семинаре кафедры Electrical, Electronic, and Communication Engineering университета Chuo, руководитель – проф. K. Kobayashi (Япония, г. Токио, 2013);

• семинаре кафедры Electrical Engineering университета Nihon, руководитель – проф. T. Yamasaki (Япония, г. Токио, 2013);

• семинаре Computational and Applied Mathematics университета Chalmers, руководитель – проф. S. Larsson (Швеция, г. Гетеборг, 2013);

• семинаре «Вычислительная математика и приложения», Институт вычислительной математики РАН, руководитель – чл.-корр. РАН, проф. Е. Е. Тыртышников (Россия, г. Москва, 2013);

• научно-методологическом семинаре НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, руководитель – д.ф.-м.н., проф. А. В. Тихонравов (Россия, г. Москва, 2013);

• семинаре, руководимом акад. РАН, проф. В. А. Ильиным и акад. РАН, проф. Е. И. Моисеевым (факультет ВМК, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, г. Москва, 2013);

• международных конференциях «Days on Diffraction» (Россия, г. Санкт-Петербург, 2007, 2011, 2013);

• 13-й и 14-й международных конференциях «Mathematical Methods in Electromagnetic Theory» (Украина, г. Киев, 2010; г. Харьков, 2012);

• международных конференциях «Progress in Electromagnetic Research Symposium» (Китай, г. Сучжоу, 2011; Малайзия, г. Куала Лумпур, 2012; Россия, г. Москва, 2012);

• международном семинаре «Workshop on Large-Scale Modeling» (Швеция, г. Сунне, 2012);

• международной конференции «International Symposium on Electromagnetic Theory» (Япония, г. Хирошима, 2013).

Работа была поддержана грантами РФФИ (№ 06-07-89063а, 2008–2009; № 12-07-97010-р_А, 2012–2013; № 11-07-00330-А, 2011–2012), ФЦП

(№ 2.1.1/1647, 2009–2011; № 14.B37.21.1950, 2012–2013), программы Visby (2012–2013, Швеция), Грантами Президента РФ (МК-2074.2011.1, 2011–2012; МК-90.2014.1, 2014–2015).

Публикации

Основные результаты диссертации отражены в 29 научных работах (2 монографии; 27 статей, из них 7 публикаций без соавторов). Все указанные статьи опубликованы в реферируемых журналах (статьи [3–25] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, в которых рекомендуется публиковать основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук), обе монографии также прошли рецензирование. В совместных работах профессору Ю. Г. Смирнову принадлежит первоначальная постановка задач, аспирантам Е. В. Зарембо и Е. Ю. Смолькину – программная реализация некоторых численных методов, Д. В. Валовику – получение конкретных результатов и их доказательства.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 155 страницах, включающих 11 рисунков, и состоит из введения, трех глав, списка литературы, содержащего 127 наименований, и четырех приложений.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулирована цель и дан обзор работ по теме исследований, изложено краткое содержание и сформулированы основные результаты диссертации.

В **главе 1** исследуется нелинейная однопараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение поверхностных электромагнитных ТЕ-волн в слое, диэлектрическая проницаемость которого является произвольной функцией от модуля напряженности электрического поля.

Рассматриваются монохроматические ТЕ-волны $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$, распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant h\}$, здесь

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^{\mathrm{T}} - \tag{1.1}$$

комплексные амплитуды; ω – круговая частота.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_0$ и $\varepsilon_3 \geqslant \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается следующим выражением: $\varepsilon = \varepsilon_2 + f(|\mathbf{E}|^2)$, где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $f \in C^1\,[0, +\infty)$, $f(s^2) \geqslant 0$ и $f(0) = 0$.

Комплексные амплитуды (1.1) удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \tag{1.2}$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$.

Доказано, что компоненты TE-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ, имеют представление

$$E_y = \mathrm{E}_y(x)e^{i\gamma z},\ H_x = \mathrm{H}_x(x)e^{i\gamma z},\ H_z = \mathrm{H}_z(x)e^{i\gamma z}, \tag{1.3}$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Обозначим $k_0^2 := \omega^2\mu_0\varepsilon_0$. Подставляя компоненты (1.3) в систему (1.2), выполняя нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0 x$, $\frac{d}{dx} = k_0\frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$ $(j = 1, 2, 3)$, обозначая $Y(\tilde{x}) := \mathrm{E}_y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, получаем

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon)Y(x), \tag{1.4}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + f(Y^2), & 0 \leqslant x \leqslant h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases} \tag{1.5}$$

Функция Y дифференцируема так, что

$$Y(x) \in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty). \tag{1.6}$$

Условия сопряжения для функции Y следуют из условий непрерывности касательных компонент электромагнитного поля и имеют вид

$$[Y]|_{x=0} = 0, \quad [Y]|_{x=h} = 0, \quad [Y']|_{x=0} = 0, \quad [Y']|_{x=h} = 0, \tag{1.7}$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Определение 1.1. Число $\gamma = \widehat{\gamma}$ такое, что при фиксированном значении $Y(0) \neq 0$ (без потери общности можно считать $Y(0) > 0$) существует не равная тождественно нулю функция $Y(x;\widehat{\gamma})$, которая удовлетворяет уравнению (1.4), условиям (1.6), (1.7) и затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$, будем называть собственным значением, а функцию $Y(x;\widehat{\gamma})$, соответствующую этому собственному значению, – собственной функцией.

Задача P_E: доказать существование собственных значений γ, удовлетворяющих определению 1.1.

Разыскиваются такие положительные значения γ, что справедливо $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$. Это условие соответствует классической задаче распространения TE-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью[1], поэтому мы придерживаемся его при изучении задачи P_E.

Пусть $k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1 > 0,\ \ k_2^2 := \varepsilon_2 - \gamma^2 > 0,\ \ k_1^3 := \gamma^2 - \varepsilon_3 > 0.$

При $x < 0$ и $x > h$ уравнение (1.4) является линейным. Учитывая условие на бесконечности, получаем, что решения уравнения (1.4) в указанных областях имеют вид

$$Y(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x}, & x < 0; \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \tag{1.8}$$

Постоянная A в (1.8) отвечает значению $Y(0)$ (см. определение 1.1) и предполагается фиксированной (известной).

Постоянная B определяется условиями сопряжения (1.7).

Внутри слоя Σ уравнение (1.4) принимает вид

$$Y'' = -\left(k_2^2 + f(Y^2)\right) Y. \tag{1.9}$$

Первый интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид

$$Y'^2 + k_2^2 Y^2 + \varphi(Y^2) \equiv C, \tag{1.10}$$

где $\varphi(Y^2) = \int_0^{Y^2} f(u)du$; C – постоянная.

Постоянная C вычисляется из первого интеграла (1.10) с использованием решения (1.8) и условий сопряжения (1.7) и равна

$$C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + \varphi(A^2). \tag{1.11}$$

Неизвестная постоянная B определяется из уравнения

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)B^2 + \varphi(B^2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + \varphi(A^2), \tag{1.12}$$

которое имеет два действительных решениях $\pm B'$.

[1] **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.

Постоянные B и C не зависят ни от точки $x = h$, ни от спектрального параметра γ; кроме того, $C > 0$.

Доказано, что дисперсионное уравнение задачи P_E имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := T_1 + nT_2 = h, \tag{1.13}$$

где

$$T_1 = \int\limits_{-k_3}^{k_1} w d\eta, \;\; T_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w d\eta \;\text{ и }\; w = \frac{1}{k_2^2 + f(\tau) + \eta^2};$$

функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ определяется из уравнения $(\eta^2 + k_2^2)\tau + \varphi(\tau) \equiv C$; C определена формулой (1.11); $n = 0, 1, 2, \ldots$

Важно отметить, что дисперсионное уравнение (1.13) не зависит от решений уравнения (1.12).

Фактически уравнение (1.13) является семейством (но не системой) уравнений для различных n. Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Другими словами, пусть σ_E^D – множество решений дисперсионного уравнения (1.13). Тогда $\sigma_E^D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i$, где σ_j содержит все положительные решения (и только их) уравнения $\Phi(\gamma; j) - h = 0$. Кроме того, $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех возможных $i \neq j$.

Пусть σ_E – совокупность всех собственных значений задачи P_E. Справедлива следующая теорема об эквивалентности, которая, в частности, утверждает, что $\sigma_E = \sigma_E^D$.

Теорема 1.1 (об эквивалентности). *Значение $\gamma = \widehat{\gamma}$ является собственным значением задачи P_E тогда и только тогда, когда существует целое число $n = \widehat{n} \geqslant 0$ такое, что $\gamma = \widehat{\gamma}$ удовлетворяет уравнению $\Phi(\gamma; \widehat{n}) - h = 0$.*

Кроме того, собственная функция $Y(x; \widehat{\gamma})$ имеет в точности $\widehat{n}$ нулей при $x \in (0, h)$; если x_i является i-м нулем функции $Y(x; \widehat{\gamma})$, то $x_i = \int_{-\infty}^{k_1} w d\eta + (i-1)T_2$.

Теорема 1.2 (о периодичности). *Пусть $\widehat{\gamma}$ – собственное значение задачи P_E. Если собственная функция $Y(x; \widehat{\gamma})$ имеет более двух нулей при $x \in (0, h)$, тогда функция $Y(x; \widehat{\gamma})$ периодическая с периодом $2T_2$.*

Пусть $\Gamma = (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2)$ и $h_{\inf}^k = \inf\limits_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma; k)$, $h_{\sup}^k = \sup\limits_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma; k)$.
Величина $h_{\inf}^k$ всегда существует. Указанная sup существует не всегда, например, sup не существует, если $f \equiv 0$. Когда мы пишем $h_{\sup}^k$, мы предполагаем, что указанный (конечный) sup существует.

Теорема 1.3. *Пусть для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$, $f \in C^1\,[0, +\infty)$ и h таково, что $h^p_{\inf} < h < h^p_{\sup}$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).*

Теорема 1.4. *Пусть $\Phi(\gamma; k)$ неограничена при $\gamma^2 \in \Gamma$, $f \in C^1\,[0, +\infty)$ и h таково, что для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).*

В теоремах 1.3, 1.4 утверждается существование собственных значений; в теоремах 1.5, 1.6 – их изолированность.

Теорема 1.5. *Пусть для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$, функция $f(u)$ является аналитической функцией в $\mathbb{C}$ (как функция комплексного переменного $u = Y^2$) и h таково, что $h^p_{\inf} < h < h^p_{\sup}$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).*

Кроме того, если условие $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$ справедливо для всех p, то множество собственных значений σ_E задачи P_E является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathrm{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Теорема 1.6. *Пусть функция $\Phi(\gamma; k)$ неограничена при $\gamma^2 \in \Gamma$, функция $f(u)$ является аналитической функцией в $\mathbb{C}$ (как функция комплексного переменного $u = Y^2$) и h таково, что для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h$, тогда задача P_E имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).*

Кроме того, если условие $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$ справедливо для всех p, то множество собственных значений σ_E задачи P_E является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathrm{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Величины $h^k_{\inf}$ и $h^k_{\sup}$ можно находить численно.

Условие $\gamma^2 < \varepsilon_2$ является точным. Действительно, для функции $f \equiv 0$ получаем линейную задачу. В такой линейной задаче необходимо $\gamma^2 < \varepsilon_2$.

Также в первой главе исследованы две задачи для конкретных функций нелинейности: задача P_{E1}: $f \equiv \alpha Y^2$ (закон Керра); задача P_{E2}: $f \equiv \frac{\alpha Y^2}{1+\beta Y^2}$ (нелинейность с насыщением). Эти нелинейности находят широкое применение в нелинейной оптике.

В теоремах 1.7, 1.8 используются следующие обозначения для собственных значений $\widehat{\gamma}$ задач P_{E1}, P_{E2}: $\widehat{\gamma}_i$ значит, что все собственные значения упорядочены по возрастанию; $\widehat{\gamma}(m)$ значит, что это собственное значение является решением дисперсионного уравнения (1.13) при

$n = m$; значком P_E^{lin} обозначается линейная задача с постоянным $\varepsilon = \varepsilon_2$, такая задача имеет не более конечного числа собственных значений, обозначаемых $\widetilde{\gamma}_i$.

Теорема 1.7 (Задача P_{E1}). *Пусть* $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geqslant \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, $\alpha > 0$ *и* $Y(0) \neq 0$. *В этом случае для любого* $h > 0$ *задача* P_{E1} *имеет бесконечное число положительных собственных значений* $\widehat{\gamma}_i$ *(с точкой накопления на бесконечности).*

Собственные значения $\widehat{\gamma}_i$ *имеют следующие свойства:*
1) если $\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \ldots$ *– все решения задачи* P_{E1}, *то*

$$\widehat{\gamma}_1^2, \widehat{\gamma}_2^2, \ldots \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), +\infty) \;\; \textit{и} \;\; \lim_{j \to \infty} \widehat{\gamma}_j^2 \to \infty;$$

2) если задача P_E^{lin} *имеет* p *решений* $\widetilde{\gamma}_1 < \widetilde{\gamma}_2 < \ldots < \widetilde{\gamma}_p$, *то существует* $\alpha_0 > 0$ *такое, что для любого* $\alpha = \alpha' < \alpha_0$ *справедливо*

$$\widehat{\gamma}_i^2 \in (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_2) \;\; \textit{и} \;\; \lim_{\alpha' \to 0} \widehat{\gamma}_i = \widetilde{\gamma}_i, \; i = \overline{1, p},$$

где $\widehat{\gamma}_1, \ldots, \widehat{\gamma}_p$ *– первые* p *решений задачи* P_{E1} *при* $\alpha = \alpha'$;
2') если $q > p$, *то* $\lim\limits_{\alpha' \to +0} \widehat{\gamma}_q^2 = +\infty$;
3) для больших значений γ *и произвольно малого* $\Delta > 0$ *справедливо следующее асимптотическое двойное неравенство:*

$$(1 - \Delta)\gamma_{\bullet}(m) \leqslant \widehat{\gamma}(m) \leqslant \sqrt{2}(1 + \Delta)\gamma_{\bullet}(m + 1),$$

где $\gamma_{\bullet}^2(m) = \varepsilon_2 + \left(f^{-1}\left(\frac{h}{4m}\right)\right)^2$, f^{-1} *есть обращение функции* $f(t) = t^{-1}\ln t$;
3') если $\sqrt{2\alpha C} < 1$, *где* $C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)A^2 + 0,5\alpha A^4$, *то для больших значений* γ *справедливо более простое асимптотическое неравенство* $\widehat{\gamma}(m) \geqslant \gamma_{\circ}(m)$, *где* $\gamma_{\circ}^2(m) = \varepsilon_2 + \left(\frac{m}{h}\ln(2\alpha C)\right)^2$;
4) если собственное значение $\widehat{\gamma}_i \to \infty$, *то* $\max\limits_{x \in (0,h)} |Y(x; \widehat{\gamma}_i)| \to \infty$.

Теорема 1.8 (Задача P_{E2}). *Пусть* $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \geqslant \varepsilon_0$, $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \varepsilon_2$, $\alpha, \beta > 0$ *и* $Y(0) \neq 0$. *Тогда существует* $h_{\min} > 0$ *такое, что для любого* $h > h_{\min}$ *задача* P_{E2} *имеет конечное число (и не менее одного) положительных собственных значений* $\widehat{\gamma}_i$.

Для всякого собственного значения $\widehat{\gamma}_i$ *задачи* P_{E2} *справедливо, что*

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \widehat{\gamma}_i^2 < \varepsilon_2 + \alpha\beta^{-1},$$

кроме того, для всяких допустимых m *и* $m + 1$ *справедливо*

$$\max \widehat{\gamma}(m + 1) < \max \widehat{\gamma}(m),$$

где $\max$ *берется среди всех положительных решений уравнения* (1.13) *с заданным* $n = m$.

В **главе 2** исследуется нелинейная однопараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение поверхностных электромагнитных ТМ-волн в анизотропном слое, заполненном средой, диэлектрическая проницаемость которой является произвольной функцией от модуля напряженности электрического поля.

Рассматриваются монохроматические ТМ-волны $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$, распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant h\}$, здесь

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{H} = (0, H_y, 0)^{\mathrm{T}} - \tag{2.1}$$

комплексные амплитуды; ω – круговая частота.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geqslant \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается следующим диагональным тензором 3×3:

$$\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}), \tag{2.2}$$

элементы ε_{xx}, ε_{zz} имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_f + \varepsilon_0 f\left(a|E_x|^2 + b|E_z|^2\right), \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_g + \varepsilon_0 g\left(c|E_x|^2 + d|E_z|^2\right), \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_f > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_g \geqslant 0$ – постоянные (вещественные) составляющие диэлектрических проницаемостей ε_{xx}, ε_{zz}; a, b, c, d – неотрицательные постоянные, не все равные нулю;

$$f \in C^1\left[0, +\infty\right), \;\; g \in C^1\left[0, +\infty\right), \;\; f(s^2) \geqslant 0, \;\; g(s^2) \geqslant 0$$

и $f(0) = g(0) = 0$. Кроме того, функции f и g являются таковыми, что выполняется соотношение $\frac{\partial f}{\partial(Z^2)} = \frac{\partial g}{\partial(X^2)}$. Условие $\frac{\partial f}{\partial(Z^2)} = \frac{\partial g}{\partial(X^2)}$ на компоненты тензора (2.2) указано в[1], где утверждается, что многие типы нелинейностей удовлетворяют такому условию. В главе 2 доказано, что без этого условия можно обойтись. Элемент ε_{yy} не оказывает влияния на распространение ТМ-волн.

[1]**Joseph R. I., Christodoulides D. N.** // Optics Letters. – 1987. – V. 12, № 10. – P. 826–828.

Комплексные амплитуды (2.1) удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \end{cases} \tag{2.4}$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$.

Доказано, что компоненты ТМ-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ, имеют представление

$$E_x = \mathrm{E}_x(x)e^{i\gamma z}, E_z = \mathrm{E}_z(x)e^{i\gamma z}, H_y = \mathrm{H}_y(x)e^{i\gamma z}, \tag{2.5}$$

где γ – неизвестный (действительный) спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Обозначим $k_0^2 := \omega^2\mu_0\varepsilon_0$. Подставляя компоненты (2.5) в систему (2.4), выполняя нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0 x$, $\frac{d}{dx} = k_0\frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}$, $\tilde{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0}$ $(i = 1, 2)$, $\tilde{\varepsilon}_f = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_0}$, $\tilde{\varepsilon}_g = \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_0}$, обозначая $Z(\tilde{x}) := \mathrm{E}_z$, $X(\tilde{x}) := i\mathrm{E}_x$ и опуская значок тильды, получаем

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \varepsilon_{zz} Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}\varepsilon_{xx} X, \end{cases} \tag{2.6}$$

где с учетом предыдущего

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_f + f(aX^2 + bZ^2), & 0 \leqslant x \leqslant h; \\ \varepsilon_3, & x > h; \end{cases} \\ \varepsilon_{zz} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_g + g(cX^2 + dZ^2), & 0 \leqslant x \leqslant h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Функции X, Z дифференцируемы так, что

$$\begin{aligned} &X(x) \in C^1(-\infty,\ 0] \cap C^1[0,h] \cap C^1[h,\ +\infty), \\ &Z(x) \in C(-\infty,+\infty) \cap C^1(-\infty,\ 0] \cap C^1[0,h] \cap C^1[h,\ +\infty) \cap \\ &\qquad \cap C^2(-\infty,0) \cap C^2(0,h) \cap C^2(h,+\infty). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Условия сопряжения для функций X, Z следуют из условий непрерывности касательных компонент электромагнитного поля и имеют вид

$$\begin{aligned} &[\gamma X - Z']|_{x=0} = 0, \quad [Z]|_{x=0} = 0, \\ &[\gamma X - Z']|_{x=h} = 0, \quad [Z]|_{x=h} = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Определение 2.1. Число $\gamma = \widehat{\gamma}$ такое, что при фиксированном значении $X(0) \neq 0$ (без потери общности можно считать $X(0) > 0$) существуют не равные тождественно нулю функции $X(x; \widehat{\gamma})$, $Z(x; \widehat{\gamma})$, которые удовлетворяют системе уравнений (2.6), условиям (2.8), (2.9) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$, будем называть собственным значением, а функции $X(x; \widehat{\gamma})$, $Z(x; \widehat{\gamma})$, соответствующие этому собственному значению, – собственными функциями.

Задача P_M: доказать существование собственных значений γ, удовлетворяющих определению 2.1.

Разыскиваются такие положительные значения γ, что справедливо неравенство $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_f$. Это условие соответствует классической задаче распространения ТМ-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью (см. Вайнштейн Л. А.), поэтому мы придерживаемся его при изучении задачи P_M.

Пусть $k_1^2 := \gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$, $k_1^3 := \gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$.

При $x < 0$ и $x > h$ система (2.6) является линейной. Учитывая условие на бесконечности, получаем, что решения системы (2.6) в указанных областях имеют вид

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x}, & x < 0, \\ Be^{-k_3(x-h)}, & x > h; \end{cases} \quad Z(x) = \begin{cases} A\gamma^{-1}k_1 e^{k_1 x}, & x < 0, \\ -B\gamma^{-1}k_3 e^{-k_3(x-h)}, & x > h. \end{cases} \tag{2.10}$$

Постоянная A в (2.10) отвечает значению $X(0)$ (см. определение 2.1) и предполагается фиксированной (известной), а постоянная B определяется условиями сопряжения (2.9).

Внутри слоя Σ система (2.6) принимает вид

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = (\varepsilon_g + g)Z, \\ \ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}(\varepsilon_f + f)X. \end{cases} \tag{2.11}$$

Система (2.11) может быть переписана в нормальной форме

$$\begin{cases} X' = \dfrac{\gamma^2(\varepsilon_g + g) + 2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)X^2 f'_{Z^2}}{\gamma\left(2X^2 f'_{X^2} + \varepsilon_f + f\right)} Z, \\ Z' = \gamma^{-1}\left(\gamma^2 - \varepsilon_f - f\right) X. \end{cases} \tag{2.12}$$

Первый интеграл системы (2.11) имеет вид

$$X^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2\left((\varepsilon_f - \gamma^2)X^2 + \varepsilon_g Z^2\right) + \gamma^2 G \equiv C, \tag{2.13}$$

где $G \equiv G(X^2, Z^2) \equiv \frac{1}{2d}\int_{cX^2}^{cX^2 + dZ^2} g(s)ds$; C – постоянная.

Обозначим через

$$X_0 := X(0+0), \;\; X_h := X(h-0), \;\; Z_0 := Z(0+0), \;\; Z_h := Z(h-0)$$

предельные значения функций X и Z на границах слоя Σ изнутри.

Справедливы формулы

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 A = (\varepsilon_f + f(aX_0^2 + bk_1^2\gamma^{-2}A^2))X_0, & Z_0 = \gamma^{-1}k_1 A, \\ \varepsilon_3 B = (\varepsilon_f + f(aX_h^2 + bk_3^2\gamma^{-2}B^2))X_h, & Z_h = -\gamma^{-1}k_3 B, \end{array} \tag{2.14}$$

которые получены из условий сопряжения (2.9) и решений (2.10).

Поскольку постоянная A предполагается известной, то X_0 определяется из первого уравнения (2.14).

Обозначим $f_0 := f\left(aX_0^2 + bZ_0^2\right)$ и $G_0 := G\left(X_0^2, Z_0^2\right)$. Тогда, используя первый интеграл (2.13), подставляя $x = 0$, найдем

$$C = X_0^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f_0)^2 + \gamma^2\left((\varepsilon_f - \gamma^2)X_0^2 + \varepsilon_g Z_0^2\right) + G_0. \tag{2.15}$$

Неизвестные значения X_h и Z_h определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} -\gamma\varepsilon_3 k_3^{-1} Z_h = (\varepsilon_f + f_h)X_h; \\ (\varepsilon_f - \gamma^2 + f_h)^2 X_h^2 + \gamma^2\left((\varepsilon_f - \gamma^2)X_h^2 + \varepsilon_g Z_h^2\right) + G_h = C, \end{cases} \tag{2.16}$$

где $f_h := f(aX_h^2 + bZ_h^2)$ и $G_h := G(X_h^2, Z_h^2)$.

При известном значении Z_h постоянная B определяется по формуле $B = -\gamma k_3^{-1} Z_h$.

Доказано, что дисперсионное уравнение задачи P_M имеет вид

$$\Phi(\gamma; n) := -T_1 + nT_2 = h, \tag{2.17}$$

где

$$T_1 = \int\limits_{\eta(h)}^{\eta(0)} w d\eta, \;\; T_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w d\eta,$$

величины $\eta(0)$, $\eta(h)$ определяются формулами

$$\eta(0) = \frac{\gamma\varepsilon_1}{k_1} > 0 \quad \text{и} \quad \eta(h) = -\frac{\gamma\varepsilon_3}{k_3} < 0;$$

а функция w имеет следующий вид:

$$w = \frac{\gamma(\varepsilon_f + f)}{\gamma^2(\varepsilon_f + f)(\varepsilon_g + g) + (\varepsilon_f - \gamma^2 + f)\eta^2},$$

где

$$f \equiv f(\tau), \quad g \equiv g\left(\tau\frac{c\eta^2 + d(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}\right);$$

функция $\tau \equiv \tau(\eta)$ определяется из уравнения

$$\tau\frac{\eta^2(\varepsilon_f - \gamma^2 + f)^2 + \gamma^2(\varepsilon_f - \gamma^2)\eta^2 + \gamma^2\varepsilon_g(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2} + \gamma^2 G(s,t) \equiv C,$$

где $s = \frac{\tau\eta^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$, $t = \frac{\tau(\varepsilon_f + f)^2}{a\eta^2 + b(\varepsilon_f + f)^2}$, а функции f и g имеют тот же смысл, что и выше; постоянная C определяется формулой (2.15); $n = 1, 2, 3, \ldots$

Важно отметить, что дисперсионное уравнение (2.17) не зависит от решений системы (2.16).

Фактически уравнение (2.17) является семейством (но не системой) уравнений для различных n. Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений. Другими словами, пусть σ_M^D – множество решений дисперсионного уравнения (2.17). Тогда $\sigma_M^D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i$, где σ_j содержит все положительные решения (и только их) уравнения $\Phi(\gamma; j) - h = 0$. Кроме того, $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех возможных $i \neq j$.

Пусть σ_M – совокупность всех собственных значений задачи P_M. Справедлива следующая теорема об эквивалентности, которая, в частности, утверждает, что $\sigma_M = \sigma_M^D$.

Теорема 2.1 (об эквивалентности). *Значение $\gamma = \widehat{\gamma}$ является собственным значением задачи P_M тогда и только тогда, когда существует целое число $n = \widehat{n} \geqslant 0$ такое, что $\gamma = \widehat{\gamma}$ удовлетворяет уравнению $\Phi(\gamma; \widehat{n}) - h = 0$.*

Кроме того, собственная функция $Z(x; \widehat{\gamma})$ имеет в точности $\widehat{n}$ нулей при $x \in (0, h)$; если x_i является i-м нулем функции $Z(x; \widehat{\gamma})$, то $x_i = \int\limits_{\eta(0)}^{+\infty} w\,d\eta + (i-1)T_2$.

Теорема 2.2 (о периодичности). *Пусть $\widehat{\gamma}$ – собственное значение задачи P_M. Если собственная функция $Z(x; \widehat{\gamma})$ имеет более двух нулей при $x \in (0, h)$, тогда функция $Z(x; \widehat{\gamma})$ периодическая с периодом $2T_2$.*

Пусть $\Gamma = (\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3), \varepsilon_f)$ и $h_{\inf}^k = \inf\limits_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma, k)$, $h_{\sup}^k = \sup\limits_{\gamma^2 \in \Gamma} \Phi(\gamma, k)$.

Величина $h_{\inf}^k$ всегда существует. Указанная sup существует не всегда, например, sup не существует, если $f \equiv 0$, $g \equiv 0$. Когда мы пишем $h_{\sup}^k$, мы предполагаем, что указанный (конечный) sup существует.

Теорема 2.3. *Пусть для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$, $f \in C^1\,[0, +\infty)$, $g \in C^1\,[0, +\infty)$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h) и h таково, что $h^p_{\inf} < h < h^p_{\sup}$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).*

Теорема 2.4. *Пусть $\Phi(\gamma, k)$ неограниченна при $\gamma^2 \in \Gamma$, $f \in C^1\,[0, +\infty)$, $g \in C^1\,[0, +\infty)$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h) и h таково, что для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение (собственное значение).*

В теоремах 2.3, 2.4 утверждается существование собственных значений; в теоремах 2.5, 2.6 – их изолированность.

Пусть правые части системы (2.12) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$ с центром в нуле и радиусом $R > 0$. Шар выбран таким образом, что $|2X^2 f'_{X^2} + f| < \varepsilon_f - \Delta$, где $\Delta > 0$ – фиксированное достаточно малое число. В силу непрерывности функции f такое число R всегда существует, поскольку $f(0) = 0$ и f' ограничена на $B(0, R)$.

Теорема 2.5. *Пусть для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h), правые части системы (2.12) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$, где $R > 0$, число M является наибольшим из модулей максимумов правых частей системы (2.12) и $h \leqslant \frac{R}{3M}$ таково, что $h^p_{\inf} < h < h^p_{\sup}$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение.*

Кроме того, если условие $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$ справедливо для всех p, то множество собственных значений σ_M задачи P_M является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathrm{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Теорема 2.6. *Пусть $\Phi(\gamma, k)$ неограниченна при $\gamma^2 \in \Gamma$, система (2.16) имеет действительное решение (X_h, Z_h), правые части системы (2.12) являются аналитическими функциями (как функции комплексных переменных $(u, v) = (X^2, Z^2)$) в некотором шаре $B(0, R)$, где $R > 0$, число M является наибольшим из модулей максимумов правых частей системы (2.12) и $h \leqslant \frac{R}{3M}$ таково, что для некоторого p выполняется $h^p_{\inf} < h$, тогда задача P_M имеет по крайней мере одно решение.*

Кроме того, если условие $h^p_{\inf} < h^p_{\sup}$ справедливо для всех p, то множество собственных значений σ_M задачи P_M является дискретным на $D = \{\gamma \in \mathrm{R} : \gamma^2 \in \Gamma\}$, т.е. на каждом отрезке $I \subset D$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Величины $h_{\inf}^k$ и $h_{\sup}^k$ можно находить численно.

Заметим, что условие $\gamma^2 < \varepsilon_f$ является точным. Действительно, для функций $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ получаем линейную задачу. В такой линейной задаче необходимо $\gamma^2 < \varepsilon_f$.

В **главе 3** исследуется нелинейная двухпараметрическая задача сопряжения на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение связанных электромагнитных TE-TM-волн в слое с керровской нелинейностью.

Рассмотрим электромагнитные волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega_E\omega_M} &= \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \mathbf{H}_{\omega_E\omega_M} &= \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

распространяющиеся вдоль границы однородного, изотропного, немагнитного диэлектрического слоя $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leqslant x \leqslant h\}$, здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_E = &\ (0, E_y, 0)^{\mathrm{т}}, & \mathbf{E}_M = &\ (E_x, 0, E_z)^{\mathrm{т}}, \\ \mathbf{H}_E = &\ \underbrace{(H_x, 0, H_z)^{\mathrm{т}}}_{\text{TE-волны}}, & \mathbf{H}_M = &\ \underbrace{(0, H_y, 0)^{\mathrm{т}}}_{\text{TM-волны}} \ - \end{aligned} \tag{3.2}$$

комплексные амплитуды; ω_E, ω_M – круговые частоты; $(\ \cdot\ )^{\mathrm{т}}$ – операция транспонирования.

Слой Σ расположен в декартовой системе координат $Oxyz$ между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_0$ и $\varepsilon = \varepsilon_3 \geqslant \varepsilon_0$ соответственно, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Диэлектрическая проницаемость ε волновода Σ описывается законом Керра[1], который имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha|\mathbf{E}_{\omega_E\omega_M}|^2$, где $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$, $\alpha > 0$.

Поля (3.1) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\left(\mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}\right) = i\mu\omega_E \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + i\mu\omega_M \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \operatorname{rot}\left(\mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}\right) = -i\varepsilon\omega_E \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} - i\varepsilon\omega_M \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \end{cases} \tag{3.3}$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = -h$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле затухает как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$.

[1] **Делоне Н. Б.** Взаимодействие лазерного излучения с веществом. – М.: Наука, 1989; **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: Учеб. пособ.: для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2001; **Шен И. Р.** Принципы нелинейной оптики. – М.: Наука, 1989.

Доказано, что компоненты ТЕ-ТМ-волн, распространяющихся вдоль границы слоя Σ, имеют представление

$$\begin{aligned} &E_x = \mathrm{E}_x(x)e^{i\gamma_M z}, \quad E_y = \mathrm{E}_y(x)e^{i\gamma_E z}, \quad E_z = \mathrm{E}_z(x)e^{i\gamma_M z},\\ &H_x = \mathrm{H}_x(x)e^{i\gamma_E z}, \quad H_y = \mathrm{H}_y(x)e^{i\gamma_M z}, \quad H_z = \mathrm{H}_z(x)e^{i\gamma_E z}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где γ_E, γ_M – пара неизвестных (действительных) спектральных параметров (пара постоянных распространения связанной ТЕ-ТМ-волны).

Пусть $k_0^2 = \omega_M^2 \varepsilon_0 \mu_0$. Подставляя поля (3.2) с компонентами (3.4) в систему (3.3), нормируя в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0 x$, $\frac{d}{dx} = k_0 \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma}_E = \frac{\gamma_E}{k_0}$, $\tilde{\gamma}_M = \frac{\gamma_M}{k_0}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}$, обозначая $X := i\mathrm{E}_x$, $Y := \mathrm{E}_y$, $Z := \mathrm{E}_z$, $\tau := \omega_E^2 \omega_M^{-2}$ и опуская значок тильды, получаем

$$\begin{cases} \gamma_M(\gamma_M X - Z') = \varepsilon X,\\ \gamma_E^2 Y - Y'' = \tau \varepsilon Y,\\ \gamma_M X' - Z'' = \varepsilon Z, \end{cases} \tag{3.5}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < -h;\\ \varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Y^2 + Z^2), & -h \leqslant x \leqslant h;\\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Функции X, Y, Z дифференцируемы так, что

$$\begin{aligned} &X(x) \in C^1(-\infty,\ 0] \cap C^1[0,h] \cap C^1[h,\ +\infty),\\ &Y(x) \in C^1(-\infty,+\infty) \cap C^2(-\infty,0) \cap C^2(0,h) \cap C^2(h,+\infty),\\ &Z(x) \in C(-\infty,+\infty) \cap C^1(-\infty,\ 0] \cap C^1[0,h] \cap C^1[h,\ +\infty) \cap\\ &\qquad\qquad \cap C^2(-\infty,0) \cap C^2(0,h) \cap C^2(h,+\infty). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Условия сопряжения для функций X, Y, Z следуют из условий непрерывности касательных компонент электромагнитного поля и имеют вид

$$[Z' - \gamma_M X]|_{x=\pm h} = 0, \ [Y]|_{x=\pm h} = 0, \ [Y']|_{x=\pm h} = 0, \ [Z]|_{x=\pm h} = 0. \tag{3.7}$$

Определение 3.1. Пару чисел $(\widehat{\gamma}_E, \widehat{\gamma}_M)$ такую, что при заданных значениях $X(0)$, $Y(0)$ существует не равный тождественно нулю вектор $W = (X, Y, Z)^{\mathrm{т}}$ такой, что функции X, Y, Z удовлетворяют системе уравнений (3.5), условиям (3.6), (3.7) и затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \to \infty$, будем называть парным собственным значением. Вектор W, который соответствует парному собственному значению, будем называть собственным вектором, а компоненты $X(x; \widehat{\gamma}_E, \widehat{\gamma}_M)$, $Y(x; \widehat{\gamma}_E, \widehat{\gamma}_M)$, $Z(x; \widehat{\gamma}_E, \widehat{\gamma}_M)$ вектора W – собственными функциями.

Задача P: доказать существование парных собственных значений $(\widehat{\gamma}_E, \widehat{\gamma}_M)$, удовлетворяющих определению 3.1.

Пусть $k_{E1}^2 := \gamma_E^2 - \tau\varepsilon_1$, $k_{E3}^2 := \gamma_E^2 - \tau\varepsilon_3$, $k_{M1}^2 := \gamma_M^2 - \varepsilon_1$, $k_{M3}^2 := \gamma_M^2 - \varepsilon_3$.

Решения (линейной) системы (3.5) при $x < -h$ и $x > h$ в соответствии с условиями излучения имеют вид

$$\begin{cases} X(x) = C_M^{(-h)} e^{(x+h)k_{M1}}, \\ Y(x) = C_E^{(-h)} e^{(x+h)k_{E1}}, \\ Z(x) = \frac{k_{M1}}{\gamma_M} C_M^{(-h)} e^{(x+h)k_{M1}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} X(x) = C_M^{(h)} e^{-(x-h)k_{M3}}, \\ Y(x) = C_E^{(h)} e^{-(x-h)k_{E3}}, \\ Z(x) = -\frac{k_{M3}}{\gamma_M} C_M^{(h)} e^{-(x-h)k_{M3}}, \end{cases} \tag{3.8}$$

где $C_M^{(-h)}$, $C_E^{(-h)}$, $C_M^{(h)}$ и $C_E^{(h)}$ – постоянные интегрирования. Постоянные $C_M^{(h)}$, $C_E^{(h)}$ предполагаются заданными (они отвечают значениям $X(0)$, $Y(0)$ в определении 3.1), а постоянные $C_M^{(-h)}$, $C_E^{(-h)}$ определяются из условий сопряжения.

Пусть $k_E^2 = \tau\varepsilon_2 - \gamma_E^2$, $k_M^2 = \varepsilon_2 - \gamma_M^2$ и $f_X = (X^2 + Y^2 + Z^2)X$, $f_Y = (X^2 + Y^2 + Z^2)Y$, $f_Z = (X^2 + Y^2 + Z^2)Z$, тогда внутри слоя Σ систему (3.5) можно записать в виде

$$\begin{cases} X = -\gamma_M k_M^{-2} Z' - \alpha k_M^{-2} f_X, \\ Y'' + k_E^2 Y = -\alpha\tau f_Y, \\ Z'' + k_M^2 Z = -\alpha\varepsilon_2^{-1} k_M^2 f_Z - \alpha\varepsilon_2^{-1}\gamma_M f_X'. \end{cases} \tag{3.9}$$

Обращая линейные части второго и третьего уравнений в системе (3.9), перейдем к интегральным уравнениям.

Пусть $L_E = \frac{d^2}{dx^2} + k_E^2$, $L_M = \frac{d^2}{dx^2} + k_M^2$. Тогда функции Грина для следующих краевых задач

$$\begin{cases} L_E G_E = -\delta(x-s), \\ \partial_x G_E|_{x=-h} = \partial_x G_E|_{x=h} = 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} L_M G_M = -\delta(x-s), \\ G_M|_{x=-h} = G_M|_{x=h} = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

имеют вид

$$G_E(x,s) = \begin{cases} -\frac{\cos k_E(x+h)\cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h}, & x < s \leqslant h, \\ -\frac{\cos k_E(x-h)\cos k_E(s+h)}{k_E \sin 2k_E h}, & s < x \leqslant h; \end{cases} \tag{3.11}$$

$$G_M(x,s) = \begin{cases} -\frac{\sin k_M(x+h)\sin k_M(s-h)}{k_M \sin 2k_M h}, & x < s \leqslant h, \\ -\frac{\sin k_M(x-h)\sin k_M(s+h)}{k_M \sin 2k_M h}, & s < x \leqslant h. \end{cases} \tag{3.12}$$

Переходя от системы дифференциальных уравнений (3.9) к интегральным (используя найденные функции Грина и вторую формулу Грина) и затем используя условия сопряжения (3.7) в полученной системе интегральных уравнений, получаем систему *дисперсионных уравнений*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \Phi_E(\gamma_E,\gamma_M) & := & C_E^{(h)} g_E(h,\gamma_E) - \alpha \frac{Q_E(h,\gamma_E,\gamma_M)}{\sin 2k_E h} & = & 0, \\ \Phi_E(\gamma_E,\gamma_M) & := & C_M^{(h)} k_M g_M(h,\gamma_M) - \alpha \frac{Q_M(h,\gamma_E,\gamma_M)}{\sin 2k_M h} & = & 0, \end{array}\right. \qquad (3.13)$$

где

$$g_E(h,\gamma_E) := \left(k_E^2 - k_{E1}k_{E3}\right)\sin 2k_E h - k_E\left(k_{E1}+k_{E3}\right)\cos 2k_E h; \qquad (3.14)$$

$$\begin{aligned} g_M(h,\gamma_M) := \left(\varepsilon_1\varepsilon_3 k_M^2 - \varepsilon_2^2 k_{M1}k_{M3}\right)\sin 2k_M h - \\ -\varepsilon_2 k_M\left(\varepsilon_1 k_{M3} + \varepsilon_3 k_{M1}\right)\cos 2k_M h, \end{aligned} \qquad (3.15)$$

$$\begin{aligned} Q_E(h,\gamma_E,\gamma_M) := \tau(k_{E1}\cos 2k_E h - k_E \sin 2k_E h)\int_{-h}^{h}\cos k_E(x+h) f_Y dx - \\ - \tau k_{E1}\int_{-h}^{h}\cos k_E(x-h) f_Y dx, \\ Q_M(h,\gamma_E,\gamma_M) := -2\gamma_M^2(\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1}\cos 2k_M h) f_X(h-0)\times \\ \times \sin 2k_M h + k_M(\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1}\cos 2k_M h)\times \\ \times \int_{-h}^{h}\left[\gamma_M k_M f_Z \sin k_M(x+h) - \gamma_M^2 f_X \cos k_M(x+h)\right]dx - \\ - 2\gamma_M^2 \varepsilon_2 k_{M1} f_X(-h+0)\sin 2k_M h + \\ + \varepsilon_2 k_{M1} k_M \int_{-h}^{h}\left[\gamma_M k_M f_Z \sin k_M(x-h) - \gamma_M^2 f_X \cos k_M(x-h)\right]dx. \end{aligned}$$

Доказано, что в интегральной форме система дифференциальных уравнений (3.9) может быть записана в виде

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{N}_1\left(|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\right) + \mathbf{h}, \qquad (3.16)$$

где $\mathbf{u} = (X,Y,Z)^{\mathrm{т}}$ и $|\mathbf{u}|^2 = X^2+Y^2+Z^2$, $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}}^2 = \|X\|_C^2 + \|Y\|_C^2 + \|Z\|_C^2$ и $\|u\|_C = \max\limits_{x\in[-h,h]}|u(x)|$, а $\mathbf{C}[-h,h] = C[-h,h]\times C[-h,h]\times C[-h,h]$; линейный оператор $\mathbf{N}_1$ имеет вид

$$\mathbf{N} := \alpha\mathbf{N}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_1 := \mathbf{K} + \mathbf{J} + \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{J}},$$

где

$$\mathbf{Kg} = \int_{-h}^{h}\mathrm{K}(x,s)\mathbf{g}(x)dx, \quad \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{g} = \int_{-h}^{h}\tilde{\mathrm{K}}(x,s)\mathbf{g}(x)dx, \quad \mathbf{g} = (g_1,g_2,g_3)^{\mathrm{т}},$$

матрицы ядер $\mathrm{K}(x,s)$ и $\tilde{\mathrm{K}}(x,s)$ имеют вид

$$\mathrm{K}(x,s) = \begin{pmatrix} q_{11}\partial_{xs}^2 G_M & 0 & q_{13}\partial_s G_M \\ 0 & q_{22}G_E & 0 \\ q_{31}\partial_x G_M & 0 & q_{33}G_M \end{pmatrix},$$

$q_{11} = \varepsilon_2^{-1}\gamma_M^2 k_M^{-2}$, $q_{13} = -\varepsilon_2^{-1}\gamma_M$, $q_{22} = \tau$, $q_{31} = -\varepsilon_2^{-1}\gamma_M$, $q_{33} = \varepsilon_2^{-1}k_M^2$;

$$\tilde{\mathrm{K}}(x,s) = \begin{pmatrix} \tilde{q}_{11}\lim\limits_{s\to -h+0}\partial_{xs}^2 G_M & 0 & \tilde{q}_{13}\lim\limits_{s\to -h+0}\partial_s G_M \\ 0 & \tilde{q}_{22}\, G_E|_{s\to -h+0} & 0 \\ \tilde{q}_{31}\lim\limits_{s\to -h+0}\partial_x G_M & 0 & \tilde{q}_{33}\lim\limits_{s\to -h+0} G_M \end{pmatrix},$$

$\tilde{q}_{11} = \gamma_M p_1(s)$, $\tilde{q}_{13} = -k_M^2 p_1(s)$, $\tilde{q}_{22} = q(s)$, $\tilde{q}_{31} = -\frac{\gamma_M}{k_M} p_2(s)$, $\tilde{q}_{33} = k_M p_2(s)$ и $p_1(s) = \gamma_M \frac{k_{M1}}{k_M^2} \frac{\cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h}$, $p_2(s) = \frac{k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h}$, $q(s) = \tau \frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h}$, а операторы $\mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{J}}$ представимы следующим образом:

$$\mathbf{J} = -\frac{\gamma_M^2 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_M^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} -2\gamma_M p_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\gamma_M k_M^{-1} p_2(s) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)^{\mathrm{T}}$, где

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{C_M^{(h)} k_{M3}}{k_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \cos k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \cos k_M(s+h) \right], \\ h_2 &= \frac{C_E^{(h)} k_{E3}}{k_E \sin 2k_E h} \left[\frac{k_{E1} \cos k_E(s-h)}{k_E \sin 2k_E h - k_{E1} \cos 2k_E h} + \cos k_E(s+h) \right], \\ h_3 &= \frac{-C_M^{(h)} k_{M3}}{\gamma_M \sin 2k_M h} \left[\frac{\varepsilon_2 k_{M1} \sin k_M(s-h)}{\varepsilon_1 k_M \sin 2k_M h - \varepsilon_2 k_{M1} \cos 2k_M h} + \sin k_M(s+h) \right]. \end{aligned}$$

Операторы $\mathbf{K}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\mathbf{J}$, $\tilde{\mathbf{J}}$ являются линейными.

Теорема 3.1. *Пусть $B_{r_0} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leqslant r_0\}$ – шар радиуса r_0 с центром в нуле. Также пусть выполняются два условия:*

$$q := 3\alpha r_0^2 \|\mathbf{N}_1\| < 1, \quad \alpha r_0^3 \|\mathbf{N}_1\| + \|\mathbf{h}\| \leqslant r_0. \tag{3.17}$$

Тогда существует единственное решение $\mathbf{u} \in B_{r_0}$ уравнения (3.16).

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 3.2. *Если $\alpha \leqslant A^2$, где $A = \frac{2}{3\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathbf{N}_1\|}}$, тогда уравнение (3.16) имеет единственное решение $\mathbf{u}$ в шаре $B_{r_*} \equiv \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leqslant r_*\}$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[-h, h]$, $\|\mathbf{u}\| \leqslant r_*$, где $r_* = -\frac{2}{\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}} \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3}{2}\|\mathbf{h}\|\sqrt{3\|\mathbf{N}\|}\right) - \frac{2\pi}{3}\right)$.*

Отметим, что $A > 0$ не зависит от α.

Также справедлива теорема о непрерывной зависимости решения операторного уравнения (3.16) от спектрального параметра.

Теорема 3.3. *Пусть ядра матричного оператора $\mathbf{N}$ и правые части $\mathbf{h}$ уравнения (3.16) непрерывно зависят от параметра $\gamma \in \Gamma_0$, где Γ_0 некоторый действительный отрезок. Пусть также $\|\mathbf{h}\| \leqslant \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\|\mathbf{N}(\gamma)\|}}$. Тогда решение $\mathbf{u}(\gamma)$ уравнения (3.16) для $\gamma \in \Gamma_0$ существует, единственно и непрерывно зависит от параметра $\gamma \in \Gamma_0$.*

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в системе дисперсионных уравнений (3.13) для нелинейного слоя, получаем известные уравнения для линейных задач о распространении TE- и TM-волн в слое с постоянной диэлектрической проницаемостью, а именно: $g_E(h,\gamma_E)=0$, $g_M(h,\gamma_M)=0$, где функции $g_E(h,\gamma_E)$, $g_M(h,\gamma_M)$ определены формулами (3.14), (3.15) (эти дисперсионные уравнения, определяющие собственные значения, хорошо известны и полностью изучены).

Для собственных значений γ_E и γ_M указанных линейных задач справедливы неравенства:

$$\max(\tau\varepsilon_1,\tau\varepsilon_3)<\gamma_E^2<\tau\varepsilon_2,\quad \max(\varepsilon_1,\varepsilon_3)<\gamma_M^2<\varepsilon_2. \tag{3.18}$$

В задаче разыскиваются решения, удовлетворяющие этим же неравенствам.

Обозначим

$$\lambda^E_{\mathrm{s},m}:=\tau\varepsilon_2-\frac{j^2_{\mathrm{s},m}}{4h^2},\ \ \lambda^E_{\mathrm{c},m}:=\tau\varepsilon_2-\frac{j^2_{\mathrm{c},m}}{4h^2},\ \ \lambda^M_{\mathrm{s},m}:=\varepsilon_2-\frac{j^2_{\mathrm{s},m}}{4h^2},\ \ \lambda^M_{\mathrm{c},m}:=\varepsilon_2-\frac{j^2_{\mathrm{c},m}}{4h^2},$$

где $j_{\mathrm{s},m}=\pi m$ – m-й неотрицательный корень уравнения $\sin x=0$, а $j_{\mathrm{c},m}=\frac{\pi(2m+1)}{2}$ – m-й положительный корень уравнения $\cos x=0$; $m=0,1,2,\ldots$

Доказано, что если уравнение $g_E(h,\gamma_E)=0$ имеет l_E корней $\gamma_E^{(1)}$, $\gamma_E^{(2)},\ldots,\gamma_E^{(l_E)}$, то существует целое число $0<m_E<l_E$ такое, что

$$\gamma_E^{(i+1)}\in\left(\sqrt{\lambda^E_{\mathrm{s},i}},\sqrt{\lambda^E_{\mathrm{c},i}}\right),\qquad i=\overline{0,m_E-1};$$
$$\gamma_E^{(i+1)}\in\left(\sqrt{\lambda^E_{\mathrm{c},i}},\sqrt{\lambda^E_{\mathrm{s},i+1}}\right),\quad i=\overline{m_E,l_E-1}.$$

Доказано, что если уравнение $g_M(h,\gamma_M)=0$ имеет l_M корней $\gamma_M^{(1)}$, $\gamma_M^{(2)},\ldots,\gamma_M^{(l_M)}$, то существует целое число $0<m_M<l_M$ такое, что

$$\gamma_M^{(i+1)}\in\left(\sqrt{\lambda^M_{\mathrm{s},i}},\sqrt{\lambda^M_{\mathrm{c},i}}\right),\qquad i=\overline{0,m_M-1};$$
$$\gamma_M^{(i+1)}\in\left(\sqrt{\lambda^M_{\mathrm{c},i}},\sqrt{\lambda^M_{\mathrm{s},i+1}}\right),\quad i=\overline{m_M,l_M-1}.$$

Мы предполагаем, что уравнения $g_E(h,\gamma_E)=0$ и $g_M(h,\gamma_M)=0$ имеют l_E и l_M корней соответственно (выбором h всегда можно добиться того, что оба уравнения будут иметь корни, а одно из них будет иметь заданное число корней).

Точки $\sqrt{\lambda^E_{\mathrm{s},i}}$, $\sqrt{\lambda^M_{\mathrm{s},j}}$, $\;i=\overline{0,l_E}$, $j=\overline{0,l_M}$, являются простыми полюсами функций Грина (3.11), (3.12). Пусть $\delta_i^E>0$ и $\delta_j^M>0$, $i=\overline{0,l_E}$,

$j = \overline{0, l_M}$, – достаточно малые числа такие, что локализация собственных значений $\gamma_E^{(i)}$, $i = \overline{1, l_E}$ и $\gamma_M^{(j)}$, $j = \overline{1, l_M}$, линейных задач, указанная выше, не нарушается.

Построим отрезки

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{i+1}^E &:= \left[\sqrt{\lambda_{\mathrm{s},i}^E} + \delta_i^E, \sqrt{\lambda_{\mathrm{c},i}^E}\right], & i &= \overline{0, m_E - 1};\\
\Gamma_{i+1}^E &:= \left[\sqrt{\lambda_{\mathrm{c},i}^E}, \sqrt{\lambda_{\mathrm{s},i+1}^E} - \delta_{i+1}^E\right], & i &= \overline{m_E, l_E - 1};\\
\Gamma_{i+1}^M &:= \left[\sqrt{\lambda_{\mathrm{s},i}^M} + \delta_i^M, \sqrt{\lambda_{\mathrm{c},i}^M}\right], & i &= \overline{0, m_M - 1};\\
\Gamma_{i+1}^M &:= \left[\sqrt{\lambda_{\mathrm{c},i}^M}, \sqrt{\lambda_{\mathrm{s},i+1}^M} - \delta_{i+1}^M\right], & i &= \overline{m_M, l_M - 1}.
\end{aligned}
$$

При наших предположениях функция $g_E(\gamma_E)$ имеет различные знаки на концах отрезков Γ_i^E и обращается в нуль в точках $\gamma_E^{(i)}$. Тот же самый вывод имеет место для функции $g_M(\gamma_M)$. Обозначим $\Gamma := \Gamma^E \times \Gamma^M$, где $\Gamma^E := \bigcup_{i=1}^{l_E} \Gamma_i^E$, $\Gamma^M := \bigcup_{i=1}^{l_M} \Gamma_i^M$.

Основным результатом третьей главы является следующая

Теорема 3.4. *Пусть* $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ *и уравнения* $g_E(h, \gamma_E) = 0$, $g_M(h, \gamma_M) = 0$ *имеют* l_E *и* l_M *решений соответственно. Тогда найдется значение* $\alpha_0 > 0$ *такое, что для всякого* $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ *существует по крайней мере* $l_E \cdot l_M$ *парных собственных значений* $\left(\gamma_E^{[i]}, \gamma_M^{[j]}\right) \in \Gamma_i^E \times \Gamma_j^M$, $i = \overline{1, l_E}$, $j = \overline{1, l_M}$, *задачи* P.

Из теоремы 3.4 следует, что при указанных предположениях существуют поверхностные связанные ТЕ-ТМ-волны, распространяющиеся вдоль границы изотропного слоя с керровской нелинейностью. Так как в линейном слое связанных волн не существует, то из утверждения теоремы следует, что в нелинейном слое существует новый режим распространения волн. При доказательстве теоремы 3.4 получена теоретическая оценка величины α_0 через нормы соответствующих операторов.

В главе 3 предложен и обоснован (доказана сходимость) итерационный метод нахождения приближенных парных собственных значений задачи P.

Публикации по теме диссертации

Монографии

[1] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2010.

[2] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. – Penza: PSU Press, 2011.

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК

[3] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** К задаче о распространении нелинейных связанных электромагнитных ТЕ-ТМ-волн в слое // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54, № 3. – С. 504–518.

[4] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation // J. Math. Phys. – 2013. – V. 54, № 8. – P. 083502-1–13.

[5] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Расчет постоянных распространения неоднородных нелинейных двухслойных круглых цилиндрических волноводов методом задачи Коши // Радиотехн. и электроника. – 2013. – Т. 58, № 8. – С. 759–767.

[6] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю.** Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение ТЕ-волн в двухслойных цилиндрических диэлектрических волноводах // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 7. – С. 1150–1161.

[7] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Coupled electromagnetic transverse-electric-transverse magnetic wave propagation in a cylindrical waveguide with Kerr nonlinearity // J. Math. Phys. – 2013. – V. 54, № 4. – P. 043506-1–22.

[8] **Valovik D.V.** On the problem of nonlinear coupled electromagnetic transverse electric-transverse magnetic wave propagation // J. Math. Phys. – 2013. – V. 54, № 4. – P. 042902-1–14.

[9] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Решение нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с керровской нелинейностью, методом задачи Коши // Радиотехн. и электроника. – 2013. – Т. 58, № 1. – С. 69–72.

[10] **Валовик Д.В., Зарембо Е.В.** Метод задачи Коши решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 1. – С. 74–89.

[11] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity // J. Math. Phys. – 2012. – V. 53, № 12. – P. 123530-1–24.

[12] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** О распространении связанных электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском слое с керровской нелинейностью // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2012. – № 4. – С. 21–48.

[13] **Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.** Численное решение задачи о распространении электромагнитных ТМ-волн в круглом диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2012. – № 3. – С. 29–37.

[14] **Валовик Д.В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением // Радиотехн. и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.

[15] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1729–1739.

[16] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Нелинейные эффекты в задаче о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью // Радиотехн. и электроника. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 309–314.

[17] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое из нелинейного метаматериала // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2010. – № 3. – С. 71–87.

[18] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (II. ТМ-волны) // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2010. – № 2. – С. 54–65.

[19] **Валовик Д.В.** Задача о распространении электромагнитных волн в слое с произвольной нелинейностью (I. ТЕ-волны) // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2010. – № 1. – С. 18–27.

[20] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Расчет постоянных распространения и полей для поляризованных электромагнитных ТМ-волн в нелинейном анизотропном слое // Радиотехн. и электроника. – 2009. – Т. 54, № 4. – С. 411–417.

[21] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра // Жур. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.

[22] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Нелинейная задача на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 10. – С. 70–74.

[23] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Расчет постоянных распространения ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое // Радиотехн. и электроника. – 2008. – Т. 53, № 8. – С. 934–940.

[24] **Валовик Д.В.** О существовании решений нелинейной краевой задачи на собственные значения для ТМ-поляризованных электромагнитных волн // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2008. – № 2. – С. 86–94.

[25] **Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г.** Распространение ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном анизотропном слое // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ. матем. науки. – 2007. – № 4. – С. 51–59.

Публикации в других журналах

[26] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Boundary eigenvalue problem for Maxwell equations in a nonlinear dielectric layer // Appl. Math. – 2010. – № 1. – P. 29–36.

[27] **Smirnov Yu.G., Valovik D.V.** Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // Adv. Math. Phys. – 2012. – V. 2012. – P. 1–21.

[28] **Valovik D.V.** Electromagnetic wave propagation in nonlinear layered waveguide structures. Computational approach to determine propagation constants // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Volume 52: Inverse Problems and Large Scale computations, 2013, P. 71–91.

[29] **Smirnov Yu.G., Smol'kin E.Yu., Valovik D.V.** Nonlinear Double-Layer Bragg Waveguide: Analytical and Numerical Approaches to Investigate Waveguiding Problem // Adv. in Numer. Anal. – 2014. – V. 2014. – P. 1–11.

Редактор А. Г. Темникова
Технический редактор А. Г. Темникова
Компьютерная верстка Д. В. Валовика

Подписано в печать 10.08.2014. Формат $60\times84\frac{1}{16}$.
Усл. печ. л. 1,63. Заказ № 008474 . Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru