

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И КИБЕРНЕТИКИ

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

# Тихоновские чтения

*ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ*

*Посвящается памяти академика  
Андрея Николаевича Тихонова*

27–31 октября 2025 года



---

МОСКВА – 2025

УДК 517  
ББК 22.16  
Т46



<https://elibrary.ru/qaoqhz>

*Заседания конференции проходят  
на факультете ВМК и физическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова*

**Тихоновские чтения** : тезисы докладов : научная конференция ; 27–31 октября 2025 г. –  
Т46 Москва : Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова  
(лицензия ИД № 05899 от 24.09. 2001 г.) ; МАКС Пресс, 2025. – 182 с.  
e-ISBN 978-5-89407-657-7 (ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова)  
ISBN 978-5-317-07467-8 (МАКС Пресс)  
<https://doi.org/10.29003/m4805.978-5-317-07467-8>

В издании публикуются тезисы докладов, посвященные исследованиям в области прикладной математики и информатики, которые будут прочитаны на конференции «Тихоновские чтения».

УДК 517  
ББК 22.16

**Tikhonov readings:** abstracts: scientific conference: October, 27–31, 2025. – Moscow: MAKS Press, 2025. – 182 p.  
e-ISBN 978-5-89407-657-7 (CMC MSU)  
ISBN 978-5-317-07467-8 (MAKS Press)  
<https://doi.org/10.29003/m4805.978-5-317-07467-8>

The brochure publishes abstracts of reports that will be read at the “Tikhonov Readings” conference dedicated to research in the field of applied mathematics and computer science.

---

*Научное издание*

Научная конференция  
**ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ**  
Тезисы докладов  
27–31 октября 2025 г.

Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г. 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус

Издательство «МАКС Пресс».  
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*

Напечатано с готового оригинал-макета  
Подписано в печать 26.10.2025 г. Формат 70х100 1/16. Усл. печ. л. 14,78. Тираж 20 экз. Изд. № 176.

Издательство ООО «МАКС Пресс» Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г. 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к. Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н

**e-ISBN 978-5-89407-657-7**  
**ISBN 978-5-317-07467-8**

© Авторы докладов, 2025  
© Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2025  
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2025

# Конференция "Тихоновские чтения 2025"

|                                                                                                                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Секция: "Информационная безопасность"</b>                                                                                                                                                 | <b>10</b> |
| Идрисов И. И., Намиот Д. Е. Продвинутая маршрутизация для масштабируемого распределенного векторного индекса . . . . .                                                                       | 10        |
| Линь П. Алгоритм для решения эквивалентности констакцических линейных кодов . . . . .                                                                                                        | 11        |
| Макаров А. В., Намиот Д. Е. Новая модель использования Wi-Fi Direct . . . . .                                                                                                                | 12        |
| Пак Ю. Р., Терёхина И. Ю. Интерпретация моделей классификации аудиоданных с помощью маскирования спектрограмм . . . . .                                                                      | 14        |
| Ильюшин Е. А. О влиянии робастных методов оптимизации и случайного сглаживания на устойчивость классификаторов изображений к состязательным атакам . . . . .                                 | 15        |
| Чижев И. В. Факторизуемые формы в коде квадратичных отношений и новый алгоритм декодирования линейных кодов . . . . .                                                                        | 17        |
| Трубицин Н. М. Применение метода биюнктивных имплицент в анализе фильтрующих генераторов . . . . .                                                                                           | 18        |
| Порывай М. В., Намиот Д. Е. Методы оценки качества наборов данных для машинного обучения . . . . .                                                                                           | 19        |
| <b>Секция: "Теория дифференциальных уравнений"</b>                                                                                                                                           | <b>20</b> |
| Садовничая И. В., Зуев К. П., Базисность Рисса системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. . . . .                                      | 21        |
| Савчук А. М., Северцов С. А. Регуляризованный след оператора Штурма-Лиувилля с дельта-потенциалом и запаздыванием в аргументе . . . . .                                                      | 22        |
| Савчук А. М., Кузнецов Е. Д. Регуляризованный след первого порядка для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом из класса зарядов и краевыми условиями Дирихле на трехзвенном графе . . . . . | 23        |
| Коровина М. В. Проблема Пуанкаре. Построение асимптотик решений уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их особых точек . . . . .                                              | 25        |
| Аристов А. И. Групповой анализ модельного уравнения третьего порядка . . . . .                                                                                                               | 26        |

|                                                                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Зайцева Н. В.</b> Решение задачи Коши для одного гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом . . . . .                                                | 27 |
| <b>Никитин А. А., Огородников Д. М.</b> О нелинейном интегральном уравнении, получающемся после трёхпараметрического замыкания первой степени. . . . .            | 28 |
| <b>Емельянов Д. П.</b> О решении модифицированной краевой задачи Неймана для вырождающегося эллиптического дифференциального уравнения в прямоугольнике . . . . . | 29 |

## Секция: "Математическое моделирование и вычислительные методы" 30

|                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Подсекция кафедры вычислительных методов . . . . .                                                                                                                                                                    | 31 |
| <b>Соснин Н. В.</b> Итерационный вариант метода сопряженных градиентов после второй трансформации Гаусса . . . . .                                                                                                    | 31 |
| <b>Мухин С. И., Буничева А. Я., Кочетов Е. В., Гаевская Т. А., Радаева К. В., Королев Ю. М.</b> О применении методов машинного обучения для оценки риска развития послеоперационных инфекционных осложнений . . . . . | 31 |
| <b>Егоренков В. А., Трофимов В. А.</b> Реализация метода переменных направлений на основе многоэтапного итерационного процесса для многомерного уравнения Шредингера . . . . .                                        | 33 |
| <b>Широков И. А.</b> Генерация вихревого звука при дозвуковом обтекании цилиндра: моделирование на основе квазигазодинамических уравнений . . . . .                                                                   | 35 |
| <b>Дородницын Л. В., Александров А. В.</b> Моделирование акустики при рассеянии турбулентности препятствием на основе высокоточных схем в криволинейных координатах . . . . .                                         | 37 |
| <b>Богомоллов С. В., Панферова И. А.</b> Разрывный метод частиц в задачах для уравнений мелкой воды . . . . .                                                                                                         | 38 |
| <b>Головизнин В. М., Сержантов А. В.</b> Схема «уголок» для релаксационного приближения скалярных законов сохранения гиперболического типа . . . . .                                                                  | 39 |
| <b>Беляева А. А., Попова Н. Н.</b> Алгоритмизация программы моделирования газодинамического течения по схеме КАБАРЕ в СЭЛ переменных в двумерной постановке . . . . .                                                 | 40 |
| <b>Руссо В. Д., Попова Н. Н.</b> Схема КАБАРЕ для гиперболизированного уравнения теплопроводности . . . . .                                                                                                           | 42 |
| <b>Головня Н. А., Головизнин В. М.</b> Решение задачи Water - Air Shock Tube схемой КАБАРЕ . . . . .                                                                                                                  | 43 |
| Подсекция кафедры автоматизации научных исследований . . . . .                                                                                                                                                        | 44 |

|                                                                                                                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Бердышев Д. А., Шишкин А. Г.</b> Интеграция мультимодальных данных носимых устройств для определения эмоций человека . . . . .                                            | 44        |
| <b>Шишкин А. Г., Селюцкая Л. Ю.</b> Ускорение генеративной модели улучшения речи с помощью ректифицированной диффузии. . . . .                                               | 46        |
| <b>Четкин Е. И., Шишкин А. Г.</b> Применение обучения с подкреплением и значений Шепли для генерации данных с помощью условных диффузионных моделей . . . . .                | 47        |
| <b>Борисов Н. Д., Нефедов В. В.</b> Пространственная модель Ланчестера с учетом направленных ударов и шумов . . . . .                                                        | 48        |
| <b>Вабищевич П. Н., Чернышов М. М.</b> Итерационные методы решения эллиптических краевых задач в анизотропных средах . . . . .                                               | 50        |
| <b>Сучков Е. П.</b> Применение смеси Гауссиан для восстановления интенсивности мягкого рентгеновского излучения в токамаке . . . . .                                         | 51        |
| <b>Долматов А. А.</b> Обзор современных подходов к решению задач интеллектуального анализа электрокардиограмм . . . . .                                                      | 53        |
| <b>Кандаракова М. О., Долматов А. А., Сычуглов Д. Ю.</b> Обзор современных методов предобработки временных рядов, применяемых для устранения шумов из ЭКГ-сигналов. . . . .  | 54        |
| <b>Рыбинскова Ю. О., Долматов А. А., Сычуглов Д. Ю.</b> Обзор современных архитектур нейронных сетей, используемых для классификации и интерпретации ЭКГ-синдромов . . . . . | 56        |
| <b>Секция: "Математическая физика и обратные задачи"</b>                                                                                                                     | <b>57</b> |
| <b>Баев А. В.</b> Прямые и обратные задачи для уравнений семейства Кортевега–де Вриза (KdV) с переменными коэффициентами . . . . .                                           | 58        |
| <b>Разгулин А. В., Степаненко С. В., Трофимов В. А., Колобродов А.</b> Исследование моделей распространения сверхкоротких импульсов . . . . .                                | 58        |
| <b>Тихонов И. В., Алмохамед М.</b> Задача о нахождении источника, подобная обратной задаче Коши . . . . .                                                                    | 60        |
| <b>Лопушенко В. В., Ерёмин Ю. А.</b> Анализ поглощающих свойств слоистых наночастиц в присутствии квантовых эффектов методом дискретных источников . . . . .                 | 61        |

|                                                                                                                                                                                                    |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Харитонов Д. М., Трофимов В. А.</b> Применение метода многих масштабов для описания процесса утробения частоты лазерного излучения в случае существования нескольких малых параметров . . . . . | 62        |
| <b>Цыбров Е.Г., Никитин С.Ю., Лебедева М.С.</b> Обратные задачи в лазерной дифрактометрии эритроцитов . . . . .                                                                                    | 64        |
| <b>Максименко Е. А., Павельева Е. А.</b> Выделение области ресниц на изображениях радужной оболочки глаза на основе универсальной модели сегментации изображений . . . .                           | 65        |
| <b>Секция: "Вычислительные технологии и моделирование"</b>                                                                                                                                         | <b>67</b> |
| <b>Червяков Н. М.</b> Математическая модель взаимодействия вирусов в эпителии дыхательных путей . . . . .                                                                                          | 68        |
| <b>Лыфенко А. И. , Добросердова Т. К.</b> Моделирование легочного кровотока для планирования операции Фонтена . . . . .                                                                            | 69        |
| <b>Поворознюк А. П., Бурцев Л. А., Матвеев С. А.</b> Сжатие свёрточных нейронных сетей с применением малоранговых матричных и тензорных разложений . . . . .                                       | 70        |
| <b>Замарашкин Н. Л., Бурцев Л. А., Таумурзаев А. К.</b> Восстановление тензора канала на основе информации о произведении матриц канала . . . . .                                                  | 72        |
| <b>Клочкова И. Ю., Желтков Д. А.</b> Эффективное хранение и умножение разреженных матриц в задаче факторизации . . . . .                                                                           | 73        |
| <b>Ильин Е.А. , Косолапов И.А., Ненашев А.С., Сетуха А.В.</b> Построение предобуславливателя для одного гиперсингулярного интегрального уравнения . . . . .                                        | 74        |
| <b>Гребенников Д. С., Лыфенко А. И., Тимохин А. М.</b> Моделирование внутриклеточной фармакодинамики противовирусных препаратов для лечения ВИЧ-инфекции . . . . .                                 | 75        |
| <b>Файкин Г. М., Шангареева С. К., Степаненко В. М., Медведев А.</b> Конструктор моделей углеродного цикла суши: постановка задачи, численная реализация, тестовые случаи . . . . .                | 76        |
| <b>Масс И. А., Валиахметов Б. И., Сетуха А. В.</b> Исследование блочно-теплицевой структуры матриц дискретизации интегральных уравнений для задач рассеяния с слоистыми диэлектриками . . . . .    | 77        |
| <b>Ожигов Ю. И., Кулагин А. В., Ю Цзянчуань</b> Воздействие дефазированного шума на темное квантовое состояние . . . . .                                                                           | 79        |

**Секция: "Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром"**

**81**

- Лукьяненко Д. В.** Об особенностях решения коэффициентных обратных задач для нелинейных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными различного типа 82
- Быков А. А.** Автомодельные решения уравнения реакции-адвекции-диффузии . . . . . 83
- Быков А. А., Гань Цинчжао** Эволюция фронта трехмерной контрастной структуры в неоднородной среде с адвекцией 84
- Нестеров А. Н.** Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений колебаний . 85
- Даник Ю.Э., Дмитриев М. Г.** Приближённое решение задачи оптимального управления с параметром с использованием прямой схемы . . . . . 86
- Никулин Е. И.** О периодических решениях с пограничным слоем в задаче с нелинейным сингулярно возмущенным граничным условием . . . . . 87
- Никулин Е.И., Карамышев А.В.** Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе тихоновского типа, возникающей в дрейфодиффузионной модели полупроводника . . . . . 89
- Волков В. Т., Ли Чжицян, Орлов А. О., Сюн Чжусюань** Задача граничного управления для уравнения реакция-диффузия-адвекция с разрывными коэффициентами . . 90
- Махмудов А. Р., Орлов А. О.** Асимптотический анализ движения фронта в уравнении реакции-диффузии с нелинейной диффузией . . . . . 91
- Вэй Юйсюань, Чэн Хань, Левашова Н. Т.** Использование асимптотического приближения решения краевой задачи для восстановления граничного условия . . . . . 92

**Секция: "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление"**

**94**

- Капитанов Д. В., Фомичев В. В.** Связь понятий отбора для систем дифференциальных и разностных уравнений на стандартном симплексе . . . . . 95
- Цыбина О. А., Атамась Е. И.** Управление квадрокоптером на основе глубокого обучения с подкреплением . . . . . 97
- Крылов П. А.** О некоторых условиях устойчивости замкнутой нелинейной аффинной системы . . . . . 99

**Бегишев Р.Р., Ильин А.В.** О задаче навигации в неопределенной среде с применением обучения с подкреплением . 101

**Секция: "Обратные задачи управления" 102**

**Никольский М. С.** Управляемые интегро – дифференциальные уравнения . Изучение свойств множеств достижимости . . . . . 103

**Шатков С. А.** Об одной задаче синтеза нелинейной динамической системы с неполной информацией . . . . . 103

**Бойков В. Г., Потапова В. В.** Моделирование системы стабилизации мультикоптера в программном комплексе EULER105

**Хайлов Е.Н., Григоренко Н. Л.** К решению задач терминального управления для модели Лотки-Вольтерры . . . 106

**Кулевский А. В.** О линейном преобразовании множества . . . 108

**Гончарова М.Н., Самсонов С.П.** О множестве управляемости одной системой второго порядка с мнимыми собственными значениями при наличии фазового ограничения . . . . . 108

**Орлов С. М., Ровенская Е. А., Бакланов А. П.** Анализ множеств достижимости и оценивание стратегий управления в моделях DICE . . . . . 109

**Аввакумов С. Н., Орлов М. В., Орлов С. М.** Оптимальные пропорции инвестиций в многофакторной модели экономического роста . . . . . 111

**Лебедев В.А., Хайлов Е.Н.** Математические модели с управлением для описания лечения ракового заболевания . . . 112

**Артемьева Л. А., Дряженков А. А., Потапов М. М.** О методе устойчивой аппроксимации  $\Omega$ -нормального решения задачи квадратичной минимизации . . . . . 114

**Григоренко Н. Л., Горьков В. П.** О системе управления совпадением двух движущихся тел . . . . . 114

**Пивоварчук Д. Г., Иванова А. Е.** Игра поставщиков на энергетическом рынке . . . . . 115

**Секция: "Системный анализ" 116**

**Зайцева М. В.** Оценка загруженности помещения в задаче моделирования потоков людей . . . . . 117

**Арутюнов А. В., Журавлева К. А.** Условия существования положения равновесия в модели рынка „спрос-предложение“ 118

**Парастаев Г. С.** Об асимптотической устойчивости кривых Лоренца в модели государства всеобщего благосостояния 119

**Шананин А. А., Федоров Ф. А.** Исследование корректности постановки краевой задачи для системы уравнений типа Риккати на основе концепции игр среднего поля . . . . . 120

**Точилин П. А., Паршиков М. В., Дэн Ш.** Об алгоритме построения субоптимальной траектории в задаче целевого управления при наличии фазовых ограничений, за счёт использования двух случайных деревьев . . . . . 122

**Секция: "Математическая кибернетика" 123**

**Ложкин С. А., Мо Ди** Гомеоморфные вложения полных трюичных деревьев в прямоугольные решётки с асимптотически минимальной площадью . . . . . 124

**Ложкин С. А., Власов Н. В.** О сложности мультиплексорной функции в классе схем из функциональных элементов 125

**Шуплецов М. С., Есипова Д. В.** Алгоритм сжатия графа, сохраняющий возможность поиска путей . . . . . 126

**Бухман А. В.** О сложности проверки равенства нулю полиномиальных форм с ограничениями на мономы в классе булевых функций . . . . . 128

**Секция: "Исследование операций" 129**

**Васин А. А., Абдулаев С. Ю.** Накопители электроэнергии с лучшей инвестиционной доходностью . . . . . 130

**Янь Чжибай** Предотвращение сходимости кусочного метода Левенберга–Марквардта к нестационарным точкам . . . 131

**Морозов В. В., Ковяшев Р. А.** Оптимальное потребление для риск-нейтрального инвестора . . . . . 132

**Поспелова И. И., Куренкова Д. А.** Формирование рекламной сетки для производителей дополняющих товаров . . 133

**Белянкин Г. А., Забелло М. А.** Прогнозирование индекса таг на основе данных видео о походе . . . . . 135

**Голембиовский Д. Ю., Царьков Н. В.** Об эвристическом подходе к решению задачи о приёме и доставке грузов с временными ограничениями . . . . . 138

**Мамедов Р. С.** Онлайн-распределение задач для сельскохозяйственной техники при ограничении на топливо как задача «бандита с рюкзаком» (Bandits with Knapsacks, BwK) . . . . . 141

**Секция: "Системное программирование и информационные технологии" 143**

|                                                                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Подсекция кафедр суперкомпьютеров и квантовой информатики и автоматизации систем вычислительных комплексов . . . . .                                            | 144 |
| <b>Сайбель Т. А., Никольский И. М.</b> О классификации трёхмерных изображений с помощью графовых нейросетей . . . . .                                           | 144 |
| <b>Русол А. В.</b> Модель контактного взаимодействия пылевых кластеров с фрактальной внутренней структурой в протопланетных газопылевых дисках . . . . .        | 145 |
| <b>Гарькавый И. С., Степанов Е. П.</b> Экспериментальное исследование эффективности двухконтурного многоагентного метода балансировки сетевых потоков . . . . . | 146 |
| <b>Тимохин И. А., Попова Н. Н.</b> Методы оптимизации использования GPU для структурного анализа белков: сопоставление пар фрагментов белков . . . . .          | 147 |
| <b>Минь С., Ершов Н. М.</b> Применение сверточных нейронных сетей в задачах быстрой реконструкции треков частиц . . . . .                                       | 149 |
| <b>Го Фэнжуй, Смелянский Р. Л., Королев В. Ю.</b> Прогнозирование размера окна перегрузки на основе метода EVAR150                                              |     |
| <b>Дьяченко Д. С., Никольский И. М.</b> Об одном алгоритме балансировки вычислительной нагрузки мобильного робота . . . . .                                     | 152 |
| <b>Балашов В. В., Загайнов Д. К.</b> Анализ применимости средств оценки максимального времени выполнения программ к коду обработки сетевых пакетов. . . . .     | 152 |
| <b>Горина Е. С., Ершов Н. М.</b> Решение задачи планирования траекторий в многоагентных системах с применением моделей машинного обучения . . . . .             | 154 |
| Подсекция кафедры алгоритмических языков . . . . .                                                                                                              | 155 |
| <b>Борисовский Л. Ю.</b> Нормализация медицинских терминов на наборе данных NEREL-BIO с вложенными сущностями156                                                |     |
| <b>Ганжин З. А., Корухова Ю. С.</b> Об одном подходе к разработке и реализации сервера для онлайн-транслятора . . . . .                                         | 157 |
| <b>Корухова Ю. С., Пономаренко В. С.</b> Об одном подходе к генерации оценочных функций в игровых программах . . . . .                                          | 158 |
| <b>Абрамов В. Г., Савицкая А. О</b> Гибридный подход к хранению и индексации аудитных логов в СУБД . . . . .                                                    | 159 |
| <b>Абрамов В. Г., Князев А. А.</b> Методы обеспечения безопасности в СУБД . . . . .                                                                             | 161 |
| <b>Вылиток А. А., Николаев А. А.</b> О построении универсального интерпретатора на основе L-преобразователя . . . . .                                           | 162 |

|                                                                                                                                                                   |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Вылиток А. А., Мельников Б. Ф., Мэн Линцян</b> Об одном подходе к распараллеливанию алгоритмов построения автомата PRI и его алгебраических структур . . . . . | 163        |
| <b>Пучкин Д. А.</b> Метод минимизации синтаксических диаграмм на основе конечных автоматов . . . . .                                                              | 164        |
| <b>Антипова А. А., Волкова И. А.</b> Оценка скорости работы компонентов синтаксического анализатора . . . . .                                                     | 166        |
| <b>Шамаева Е. Д., Карамела-Аждер Д. С.</b> Применение ядра Вайсфейлера-Лемана для выявления структурных ошибок нейросетевого синтаксического анализа . . . . .    | 167        |
| <b>Волкова И. А., Полозов И. К.</b> Применение векторных представлений ELMo в задаче лексической типологии языков                                                 | 169        |
| <b>Секция: "Теория вероятностей и математическая статистика"</b>                                                                                                  | <b>170</b> |
| <b>Драницына М. А., Захарова Т. В.</b> Статистические свойства критерия эквивалентности в логнормальной модели с недостающими данными . . . . .                   | 171        |
| <b>Захарова Т. В., Савушкин Е. В.</b> Существование и единственность решений для СДУ в нормированных пространствах $L_p, p < 2$ . . . . .                         | 172        |
| <b>Захарова Т. В., Панов П. В.,</b> Анализ биоэквивалентности для произвольных классов распределений . . . . .                                                    | 173        |
| <b>Хохлов Ю. С., Котова А. И.</b> Анализ модели коллективного риска с инвестициями . . . . .                                                                      | 175        |
| <b>Ромашина К. А., Беляев К. П.</b> Вероятностные распределения потоков тепла в Северной Атлантике по результатам данных многолетних наблюдений . . . . .         | 175        |
| <b>Белов А. Г., Белова О. А.</b> Моделирование и анализ групповых наблюдений . . . . .                                                                            | 179        |

## Секция: "Информационная безопасность".

### Продвинутая маршрутизация для масштабируемого распределенного векторного индекса

**Идрисов Ибрагим Эскирханович, Намиот Дмитрий Евгеньевич**

Кафедра информационной безопасности, e-mail: iidrisov@outlook.com, dnamiot@gmail.com

В задачах крупномасштабного векторного поиска (текста, аудио, изображений и др.) в качестве архитектуры индекса часто используются распределённые кластеризованные индексы. Индексы типа IVF [1] (реализованные, например, в Faiss [2]) позволяют искать не во всем наборе данных, а лишь в ограниченном числе списков  $n_{\text{probe}}$ , что позволяет достичь компромисса точности и времени обработки. В классической распределённой схеме, запросы отправляются на все шарды (broadcast), что ведёт к избыточным накладным расходам. Более рациональный подход предполагает маршрутизацию запроса к ограниченному подмножеству шардов с вероятно «релевантными» данными.

Рассмотрим стандартную структуру IVF индекса: каждый вектор привязывается к одному из  $K$  кластеров (списков). Наша задача: 1) распределить эти списки по шардам так, чтобы часто совместно запрашиваемые кластеры оказывались на том же шарде; 2) при выполнении запроса определить минимальный эффективный набор кластеров (и шардов), избегая broadcast.

Для распределения списков мы собираем статистику по репрезентативной выборке запросов и строим матрицу  $C_{ij}$  частот совместного появления кластеров  $i$  и  $j$  среди кандидатов. Дополнительно, вычисляем геометрическую близость центроидов и на основании этих данных строим гиперграф, где вершинами являются кластеры, а гиперребра моделируют «коактивации». С помощью пакета KaHyPar [3] этот граф разбивается на  $S$  частей в соответствии с количеством физических шардов индекса.

При выполнении запроса поиска мы применяем стратегию «жадного расширения»: сначала выбираем множество кластеров-кандидатов, ближайших к запросу. Затем эти кандидаты упорядочиваются по убыванию эвристической «ценности», которая учитывает предполагаемое количество просматриваемых векторов-кандидатов, стоимость обращения к шарду, штраф за «концентрацию» (hubness) кластеров и «плато» (plateau) расстояний. Расширение продолжается до достижения подобранного статистически порогового значения ценности. Выбранные кластеры отображаются в соответствующие шарды и запрос отправляется лишь на них с последующей централизованной агрегацией результатов.

Рассматриваемый тип индексов поддерживает операции добавления и удаления, которые также адаптируются под модель маршрутизации.

Для оценки распределения кластеров индекса и отображения в шарды, мы вводим структурные метрики:

— *Hubness* кластера  $\mathcal{L}_i$ :

$$\hat{h}_i = \mathbb{E}_{x \in \mathcal{L}_i}[N_k(x)],$$

где  $N_k(x)$  – число попаданий  $x$  в  $k$ -NN списки соседей других векторов.

— *Plateau*:

$$p_q(k, m) = \frac{d_{k+m} - d_k}{\max(\varepsilon, d_k)},$$

где  $d_k$  и  $d_{k+m}$  – расстояния до  $k$ -го и  $(k + m)$ -го центроидов в запросе  $q$ .

Сочетание коактивационной группировки списков и жадного отбора кластеров-кандидатов позволяет организовать эффективную маршрутизацию запросов в распределённых векторных индексах на базе IVF. Полученная схема допускает итеративное улучшение: онлайн обновление весов коактивации и обмен списков между шардами позволяют адаптировать систему к изменению распределения данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baranchuk D., Babenko A., Malkov Y. Revisiting the inverted indices for billion-scale approximate nearest neighbors // In Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV). 2018. pp.202–216.
- [2] Douze M., Guzhva A., Deng C., Johnson J., Szilvasy G., Mazaré P.E., Lomeli M., Hosseini L., Jégou H. The faiss library // IEEE Transactions on Big Data. 2025.
- [3] Schlag S., Heuer T., Gottesbüren L., Akhremtsev Y., Schulz C., Sanders P. High-Quality Hypergraph Partitioning (KaHyPar) // arXiv:2106.08696. 2021.

## Алгоритм для решения эквивалентности констациклических линейных кодов

Линь Пэйфэн

Кафедра информационной безопасности, e-mail: plin@cs.msu.ru

Задача перестановочной эквивалентности (РЕ) линейных кодов является одной из важнейших в теории кодирования. Стойкость криптосистемы Мак-Элиса, одного из кандидатов постквантовых схем, опирается на сложность этой задачи. Хотя РЕ-задача не является NP-полной, ее сложность не ниже сложности задачи об изоморфизме графов, которая известна как трудная проблема.

Типичный алгоритм для РЕ-задачи предложен в работе [1]. SSA-алгоритм строит оболочку и выбирает сигнатуру с низкой вычислительной сложностью. В [2] предложен алгебраический алгоритм на основе произведения Шура-Адамара, который используется для атак на криптосистему Мак-Элиса.

Наш алгоритм улучшает SSA-алгоритм, комбинируя свойства произведения Шура-Адамара из [3] и группы автоморфизмов констациклических кодов. Это позволяет снизить требования к сигнатуре и уменьшить число её итераций, когда исходный констациклический код преобразуется в другой констациклический код с непересекающимися носителями. Ключевой результат сформулирован в теореме.

**Теорема 1.** Пусть констациклический код  $C$  порождается полиномом  $\sum_{i=0}^{\frac{n}{v}-1} \alpha^i x^{v \cdot i}$ , где  $v \mid n$  и  $v \neq n$ . Мощность минимальной базы группы автоморфизмов  $\text{Aut}(C)$  принимает следующие значения:

$$\begin{cases} v - 1, & \text{если } \text{ord}_q(\alpha) > \frac{n}{v}, \\ v, & \text{если } \text{ord}_q(\alpha) = \frac{n}{v}, \\ n - v \cdot \text{ord}_q(\alpha), & \text{иначе.} \end{cases}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sendrier N. The Support Splitting Algorithm : // INRIA. 1999. С. 1–37.
- [2] Wieschebrink C. Cryptanalysis of the Niederreiter Public Key Scheme Based on GRS Subcodes // Post-Quantum Cryptography. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. С. 61–72.
- [3] Falk B. H., Heninger N., Rudow M. Properties of constacyclic codes under the Schur product // Designs, Codes and Cryptography. 2020. Vol. 88, No. 6. С. 993–1021.

## Новая модель использования Wi-Fi Direct

Макаров Артём Владимирович<sup>1</sup>, Намиот Дмитрий Евгеньевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра информационной безопасности, e-mail: artmakar01@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра информационной безопасности, e-mail: dnamiot@gmail.com

Повседневные реалии таковы, что привычный большинству постоянный и бесперебойный доступ к Интернету, а также приватность в сети становятся всё более иллюзорными. В одних случаях доступ к сотовой связи периодически ограничивается по соображениям безопасности, а в других — даже при полном подключении нельзя гарантировать конфиденциальность. На фоне этого в последнее время набирают популярность децентрализованные сервисы гипер-локального интернета [1], работающие «по запросу» (On Demand)

без использования дополнительной инфраструктуры и сетевых операторов. Наглядным примером является класс Bitchat-подобных решений [2], где обмен сообщениями возможен в пределах одной зоны радиовидимости.

Основная идея технологии Wi-Fi Direct заключается в том, чтобы позволить нескольким рядом находящимся устройствам организовать прямое беспроводное соединение между собой без использования традиционного маршрутизатора или точки доступа (Access Point). Как и в любой другой беспроводной технологии, устройства с Wi-Fi Direct должны каким-то образом уметь идентифицировать себя для того, чтобы с ними можно было взаимодействовать. Здесь в качестве такого идентификатора выступает SSID. Помимо этого стандарт IEEE 802.11 Wi-Fi также определяет процедуру под названием «активный запрос» (Probe Request), которая периодически отправляет специальный управляющий пакет для поиска доступных беспроводных сетей. Данный пакет в себе содержит MAC адрес устройства, SSID и специфичную для производителя информацию. Подобные характеристики позволяют определить так называемые сетевые Wi-Fi отпечатки (fingerprints) [3]. На основе перечисленных возможностей Wi-Fi Direct уже можно выделить целый обобщенный ряд сервисов для различных сценариев использования (use cases), например, таких как: вещание рекламной информации (broadcasting), локальный чат по интересам, альтернативный способ повторной идентификации на основе CSI (Channel State Information) [4], Q&A сервис [5], локальный файлообменник, а также контекстно-зависимые (Context-Aware) QR-коды.

Целью работы является построение новых моделей (сценариев использования), основанных на идеи сетевой пространственной близости и реализуемые через API функции мобильных платформ (Android: Wi-Fi Direct/Wi-Fi Aware/NetworkServiceDiscovery/; iOS: Bonjour/DNS-SD).

В работе произведен редизайн существующих сервисов, опираясь на эволюционирующие функциональные возможности Wi-Fi-ориентированных беспроводных технологий. Кроме того, проведено сравнение реализации описанных сервисов не только на базе Wi-Fi API, но и на основе аналогичных API для BLE (Bluetooth Low Energy), демонстрируя альтернативные подходы к достижению пространственной близости. Этот анализ позволил выделить и описать общий функционал, который в конечном итоге станет ядром для реализации единой программной платформы (SDK), ориентированной на создание сервисов на основе сетевой пространственной близости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Намиот Д. Е. WiFi Direct как технологическая основа для гиперлокального интернета // International Journal of Open Information Technologies. 2020. Т. 8, № 6. С. 77–82.

- [2] Bitchat: decentralized P2P messenger powered by BLE Mesh <https://github.com/permissionlesstech/bitchat/blob/main/WHITEPAPER.md> Retrieved: October, 2025.
- [3] Namiot D. Network proximity on practice: Context-aware applications and WiFi proximity // International Journal of Open Information Technologies. 2013. Vol. 1, No. 3. pp. 1–4.
- [4] Avola D., Emam E., Montagnini D., Pannone D., Ranaldi A. WhoFi: Deep Person Re-Identification via Wi-Fi Channel Signal Encoding // arXiv preprint arXiv: 2507.12869. 2025.
- [5] Makarov A., Namiot D. On-Air Q&A Physical Proximity System // In: Distributed Computer and Communication Networks: 28th International Conference, DCCN 2025, Moscow, Russia, September 22–26, 2025. Moscow: Peoples' Friendship University of Russia Named After Patrice Lumumba, 2025. pp. 300–308.

## Интерпретация моделей классификации аудиоданных с помощью маскирования спектрограмм

**Пак Юлия Руслановна, Терёхина Ирина Юрьевна**

Кафедра информационной безопасности, e-mail: [pjulie717119@gmail.com](mailto:pjulie717119@gmail.com), [iteryokhina@cs.msu.ru](mailto:iteryokhina@cs.msu.ru)

В настоящей работе рассматривается задача построения апостериорных интерпретаций для моделей классификации аудиоданных. Поскольку модели, работающие со звуком, применяются в областях с высокой степенью риска (акустический мониторинг, аутентификация по голосу, анализ респираторных звуков в медицине), важно обеспечить их надежность, а, значит, и интерпретируемость.

Предложенный в [1] подход предназначен для моделей, использующих компактные представления сигналов в виде спектрограмм. Маска, построенная на основе карты важности признаков, применяется к входной спектрограмме. В результате получается визуальная интерпретация, содержащая наиболее важные для предсказания признаки. С помощью обратных преобразований из нее восстанавливается сигнал — прослушиваемая интерпретация.

В продолжение работы [1] была исследована эффективность применения стандартных [2] методов интерпретации Saliency, Grad-CAM, LIME и SHAP в сочетании с масками различных типов (бинаризация, минмакская нормализация, сигмоида,  $\text{topk}\%$  важных компонентов).

Эксперименты проводились для сверточной нейронной сети архитектуры Cnn14 [3] на наборе данных ESC-50 [4], содержащем записи звуков среды, распределенные равномерно в 50 классов. Подход применялся как к чистым

данным, так и к данным с добавлением фоновых шумов. Эффективность оценивалась набором метрик, характеризующих согласованность интерпретаций с поведением модели, а также простоту их восприятия.

Результаты экспериментов показали, что метод LIME лучше всего приближает модель, но интерпретации получаются избыточными. Метод SHAP в контексте рассмотренного подхода не подходит для решения задачи и требует модификаций для получения более качественных результатов. Saliency дает простые, но недостаточно сфокусированные интерпретации. Grad-CAM продемонстрировал промежуточные результаты: он выделяет меньше посторонних компонентов, чем Saliency, но хуже согласован с моделью, чем LIME.

При добавлении примесей к входным данным общие тенденции сохраняются, но характер загрязняющего шума влияет на поведение модели и, следовательно, на особенности интерпретаций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Paissan F., Ravanelli M., Subakan C. Listenable Maps for Audio Classifiers // Proceedings of the International Conference on Machine Learning (ICML). 2024.
- [2] Explainable Artificial Intelligence (XAI): Concepts, taxonomies, opportunities and challenges toward responsible AI / A.B. Arrieta, N. Díaz-Rodríguez, J. Del Ser, A. Bennetot, S. Tabik, A. Barbado, S. Garcia, S. Gil-Lopez, D. Molina, R. Benjamins, R. Chatila, F. Herrera // Information fusion. 2020. T. 58. C. 82–115.
- [3] Panns: Large-scale pretrained audio neural networks for audio pattern recognition / Q. Kong, Y. Cao, T. Iqbal, Y. Wang, W. Wang, M. D. Plumbley // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. 2020. T. 28. C. 2880–2894.
- [4] Piczak K.J. ESC: Dataset for environmental sound classification // Proceedings of the 23rd ACM international conference on Multimedia. 2015. C. 1015–1018.

## **О влиянии робастных методов оптимизации и случайного сглаживания на устойчивость классификаторов изображений к**

### **состязательным атак**

**Ильюшин Евгений Альбинович**

Кафедра информационной безопасности, e-mail: eugene.ilyushin@gmail.com

Открытие состязательных атак на модели машинного обучения породило огромный интерес к безопасности систем машинного обучения и это направ-

ление исследований в последние годы активно развивается. Целью злоумышленника при реализации таких атак является генерация состязательного примера, результат классификации которого может быть изменен на класс, который интересен злоумышленнику или любой другой, отличный от исходного при этом сам пример получается путем добавления минимальных изменений к реальному [1]. Формально задача ставится следующим образом: пусть дан образец входных данных  $x \in \mathbb{R}^n$  и классификатор  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , тогда **состязательный пример** это  $x' = x + \delta$  такой, что  $f(x') \neq f(x)$ , где  $\delta$  – небольшое возмущение.

Не устойчивость к подобного сорта воздействиям связана с разными причинами, но главной по мнению автора, является использование принципа минимизации эмпирического риска (ERM) при обучении моделей, который предполагает, что данные в обучающей, тестовой и реальных выборках распределены одинаково и не зависимо [2]. Такое допущение в современных реалиях, при наличии наборов данных, содержащих миллионы и более элементов становится не актуальным и следует использовать методы, которые как раз основаны на том, что данные могут быть получены из разных распределений. Одним из таких методов робастной оптимизации является GroupDRO [3], цель которого заключается в минимизации значения функции потерь для наихудшего случая (1), а не в среднем как в ERM.

$$\min_{\theta \in \Theta} \max_g \mathbb{E}_{(x,y) \sim P_g} [\ell(f_\theta(x), y)], \quad (1)$$

где  $g \in \mathcal{G}$  – это группа или класс. Но так как в процессе обучения, данные метод предполагает, что мы на каждой итерации выбираем наихудший случай и оптимизируем модель именно для него, то была выдвинута гипотеза, что данный подход может создавать более точные решающие границы и делать модель более устойчивой к различного рода отклонениям во входных данных. Для проверки этой гипотезы были обучены классификаторы изображений основанные на ИНС с использованием набора данных MNIST и принципов ERM и GroupDRO. После чего каждый из этих классификатор был атакован с помощью следующих методов: FGSM, RFGSM и PGD. В результате для модели обученной с использованием ERM accuracy до проведения атак составляла 0.98, после 0.36, в то время как для GroupDRO 0.97 и 0.94 соответственно. Далее, используя метод случайного сглаживания [4] был вычислен сертифицированный радиус, гарантирующий робастный ответ модели для любого отклонения от исходной точки в пространстве в рамках этого радиуса. Для модели обученной с помощью принципа ERM в среднем сертифицированный радиус составил 0.45, а для GroupDRO 0.64, что говорит о том, что в процессе обучения с использованием GroupDRO модель становится более робастной к состязательным атакам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Szegedy, C., Zaremba, W., Sutskever, I., Bruna, J., Erhan, D., Goodfellow, I. and Fergus, R., 2013. Intriguing properties of neural networks. *arXiv preprint arXiv:1312.6199*.
- [2] Vapnik, V.N., 1999. An overview of statistical learning theory. *IEEE transactions on neural networks*, 10(5), pp.988-999.
- [3] Sagawa, S., Koh, P.W., Hashimoto, T.B. and Liang, P., 2019. Distributionally robust neural networks for group shifts: On the importance of regularization for worst-case generalization. *arXiv preprint arXiv:1911.08731*.
- [4] Kumari, A., Bhardwaj, D., Jindal, S. and Gupta, S., 2023. Trust, but verify: A survey of randomized smoothing techniques. *arXiv preprint arXiv:2312.12608*.

# Факторизуемые формы в коде квадратичных отношений и новый алгоритм декодирования линейных кодов

Чижов Иван Владимирович

Кафедра информационной безопасности, e-mail: chizhoviv@my.msu.ru

Пусть  $y$  — некоторый вектор длины  $n$  над полем  $\mathbb{F}_q$ , а  $t$  — натуральное число. Тогда задачей декодирования  $\text{DEC}(G, y, t)$   $[n, k]_q$ -кода  $\mathcal{C}$  (линейное  $k$ -мерное подпространство  $\mathbb{F}_q^n$ ) с порождающей матрицей  $G$  (строки матрицы — базис  $\mathcal{C}$ ) называется задача поиска такого кодового слова  $c \in \mathcal{C}$ , что  $\text{wt}(y - c) = t$ . Наиболее известный способ решения задачи декодирования был предложен в 1962 г. Е. Прангом [1], он называется алгоритмом декодирования с использованием информационных множеств. В последние годы было разработано большое число модификаций этого алгоритма, а также появились новые подходы к решению этой задачи (см., например, [2]).

В работе предлагается новый алгоритм решения задачи декодирования  $\text{DEC}_{\mathcal{C}}(G, y, t)$  некоторого  $[n, k]_q$ -кода  $\mathcal{C}$ , основанный на поиске квадратичных форм  $Q(x_1, \dots, x_k)$  (однородный многочлен степени 2), которые обращаются в ноль при подстановке вместо переменных элементов из столбцов матрицы  $G$ , а также раскладываются в произведение линейных форм  $L_1(x_1, \dots, x_k)$  и  $L_2(x_1, \dots, x_k)$ , т.е.  $Q(G) = 0$  и  $Q = L_1 \cdot L_2$ .

Доказано, что новый алгоритм декодирования для случайного линейного кода требует в среднем  $O(tk^2n \cdot M)$  операций в поле  $\mathbb{F}_q$ , где

$$M = \min_{s \in [1, t]} q^{(t-s)} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t}{s} \binom{n-t}{k-s}}.$$

При этом предложенный алгоритм иногда требует меньше операций, чем самый лучший известный алгоритм декодирования [2]. Например, при  $q = 2$ ,

$n = 1400$ ,  $k = 640$  и  $t = 132$  алгоритм из работы [2] требует примерно  $2^{128}$  битовых операций. Новый же алгоритм для этих параметров требует примерно  $2^{102}$  битовых операций при значительно меньшем объеме памяти (всего  $2^{40}$  битов против  $2^{82}$  битов).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Prange E. The use of information sets in decoding cyclic codes // IEEE. 1962. V. 8, N. 5, PP. 5–9.
- [2] Both L., May A. Decoding Linear Codes with High Error Rate and Its Impact for LPN Security // Post-Quantum Cryptography: 9th International Conference (PQCrypto 2018) Proceedings (USA, April 9–11 2018). Cham: Springer, 2018. PP. 57–76.

# Применение метода биюнктивных имплицент в анализе фильтрующих генераторов

Трубицин Никита Михайлович

ООО "Центр сертификационных исследований", e-mail: trubitsin.nik@mail.ru

Применим алгоритм 3, приведённый в работе [1], для анализа фильтрующего генератора (восстановления его начального заполнения по известным фильтрующей функции, точкам съёма и выходной последовательности гаммы). Как и в работе [1], обозначим  $N_k(n) = 1 + n + C_n^1 + \dots + C_n^k$ .

**Теорема 1.** Для системы  $S$  булевых уравнений, порождаемой функционированием фильтрующего генератора с длиной РСЛОС  $n$  и фильтрующей функцией алгебраической степени  $r \in \overline{2, n}$ , при выполнении для некоторого  $d \in \overline{0, n-r}$  условий

$$1) \text{ количество материала } t \text{ удовлетворяет неравенству } t \geq \frac{N_{r+d}(n) - 1}{N_d(n)};$$

2) среди столбцов матрицы  $B_d$  имеется максимально возможное количество линейно независимых,

алгоритм 3 на этапе, соответствующем значению  $d$  (то есть после умножения всех уравнений системы на все мономы степени не выше  $d$  от  $n$  переменных), найдёт все её элементарные биюнктивные имплиценты. При этом множеством решений полученной 2-КНФ является в точности множество всех начальных заполнений фильтрующего генератора, соответствующих данной выходной последовательности гаммы.

**Следствие.** Если в условиях теоремы 1 система  $S$  одновыполнима, то  $\text{rang} B_d = N_{r+d}(n) - 1$  и алгоритм 3 найдёт  $3C_n^2$  элементарных биюнктивных имплицент.

**Теорема 2.** Среднее количество биюнктивных имплицентов, которое найдёт алгоритм 3 при анализе фильтрующего генератора, не имеющего эквивалентных состояний, с длиной РСЛОС  $n$  и фильтрующей функцией алгебраической степени  $r \in \overline{2, n}$ , количестве материала  $t$  и умножении исходных уравнений на все мономы степени не выше  $d$  от  $n$  переменных, равно

$$u(n, r, t, d) = \begin{cases} 3C_n^2, & t \geq \left\lceil \frac{N_{r+d}(n)-1}{N_d(n)} \right\rceil; \\ \frac{3C_n^2}{2^{N_{r+d}(n)-t \cdot N_d(n)-1}}, & \frac{N_{r+d}(n)-\log_2 3C_n^2-1}{N_d(n)} \leq t \leq \left\lfloor \frac{N_{d+2}(n)-1}{N_d(n)} \right\rfloor; \\ 0, & 1 \leq t < \frac{N_{r+d}(n)-\log_2 3C_n^2-1}{N_d(n)}. \end{cases}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тарасов А. В. Об одном методе построения следствий специального вида для систем булевых уравнений // Математические вопросы криптографии. 2023. Т. 14, № 1. С. 115–130.

## Методы оценки качества наборов данных для машинного обучения

Порывай Максим Викторович, Намиот Дмитрий Евгеньевич

Кафедра информационной безопасности, e-mail: maximporyvay@yandex.ru, dnamiot@gmail.com

**Актуальность.** Качество наборов данных является критическим фактором, определяющим эффективность моделей машинного обучения. Низкое качество данных может привести к неточным предсказаниям, смещенным результатам и снижению доверия к ML-системам. В условиях экспоненциального роста объемов данных и их источников становится актуальной задача разработки систематических подходов к оценке качества наборов данных. Существующие методы оценки качества данных часто фокусируются на отдельных аспектах, но не предоставляют интегральной оценки пригодности набора данных для конкретных задач машинного обучения, что создает необходимость в разработке новых подходов и инструментов.

**Классификация методов оценки качества данных.** Анализ существующих подходов позволяет выделить следующие методы оценки качества данных для машинного обучения:

- Содержательные методы (анализ пропущенных значений [1], проверка на дублирование экземпляров [2], и др.) оценивают собственно информационное наполнение данных.
- Контекстные методы (оценка репрезентативности выборки [3] и др.) учитывают специфику предметной области.

- ML-специфичные методы (анализ сбалансированности классов [4], оценка качества разметки [5], детекция выбросов и аномалий [6], и др.) учитывают особенности непосредственно алгоритмов машинного обучения.

**Предлагаемый пайплайн оценки качества данных.** На основе анализа существующих подходов предлагается четырехэтапный пайплайн комплексной оценки качества наборов данных для машинного обучения. Первый этап включает предварительный анализ данных, где осуществляется базовое исследование структуры данных, определяются их характеристики. Вторым этапом является применение различных методов оценки качества данных и расчет метрик. Третий этап предполагает интегральную оценку качества данных через расчет композитного индекса качества, который объединяет различные метрики с весовыми коэффициентами, определяемыми спецификой конкретной задачи машинного обучения. Четвертый этап включает генерацию комплексного отчета с ранжированием выявленных проблем по степени их критичности для целевой ML-задачи и формированием автоматических рекомендаций по улучшению качества данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A survey on missing data in machine learning / T. Emmanuel, T. Maupong, D. Mpoeleng, T. Semong, B. Mphago, O. Tabona // Journal of Big Data. 2021. T. 8:140.
- [2] Ilyas I., Chu X. Data Cleaning // Association for Computing Machinery and Morgan & Claypool Publishers. 2019. C. 47–90.
- [3] Representation Bias in Data: A Survey on Identification and Resolution Techniques / N. Shahbazi, Y. Lin, A. Asudeh, H. V. Jagadish // ACM Computing Surveys. 2023. T. 55, C. 1–39.
- [4] The class imbalance problem in deep learning / K. Ghosh, C. Bellinger, R. Corizzo, P. Branco, B. Krawczyk, N. Japkowicz // Machine Learning. 2024. T. 113, C. 4845–4901.
- [5] Everyone wants to do the model work, not the data work: Data cascades in high-stakes AI / N. Sambasivan, S. Kapania, H. Highfill, D. Akrong, P. Paritosh, L. M. Aroyo // In proceedings of the 2021 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems. C. 1–15.
- [6] Hamzeh A., Shengnan N. C. Performance evaluation of outlier detection techniques in production timeseries: A systematic review and meta-analysis // Expert Systems with Applications. 2022. T. 191:116371.

## Секция: "Теория дифференциальных уравнений".

## Базисность Рисса системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде.

Садовничая Инна Викторовна<sup>1</sup>, Зуев Кирилл Петрович<sup>2</sup><sup>1</sup> Кафедра общей математики, e-mail: ivsad@yandex.ru<sup>2</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: kizuev02@gmail.com

Рассматривается граф-звезда с тремя ребрами одинаковой длины  $l$ . Предполагается, что на каждом из ребер задан оператор Штурма-Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением  $l(h) = -h'' + q(x)h$  и краевыми условиями Дирихле. Потенциал предполагается сингулярным:  $q = u'$ ,  $u \in L_2$ . А именно, параметризуем каждое ребро вещественным параметром  $x_j$ , изменяющимся от 0 до  $l$ , причем значение параметров  $l$  соответствует вершине, инцидентной всем трем ребрам. В свободных концах поставим условия Дирихле:  $h_0(0) = h_2(0) = h_3(0) = 0$ , а в общей вершине — условие непрерывности  $h_1(l_1) = h_2(l_2) = h_3(l_3)$  и условие Кирхгофа  $h_1^{[1]}(l_1) + h_2^{[1]}(l_2) + h_3^{[1]}(l_3) = 0$ .

Здесь через  $h^{[1]} = h' - uh$  обозначена квазипроизводная. В случае нулевого потенциала считаем  $u = 0$ , где  $u$  — первообразная потенциала, тогда квазипроизводная, очевидно, совпадает с обычной:  $h^{[1]} = h'$ .

Заметим, что спектральную задачу на графе можно легко свести к системе

$$-h'' + \mathbf{q}(x)\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}, \text{ где } \mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \end{pmatrix}, \mathbf{q}(x) = \text{diag}\{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}.$$

В работах [1]–[2] были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора. Настоящий доклад посвящен вопросам базисности Рисса системы собственных функций. А именно, справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $L_{\mathbf{u}}$  — оператор, порожденный дифференциальным выражением  $\ell(\mathbf{h}) = -(\mathbf{h}^{[1]})' - \mathbf{u}\mathbf{h}^{[1]} - \mathbf{u}^2\mathbf{h}$ , и краевыми условиями

$$\begin{cases} h_1(0) = 0, \\ h_2(0) = 0, \\ h_3(0) = 0, \\ h_1(l) = h_2(l) = h_3(l), \\ h_1^{[1]}(l) + h_2^{[1]}(l) + h_3^{[1]}(l) = 0. \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{u} = \text{diag}\{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $q_k = u'_k$ . Тогда система собственных функций оператора образует базис Рисса в пространстве  $\mathfrak{H} = L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi]$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зуев К. П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. I // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 2. С. 162–176.
- [2] Зуев К. П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. II // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 293–304.

## Регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля с дельта–потенциалом и запаздыванием в аргументе

Савчук Артем Маркович<sup>1</sup>, Северцов Станислав Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: savchuk@cosmos.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: stas.severtsov@mail.ru

В работе [1] был вычислен след оператора в  $L_2(0, \pi)$ , порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)y$$

на отрезке  $[0, \pi]$  с граничными условиями Дирихле (более общий результат для произвольного заряда  $q(x)$  получен в [2]). Рассмотрим оператор  $A$  в  $L_2(0, \pi)$ , порожденный дифференциальным выражением

$$l(y)(x) = -y''(x) + \delta(x - a)y(x - \varepsilon), \quad a \in (0, \pi), \quad a - \varepsilon > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

на отрезке  $[0, \pi]$  с граничными условиями Дирихле. Отметим, что оператор Штурма–Лиувилля со сдвигом в аргументе и регулярным потенциалом был рассмотрен и исследован в недавней работе [3]. Оператор  $A$  можно определить, используя результаты работы [4]:

$$\begin{aligned} l(y) &= -(y^{[1]})'(x) - u(x - \varepsilon)y^{[1]}(x - \varepsilon) - u(x)u(x - \varepsilon)y(x - 2\varepsilon), \\ y^{[1]}(x) &= y'(x) - u(x)y(x - \varepsilon), \\ \mathcal{D}(A) &= \left\{ y \in AC[-2\varepsilon, \pi] \mid \begin{array}{l} [y'(x) - u(x)y(x - \varepsilon)] \in AC[-\varepsilon, \pi], \\ l(y) \in L_2(0, \pi), y(0) = y(\pi) = 0 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

где  $u(x) = \theta(x - a)$  — функция Хевисайда, равная индикатору луча  $x \geq a$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L$  — оператор Штурма–Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y)(x) = -y''(x) + \delta(x - a)y(x - \varepsilon)$$

на отрезке  $[0, \pi]$  с граничными условиями Дирихле. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k - k^2 - \frac{2 \sin(k(a - \varepsilon)) \sin(ka)}{\pi} \right) = 0.$$

При суммировании левого ряда методом средних:  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - k^2) = 0$ .

Важное замечание состоит в следующем. В работе [1] было впервые отмечено, что для операторов с потенциалами типа дельта-функций классическая формула следа Гельфанда–Левитана меняется: появляется дополнительное слагаемое в правой части. Для потенциала  $q(x) = \delta(x - a)$  это слагаемое равно  $-\frac{1}{8}$ . Оказывается, что при появлении запаздывания  $\varepsilon > 0$  слагаемое пропадает (речь идет именно про возмущение вида  $\delta_a(x)y(x - \varepsilon)$ , для возмущений вида  $q(x)y(x - \varepsilon)$ , где  $q(x)$  — заряд, авторами получена общая формула регуляризованного следа и правая часть в ней равна нулю не всегда), так что мы возвращаемся к классической формуле.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с  $\delta$ -потенциалом // Успехи мат. наук. 2001. Т. 123, № 3. С. 401–404.
- [2] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.
- [3] Борисов Д. И., Поляков Д. М. Асимптотики собственных значений оператора Шрёдингера с малым сдвигом и условием Дирихле // Доклады РАН Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 517. С. 44–49.
- [4] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.

## Регуляризованный след первого порядка для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом из класса зарядов и краевыми условиями Дирихле на трехзвенном графе

Савчук Артем Маркович<sup>1</sup>, Кузнецов Егор Дмитриевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: savchuk@cosmos.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: egorka.kuz@yandex.ru

Рассматривается граф с тремя ребрами одинаковой длины  $\pi$  и четырьмя вершинами степени 3, 1, 1, 1. Предполагается, что на каждом из ребер задан оператор Штурма–Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением  $l(y) = -y'' + q_j(x)y$ .

Потенциал  $q(x) = \{q_1, q_2, q_3\}$  предполагается комплекснозначной мерой (зарядом):  $q_j = u'_j$ ,  $u_j \in BV_0[0, \pi]$  — функция ограниченной вариации с до-

полнительным условием  $u_j(0) = 0$ , причем  $u(x)$  непрерывна слева в каждой точке  $x \in (0, \pi]$ .

В концевых вершинах графа ставятся условия Дирихле  $y_j(0) = 0$ , а в центральной вершине — условия непрерывности  $y_1(\pi) = y_2(\pi) = y_3(\pi)$  и условие Кирхгофа  $y_1^{[1]}(\pi) + y_2^{[1]}(\pi) + y_3^{[1]}(\pi) = 0$ . Здесь через  $y^{[1]} = y' - uy$  обозначена *квазипроизводная*. В случае нулевого потенциала  $u = 0$  квази-производная, очевидно, совпадает с обычной:  $y^{[1]} = y'$ .

В работах [1]–[2] с указанным дифференциальным выражением и краевыми условиями был связан корректно определенный на плотной области замкнутый оператор Штурма–Лиувилля. Была доказана дискретность его спектра, получены асимптотические формулы для собственных значений  $\{\lambda_n\}$  и собственных функций. Настоящий доклад посвящен вычислению формулы регуляризованного следа первого порядка

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_n^0 - \langle q \rangle).$$

Здесь  $\lambda_n^0$  — собственные значения оператора с нулевым потенциалом, а  $\langle q \rangle$  — среднее нашего потенциала, равное  $\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^\pi q_j(dx) = \frac{u_1(\pi) + u_2(\pi) + u_3(\pi)}{\pi}$ .

Формулы регуляризованных следов хорошо известны для обыкновенных дифференциальных операторов в то время, как случай операторов на графах (в случае сингулярного потенциала) оставался не изученным. Известно (см., например, [3]), что для оператора на отрезке при переходе от суммируемого потенциала  $q \in L_1[0, \pi]$  к сингулярному (указанного выше класса) в ответе возникает дополнительное слагаемое  $\frac{1}{8} \sum h_k^2$ , где  $h_k$  — величины всех скачков функции  $u$ . Мы показываем, что этот результат переносится на случай нашего оператора на графе — в правой части появляется слагаемое такого же вида. При этом, метод доказательства отличается от метода работы [3] и носит более общий характер — он основан только на асимптотических формулах для функции Грина невозмущенного оператора. В перспективе это позволит нам перенести результат на случай операторов на таком же графе, но с другими краевыми условиями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зуев К. П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. I // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 2. С. 162–176.
- [2] Зуев К. П. Асимптотики собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом на графе-звезде. II // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 293–304.

- [3] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.

## Проблема Пуанкаре. Построение асимптотик решений уравнений с мероморфными коэффициентами в окрестности их особых точек

Коровина Мария Викторовна

Кафедра общей математики, e-mail: betelgeuser@yandex.ru

Одной из фундаментальных задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами является задача построения асимптотик их решений в окрестности особых точек. Эта задача была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. Основной целью работы является описание метода построения этих асимптотик.

А именно, Пуанкаре рассматривал уравнение

$$a_n(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} u(x) + \dots + a_i(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^i u(x) + \dots + a_0(x) u(x) = 0, \quad (1)$$

где  $a_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n$  — мероморфные функции.

Задача заключается в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности особых точек (как регулярных, так и иррегулярных).

Без ограничения общности будем считать, что особой точкой уравнения (1) является  $r = 0$ . В работе [3] показано, что уравнение (1) может быть приведено к виду

$$H \left( r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) u = 0,$$

где

$$H \left( r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) = \left( -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{a}_i(r) \left( -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)^i.$$

Здесь  $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ . Будем называть  $k+1$  порядком вырождения оператора. Через  $\tilde{a}_i(r)$  обозначены соответствующие голоморфные функции.

Основным символом дифференциального оператора  $H \left( r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right)$  называется функция  $H_0(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tilde{a}_i(0)}{k^{(n-1)}}$ .

Ответ на вопрос об общем виде асимптотики решений уравнения (1) дает следующая теорема.

**Теорема 1.** *Асимптотические члены, соответствующие нулевому корню основного символа, либо будут конормальными, либо будут иметь вид*

$$u_0(r) = \exp\left(P_0\left(r^{-\frac{1}{l_0}}\right)\right) r^{\sigma_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^0 r^{\frac{i}{l_0}}.$$

Здесь  $l_0 \in N$ ,  $\sigma_0$  — некоторое комплексное число,  $P_0(x)$  — полином, степень которого не превышает  $kl_0$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^0 x^i$  — асимптотический ряд.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires. // Acta math. 1886, v. 8, p. 295-344.
- [2] Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / Анри Пуанкаре. — М. : Наука, 1974.
- [3] Кац Д. С. Вычисление асимптотик решений уравнений с полиномиальными вырождениями коэффициентов // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 12. — С. 1612–1617.

## Групповой анализ модельного уравнения третьего порядка

**Аристов Анатолий Игоревич**

Кафедра общей математики, e-mail: ai\_aristov@mail.ru

Работа посвящена групповому анализу следующего модельного уравнения:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = f(u),$$

где  $f(\cdot)$  — произвольная фиксированная нелинейная функция одного аргумента.

Показано, что это уравнение при любых  $f(\cdot)$  допускает следующие инфинитезимальные операторы:  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial y}$ . Кроме того, оно допускает:

- при  $f(u) = \beta u^\alpha$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\alpha \neq -3$  — оператор  $X_4 = (1 - \alpha)y \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u}$ ,
- при  $f(u) = \beta u^{-3}$ ,  $\beta \neq 0$  — операторы  $X_4 = 4y \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u}$  и  $X_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial u}$ ,
- при  $f(u) = e^u$  — операторы  $X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{\partial}{\partial u}$  и  $X_5 = \eta(y) \frac{\partial}{\partial y} - \eta'(y) \frac{\partial}{\partial u}$ , где  $\eta(\cdot)$  — произвольная функция одного аргумента,

Для  $f(u) = \beta u^{-3}$  и  $f(u) = e^u$  с помощью этих операторов построено несколько семейств инвариантных решений, кроме того, по некоторым точным решениям построены классы решений с произвольными параметрами.

Исследование поддержано Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No 075-15-2025-345.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007 г.
- [2] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
- [3] Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. М.: Физматлит, 2005.

# Решение задачи Коши для одного гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом

Зайцева Наталья Владимировна

Кафедра общей математики, e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

Доклад посвящен исследованию вопроса разрешимости начальной задачи в полуплоскости  $D = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$  для гиперболического уравнения со сдвигом по пространственной переменной в свободном члене (для гиперболического уравнения с нелокальным операторным потенциалом)

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) + b u(x - h, t) = 0, \quad (x, t) \in D,$$

где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $h \neq 0$  — заданные действительные числа, с классическими начальными условиями Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и финитными начальными функциями  $u_0(x) \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1(x) \in C^1(\mathbb{R})$ .

С помощью интегральных преобразований, согласно [1, гл. 3, § 11], построено в явном виде фундаментальное решение линейного дифференциально-разностного оператора  $\partial^2/\partial t^2 - a^2 \partial^2/\partial x^2 + b R$ , где  $R$  — оператор сдвига, действующий по правилу  $Ru(x, t) = u(x - h, t)$ .

Решение задачи получено в виде свертки найденного фундаментального решения с начальными функциями  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  при выполнении условия положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в уравнении:

$$a^2 \xi^2 + b \cos(h\xi) > 0 \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}.$$

С подробными результатами можно ознакомиться в работе [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
- [2] Зайцева Н.В. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 6. С. 739-747.

## О нелинейном интегральном уравнении, получающемся после трёхпараметрического замыкания первой степени.

Никитин Алексей Антонович<sup>1</sup>, Огородников Даниил Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра общей математики, e-mail: nikitin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра общей математики, e-mail: s02210498@gse.cs.msu.ru

В работе рассматривается модель самоструктурирующихся биологических сообществ Ульфа Дикмана и Ричарда Лоу. В статьях [1, 2] была выведена система интегро-дифференциальных уравнений динамики пространственных моментов. Для работы с ней авторы применили трёхпараметрическое замыкание первой степени (power-1 closure):

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\beta} \left( \alpha N C(y - x) + \beta N C(y) + \gamma N C(x) - (\alpha + \gamma) N^3 \right),$$

где  $\alpha, \gamma \geq 0, \beta > 0$ . В результате чего был получен нелинейный интегральный оператор

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{\frac{\overline{m}(x)}{N} - \overline{w}(x) + [\overline{m} * f](x) - \frac{\alpha}{\beta} N [\overline{w} * f](x)}{d + \overline{w}(x) + \frac{\gamma s}{\beta} N},$$

где  $N = \frac{b-d}{s} + \langle \overline{w}, f \rangle$ ,  $\langle \overline{w}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{w}(y) f(y) dy$ .

Были установлены достаточные условия, при которых у оператора  $\mathcal{A}$  на шаре  $B(R) \subset L_1(\mathbb{R}^d)$  существует единственная неподвижная точка. Кроме того, были получены ограничения на биологические параметры, при которых неподвижная точка  $\mathcal{A}$  ненулевая.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models. // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press. P. 252–270. **2000**.
- [2] Murrell D.J., Dieckmann U., Law R. On moment closures for population dynamics in continuous space. // J. Theor. Biol. 229. P. 421–432. **2004**.

- [3] Николаев М.В., Никитин А.А. Принцип Лере-Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения. // Дифференциальные уравнения. Т. 55, №9. С. 1209—1217. 2019.

## О решении модифицированной краевой задачи Неймана для вырождающегося эллиптического дифференциального уравнения в прямоугольнике

Емельянов Дмитрий Павлович

Кафедра общей математики, e-mail: emelianov@cs.msu.ru

Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + yc(y)u'_y - a(y)u = f(x, y) \quad (1)$$

в прямоугольнике  $\Omega \equiv \{0 < x < 1, 0 < y < b\}$ , где  $b > 0$ , с модифицированным граничным условием Неймана

$$u'_x(0, y) = u'_x(1, y) = 0, \quad 0 < y < b; \quad u'_y(x, b) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (2)$$

Полагаем, что в некоторой области  $G$  комплексного переменного  $y$ , такой, что  $[0, b] \subset G$ , коэффициенты  $a(y)$  и  $c(y)$  являются аналитическими. Также мы будем требовать, чтобы  $a(y) \geq 0$ ,  $c(y) \geq 0$  при  $y \in [0, b]$ .

Обозначим  $\Gamma = \partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ . Представим  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , где  $\Gamma_1 = \{x = 0, 1; 0 < y < b\} \cup \{y = b; 0 < x < 1\}$  — регулярная гладкая часть границы,

$\Gamma_2 = \{y = 0; 0 < x < 1\}$  — сингулярная часть границы,

$\Gamma_3 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$  — угловые точки регулярной части границы.

**Определение.** Функцию  $u(x, y)$  мы будем называть классическим решением модифицированной краевой задачи Неймана для уравнения (1) в прямоугольнике  $\Omega$ , если  $u \in B(\bar{\Omega}) \cap B^1(\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_1) \cap C^2(\Omega)$ , для всех точек  $(x, y) \in \Omega$  функция  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1) и для всех  $(x, y) \in \Gamma_1$  функция  $u(x, y)$  удовлетворяет краевому условию (2), и при этом  $y^2 u'_y(x, y)$  стремится к 0 равномерно по  $x \in [0, 1]$  при  $y \rightarrow 0 + 0$ .

Доказана следующая основная теорема.

**Теорема 1.** Пусть правая часть  $f(x, y)$  уравнения (1) аналитична в  $\bar{\Omega}$  по совокупности переменных  $x$  и  $y$ . Тогда классическое решение модифицированной краевой задачи Неймана (1), (2) существует и может быть представлено в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \eta_k(y) + \ln \frac{y}{b} \cdot \chi_k(y) + \left( \frac{y}{b} \right)^{r_k} \varphi_k(y) \right) \cos \pi k x,$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 < y \leq b,$$
$$r_k = \frac{1 - c(0) + \sqrt{(1 - c(0))^2 + 4\pi^2 k^2 + 4a(0)}}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

где функции  $\eta_k, \chi_k, \varphi_k \in A(G)$ , причём если  $r_k \notin \mathbb{Z}$ , то  $\chi_k(y) \equiv 0, k \in \mathbb{N}_0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Доклады АН СССР, 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
- [2] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 448 с.
- [3] Емельянов Д. П., Ломов И. С. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. М. : ФГБУ «Издательство «Наука», 2021. Т. 57, № 5. С. 655–672.

## Секция: "Математическое моделирование и вычислительные методы".

Подсекция кафедры вычислительных методов

### Итерационный вариант метода сопряженных градиентов после второй трансформации Гаусса

Соснин Николай Васильевич

Кафедра вычислительных методов, e-mail: vmsnv@cs.msu.ru

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений  $Ay = f$ , где  $A$  - невырожденная матрица с действительными элементами  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Решение данной системы линейных уравнений можно искать, используя вспомогательный вектор  $x$ , связанный с вектором  $y$  соотношением  $y = A^T x$  (вторая трансформация Гаусса [1]). Для решения преобразованной системы линейных алгебраических уравнений предложен итерационный вариант метода сопряжённых градиентов, имеющий следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{при } k = 0 \quad y^0 = 0, \quad r^0 = -f, \quad s^1 &= \frac{r^0}{\|r^0\|_2}; \\ \text{при } k = 1, 2, \dots \quad q^k &= A^T s^k, \quad y^k = y^{k-1} - \frac{\|r^{k-1}\|_2}{\|q^k\|_2^2} \cdot q^k, \\ v^k &= Aq^k, \quad r^k = r^{k-1} - \frac{\|r^{k-1}\|_2}{\|q^k\|_2^2} \cdot v^k, \text{ или } r^k = Ay^k - f, \\ s^{k+1} &= \frac{r^k}{\|r^{k-1}\|_2} + \frac{\|r^k\|_2}{\|r^{k-1}\|_2} \cdot s^k. \end{aligned}$$

Выход из итерационного процесса осуществляется при выполнении неравенства  $\|r^k\|_2 \leq 10^{-p}$ , где  $\|r^k\|_2 = \sqrt{(r^k, r^k)}$ , а параметр  $p$  равен порядку числа обусловленности матрицы  $A$ , записанного в стандартной форме, увеличенному на две единицы ( $p \geq 5$ ). Приближённым решением системы  $Ay = f$  является вектор  $y = y^k$  после выхода из итерационного процесса.

Можно показать, что вектор  $y^k$  является также нормальным решением в случае недоопределённой системы  $Ay = f$  [2].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Санкт-Петербург : Лань, 2002. 731 с.
- [2] Craig E. The N-step iteration procedures // J. Math. and Phys. 1955. V. 34, № 1. С. 64–73.

# О применении методов машинного обучения для оценки риска развития послеоперационных инфекционных осложнений

Мухин Сергей Иванович, Буничева Анна Яковлевна, Кочетов  
Егор Владимирович, Гаевская Таисия Александровна, Радаева  
Карина Владиславовна<sup>1</sup>, Королев Юрий Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: vmmus@cs.msu.ru, bunicheva@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра хирургических болезней ФФМ МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: korolyov-1997@mail.ru

Интеллектуальный анализ данных является перспективным современным направлением, помогающим систематизировать и анализировать большие объемы информации. Одним из основных средств такого анализа являются методы машинного обучения. Эти методы нашли широкое применение и в обработке медицинской информации. Целью данной работы является исследование возможности применения методов машинного обучения к клинической базе разнородных медицинских данных пациентов, перенесших хирургическое вмешательство, для оценки риска развития послеоперационных осложнений.

В первую очередь изучалась возможность предсказания возникновения послеоперационных инфекционных осложнений по дооперационным признакам. Проведена работа по подготовке данных, в том числе нормализация данных, обработка числовых и категориальных значений, работа с вырожденными показателями. Проведен корреляционный анализ целевых переменных и признаков. Отмечается, что значимой связи с целевой переменной не выявлено.

В исследовании использован ряд классических алгоритмов решения задачи классификации: логистическая регрессия [1], случайный лес [2], метод опорных векторов [3], градиентный бустинг на деревьях решений [4]. Модели обучались при различных гиперпараметрах [5] для максимизации точности решения. Алгоритмы обучения подбирались специальным способом для получения лучшего решения при дисбалансе классов. В результате показано, что на рассматриваемой базе данных классические модели не позволяют получить предсказания с достоверностью, отличной от достоверности стохастической модели.

Также были рассмотрены и применены SOTa (state of the art) решения. Так для увеличения датасета использовались подходы генерации синтетических данных на основе существующих; для обработки текстов использовались трансформерные архитектуры [6]; для обработки медико-специфичных текстов использовались специальные модели типа BioBERT [7]; использовались

глубокие, предобученные на больших корпусах данных, модели для дообучения на существующих и последующего предсказания [8]. Использование передовых архитектур и подходов не позволяет на рассматриваемом наборе данных качественно улучшить полученное ранее решение поставленной задачи классификации.

В дополнительном исследовании исходная база данных была расширена за счет включения показателей в послеоперационный период. Анализ проводился по одинаковой схеме для трёх последовательных послеоперационных дней. Результаты работы трех моделей показали, что добавление послеоперационных признаков не улучшило прогноз осложнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andrew Cucchiera. Applied logistic regression. *Technometrics*, 34:358–359, 03 2012.
- [2] L. Breiman. Random forests. *Machine Learning*, 45:5–32, 2001.
- [3] Corinna Cortes and Vladimir Naumovich Vapnik. Support-vector networks. *Machine Learning*, 20:273–297, 1995.
- [4] Jerome Friedman. Greedy function approximation: A gradient boosting machine. *The Annals of Statistics*, 29, 11 2000.
- [5] James Bergstra and Y. Bengio. Random search for hyper-parameter optimization. *The Journal of Machine Learning Research*, 13:281–305, 03 2012.
- [6] Attention is all you need / A. Vaswani, N. Shazeer, N. Parmar, J. Uszkoreit, L. Jones, Aidan N. Gomez, L. Kaiser, I. Polosukhin // 2023.
- [7] Biobert: a pre-trained biomedical language representation model for biomedical text mining / J. Lee, W. Yoon, S. Kim, D. Kim, S. Kim, Chan Ho So, J. Kang // *Bioinformatics*, 36(4): 1234–1240, September 2019.
- [8] Deep neural networks and tabular data: A survey / V. Borisov, T. Leemann, K. Seßler, J. Haug, M. Pawelczyk, G. Kasneci // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 35(6):7499–7519, June 2024.

## Реализация метода переменных направлений на основе многоэтапного итерационного процесса для многомерного уравнения Шредингера

Егоренков Владимир Александрович<sup>1</sup>, Трофимов Вячеслав Анатольевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: egorenkov-v-a@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Южно-Китайский университет технологий, SCUT, Guangzhou, China, e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Как известно, основным методом численного решения многомерных (3D) дифференциальных уравнений является метод переменных направлений, предложенный в [1, 2]. Он устойчивый в отличие от других методов суммарной аппроксимации, применяемых для компьютерного моделирования трехмерных задач, как это продемонстрировано в [3], как пример, с помощью метода переменных направлений. Однако, данный метод первоначально был предложен для линейных дифференциальных уравнений. Его применение для решения нелинейных уравнений, в частности при моделировании процессов взаимодействия оптического пучка с полупроводником [4, 5], показало, что он не обладает асимптотической устойчивостью, которая может быть принципиальной. Следовательно, существует необходимость разработки численных методов, лишенных этого недостатка. Одним из возможных подходов был предложен в [4, 5]. Он основан на реализации многоэтапных итерационных процессов, записанных для разрешения нелинейных разностных схем, обладающих свойством консервативности. При этом, на каждом этапе, по сути, решается одномерная задача, что позволяет реализовать экономичный метод, подобный методу переменных направлений. Поэтому можно говорить о **методе переменных направлений, реализованного на основе итерационного процесса**. Однако, в отличие от разностных схем, предложенных Douglas, разрабатываемый метод обладает свойством асимптотической устойчивостью.

Данный доклад посвящен исследованию реализации многоэтапного итерационного процесса (метода переменных направлений, реализованного на основе итерационного процесса) для численного моделирования уравнения Шредингера, а также особенностей его применения при использовании адаптивных неотражающих краевых условий [6].

Егоренков В. А. благодарит РНФ (грант № 24-71-00031), при финансовой поддержке которого выполнена данная работа

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Douglas J., Rachford H.H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // Transactions of the American mathematical Society. 1956. Vol. 82, № 2. P. 421–439.
- [2] Douglas J. Alternating direction methods for three space variables // Numerische Mathematik. 1962. Vol. 4, № 1. P. 41–63.
- [3] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1967. 197 с.
- [4] Trofimov V.A., Loginova M.M., Egorenkov V.A. Conservative finite-difference scheme and two-stage iteration process of its realization for the 2d problem of semiconductor plasma generation by femtosecond pulse // Communications in Computational Physics. 2018. Vol. 23, № 5. P. 1512–1533.
- [5] Trofimov V.A., Loginova M.M., Egorenkov V.A. Conservative finite-difference scheme for computer simulation of contrast 3D spatial-temporal structures induced by a laser pulse in a semiconductor // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43, № 7. P. 4895–4917.
- [6] Cross-impact of the beam local wavenumbers on the efficiency of self-adaptive artificial boundary conditions for 2D nonlinear Schrödinger equation / V. A. Trofimov, M. M Loginova, V. A Egorenkov, Yongqiang Yang, Meng Wang // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2023. Vol. 46, № 15. P. 16006–16036.

## Генерация вихревого звука при дозвуковом обтекании цилиндра: моделирование на основе квазигазодинамических уравнений

Широков Иван Анатольевич

Кафедра вычислительных методов, e-mail: [ivanshirokov@inbox.ru](mailto:ivanshirokov@inbox.ru)

Важность исследования процессов возникновения вихревого звука связана с практическими задачами уменьшения уровня шума при работе вентиляторов в производственных помещениях, на самолетах, кораблях и т. п. Эти исследования проводились в многочисленных работах, при этом использовались различные представления о физической природе генерации звука при аэродинамическом обтекании твердых тел [1, 2]. Нестационарные вихри, которые образуются при таком обтекании, являются основным фактором возникновения и излучения звуковых колебаний. Как было показано [3], квазигазодинамический (КГД) алгоритм расчета течений вязкого теплопроводного газа позволяет, в числе прочего, проводить моделирование вихревых зон при обтекании твердых тел. В связи с этим, представляет интерес моделирование

картины вихрей, возникающих в типичной задаче изучения генерации вихревого звука: дозвукового обтекания цилиндрического профиля.

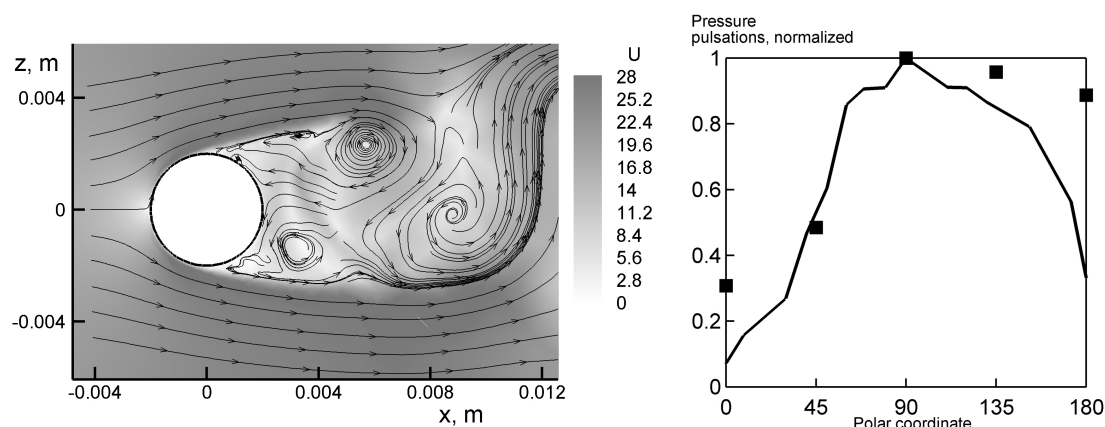


Рис. 1: Картина обтекания (слева). Интенсивность звуковых колебаний, эксперимент (сплошная линия) и моделирование (символы), справа.

В данной работе приведены предварительные результаты такого моделирования при скорости невозмущенного потока 20 м/с с числом Рейнольдса (вычисляемом по диаметру цилиндра 4 мм) 5300. Для трехмерного моделирования КГД алгоритм реализован на неструктурированных тетраэдральных сетках, построенных с помощью сеточного генератора Gmsh. На рис. номер: 1 слева показано мгновенное распределение модуля скорости и линий тока полученной при КГД моделировании нестационарной картины вихрей. В работе [2] приведены экспериментальные данные измерений интенсивности колебаний звуковых частот на поверхности цилиндра в различных точках. Эти данные, а также соответствующие значения интенсивности колебаний, полученные путем КГД моделирования, показаны на рис. номер: 1 справа. Абсциссы соответствуют азимутальному углу, отсчитываемому от точки торможения потока на наветренной стороне цилиндра. Интенсивности колебаний нормированы на максимальное значение в точке отрыва ( $90^\circ$ ). Видно, что общий вид зависимости интенсивности колебаний от положения точки измерения удовлетворительно соответствует экспериментальным данным, за исключением значения при  $180^\circ$ . Таким образом, предварительные результаты показывают перспективность применения КГД алгоритма к задачам изучения вихревого звука.

Автор выражает благодарность профессору Тимушеву С. Ф. за представленные данные по постановке задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Numerical modeling of sound generation and propagation in blade machines with subsonic flow / S. Timushev, D. Klimenko, A. Aksenov, V. Gavriluk, J. Li // Proceedings of the 27th Int. Congress on Sound and Vibration. 2021.

- [2] Баженова Л. А., Семенов А. Г. О влиянии числа Рейнольдса на интенсивность вихревого звука при обтекании цилиндрического профиля // Акустический журнал. 2013. Т. 59, № 5. С. 586–595.
- [3] Широков И. А., Елизарова Т. Г. Моделирование нестационарного дозвукового обтекания осесимметричного тела с турбулизатором // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29, № 1. С. 37–44.

## Моделирование акустики при рассеянии турбулентности препятствием на основе высокоточных схем в криволинейных координатах

Дородницын Людвиг Вацлавович<sup>1</sup>, Александров Анатолий Витальевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Лаборатория математического моделирования в физике, e-mail: dorodn@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, e-mail: anatoly.v.alexandrov@gmail.com

При взаимодействии турбулентного следа с препятствием генерируются акустические волны, производящие шум в дальнем поле. Прямое моделирование таких задач на основе уравнений Навье–Стокса невозможно по причине чрезвычайной трудоемкости. Использование гибридных вихреразрешающих моделей также сталкивается с огромными вычислительными проблемами.

В настоящей работе развивается упрощенный подход к моделированию генерации акустических волн на твердой поверхности. Рассматривается профиль эллиптической формы, недалеко от которого, выше по потоку, задается синтетический турбулентный след. Процесс описывается в терминах нелинейных уравнений Эйлера, поскольку наличие вязкости мало влияет на акустические характеристики течения. С другой стороны, данный феномен предъявляет высокие требования к точности вычислительных алгоритмов и адекватному воспроизведению параметров турбулентного поля.

Все расчеты велись с помощью схем, сохраняющих дисперсионные соотношения [1], записанных в криволинейной неортогональной системе координат. Существенным моментом, влияющим на устойчивость алгоритмов, является постановка разностных условий на твердой поверхности. Авторы использовали технологию фиктивного узла [2]. Схема в криволинейных координатах строилась на основе подходов [3, 4] с авторской доработкой. Генерация синтетического турбулентного поля проводилась на основе тензорного метода фильтрации [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tam C.K.W., Webb J.C. Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Comput. Phys. 1993. V. 107. P. 262–281.
- [2] Tam C.K.W., Dong Zh. Wall boundary conditions for high-order finite-difference schemes in computational aeroacoustics // Theor. Comput. Fluid Dynamics. 1994. V. 6. P. 303–322.
- [3] Marsden O., Bogey C., Bailly C. High-order curvilinear simulations of flows around non-Cartesian bodies // J. Comput. Acoustics. 2005. V. 13, No. 4. P. 731–748.
- [4] Tam C.K.W. Computational Aeroacoustics: A Wave Number Approach. Cambridge Aerospace Series, 2012. 481 p.
- [5] Александров А. В., Дородницын Л. В. Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 95. 15 с.

## Разрывный метод частиц в задачах для уравнений мелкой воды

Богомоллов Сергей Владимирович<sup>1</sup>, Панферова Ирина Андреевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> кафедра вычислительных методов, e-mail: bogomo@cs.msu.su

<sup>2</sup> кафедра вычислительных методов, e-mail: panferova1998@gmail.com

Метод частиц представляет собой метод моделирования больших систем на основе лагранжева описания. Разрывный метод частиц (РМЧ) является методом “частица-частица”. РМЧ состоит из двух основных этапов: предиктора и корректора. Корректор основан на анализе состояния соседних частиц и выборе частицы, требующей корректировки. В основе рассматриваемого варианта РМЧ лежит выбор плотности в качестве ключевой характеристики частицы в отличие от вариантов, основанных на учете формы частицы. Решение системы уравнений мелкой воды опирается на метод расщепления, полученные при расщеплении уравнения решаются с помощью РМЧ. Проведённый численный эксперимент показывает, что даже без использования лимитеров алгоритм корректно воспроизводит основные физические особенности течения, в частности его негладкий профиль. Показано, что вычисление скорости отличается высокой точностью, даже для грубого шага по пространству. Основная погрешность связана с определением высоты водной поверхности. Полученные результаты подтверждают эффективность и применимость разрывного метода частиц для решения задачи об истечении в вакуум.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bogomolov S.V. Panferova I.A. Discontinuous particle method for diffusion advection problems //Mathematical Models and Computer Simulations (2024) 16, №1, с.36–47.
- [2] Богомолов С.В., Панферова И.А., Филиппова М.А. Один тест для разрывного метода частиц в задачах конвекции //Вестник Моск.Универ. Серия 15 (2025) 3, с.11–22.
- [3] Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. //М.: Изд. иностр. литературы, 1959

## Схема «уголок» для релаксационного приближения скалярных законов сохранения гиперболического типа

Головизнин Василий Михайлович<sup>1</sup>, Сержантов Артемий Вячеславович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Сарове, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

<sup>2</sup> Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Сарове, e-mail: serzhantovartemy@yandex.ru

При решении гиперболических уравнений зачастую возникают разрывные решения. Для получения адекватных решений вычислительный алгоритм должен быть консервативен. Законы сохранения должны действовать как на дифференциальном уровне, так и на дискретном [1,2]. С другой стороны, в областях гладкости гиперболические системы представимы в «характеристической форме». Характеристические алгоритмы гораздо лучше консервативных по вычислительной эффективности и точности при отсутствии разрывных решений [3,4]. Объединение достоинств этих двух подходов приводит к «балансно-характеристическим» схемам [5,6], к числу которых можно отнести и схему «уголок». Данная схема является простейшей противопоточной схемой. Она проста, монотонна и малодисперсионна, но обладает высокими диссипативными свойствами [7]. Ее однородность нарушается в «звуковых точках», областях, в которых направления характеристик меняют свой знак. Такие случаи необходимо рассматривать отдельно, что усложняет реализацию метода в программе, а также снижает локальный порядок аппроксимации до нулевого [8,9]. В данной работе рассматривается способ устранения этих явлений для схемы «уголок» на примере одного скалярного квазилинейного гиперболического уравнения. Основная идея заключается в приближении исходного нелинейного уравнения системой линейных уравнений, так называемое «релаксационное приближение» (Jin-Xin model), не содержащей звуковых точек [10].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самарский А.А. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 152 с.
- [2] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Разностные схемы газовой динамики. М.: Физматлит, 2001. 607 с.
- [3] Жуков А.И. Применение метода характеристик для численного решения одномерных задач газовой динамики // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1960. 152 с.
- [4] Магомедов К.Н., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 290 с.
- [5] Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы "КАБАРЕ" // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 101–116.
- [6] Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. Алгоритмы нового поколения в вычислительной гидродинамике // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58, № 8. С. 20–29.
- [7] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
- [8] Головизнин В.М., Канаев А.А. Принцип минимума парциальных локальных вариаций для определения конвективных потоков при численном решении одномерных нелинейных скалярных гиперболических уравнений // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51, № 5. С. 1–17.
- [9] Afanasiev N., Goloviznin V. A locally implicit time-reversible sonic point processing algorithm for one-dimensional shallow-water equations // J. of Comput. Phys. 2021. V. 434. P. 110220.
- [10] Jin S., Xin Z. P. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions // Comm. Pure Appl. Math. 1995. V. 48, № 3. P. 235–276.

## Алгоритмизация программы моделирования газодинамического течения по схеме КАБАРЕ в СЭЛ переменных в двумерной постановке

Беляева Александра Антоновна<sup>1</sup>, Попова Нина Николаевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> магистрант 2 г. о. филиала МГУ в г. Сарове, e-mail: belyaevalan@mail.ru

<sup>2</sup> канд. физ.-мат. наук, доцент, e-mail: popova@cs.msu.ru

Для решения многих задач численного моделирования газодинамических течений с подвижными границами используются смешанные эйлерово-лагран-

жевы переменные (СЭЛ). Существует множество различных реализаций алгоритмов их решения. Например, широко распространены следующие двух-этапные методы: метод, состоящий из расчёта лагранжева этапа и последующей реализации пересчёта на заданную сетку [1]; метод с расчетом эйлера этапа и пересчётом на втором этапе на новую заданную сетку, также подвижную во времени [2]. Процесс пересчёта на новую сетку является весьма трудоёмким. В представленной работе рассматривается применение метода КАБАРЕ [3], позволяющего сократить объем необходимых вычислений в рассматриваемой задаче. Известно, что этот метод разработан с учетом минимизации численной дисперсии и диссипации, что обеспечивает точное и устойчивое решение систем гиперболических уравнений, которые используются для моделирования газодинамических течений. В работе приводится описание разработанного алгоритма и его конкретной реализации, а также рассматривается модельное решение задачи в СЭЛ переменных. На рисунке 1 представлена блок-схема второй фазы алгоритма КАБАРЕ для двумерного дозвукового течения газа в трубе.

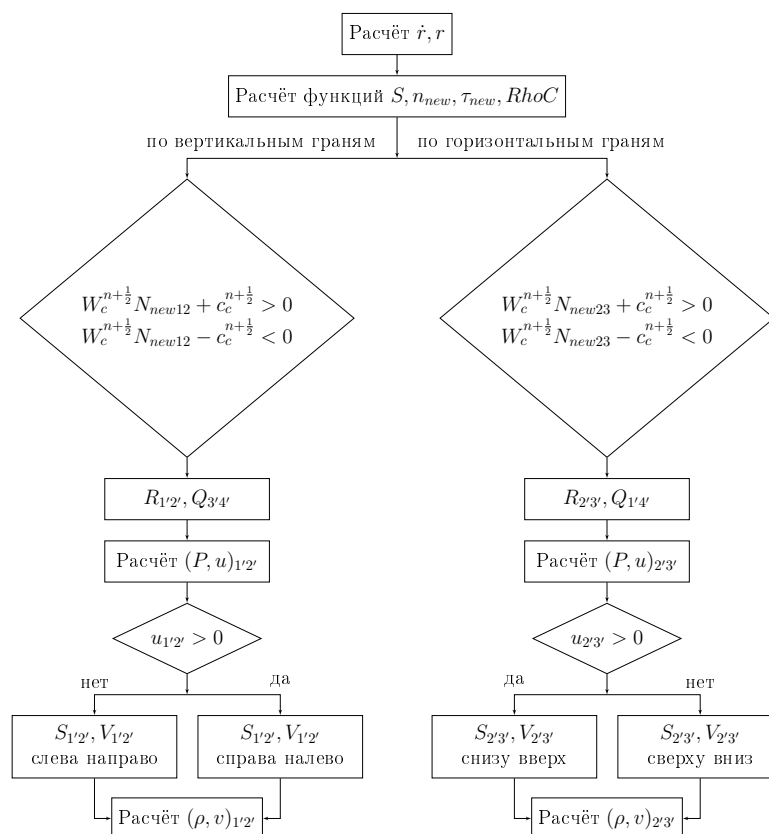


Рис. 1: Блок-схема второго этапа алгоритма.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шестаковская Е. С., Стариков Я. Е., Макеева И. Р. Об одном лагранжево-эйлеровом методе расчёта нестационарных течений сжимаемых сред //

- Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2023. Т. 16, № 2. С. 78–90.
- [2] Ливеровский Р. И., Шевырев С. П. Численное моделирование плоских задач сверхзвуковой газовой динамики на треугольной сетке // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2014. № 4. С. 23–32.
- [3] Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М. : Издательство Московского университета, 2013. 472 с.

## Схема КАБАРЕ для гиперболизированного уравнения теплопроводности

Руссо Виктория Дмитриевна<sup>1</sup>, Попова Нина Николаевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Сарове, кафедра математики, e-mail: rviktoria2000@gmail.com

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СКИ, e-mail: porova@cs.msu.ru

В данной работе рассматривается численное моделирование одномерной нестационарной теплопроводности на основе гиперболической модели, учитывающей конечную скорость распространения тепла. В отличие от классического уравнения Фурье, используется система уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = f(x), \\ \alpha \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q}{\sigma(x)}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $T$  — температура,  $q$  — плотность теплового потока,  $\sigma$  — коэффициент теплопроводности,  $f(x)$  — источник тепла.

Для упрощения численного решения система приводится к характеристической форме с использованием римановых инвариантов:

$$R = q + \lambda T, \quad Q = q - \lambda T, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

где  $\alpha$  — параметр гиперболизации. Такая форма позволяет эффективно применять численные методы, изначально разработанные для задач газовой динамики.

На основе схемы КАБАРЕ (CABARE) построена разностная схема второго порядка точности по времени и пространству. Использован метод прогонки для расчёта одномерного температурного поля с учётом граничных условий первого и второго рода. Реализация выполнена на языке C++ с возможностью настройки сетки, временного шага и параметров модели.

Проведена серия численных экспериментов, в том числе тесты на устойчивость при различных значениях  $\tau$  и  $\alpha$ , а также анализ влияния гиперболизации на поведение теплового фронта. Полученные результаты показывают соответствие физическим ожиданиям: при малых  $\alpha$  модель приближается к классической параболической, при увеличении — проявляется волновая природа теплопереноса.

Разработанный подход может быть использован для моделирования тепловых процессов в средах с конечной скоростью теплопереноса, в том числе в задачах с импульсным нагревом, микро- и наносистемах, а также в расчётах, где важно учитывать тепловую инерционность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. — М.: МГУ, 2010. — 160 с. — (Серия «Суперкомпьютерное образование»).

# Решение задачи Water - Air Shock Tube схемой КАБАРЕ

Головня Н. А.<sup>1</sup>, Головизнин В. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Сарове, кафедра математики, e-mail: error50i@vk.com

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВМ, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Задача *Water – Air Shock Tube* [1] является одной из стандартных тестовых задач для верификации численных методов решения уравнений газовой динамики при моделировании течений с большими перепадами плотности, давления и других параметров. Область расчёта разделена мембраной на две части: слева располагается жидкость (вода) с высокой плотностью и давлением, справа — газ (воздух) с существенно меньшими параметрами.

После удаления мембраны течение описывается как задача Римана для двухфазной системы, в результате решения которой возникают ударная волна, контактный разрыв и волна разрежения.

В процессе эволюции системы происходит постепенное выравнивание параметров и установление равновесного состояния. Корректное описание этой релаксации и динамики интерфейса является важным критерием устойчивости и точности численной схемы.

В настоящей работе рассматривается применение балансно - характеристической схемы КАБАРЕ [2] с использованием модели *Saurel–Abgrall* [1]. Сочетание этой модели и схемы КАБАРЕ позволяет корректно описывать взаимодействие фаз при сохранении устойчивости и монотонности решения. Ударные волны и контактные разрывы воспроизводятся без значительных

численных осцилляций. Полученные профили плотности, скорости и давления в момент времени  $t = 0.5$  мс согласуются с известными эталонными результатами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andrianov N., Saurel R. A Simple Method for Compressible Multiphase Mixtures and Interfaces // CiteSeer, 2001.
- [2] В. М. Головизнин. Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // *Математическое моделирование*. — 2006. — Т. 18, № 11. — С. 14–30.

**Подсекция кафедры автоматизации научных исследований**

## Интеграция мультимодальных данных носимых устройств для определения эмоций человека

**Бердышев Даниил Алексеевич, Шишкин Алексей Геннадиевич**

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: berdyshevda@my.msu.ru

Распознавание эмоций - активно развивающаяся в последнее время область [1], имеющая приложения в медицине, человеко-машинном взаимодействии, маркетинге, контроле состояния оператора. Классические подходы распознавания эмоций используют отдельные модальности данных, например: выражения лица [2] или голос [3]. Применение подходов на основе мультимодальных данных позволяет получить более точную и устойчивую классификацию [4]. Однако выбор используемого набора модальностей часто остаётся неисследованным [4]. В данном исследовании мы сравним эффективность слияния различных пар модальностей физиологических данных, полученных с помощью носимых устройств, на основе качества классификации, полученного при использовании одной архитектуры нейронной сети.

**Данные и методы.** Для проведения данного исследования был выбран набор данных WESAD [5], так как он является открытым и содержит данные 10 модальностей. В качестве целевой задачи классификации выбрана задача классификации эмоций в пространстве возбуждение-валентность, упрощённая до двух бинарных задач классификации. Так как набор данных содержит данные двух сенсоров, расположенных на груди и запястье, частоты дискретизации сходных модальностей, записанные этими сенсорами, были согласованы. Набор данных был разбит на непересекающиеся 5-секундные эпохи, 20% случайно выбранных эпох использовались в качестве тестового набора (соотношение классов 1:1). В качестве базовой архитектуры для выделения

признаков из данных использовалась свёрточная нейронная сеть (CNN), для слияния модальностей применялась конкатенация полученных из свёрточной сети представлений данных. Классификатором выступала двухслойная полносвязная нейронная сеть.

**Результаты.** В работе продемонстрировано, что в одномодальном случае лучшей модальностью из доступных в данном наборе является электрокардиограмма (ЭКГ) (ассигасу возбуждение/валентность = 0.74/0.80), из модальностей полученных сенсором расположенным на запястье, лучшие результаты продемонстрировала акселерометрия (ассигасу = 0.67/0.61). Результаты сравнения попарного слияния модальностей для классификации возбуждения представлены на Рис. 1. Сочетание лучшего итогового качества классификации валентности продемонстрировали пары ЭКГ и акселерометрия запястья (ассигасу = 0.8), ЭКГ и электродермальная активность на запястье (ассигасу = 0.79).

|            | chest_ACC       | chest_ECG       | chest_EMG       | chest_EDA       | chest_Temp      | chest_Resp      | wrist_ACC       | wrist_BVP       | wrist_EDA       | wrist_TEMP      |
|------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| chest_ACC  | <b>0.64</b>     | 0.71<br>(+0.06) | 0.74<br>(+0.10) | 0.65<br>(+0.01) | 0.63<br>(-0.02) | 0.63<br>(-0.01) | 0.70<br>(+0.05) | 0.66<br>(+0.01) | 0.64<br>(-0.00) | 0.65<br>(+0.00) |
| chest_ECG  | 0.77<br>(+0.04) | <b>0.74</b>     | 0.73<br>(-0.00) | 0.68<br>(-0.05) | 0.66<br>(-0.07) | 0.68<br>(-0.05) | 0.71<br>(-0.02) | 0.68<br>(-0.06) | 0.68<br>(-0.06) | 0.68<br>(-0.06) |
| chest_EMG  | 0.67<br>(+0.05) | 0.75<br>(+0.14) | <b>0.61</b>     | 0.63<br>(+0.02) | 0.62<br>(+0.01) | 0.62<br>(+0.01) | 0.65<br>(+0.03) | 0.65<br>(+0.04) | 0.64<br>(+0.03) | 0.66<br>(+0.05) |
| chest_EDA  | 0.66<br>(+0.15) | 0.76<br>(+0.25) | 0.63<br>(+0.13) | <b>0.51</b>     | 0.51<br>(+0.00) | 0.55<br>(+0.04) | 0.64<br>(+0.13) | 0.56<br>(+0.05) | 0.54<br>(+0.03) | 0.51<br>(+0.00) |
| chest_Temp | 0.66<br>(+0.15) | 0.72<br>(+0.22) | 0.60<br>(+0.09) | 0.51<br>(+0.00) | <b>0.51</b>     | 0.53<br>(+0.02) | 0.62<br>(+0.11) | 0.57<br>(+0.06) | 0.53<br>(+0.03) | 0.52<br>(+0.01) |
| chest_Resp | 0.67<br>(+0.08) | 0.74<br>(+0.14) | 0.66<br>(+0.07) | 0.62<br>(+0.03) | 0.61<br>(+0.01) | <b>0.60</b>     | 0.66<br>(+0.07) | 0.59<br>(-0.01) | 0.62<br>(+0.02) | 0.62<br>(+0.03) |
| wrist_ACC  | 0.71<br>(+0.04) | 0.80<br>(+0.14) | 0.64<br>(-0.03) | 0.61<br>(-0.06) | 0.63<br>(-0.04) | 0.64<br>(-0.03) | <b>0.67</b>     | 0.67<br>(-0.00) | 0.62<br>(-0.05) | 0.63<br>(-0.03) |
| wrist_BVP  | 0.68<br>(+0.07) | 0.77<br>(+0.15) | 0.69<br>(+0.07) | 0.70<br>(+0.08) | 0.63<br>(+0.01) | 0.63<br>(+0.01) | 0.70<br>(+0.08) | <b>0.62</b>     | 0.65<br>(+0.04) | 0.65<br>(+0.03) |
| wrist_EDA  | 0.66<br>(+0.12) | 0.79<br>(+0.25) | 0.66<br>(+0.13) | 0.54<br>(+0.00) | 0.54<br>(+0.00) | 0.59<br>(+0.05) | 0.64<br>(+0.11) | 0.56<br>(+0.03) | <b>0.54</b>     | 0.56<br>(+0.02) |
| wrist_TEMP | 0.67<br>(+0.16) | 0.74<br>(+0.23) | 0.66<br>(+0.14) | 0.57<br>(+0.05) | 0.52<br>(-0.00) | 0.59<br>(+0.07) | 0.62<br>(+0.10) | 0.56<br>(+0.04) | 0.57<br>(+0.05) | <b>0.52</b>     |

Рис. 1: Сравнение качества классификации возбуждения при слиянии различных пар модальностей.

Основным результатом работы является прямое сравнение эффективности слияния различных модальностей физиологических данных, полученных с помощью носимых устройств, для классификации эмоциональных состояний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wearable emotion recognition using heart rate data from a smart bracelet / L., Shu, Y., Yu, W., Chen, H., Hua, and Q., Li, Qin, J., Jin, X., Xu // Sensors. MDPI, 2020. T. 20, № 3. С. 718.
- [2] Emotion recognition using facial expressions / P., Tarnowski, M., Kołodziej, A., Majkowski, R., Remigiusz // Procedia Computer Science. Elsevier, 2017. T. 108, С. 1175–1184.
- [3] Emotion recognition by speech signals / O., Kwon, K., Chan, J., Hao, T., Lee // Interspeech. 2003. С. 125–128.

- [4] A comprehensive review of speech emotion recognition systems /T., M., Wani, T., S., Gunawan, S., A., Qadri, M., Kartiwi, E., Ambikairajah // IEEE access. IEEE, 2021. Т. 9, С. 47795–47814.
- [5] Introducing wesad, a multimodal dataset for wearable stress and affect detection /P., Schmidt, A., Reiss, R., Duerichen, C., Marberger, K., Van Laerhoven //Proceedings of the 20th ACM international conference on multimodal interaction. 2018. С. 400–408.

## Ускорение генеративной модели улучшения речи с помощью ректифицированной диффузии.

Шишкин Алексей Геннадиевич<sup>1</sup>, Селюцкая Лина Юрьевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: s02250553@gse.cs.msu.ru

**Введение.** Генеративное моделирование — быстро развивающееся направление машинного обучения, ориентированное на создание новых данных на основе обучающего набора. Такие модели широко применяются, в частности для обработки и улучшения речи, где часто требуется работа в режиме реального времени. Среди генеративных подходов особое место занимают диффузионные модели, отличающиеся высоким качеством генерации и стабильностью обучения. Однако из-за большого числа шагов обратного процесса они обладают серьезным недостатком — высокой вычислительной стоимостью. Это ограничивает возможность их применения в онлайн сценариях.

**Цель работы.** Целью данной работы является ускорение процесса генерации данных с помощью диффузионной модели в задаче обработки речевых сигналов.

**Методы.** Обратный процесс в классических диффузионных моделях [1] может быть описан с помощью обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Решение этого уравнения задаёт траекторию, по которой данные восстанавливаются из шума. Метод ректифицированной диффузии [2] позволяет привести траекторию этого процесса к траектории ОДУ первого порядка, обеспечивая переход от распределения шума к распределению данных за значительно меньшее число шагов, и делает возможной генерацию данных без значительной потери качества.

В рамках решения задачи рассматривалась диффузионная вероятностная модель для задачи улучшения речи. В основе реализованной модели лежит сверточная нейронная сеть, которая обучается предсказывать добавленный гауссовский шум на различных этапах диффузионного процесса.

В качестве речевого датасета был использован набор данных LJSpeech. На чистую речь были наложены различные шумы из датасета DEMAND. Каче-

ство оценивалось с использованием как объективных (PESQ, STOI, SI-SDR), так и субъективных показателей (DNSMOS, CSIG, CBAK, COVL). Эксперименты показали, что при 5 шагах обратного прохода модель обеспечивает хорошее качество и не только убирает шум, но и сохраняет естественность звучания. Значения субъективных метрик составили: DNSMOS = 3.37, CSIG = 3.37, CBAK = 3.88. Скорость работы модели при этом увеличилась примерно в 10 раз.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jonathan Ho, Ajay Jain, and Pieter Abbeel. Denoising diffusion probabilistic models // In Proceedings of the 34th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS '20). Curran Associates Inc., Article 574, 6840–6851, 2020.
- [2] Rectified diffusion: Straightness is not your need in rectified flow /Fu-Yun Wang, Ling Yang, Zhaoyang Huang, Mengdi Wang, and Hongsheng Li //The Thirteenth International Conference on Learning Representations, 2025.

# Ускорение генеративной модели улучшения речи с помощью ректифицированной диффузии.

Шишкин Алексей Геннадиевич<sup>1</sup>, Селюцкая Лина Юрьевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: s02250553@gse.cs.msu.ru

**Введение.** Генеративное моделирование — быстро развивающееся направление машинного обучения, ориентированное на создание новых данных на основе обучающего набора. Такие модели широко применяются, в частности для обработки и улучшения речи, где часто требуется работа в режиме реального времени. Среди генеративных подходов особое место занимают диффузионные модели, отличающиеся высоким качеством генерации и стабильностью обучения. Однако из-за большого числа шагов обратного процесса они обладают серьезным недостатком — высокой вычислительной стоимостью. Это ограничивает возможность их применения в онлайн сценариях.

**Цель работы.** Целью данной работы является ускорение процесса генерации данных с помощью диффузионной модели в задаче обработки речевых сигналов.

**Методы.** Обратный процесс в классических диффузионных моделях [1] может быть описан с помощью обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Решение этого уравнения задаёт траекторию, по которой данные восстанавливаются из шума. Метод ректифицированной диффузии [2] позволяет привести траекторию этого процесса к траектории ОДУ первого поряд-

ка, обеспечивая переход от распределения шума к распределению данных за значительно меньшее число шагов, и делает возможной генерацию данных без значительной потери качества.

В рамках решения задачи рассматривалась диффузионная вероятностная модель для задачи улучшения речи. В основе реализованной модели лежит сверточная нейронная сеть, которая обучается предсказывать добавленный гауссовский шум на различных этапах диффузионного процесса.

В качестве речевого датасета был использован набор данных LJSpeech. На чистую речь были наложены различные шумы из датасета DEMAND. Качество оценивалось с использованием как объективных (PESQ, STOI, SI-SDR), так и субъективных показателей (DNSMOS, CSIG, SBAK, COVL). Эксперименты показали, что при 5 шагах обратного прохода модель обеспечивает хорошее качество и не только убирает шум, но и сохраняет естественность звучания. Значения субъективных метрик составили: DNSMOS = 3.37, CSIG = 3.37, SBAK = 3.88. Скорость работы модели при этом увеличилась примерно в 10 раз.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jonathan Ho, Ajay Jain, and Pieter Abbeel. Denoising diffusion probabilistic models // In Proceedings of the 34th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS '20). Curran Associates Inc., Article 574, 6840–6851, 2020.
- [2] Rectified diffusion: Straightness is not your need in rectified flow /Fu-Yun Wang, Ling Yang, Zhaoyang Huang, Mengdi Wang, and Hongsheng Li //The Thirteenth International Conference on Learning Representations, 2025.

## Пространственная модель Ланчестера с учетом направленных ударов и шумов

**Борисов Никита Дмитриевич<sup>1</sup>, Нефедов Владимир Вадимович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики, e-mail: borisov.nd@phystech.edu

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра АНИ, e-mail: vv\_nefedov@mail.ru

Рассматривается модификация пространственно-распределенной модели Ланчестера для описания динамики боевых действий двух групп войск в двумерной области. Модель дополнена конвективными членами, моделирующими направленные удары, гауссовским белым шумом и топографическим сложным препятствием (озером). Численное решение реализовано с использованием метода конечных элементов, схемы против потока и метода активных контуров для описания границ препятствия. Результаты показывают, что шум усиливает локальную неоднородность, увеличивая максимумы

концентраций войск на 7–9.5%, а препятствие создает зоны турбулентности. Направленные удары ускоряют формирование волновых фронтов, повышая тактическую нестабильность.

**Введение.** Модели Ланчестера применяются для описания динамики боевых действий, включая пространственные эффекты [1, 2, 3, 4]. В работе модифицирована модель [5, 6] с учетом направленных ударов, стохастического шума и топографических препятствий, что позволяет моделировать сложные тактические сценарии [7].

**Модель и методы.** Модель описывает плотности  $U(x, y, t)$  и  $V(x, y, t)$  войск в области  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Уравнения включают диффузионные члены (коэффициенты  $\mu_1 = 0.02$ ,  $\mu_2 = 0.05$ ), нелинейные реакции и конвективные члены  $-\mathbf{v}_U \cdot \nabla U$ ,  $-\mathbf{v}_V \cdot \nabla V$ , активные на начальном этапе ( $t \leq 0.1$ ). Векторные поля скоростей задаются как  $\mathbf{v}_U = c_U H(t) \mathbf{d}_U$ ,  $\mathbf{v}_V = c_V H(t) \mathbf{d}_V$ , где  $c_U = c_V = 0.5$ ,  $\mathbf{d}_U = (1, 0)$ ,  $\mathbf{d}_V = (-1, 0)$ . Шум моделируется гауссовским процессом с дисперсией  $\sigma^2 = 0.01$ . Препятствие (озеро) описано методом активных контуров с параметрами  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta = 0.01$ . Численное решение использует метод конечных элементов и схему против потока на сетке  $60 \times 60$  с 300 временными шагами.

**Результаты.** Анализ показывает, что шум увеличивает максимумы концентраций  $U$  до 0.098 (+9.5% к безшумовому случаю) и усиливает локальные флуктуации, особенно вблизи озера. Препятствие создает зоны повышенных градиентов, усиливая турбулентность на 15–20%. Направленные удары ускоряют формирование волновых фронтов, повышая долю области с  $U > 0.05$  до 28% при  $t = 0.25$ . Устойчивость подтверждена показателем Ляпунова:  $\lambda_{\max} \approx -0.12$  (без шума) и  $-0.10$  (с шумом). Визуализация (рис. ??) демонстрирует размытие фронтов и пятнистую структуру при наличии шума.

**Заключение.** Модификация модели Ланчестера позволяет моделировать тактические маневры и неопределенности. Шум и препятствия усиливают неоднородность, а направленные удары ускоряют динамику конфликта, что сопоставимо с командой центра принятия решений в реалистичном военном противостоянии. Результаты подчеркивают важность учета топографии и стохастических факторов в тактическом планировании. Дальнейшие исследования могут включать неоднородную диффузию и многоагентные подходы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. W. Lanchester. Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. Constable and Company, London, 1916.
- [2] В. В. Шумов. Моделирование специальных действий и борьбы с терроризмом. Журнал вычислительной математики и математической физики, Компьютерные исследования и моделирование, **16**(6):1467–1498, 2024.

- [3] В. О. Корепанов, В. В. Шумов. Моделирование военных, боевых и специальных действий. Теоретико-игровые модели боевых действий на тактическом и оперативно-тактическом уровнях. Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021), 1839–1843, 2021.
- [4] J. Poggie, S. A. Matei, R. Kirchubel. Simulating military conflict with a continuous flow model. *Journal of the Operational Research Society*, **73**(2):273–284, 2022.
- [5] N. D. Borisov, V. V. Nefedov. Spatial distributed Lanchester model considering nonlinear dynamics. *International Journal of Open Information Technologies*, **13**(9):82–90, 2025.
- [6] N. D. Borisov. Development of Lanchester-Type Spatial Models with Obtaining Localized Solutions for the Interaction of Two Groups. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **13**:2332–2342, DOI: 10.4236/jamp.2025.137132, 2025.
- [7] N. Cangioti, M. Capolli, M. Sensi. A generalization of unaimed fire Lanchester's model in multi-battle warfare. *Operational Research*, **21**(3):1645–1666, 2021.

## Итерационные методы решения эллиптических краевых задач в анизотропных средах

**Вабищевич Петр Николаевич, Чернышов Михаил Михайлович**

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: vab@cs.msu.ru, chernyshovmm@my.msu.ru

Многие прикладные математические модели в физике, инженерии и смежных областях науки опираются на эллиптические уравнения второго порядка и их системы, формулируемые в многомерных областях со сложной, нерегулярной геометрией. Для приближенного численного решения соответствующих краевых задач стандартно применяют неструктурированные сетки, такие как треугольные (в двумерном случае) и тетраэдральные (в трехмерном), в сочетании с методом конечных элементов для пространственной аппроксимации.

Классические разностные методы, хорошо отработанные для регулярных сеток, сталкиваются с существенными трудностями при адаптации к нерегулярным геометриям. В качестве эффективной альтернативы сформировался метод конечных объемов (Finite Volume Method, FVM), который интерпретирует дискретную задачу как закон сохранения для отдельных ячеек расчетной области — контрольных объемов [1]. Ключевым аспектом FVM является выбор расчетной сетки и контрольных объемов; наиболее естественным и математически обоснованным считается использование пары двойственных

разбиений: триангуляции Делоне и диаграммы Вороного, где приближенное решение ищется в узлах одной сетки, а контрольные объемы определяются ячейками другой.

Однако для задач с ярко выраженной анизотропией или сложной структурой потоков использование только одной сетки (Делоне или Вороного) оказывается недостаточным [2], что приводит к снижению точности и устойчивости. Это мотивирует развитие двухсеточной технологии на основе merged Voronoi–Delaunay (MVD)-сетки [3]. На такой сетке (например, разбитой на ортодиагональные четырехугольники в двумерном случае) строят согласованные аппроксимации операторов векторного анализа — градиента, дивергенции и ротора, применяя FVM для решения задач диффузии-реакции в анизотропной среде, где одиночная сетка проблематична. В MVD-подходе приближенное решение определяется из связанной системы уравнений для значений в узлах обеих сеток; традиционные монолитные вычислительные алгоритмы заменяют блочными итерационными методами, где на каждой итерации независимо решаются подзадачи на сетке Делоне и на Вороного. Предобусловливание реализуется блочной диагональной матрицей, эквивалентной краевой задаче диффузии-реакции в изотропной среде (с явно вычисляемыми константами энергетической эквивалентности), что позволяет эффективно применять итерационные методы чебышевского типа для повышения робастности и снижения вычислительных затрат.

Результаты численных экспериментов на тестовой задаче демонстрируют высокую работоспособность предложенного итерационного decoupling-метода, подтверждая его преимущества для анизотропных проблем в сложных геометриях.

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант № 24-11-00058).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite Volume Methods // Handbook of Numerical Analysis. Amsterdam: North Holland, 2000. Vol. 7. P. 713–1020.
- [2] Vabishchevich P. N. Finite-difference approximation of mathematical physics problems on irregular grids // Computational Methods in Applied Mathematics. 2005. Vol. 5, No. 3. P. 294–330.
- [3] Самарский А. А., Фрязинов И. В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики // Успехи математических наук. 1976. Т. 31, № 6. С. 167–197.

# Применение смеси Гауссиан для восстановления интенсивности мягкого рентгеновского излучения в токамаке

Сучков Егор Петрович

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: suchkov.egor@cs.msu.ru

В работе рассматривается актуальная задача томографического восстановления пространственного распределения интенсивности мягкого рентгеновского излучения в установках токамак, что является важным для диагностики плазмы. Предлагаемый метод на основе смеси Гауссовых распределений позволяет существенно ускорить процедуру восстановления по сравнению с классическими подходами (такими как Minimum Fisher Information[1] и SVD-методы[2,3]) при работе на детализированных расчетных сетках. Проведено сравнительное исследование эффективности предложенного метода с традиционными алгоритмами решения задачи на синтетических данных. Представлены результаты анализа производительности и точности восстановления, а также обсуждены перспективы практического применения разработанного подхода для обработки данных в реальном времени.

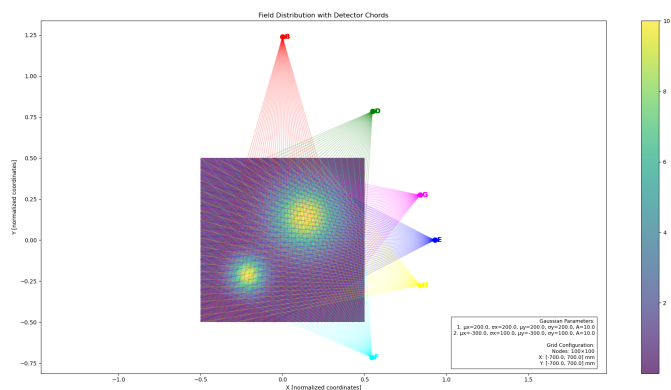


Рис. 1: Пример фантома.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Anton, H. Weisen, M.J. Dutch, W. Von Der Linden, F. Buhlmann, R. Chavan, B. Marletaz, P. Marmillod, and P. Paris. X-ray tomography on the TCV tokamak. *Plasma Phys. Controlled Fusion*, 38(11):1849–1878, 1996. doi:10.1088/0741-3335/38/11/001.
- [2] J. Svoboda, J. Cavalier, O. Ficker, M. Imrisek, J. Mlynar and M. Hron, Tomotok: python package for tomography of tokamak plasma radiation, *Journal of Instrumentation* 16.12 (2021). doi: <https://doi.org/10.1088/1748-0221/16/12/c12015>

- [3] А. В. Хованский, Быстрый вариант К-метода с универсальной настраиваемой схемой сканирования для задач малоракурсной томографии на токамаках, Ма-тем. моделирование, 2013, том 25, номер 6, 15–31

## Обзор современных подходов к решению задач интеллектуального анализа электрокардиограмм

Долматов Александр Андреевич

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: zarokdol@yandex.ru

В связи со стремительным ростом числа сердечно-сосудистых заболеваний (ССЗ) в РФ и в мире особую важность приобретают задачи ранней профилактики и качественной оценки состояния сердечно-сосудистой системы в целях своевременного выявления сердечных патологий у населения. Поскольку электрокардиография по-прежнему остаётся одним из наиболее эффективных и распространённых инструментов диагностики ССЗ, в настоящее время продолжают появляться инновационные подходы, позволяющие всё более результативно решать актуальные задачи в области интеллектуального анализа электрокардиограмм (ЭКГ). Вследствие этого в клиническую практику широко внедряются современные вычислительные технологии, направленные на поддержку принятия обоснованных врачебных решений.

Настоящая работа посвящена анализу наиболее распространённых технологий, применяемых для автоматизации постановки клинических диагнозов в кардиологии. Рассматриваются ключевые направления работы с ЭКГ: источники ЭКГ-данных и их аугментация [1]; способы представления ЭКГ-сигналов (временные ряды, изображения, наборы признаков) и их предобработка (фильтрация шумов, нормализация, масштабирование, детектирование аномалий, удаление выбросов, сегментация PQRS-комплексов) [2]; методы классификации и интерпретации ЭКГ-синдромов как с помощью классических алгоритмов машинного обучения (метод опорных векторов, случайный лес, градиентный и адаптивный бустинг) [3], так и с применением современных нейронных сетей различных архитектур (свёрточных, рекуррентных, графовых, трансформеров, а также их гибридных комбинаций) [4]; инструменты оценки качества работы классификаторов и моделей глубокого обучения на основе матрицы ошибок и набора метрик (чувствительность, специфичность, G-мера, ошибки первого и второго рода, площадь под ROC-кривой) [5].

В работе отмечены преимущества и недостатки рассматриваемых технологий, а также выделены наиболее перспективные подходы, превосходящие альтернативы в решении идентичных задач. В частности показано, что в ряде случаев наилучшие результаты демонстрируют гибридные методы, сочетающие классические алгоритмы с современными моделями глубокого обучения.

Такие решения не только эффективнее применимы на практике, но и представляют наибольший научный интерес.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kuntalp M., Düzyel O. A new method for gan-based data augmentation for classes with distinct clusters // Expert Systems with Applications. 2024. Vol. 235, p. 121199.
- [2] Anurag Kumar Mishra, Asha Ambhaikar, Naveen Kumar Dewangan. An Overview of ECG Signal Processing and Analysis Techniques for Categorization of Cardiac Diseases // SSRG International Journal of Electrical and Electronics Engineering. 2024. Vol. 11, no. 11, pp. 326–340.
- [3] Chinmay Vinod Deshpande, Sayed A Naveed. ECG classification using machine learning // International Journal of Science & Healthcare Research. 2024. Vol. 9, no. 1, pp. 357–367.
- [4] Kothuru, M., N. Suresh Kumar. Federated Learning Model of Optimized Neural Network Structures for Identification and Classification of Cardiovascular Diseases at Multi-Hospital Patients // Journal of Artificial Intelligence and Technology. 2025. Vol. 5, pp. 261–269.
- [5] Intelligent cardiovascular disease diagnosis using deep learning enhanced neural network with ant colony optimization / Biao Xia, Nisreen Innab, Venkatachalam Kandasamy, Ali Ahmadian, Massimiliano Ferrara // Sci Rep. 2024. Vol. 14, p. 21777.

## Обзор современных методов предобработки временных рядов, применяемых для устранения шумов из ЭКГ-сигналов.

Кандаракова Мария Олеговна<sup>1</sup>, Долматов Александр Андреевич<sup>2</sup>,  
Сычугов Дмитрий Юрьевич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: maria.kandarakova@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: zarokdol@yandex.ru

<sup>3</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: sychugov@cs.msu.ru

В современной врачебной практике одним из ключевых и наиболее информативных неинвазивных методов диагностики сердечно-сосудистых заболеваний является электрокардиография. Однако при регистрации в клинических условиях ЭКГ-сигнал подвергается значительному влиянию различных шумов, в частности, дрейфа изолинии (BW), вызванного изменением контакта электродов и дыхательными движениями, электромиографических помех (EMG), обусловленных активностью скелетных мышц, сетевых помех (PLI) [1]. Эти и другие искажения препятствуют корректной сегментации кардиосигнала (QRS-комплексов, зубцов Р и Т) и в дальнейшем затрудняют автома-

тизацию распознавания сердечных патологий. В связи с этим предобработка временных рядов становится неотъемлемым этапом решения задач интеллектуального анализа электрокардиограмм: эффективное устранение шумов (денойзинг) позволяет существенно повысить достоверность интерпретации, качество обучения моделей и точность распознавания ЭКГ-синдромов.

Настоящая работа посвящена анализу современных подходов к денойзингу ЭКГ-сигналов, основанных на использовании вейвлет-преобразований и гибридных моделей машинного обучения. Вейвлет-преобразование по-прежнему является одним из наиболее распространённых инструментов обработки ЭКГ-сигналов, представимых в виде временных рядов [2], который позволяет эффективно выделять локальные шумы в различных частотных диапазонах, сохраняя при этом морфологические особенности сигнала. Однако этот метод уступает технологиям глубокого обучения в обработке сложных, нестационарных шумов и глобальных зависимостей [3].

В работе отмечены преимущества и недостатки современных подходов к денойзингу ЭКГ-сигналов, использующих как интегрированные с вейвлет-преобразованиями свёрточные нейронные сети (CNN) [4], так и непосредственно модифицированные вейвлет-преобразования [5]. В частности показаны способы эффективного объединения вейвлет-преобразований и трансформерных нейросетевых архитектур: такие гибридные модели представляют собой перспективное направление, объединяющее возможности классических методов и глубокого обучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Preprocessing and Denoising Techniques for Electrocardiography and Magnetocardiography: A Review / Yifan Jia, Hongyu Pei, Jiaqi Liang, Yuheng Zhou, Yanfei Yang, Yangyang Cui, Min Xiang. // Bioengineering. 2024. Vol. 11, no. 11, 1109 p.
- [2] Addison P.S. Wavelet transforms and the ECG: A review // Physiological Measurement. 2005. Vol. 26, no. 5, p. 155–199.
- [3] Shijie Wang, Lei Li. TF-TransUNet1D: Time-Frequency Guided Transformer U-Net for Robust ECG Denoising // Digital Twin for Healthcare: First International Workshop, DT4H 2025, Held in Conjunction with MICCAI 2025, Daejeon, South Korea, September 23, 2025, Proceedings / Switzerland : Springer Cham. 2025. P. 90–98.
- [4] Takamasa Terada, Masahiro Toyoura Wavelet Integrated Convolutional Neural Network for ECG Signal Denoising // Lecture Notes in Computer Science. 2025. Vol. 15523, p. 311–324.
- [5] Enhanced DWT for Denoising Heartbeat Signal in Non-Invasive Detection / Peibin Zhu, Lei Feng, Kaimin Yu, Yuanfang Zhang, Wen Chen, Jianzhong Hao // Sensors. 2025. Vol. 25, no. 4, 1743 p.

## Обзор современных архитектур нейронных сетей, используемых для классификации и интерпретации ЭКГ-синдромов

Рыбинскова Юлия Олеговна<sup>1</sup>, Долматов Александр Андреевич<sup>2</sup>,  
Сычугов Дмитрий Юрьевич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: julia.r.o.2003.2025@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: zarokdol@yandex.ru

<sup>3</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: sychugov@cs.msu.ru

Анализ электрокардиограмм (ЭКГ) является одним из наиболее информативных инструментов диагностики сердечно-сосудистых заболеваний. Однако зачастую из-за существенного влияния человеческого фактора интерпретация ЭКГ субъективна, что значительно снижает точность постановки врачебных диагнозов. В этой связи особую актуальность в современной клинической практике представляют задачи автоматизации распознавания сердечных патологий с помощью методов глубокого обучения. Диагностическая ценность электрокардиограмм заключается не только во временных, но и в пространственных зависимостях, проявляющихся при одновременном анализе нескольких различных отведений ЭКГ. Вследствие этого современные методы, основанные на применении нейронных сетей трансформерных архитектур к многомерным временным рядам, представляют особую практическую ценность: такой подход позволяет учитывать взаимосвязи между отведениями посредством тонкой настройки механизма внимания, на котором основан принцип работы нейросетей-трансформеров [1].

Настоящая работа посвящена анализу современных методов применения различных нейросетевых архитектур для решения задач классификации и интерпретации ЭКГ-синдромов. Рассматриваются основные подходы, позволяющие улучшить результативность применения трансформеров, в частности, способы модификации нейросетевой архитектуры [2] и механизмов обучения модели [3], а также приводятся методы создания гибридных архитектур, объединяющих достоинства трансформеров и других типов нейронных сетей – свёрточных (CNN) [4] или графовых (GNN) [5].

В работе отмечены преимущества и недостатки наиболее известных методов, а также выделены самые перспективные из них. В частности показано, что адаптация трансформерных архитектур к анализу многомерных временных рядов обеспечивает повышение интерпретируемости результатов работы модели практически без потерь точности. Это делает применение технологий автоматизированного анализа ЭКГ более прозрачным и надёжным для использования в клинической практике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reading Between the Leads: Local Lead-Attention Based Classification of Electrocardiogram Signals / Gouthamaan Manimaran, Sadasivan Puthusserypady, Helena Dominguez, Jakob E Bardram. // Computing in Cardiology. 2023. Vol. 50, pp. 1–4.
- [2] George Zerveas, Srideepika Jayaraman, Dhaval Patel. A Transformer-based Framework for Multivariate Time Series Representation Learning // The 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2021. PP. 2114–2124.
- [3] TimeMIL: Advancing Multivariate Time Series Classification via a Time-aware Multiple Instance Learning / Xiwen Chen, Peijie Qiu, Wenhui Zhu, Huayu Li, Hao Wang, Aristeidis Sotiras, Yalin Wang, Abolfazl Razi // Proceedings of Machine Learning Research. 2024. Vol. 235, pp. 7190-7206.
- [4] Gated CNN-Transformer Network for Automatic Cardiovascular Diagnosis using 12-lead Electrocardiogram. / Yuanlin Liu, Haiying Li, Jie Lin, Hairui Li, Haijun Lei, Chunmei Xia, Chunlun Xiao, Baiying Lei // 45th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society (EMBC). 2023. PP. 1–4.
- [5] Qi Xu, Yi Xia. ST-DGCN: A Novel Spatial-Temporal Dynamic Graph Convolutional Network for Cardiovascular Diseases Diagnosis. // IEEE Access 2025. Vol. 13, pp. 153296–153307.

## Секция: "Математическая физика и обратные задачи".

### Прямые и обратные задачи для уравнений семейства Кортевега–де Вриза (KdV) с переменными коэффициентами

Баев Андрей Владимирович

Кафедра математической физики, e-mail: baev@cs.msu.ru

В работе рассматривается определение переменных коэффициентов в уравнении колебаний решетки. В рамках модели Ферми–Пасты–Улама (FPU) [1] получено уравнение семейства KdV с переменными коэффициентами, определяемыми шагом решетки и нелинейной упругостью [2]. Это уравнение, обычно упоминаемое как уравнение Гарднера, включает как квадратичную так и кубическую нелинейность, может быть точно проинтегрировано только в том случае, если коэффициенты упругости постоянны. В таком случае в качестве решений для моделирования использовались солитоны.

Обратные задачи предполагают восстановление коэффициентов из интегралов момента и энергии для уравнения KdV. Если коэффициенты нелинейной упругости не постоянны, то в качестве решений прямой задачи используются обобщенные функции (распределения). В этом случае мы ставим и решаем обратные задачи в классе кусочно-постоянных функций.

Доказаны теоремы существования и единственности решения обратных задач и разработаны устойчивые алгоритмы их решения на основе этих теорем. Для подтверждения теоретических результатов выполнена серия вычислений. Для численного решения прямой задачи была использована модификация квази-спектрального метода. Полученные численные результаты представлены в виде компьютерных изображений и графиков. Одним из возможных приложений рассмотренных обратных задач является обнаружение дислокаций (нарушений) кристаллической решетки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baev A.V. Problems for the Fermi–Pasta–Ulam (FPU) Model for an Inhomogeneous Lattice // Mathematical Models and Computer Simulations. 2025. V. 17, № 5. P. 534–547.
- [2] Baev A.V. Direct and inverse problems for Korteweg–de Vries' family equations in the Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou model for an inhomogeneous structure of lattice // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2025. № 10. P. 1–17.

# Исследование моделей распространения сверхкоротких импульсов

Разгулин Александр Витальевич<sup>1</sup>, Степаненко Светлана Владимировна<sup>2</sup>, Трофимов Вячеслав Анатольевич<sup>3</sup>, Колобродов Андрей<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики ВМК МГУ и Московский центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: razgulin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра математической физики ВМК МГУ, e-mail: s.stepanenko.cmc@gmail.com

<sup>3</sup> Южно-китайский технологический университет, Гуанчжоу, КНР, e-mail: vatro@cs.msu.ru

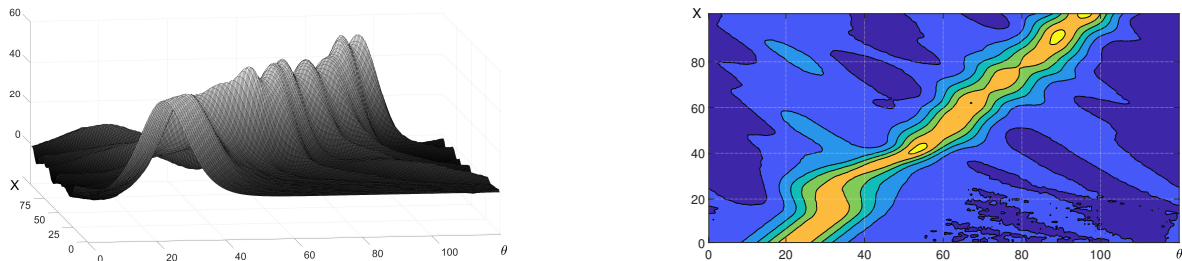
<sup>4</sup> Кафедра математической физики ВМК МГУ, e-mail: st02210094@gse.cs.msu.ru

В современной лазерной физике генерируются оптические импульсы, состоящие из нескольких циклов. Такие сверхкороткие импульсы используются в нелинейной оптике, медицинской диагностике и визуализации, для управления химическими реакциями и других приложениях. В рамках приближения медленно эволюционирующих волн распространение фемтосекундного импульса в среде с кубической нелинейностью описывается обобщенным нелинейным уравнением Шредингера (GNLSE) [1] для медленно меняющейся огибающей напряженности электрического поля  $A(z, x, t)$ :

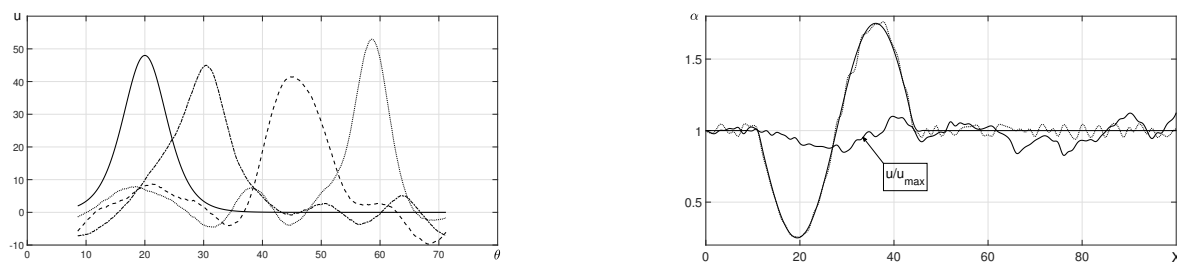
$$\mathcal{D}_t \frac{\partial A}{\partial z} + iD_2 \mathcal{D}_t \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + iD \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\alpha \mathcal{D}_t^2 (|A|^2 A) = 0,$$

где  $\mathcal{D}_t = 1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $(z, x, t) \in \Omega = (0, L_z] \times (0, L_x) \times (0, L_t)$ ,  $D > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $D_2, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $D_2 \neq 0$ .

Мы предлагаем новое преобразование уравнения GNLSE к виду, не содержащему ни производной от члена, описывающего нелинейный отклик, ни смешанных производных. В новых переменных процесс описывается тремя уравнениями, содержащими только линейные дифференциальные операторы. При соответствующих граничных условиях мы выводим законы сохранения [2] для GNLSE: энергии, гамильтониана, спектрального инварианта и некоторых других инвариантов. Обсуждаемые инварианты полезны при математическом моделировании распространения сверхкоротких оптических



**Figure 1.** Wave field of the KdV equation for dislocation of  $\alpha(X)$  and “heat map” of a wave field trace.



**Figure 2.** Left: wave field profiles at  $X = 0, 33, 66, 99$ ; right: numerical solution (dotted line) for the original coefficient (thin solid line).

импульсов как при теоретическом анализе распространения лазерных импульсов, так и при разработке консервативных конечно-разностных схем. Приводятся результаты компьютерного моделирования GNLSE.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brabec T., Krausz F. Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 3282–3285.
- [2] Stepanenko S.V., Razgulin A.V., Trofimov V.A. Conservation laws of femtosecond pulse propagation described by generalized nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity // Mathematics and Computers in Simulation. 2021. Vol. 182. P. 366–396.

## Задача о нахождении источника, подобная обратной задаче Коши

Тихонов Иван Владимирович<sup>1</sup>, Алмохамед Муатаз<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра Математической физики, e-mail: ivtikh@mail.ru

<sup>2</sup> Московский технический университет связи и информатики, e-mail: mssrmtz@gmail.com

Теорию обратных задач [1] дополним одной новой постановкой. В отличие от привычного случая (см., например, [2]) предлагаемая задача не обладает свойством спектральности, т. е. ситуация с корректностью для неё не допускает описания в простых спектральных терминах.

Общая постановка задачи в банаховом пространстве  $E$  имеет вид

$$u'(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u_0, \quad u'(T) = u_1. \quad (1)$$

Предполагаем, что  $A$  — линейный замкнутый оператор в  $E$  с плотной областью определения  $D(A) \subset E$ , порождающий полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$ . Число  $T > 0$  и значения  $u_0 \in D(A)$ ,  $u_1 \in E$  считаем заданными. Неизвестными являются функция  $u: [0, T] \rightarrow E$  и элемент  $g \in E$ .

Обратная задача (1) эквивалентна операторному уравнению

$$U(T)g = h, \quad (2)$$

где элемент  $g \in E$  ищется по заданному  $h \equiv u_1 - U(T)Au_0 \in E$ .

Уравнение (2) в свою очередь сводится к поиску неизвестного начального значения  $v(0) = g$ , исходя из задачи Коши с обратным направлением времени

$$v'(t) = Av(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad v(T) = h. \quad (3)$$

Основные свойства задачи (3) через связь с уравнением (2) переносятся на исходную задачу (1).

Используя изложенные соображения, удастся охарактеризовать обратную задачу (1) в зависимости от выбора оператора  $A$ .

Работа И. В. Тихонова поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ по соглашению No 075-15-2025-345.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel: Marcel Dekker Inc, 2000.
- [2] Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки, 1994. Т. 56, вып. 2. С. 99–113.

## Анализ поглощающих свойств слоистых наночастиц в присутствии квантовых эффектов методом дискретных источников

Лопушенко Владимир Васильевич<sup>1</sup>, Еремин Юрий Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Лаборатория математической физики, e-mail: lopushnk@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Лаборатория вычислительной электродинамики, e-mail: eremin@cs.msu.ru

Плазмонные наночастицы (НЧ) используются в многочисленных приложениях: геномной инженерии, биосенсорике, терапии рака, при визуализации внутренних органов и доставке лекарств. В частности, лечение онкологии осуществляется на основе плазмонной фототермической терапии (ФТ) с применением золотых и серебряных НЧ, которые поглощают электромагнитную энергию и преобразуют ее в тепло [1]. Чтобы защитить органы от нежелательного воздействия металлов, выполняется функционализация поверхности НЧ посредством нанесения биосовместимых полимерных покрытий, которые гарантируют стабильность НЧ, не снижая при этом их терапевтическую результативность [2].

Миниатюризация размеров НЧ представляет собой современный тренд в совершенствовании средств проведения ФТ. Однако при размерах порядка нескольких нанометров возникают квантовые эффекты (КЭ), которые определенным образом влияют на фототермические свойства плазмонных НЧ, существенно изменяя как положение, так и амплитуду плазмонного резонанса (ПР) — ключевого фактора максимального поглощения энергии.

В данной работе для анализа влияния КЭ на уровень поглощенной энергии слоистых НЧ с плазмонным ядром разработана модификация метода дискретных источников, учитывающая КЭ в ядре НЧ посредством использования мезоскопических граничных условий с параметрами Фейбельмана [3]. Проведен сравнительный анализ сечения поглощения слоистых частиц для наноразмерных ядер из золота и серебра. В результате установлено, что диэлектрическое покрытие не влияет на фототермические свойства слоистых наночастиц. При этом частицы с серебряными ядрами демонстрируют в четыре раза более высокие значения поглощенной энергии, чем золотые.

Учет квантовых эффектов приводит к смещению положения плазмонного резонанса в коротковолновую область на 15 нм при небольшом уменьшении его амплитуд на 5%. Показано, что изменение вытянутости ядра при постоянной толщине покрытия позволяет продвигать максимум сечения поглощения внутрь области прозрачности биотканей. Установлено, что изменение угла падения плоской волны по отношению к оси симметрии частицы существенно снижает величину сечения поглощения.

Исследования авторов поддержаны Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М.В. Ломоносова по соглашению No 075-15-2025-345.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andleeb A., Andleeb A. et al. A Systematic Review of Biosynthesized Metallic Nanoparticles as a Promising Anti-Cancer-Strategy // *Cancers* (Basel). 2021. Vol. 13, No. 11. Pp. 2818.
- [2] Arcos Rosero W. A., Bueno Barbezán A. et al. Review of Advances in Coating and Functionalization of Gold Nanoparticles: From Theory to Biomedical Application // *Pharmaceutics*. 2024. Vol. 16, No. 2. Pp. 255.
- [3] Еремин Ю. А., Лопушенко В. В. Исследование особенностей поведения оптических характеристик парных наночастиц при учете квантовых эффектов // *Опт. и спектр.* 2025. Т. 133, № 7. С. 783.

# Применение метода многих масштабов для описания процесса утроения частоты лазерного излучения в случае существования нескольких малых параметров

Харитонов Дмитрий Михайлович<sup>1</sup>, Трофимов Вячеслав Анатольевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики, e-mail: dmitrykharitonov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Южно-китайский университет технологий, e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Рассматривается модель утроения частоты лазерного излучения в среде с квадратичным нелинейным откликом при учёте эффекта двулучепреломления. Математически данный процесс описывается системой нелинейных уравнений Шрёдингера [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + iD_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + i\gamma \left( A_1^* A_2 e^{-i\Delta_{21}z} + A_1^* \tilde{A}_2 e^{-i\tilde{\Delta}_{21}z} + \right. \\ \left. + A_2^* \tilde{A}_3 e^{-i(\tilde{\Delta}_{31}-\Delta_{21})z} + \tilde{A}_2^* \tilde{A}_3 e^{-i(\tilde{\Delta}_{31}-\tilde{\Delta}_{21})z} \right) = 0, \quad 0 < z \leq L_z, 0 < t < L_t \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu_{21} \frac{\partial A_2}{\partial t} + iD_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + i\gamma \left( A_1^2 e^{i\Delta_{21}z} + 2A_1^* \tilde{A}_3 e^{-i(\tilde{\Delta}_{31}-\Delta_{21})z} \right) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial z} + \tilde{\nu}_{21} \frac{\partial \tilde{A}_2}{\partial t} + i\tilde{D}_2 \frac{\partial^2 \tilde{A}_2}{\partial t^2} + i\gamma \left( A_1^2 e^{i\tilde{\Delta}_{21}z} + 2A_1^* \tilde{A}_3 e^{-i(\tilde{\Delta}_{31}-\tilde{\Delta}_{21})z} \right) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial z} + \tilde{\nu}_{31} \frac{\partial \tilde{A}_3}{\partial t} + i\tilde{D}_3 \frac{\partial^2 \tilde{A}_3}{\partial t^2} + 3i\gamma \left( A_1 A_2 e^{i(\tilde{\Delta}_{31}-\Delta_{21})z} + A_1 \tilde{A}_2 e^{i(\tilde{\Delta}_{31}-\tilde{\Delta}_{21})z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с нулевыми граничными условиями и начальными условиями вида

$$A_1(0, t) = A_{10}(t), \quad A_2(0, t) = \tilde{A}_2(0, t) = \tilde{A}_3(0, t) = 0.$$

Амплитуды и параметры с волнами относятся к необыкновенным волнам, без – к обыкновенным. При этом предполагается, что параметр  $\tilde{\Delta}_{31}$  близок к нулю или равен ему (условие фазового синхронизма), а параметры  $\Delta_{21}$  и  $\tilde{\Delta}_{21}$  по модулю много больше единицы.

Ранее авторами при исследовании этого процесса без учёта эффекта двулучепреломления (соответствующая система нелинейных уравнений Шрёдингера может быть получена из (1) путём исключения слагаемых, содержащих  $\tilde{A}_2$ ) [2] использовался метод многих масштабов [3], в котором в качестве малого параметра бралась обратная величина к  $\Delta_{21}$ :  $\mu = \Delta_{21}^{-1}$ . При этом система уравнений (1) содержит два параметра, много больших единицы. В общем случае это означало бы существование нескольких малых

параметров. Однако, анализ значений параметров  $\Delta_{21}$  и  $\tilde{\Delta}_{21}$  для основных нелинейных кристаллов, используемых для утроения частоты [4], показал, что их значения имеют одинаковый порядок. Следовательно, после замены  $\tilde{\Delta}_{21} = q\Delta_{21}$ ,  $0.1 < |q| < 10$  можно снова использовать метод многих масштабов с одним малым параметром.

Таким образом, построена система нелинейных дифференциальных уравнений, решение которой приближает решение исходной системы с высокой точностью. Построенная система допускает аналитическое исследование.

Харитонов Д. М. благодарит Российский научный фонд (проект № 25-71-00043) за финансовую поддержку работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Banks P. S., Feit M. D., Perry M. D. High-intensity third-harmonic generation // Journal of the Optical Society of America B. 2002. V. 19, № 1. – P. 102–118.
- [2] Высокоэффективная генерация третьей гармоники в среде с квадратичной и кубической нелинейностями в результате каскадной генерации второй гармоники / В. А. Трофимов, Д. М. Харитонов, М. В. Федотов, Ю. Ян, Ч. Дэн // Квантовая электроника. 2023. Т. 53, № 8. С. 645–660.
- [3] Nayfeh, A. H. Introduction to perturbation techniques. John Wiley & Sons, 2024.
- [4] Nikogosyan D. N. Nonlinear optical crystals: a complete survey. – New York, NY : Springer New York, 2005.

## Обратные задачи в лазерной дифрактометрии эритроцитов

Цыбров Евгений Германович<sup>1</sup>, Никитин Сергей Юрьевич,  
Лебедева Мария Сергеевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики, e-mail: tsybrovevgeniy@yandex.ru

<sup>2</sup> Физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов, e-mail: sergeynikitin007@yandex.ru, 2mary.lebedeva@gmail.com

Одной из важных характеристик крови является ширина распределения эритроцитов по размерам (RDW, Red Blood Cell Distribution Width), которая в норме составляет 12-14%. Превышение этого показателя указывает на проблемы в системе кровообращения. В работах [1-2] отмечается важность данного параметра для оценки состояния организма и вероятности осложнений при различных заболеваниях.

Обычно параметр RDW измеряют в гемоанализаторах с использованием счетчика Коултера или при помощи метода проточной цитометрии, которые требуют сложной аппаратуры. Также можно использовать метод лазерной дифрактометрии – метод, основанный на исследовании дифракционных картин, возникающих при рассеянии лазерного луча на мелких частицах, в том

числе на эритроцитах. Основным преимуществом данного метода является возможность проводить измерения сразу на большом количестве эритроцитов попадающих под лазерный луч.

В работе исследовалась модель рассеяния лазерного луча на слабо неоднородном наборе эритроцитов. Проводился анализ функции углового распределения интенсивности света по параметрам: угловая координата первого минимума, интенсивность света и кривизна функции в окрестности первого минимума. На основе анализа были выведены дифрактометрические уравнения [3], связывающие параметры дифракционной картины с характеристиками распределения эритроцитов, применимые к слабо неоднородным наборам эритроцитов:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\beta^2}(1+\alpha)^2(1+6\mu)f_0 &= \mu, \\ \frac{1}{\beta^2}(1+\alpha)(1+6\mu)f_0 &= 2\alpha + 5\mu, \\ \frac{1}{\beta^2}(1+6\mu)(f_0 + \frac{1}{8}f_2) &= 1 + 2(3 - x_0^2)\mu,\end{aligned}$$

где  $x_0$  – первый корень функции Бесселя 1-го порядка,  $\beta$  – значение функции Бесселя 0-го порядка в точке  $x_0$ ,  $\alpha$  – параметр, описывающий влияние неоднородности набора эритроцитов на координату первого минимума,  $\mu$  – показатель ширины распределения эритроцитов по размерам,  $f_0$  и  $f_2$  – значения функции интенсивности света и её второй производной в первом минимуме.

Разработанный метод позволяет измерять параметр RDW методом лазерной дифрактометрии. По результатам численных экспериментов полученный метод обладает высокой помехоустойчивостью и может быть внедрён в системы автоматического анализа мазков крови для расширения возможностей неинвазивной диагностики и оптимизации клинических анализов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Patel K. V., Semba R. D., Ferrucci L., Newman A. B., Fried L. P., Wallace R. B. et al. Biological Sciences and Medical Sciences, 65A (3), p. 258–265 (2010), doi: 10.1093/gerona/glp163
- [2] Huang S., Zhou Q., Guo N., Zhang Z., Luo L., Luo Y. et al. Medicine(Baltimore), 100 (15), e25404 (2021), doi: 10.1097/MD.00000000000025404.
- [3] Никитин С. Ю., Цыбров Е. Г., Лебедева М. С. Лазерная дифрактометрия и измерение ширины распределения эритроцитов по размерам // Оптика и спектроскопия. — 2025. — Т. 133, № 7. — С. 790–798.

# Выделение области ресниц на изображениях радужной оболочки глаза на основе универсальной модели сегментации изображений

Максименко Елизавета Андреевна, Павельева Елена Александровна

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail:  
elizaveta.a.maksimenko@gmail.com, paveljeva@cs.msu.ru

Биометрическая идентификация по радужной оболочке глаза обеспечивает высокую точность и надёжность распознавания личности. Важным этапом обработки изображений радужной оболочки, от которого зависит корректность последующего распознавания, является сегментация радужки — выделение области радужной оболочки на изображении глаза. Основной проблемой при сегментации изображений радужки является наличие на изображении ресниц, частично перекрывающих радужную оболочку и искажающих её текстурные признаки.

В работе предложен метод выделения областей ресниц на изображениях радужной оболочки глаза на основе универсальной нейросетевой модели сегментации изображений SAM 2 [1]. Для адаптации модели к задаче выполнено двухэтапное дообучение: сначала — на официальной разметке базы данных CASIA-IrisV4-Interval [2], не учитывающей наличие ресниц на изображениях, затем — на дополнительной выборке из 200 изображений, вручную размеченных с выделением областей ресниц и прилегающих зон. Во время дообучения фиксировались параметры основного кодировщика Niega-T [3], что позволило сохранить обобщающую способность модели при ограниченном объёме обучающей выборки. На этапе тестирования в качестве подсказок для сегментации использовалась область изображения между границами радужки, полученными с помощью интегро-дифференциального оператора Даугмана [4].

Качество работы модели оценивалось по стандартным метрикам сегментации (IoU, Dice, Precision, Recall, F1, Accuracy, MCC) [5]. Дополнительно в работе вычисляется коэффициент чистоты сегментации (SPC), характеризующий наличие ресниц на сегментированном изображении радужной оболочки.

Полученные результаты (Рис. 1) подтверждают, что адаптированная модель SAM 2 обеспечивает точное и устойчивое выделение областей ресниц на изображениях радужной оболочки глаза и может быть эффективно использована в системах биометрической идентификации для повышения качества предварительной сегментации изображений.

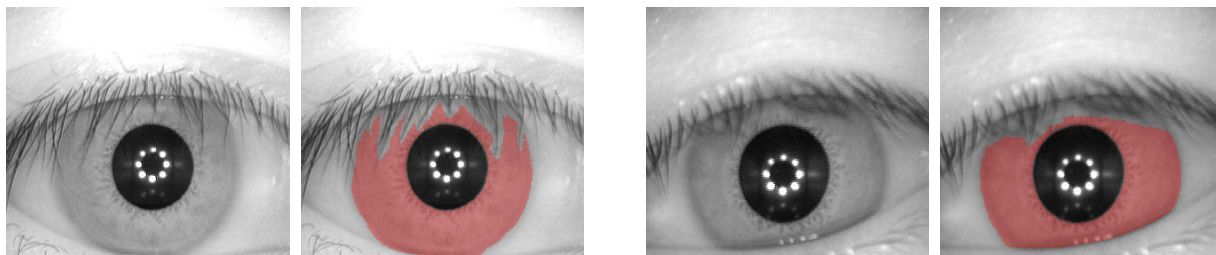


Рис. 1: Примеры работы метода сегментации изображений

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] SAM 2: Segment Anything in Images and Videos / N. Ravi, V. Gabeur, Y.-T. Hu et al. // *arXiv preprint arXiv:2408.00714*. 2024. P. 1–42.
- [2] CASIA Iris Image Database // URL: <http://biometrics.idealtest.org/>.
- [3] Hiera: A Hierarchical Vision Transformer without the Bells-and-Whistles / C. Ryali, Y.-T. Hu, D. Bolya et al. // *PMLR*. 2023. P. 29441–29454.
- [4] Daugman J. How iris recognition works // *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 2004. Vol. 14. P. 21–30.
- [5] Foody G. M. Challenges in the real world use of classification accuracy metrics: from recall and precision to the Matthews correlation coefficient // *PLOS ONE*. 2023. Vol. 18, № 10. P. e0291908.

## Секция: "Вычислительные технологии и моделирование".

### Математическая модель взаимодействия вирусов в эпителии дыхательных путей

Червяков Никита Михайлович

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: nm.chervyakov@yandex.ru

В пандемию COVID-19 наблюдалось резкое снижение заболеваемости, вызванной вирусами гриппа и другими респираторными вирусами [1]. Например, в 2021 году наблюдалось снижение заболеваемости гриппом до 5-10 % от уровня 2019 года [2]. В [1, 2, 3] снижение заболеваемости ОРВИ объясняется как противоэпидемическими мерами, снижающими скорость передачи инфекции в популяции, так и взаимодействием вирусов в эпителии дыхательных путей человека, влияющим на инфекционность вирусов. Среди механизмов, опосредующих взаимодействие вирусов, выделяют конкуренцию вирусов за клетки-мишени и действие системы интерферона [3].

В работе рассматривается модель взаимодействия вирусов SARS-CoV-2 и гриппа в эпителии дыхательных путей человека. Используется модифицированная модель противовирусного иммунного ответа Марчука [4], которая описывает динамику процессов в эпителии дыхательных путей и лимфатической ткани для двух вирусов, в том числе действие интерферона на ткань-мишень. Сегменты модели, описывающие индивидуальную вирусную инфекцию, предварительно настроены на описание изолированной динамики отдельных вирусных инфекций по вирусологическим, цитометрическим и биоинформатическим данным [5, 6, 7]. В вычислительном эксперименте оценен период полной или частичной невосприимчивости к инфицированию вирусом гриппа во время протекания коронавирусной инфекции в интервале до 11 суток после инфицирования коронавирусом.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соминина А. А. и др. Интерференция SARS-CoV-2 с другими возбудителями респираторных вирусных инфекций в период пандемии // Эпидемиология и вакцинопрофилактика. – 2021. – Т. 20. – №. 4. – С. 28-39.
- [2] Bender R. G. et al. Global, regional, and national incidence and mortality burden of non-COVID-19 lower respiratory infections and aetiologies, 1990–2021: a systematic analysis from the Global Burden of Disease Study 2021 // The Lancet Infectious Diseases. – 2024. – Т. 24. – №. 9. – С. 974-1002.

- [3] Nickbakhsh, S., et. al., Virus-virus interactions impact the population dynamics of influenza and the common cold. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(52), 2019, pp.27142-27150.
- [4] Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты / Марчук Г. И. – 3-е изд., перераб. и. доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. Лит., 1991. – 304.
- [5] Lindeboom R. G. H. et al. Human SARS-CoV-2 challenge uncovers local and systemic response dynamics // *Nature*. – 2024. – Т. 631. – №. 8019. – С. 189-198.
- [6] Gao K. M. et al. Human nasal wash RNA-Seq reveals distinct cell-specific innate immune responses in influenza versus SARS-CoV-2 // *JCI insight*. – 2021. – Т. 6. – №. 22. – С. e152288.
- [7] Ip D. K. M. et al. The dynamic relationship between clinical symptomatology and viral shedding in naturally acquired seasonal and pandemic influenza virus infections // *Clinical Infectious Diseases*. – 2016. – Т. 62. – №. 4. – С. 431-437.

## Моделирование легочного кровотока для планирования операции Фонтена

Лыфенко Анна Игоревна<sup>1</sup>, Добросердова Татьяна Константиновна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> факультет ВМК МГУ, e-mail: lyfenko2006@mail.ru

<sup>2</sup> ИВМ РАН, e-mail: dobroserdovatk@gmail.com

В настоящее время математическое моделирование все больше внедряется в клиническую практику, в частности, помогая врачам планировать лечение пациентов. Целью данной работы является создание математической модели для прогнозирования исхода операции Фонтена - одножелудочковой хирургической коррекции врожденного порока сердца, при которой венозная кровь направляется из полых вен в легочные артерии. В рамках существующих подходов кровотоки локально моделируются в области формируемого полного кавапульмонального соединения. Однако для корректного прогнозирования необходимо учитывать изменение граничных условий в области интереса, а это возможно путем построения замкнутой модели циркуляции крови в организме пациента. Задачей данной работы является создание части замкнутой модели, а именно персонализируемой модели легочного кровотока.

Для расчетов используется стандартная 1D-модель гемодинамики [1]. Кровь считается вязкой несжимаемой жидкостью, протекающей по сети сосудов. Модель основана на законах сохранения массы и импульса, а также уравнении состояния. Расчет течения крови проводится в каждом сосуде, а затем решения “сшиваются” в точках их соединений с учетом законов сохранения массы, а также сохранения полного давления или условия Пуазейля.

Расчетная область построена на основе КТ данных реального пациента с правильной анатомией легочных артерий и вен. Для этого проведена сегментация КТ снимков, выделены центральные линии сосудов и построены графы артериальной и венозной частей легочного круга кровообращения (рис.1,2). Персонализация расчетной области для конкретного пациента возможна путем масштабирования размеров с учетом антропометрических измерений.

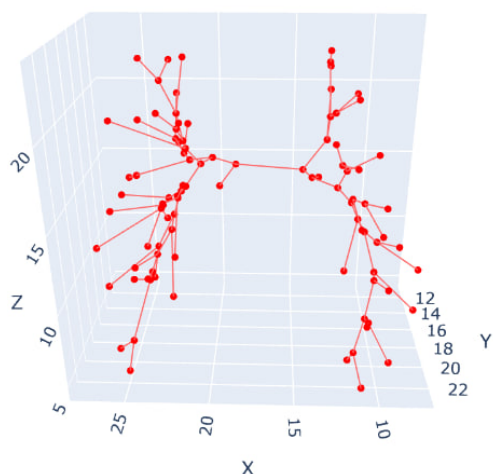


Рис. 1: Граф легочных артерий

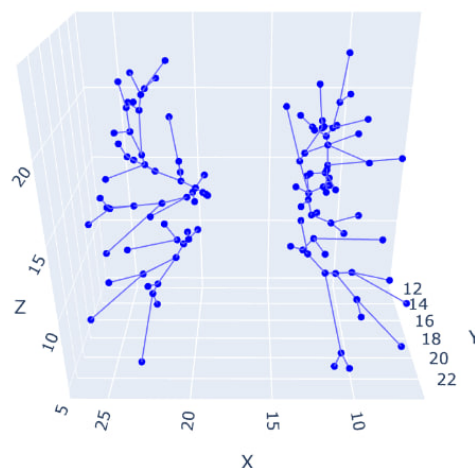


Рис. 2: Граф легочных вен

Персонализация модели также включает подбор параметров для конкретного пациента. Сопротивление микрососудистого русла будет оцениваться по аналогии с методикой в работе [2] с использованием доступных клинических данных: внутрисосудистых измерений давления и результатов УЗИ обследования.

Таким образом, в работе создана модель легочного кровотока. Расчетная область построена на основе данных реального пациента.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. S. Simakov and A. S. Kholodov. Computational Study of Oxygen Concentration in Human Blood under Low Frequency Disturbances //Mathematical Models and Computer Simulations, 2009, Vol. 1, No. 2, pp. 283–295.
- [2] Sergey Simakov, Timur Gamilov, Fuyou Liang, Philipp Kopylov. Computational Analysis of Haemodynamic Indices in Synthetic Atherosclerotic Coronary Networks //Mathematics 2021, 9(18), 2221; <https://doi.org/10.3390/math9182221>

# Сжатие свёрточных нейронных сетей с применением малоранговых матричных и тензорных разложений

Поворознюк А. П., Бурцев Л. А., Матвеев С. А.

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: alexa.pvr@yandex.ru, leongoos@yandex.ru, matseralex@yandex.ru

Свёрточные нейронные сети (Convolutional Neural Networks[1], CNN) широко применяются для решения задач компьютерного зрения, включая классификацию изображений, обнаружение объектов и семантическую сегментацию. Такие модели, как AlexNet[2] и VGG16[3], показывают высокую точность, однако достигается это за счёт значительной вычислительной сложности и большого числа параметров, что затрудняет их развёртывание на устройствах с ограниченными ресурсами.

Проблема усугубляется с увеличением глубины и сложности архитектур. Например, в AlexNet полносвязные слои составляют свыше 93 % от общего числа параметров модели, а для обработки одного изображения с помощью VGG16 требуются миллиарды операций. В связи с этим разработка методов сжатия CNN, позволяющих существенно сократить объём модели и вычислительные затраты без значительной потери точности, представляет собой актуальную научно-практическую задачу.

Одним из перспективных направлений в решении данной проблемы является использование тензорных методов. Тензорные разложения позволяют эффективно аппроксимировать многомерные весовые тензоры свёрточных слоёв, значительно сокращая количество параметров. Для сжатия полносвязных слоёв успешно применяется сингулярное разложение и его рандомизированная версия. Эти подходы основаны на строгом математическом аппарате и предлагают теоретически обоснованные способы снижения сложности нейронных сетей.

В данной работе к параметрам нейронных сетей были применены различные тензорные и матричные разложения. Результаты экспериментов показали, что веса многих свёрточных сетей допускают эффективную аппроксимацию с малым числом параметров. Вместе с тем существуют сети, веса которых не удаётся аппроксимировать без существенной потери точности предсказаний.

Операция свёртки, являющаяся основой соответствующих слоёв, представляет собой вычислительно сложный процесс. В работе был использован алгоритм, позволяющий выполнять вычисление свёрток на порядок быстрее, а также продемонстрирована его эффективность в условиях однопоточного выполнения программы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O'shea K., Nash R. An introduction to convolutional neural networks //arXiv preprint arXiv:1511.08458. – 2015.
- [2] Swapna M., Sharma Y. K., Prasad B. M. G. Cnn architectures: Alex net, le net, vgg, google net, res net //Int. J. Recent Technol. Eng. – 2020. – Т. 8. – №. 6. – С. 953-960.
- [3] Vedaldi A., Zisserman A. Vgg convolutional neural networks practical //Department of Engineering Science, University of Oxford. – 2016. – Т. 66.

## Восстановление тензора канала на основе информации о произведении матриц канала

Замарашкин Н. Л., Бурцев Л. А., Таумурзаев А. К.

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: nikolai.zamarashkin@gmail.com,  
leongoos@yandex.ru, ahmat.taumurzaev@gmail.com

Пусть  $\mathbf{H}$  – комплексозначный тензор, полученный при моделировании канала связи между базовой станцией и приёмником [1]. Предположим, что он представляется в виде  $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$ , где  $\mathbf{T}$  – тензор полезного сигнала малого канонического ранга,  $\mathbf{N}$  – шум. Одной из основных задач, связанных с данным тензором, является задача фильтрации шума. Она заключается в нахождении  $\mathbf{T}$  по тензору  $\mathbf{H}$ . Для её решения может быть использовано каноническое представление. Но бывают ситуации, когда известна лишь матрица  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ , где  $\mathbf{H}$  – матрица развёртки тензора  $\mathbf{H}$ . В таком случае нахождение канонического представления напрямую может быть недопустимо дорого с вычислительной точки зрения. Тем самым для решения данной задачи были предложены два подхода.

Первый подход заключается в том, чтобы выбрать подмножество наиболее линейно независимых столбцов матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ , собрать из них новый тензор и найти его каноническое представление с помощью алгоритма ALS [2].

В качестве второго подхода предлагается использовать метод Ньютона для нахождения

$$\left\| \sum_{r_a=1}^R \sum_{r_b=1}^R (u_{r_a} \otimes v_{r_a}) Y_{r_a, r_b} (u_{r_b} \otimes v_{r_b})^* - \mathbf{H}\mathbf{H}^* \right\|_F^2 \rightarrow \min_{U, V, Y},$$

где  $U, V, W$  – факторные матрицы  $T$ ,  $Y = WW^* > 0$  – положительно определённая матрица. Предполагается, что данное решение позволит достичь лучшей фильтрации шума в силу использования особенностей структуры.

Результаты экспериментов продемонстрировали, что оба подхода решают поставленную задачу. Второй подход, как и предполагалось, лучше фильтрует шум, но обладает существенно большей вычислительной сложностью, нежели первый.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Almeida A. L. F. Tensor modeling and signal processing for wireless communication systems : PhD-thesis : 2007 / André L. F. de Almeida. Nice, 2007.
- [2] Tensor Decompositions, Alternating Least Squares and other Tales / P. Comon, L. Xavier, A. de Almeida // Journal of Chemometrics. 2009. Т. 23, № 4-5. С. —.

## Эффективное хранение и умножение разреженных матриц в задаче факторизации

Клочкова Ирина Юрьевна, Желтков Дмитрий Александрович

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: stud@iklochkova.ru

Стойкость алгоритма шифрования RSA напрямую зависит от сложности разложения на множители больших чисел. Самый эффективный метод для факторизации чисел длиннее 100 десятичных знаков — общее решето числового поля, одним из ключевых этапов которого является решение разреженной системы линейных уравнений над полем  $GF(2)$ . Для рекордных по размеру чисел эти системы задаются матрицами порядка  $3 \cdot 10^8$  и выше, и для их решения наиболее быстрым методом в рамках одного вычислительного кластера является блочный метод Ланцоша-Монтгомери[1], для которого наиболее затратными по времени оказываются операции умножения матрицы и транспонированной матрицы на вектор.

Классическим вариантом хранения разреженных матриц является сжатый строчный формат (CSR). В данной задаче он является не столь эффективным: из-за случайного шаблона разреженности у умножения на транспонированную матрицу производительность ниже. В связи с этим для высокой производительности требуется хранить две копии матрицы — исходную и транспонированную.

В данной работе для хранения таких матриц предложен новый формат — блочно-координатный BCF. Матрица разбивается на блоки порядка, соответствующего размеру кэша второго уровня. Это позволяет минимизировать промахи по кэшу и использовать лишь одну копию матрицы. В то же время, позиций ненулевых элементов внутри блока являются короткими числами.

Также предложен способ дальнейшего сжатия матрицы BCFH — вместо позиций внутри блока предлагается хранить разности их индексов на кривой Гильберта.

Предложенные форматы BCF и BCFH компактнее формата CSR с повышенной производительностью матричного умножения на вектор, при этом в формате BCF чуть выше производительность умножения матрицы на вектор, а в BCFH — выше компактность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Montgomery P. L. A block Lanczos algorithm for finding dependencies over  $\text{GF}(2)$ . // Advances in Cryptology — EUROCRYPT '95, p. 106–120, 1995
- [2] Zheltkov D. A., Zamarashkin N. L., Matveev S. A. How to Make Lanczos-Montgomery Fast on Modern Supercomputers? // Supercomputing: RuSCDays 2023, p. 114–128
- [3] Zamarashkin N. L., Zheltkov D. A. Block Lanczos–Montgomery Method with Reduced Data Exchanges // Supercomputing: RuSCDays 2016, p. 15–26

## Построение предобуславливателя для одного гиперсингулярного интегрального уравнения

**Ильин Евгений Алексеевич, Косолапов Илья Артемович<sup>1</sup>,  
Ненашев Анатолий Сергеевич<sup>2</sup>, Сетуха Алексей Викторович<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт, кафедра ВТМГБ, e-mail: [ilin.evgenii@phystech.edu](mailto:ilin.evgenii@phystech.edu)

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики РАН им. Г.И. Марчука, e-mail:

<sup>3</sup> Московский государственный университет, e-mail:

В работе строится численная схема с предобуславливателем для гиперсингулярного интегрального уравнения вида

$$(Tg)(x) = \int_{\Sigma} g(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = f(x), \quad (1)$$

где  $\Sigma \in \mathbb{R}^d$  – кривая на плоскости или поверхность в пространстве,  $d \in \{2, 3\}$ ,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}/4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$  – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца,  $\mathbf{n}$  – одно из непрерывных полей нормали на  $\Sigma$ .

Идея предобуславливателя опирается на два свойства оператора  $T$ :

1. Если рассматривать  $\Sigma = \mathbb{R}^{d-1}$  как многообразие внутри  $\mathbb{R}^d$ , то из теории псевдодифференциальных операторов можно получить [1], что

$$(\Delta + k^2) g = \int_{\Sigma} f(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = Tf, \quad (2)$$

2. Решение уравнения (1) удовлетворяет свойству  $g|_{\partial\Sigma} = 0$ . [2]

В предлагаемой численной схеме исследуется поведение предобуславливателя, основанного на тождестве (2), в котором область интегрирования  $\Sigma$  уже предполагается конечной. Для дискретизации оператора  $T$  применяется метод коллокаций и кусочно-постоянных аппроксимаций [3], для дискретизации оператора Лапласа — метод конечных разностей, для решения СЛАУ использовался GMRES. Показано, что при применении предобуславливателя позволяет заметно уменьшить количество итераций как и суммарное время работы алгоритма.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах // М.: ИПРЖР. – 1996. – Т. 176.
- [2] Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. - Москва : Наука, 1985. - 253 с.
- [3] Сетуха А. В. Метод интегральных уравнений в математической физике. — М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2023.

## Моделирование внутриклеточной фармакодинамики противовирусных препаратов для лечения ВИЧ-инфекции

Гребенников Дмитрий Сергеевич<sup>1</sup>, Лыфенко Анна Игоревна<sup>2</sup>,  
Тимохин Александр Михайлович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ИВМ РАН, ПМГМУ, e-mail: dmitry.ew@gmail.com

<sup>2</sup> ВМК МГУ, e-mail: lyfenko2006@mail.ru

<sup>3</sup> ПМГМУ, e-mail: data.sup@yandex.ru

В работе предложена модель фармакодинамики противовирусных препаратов, применяемых при ВИЧ-инфекции. Для параметризации действия лекарств используется разработанная ранее модель внутриклеточной репликации ВИЧ-1 [1], описывающая динамику 24 переменных. Модель описывает промежуточные стадии размножения вируса в клетке, включая процессы, на которые влияют рассматриваемые препараты: а) процесс обратной транскрипции с константой скорости  $k_{RT}$ , на который действуют препараты ЗТС и AZT, б) процесс созревания вирусных частиц с константой скорости  $k_{mat}$ , на который действует препарат RTV. Действие лекарств заключается в уменьшении скоростей этих процессов, что параметризовано следующими нелинейными зависимостями от концентрации препаратов  $C_{ЗТС}$ ,  $C_{AZT}$ ,  $C_{RTV}$ :

$$k_{RT}^*(C_{ЗТС}, C_{AZT}) = k_{RT} (1 + (C_{ЗТС}/[IC50_{ЗТС}])^{m_{ЗТС}})^{-1} (1 + (C_{AZT}/[IC50_{AZT}])^{m_{AZT}})^{-1},$$

$$k_{mat}^*(C_{RTV}) = k_{mat} (1 + (C_{RTV}/[IC50_{RTV1}])^{m_{RTV1}})^{-1} (1 + (C_{RTV}/[IC50_{RTV2}])^{m_{RTV2}})^{-1}.$$

Для оценки параметров  $[IC50_i]$ ,  $m_i$  использовались экспериментальные данные по эффективности монотерапии тремя препаратами [2]. Для её расчета измерялась доля продуктивно инфицированных клеток (в хромосомы которых встроилась хотя бы одна вирусная ДНК) в культуре клеток при разных концентрациях препарата, которая рассчитывалась по ансамблю реализаций стохастической версии модели в виде марковской цепи как функционал  $\Phi_{inf} = \Phi_{inf}(C_i)$ .

Откалиброванная модель внутриклеточной фармакодинамики позволяет предсказать степень влияния комбинированной терапии на вероятность за-

ражения клетки (функция  $u_1$ ) и на количество производимых клеткой вирусных частиц (функция  $u_2$ ):

$$u_1(C_{3TC}, C_{AZT}) = 1 - \frac{\Phi_{\text{inf}}(C_{3TC}, C_{AZT})}{\Phi_{\text{inf}}(0, 0)}, \quad u_2(C_{3TC}, C_{AZT}, C_{RTV}) = 1 - \frac{\Phi_{\text{total}}(C_{3TC}, C_{AZT}, C_{RTV})}{\Phi_{\text{total}}(0, 0, 0)},$$

где  $\Phi_{\text{total}}$  — количество созревших вирусных частиц за цикл репликации, рассчитываемое с помощью детерминистической версии модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученные функции фармакодинамики  $u_1, u_2$  можно использовать в моделях системной динамики ВИЧ-инфекции для описания действия комбинированной противовирусной терапии, что иллюстрируется на модели [3], которую можно представить в следующем общем виде:

$$\frac{dY}{dt} = S(t) + A(Y)Y + B(Y)U(t),$$

где  $Y(t) \in \mathbb{R}^{11}$  — переменные модели,  $U(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$  — управляющая функция фармакодинамики принимаемых препаратов с концентрациями  $C_i(t)$ , определяемыми уравнениями фармакокинетики. Приводятся расчеты действия стандартного режима комбинированной терапии и сравнивается ее эффективность для трех групп пациентов: типичных и быстрых прогрессоров, непрогрессоров. Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 23-11-00116).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sazonov I. и др. Markov Chain-Based Stochastic Modelling of HIV-1 Life Cycle in a CD4 T Cell // Mathematics. 2021. Т. 9, № 17. С. 2025.
- [2] Jilek B.L. и др. A quantitative basis for antiretroviral therapy for HIV-1 infection // Nat Med. 2012. Т. 18, № 3. С. 446–451.
- [3] Hadjiandreou M.M., Conejeros R., Wilson I. HIV treatment planning on a case-by-case basis // Inter J Biol Life Sci. 2011. Т. 7, № 3. С. 148–157.

## Конструктор моделей углеродного цикла суши: постановка задачи, численная реализация, тестовые случаи

**Файкин Георгий Михайлович, Шангареева Сjumбель Камилевна<sup>1</sup>,  
Степаненко Виктор Михайлович, Медведев Александр Игоревич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, факультет ВМК МГУ, e-mail: faykingm@my.msu.ru, sumbel.enikeeva@gmail.com

<sup>2</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ, e-mail: stepanen@srcc.msu.ru, a.medvedev@rcc.msu.ru

Цель работы — разработка программного комплекса (конструктора) [1] для спецификации и решения систем уравнений моделей углеродного цикла почвы. Необходимость в представлении систем уравнений в общем виде, а также

однотипный способ получения решения, нужны для сведения многообразия моделей, описывающих природные процессы важные для моделирования углеродных циклов, к единому виду. Это нужно для оптимизации алгоритма решения и для последующего сравнения результатов моделирования в рамках одинаковых условий используя гибкий и доступный алгоритм.

Основная идея заключается в сведении многообразия существующих моделей углеродного цикла к единой обобщенной математической постановке на основе концепций пулов и потоков углерода. Большинство моделей представляют собой системы дифференциальных уравнений, которые могут быть записаны в общем виде для  $N_p$  пулов:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{N_{i,j}^f} F_{i,j}^k - \frac{\partial(uC_i)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial C_i}{\partial z} - qC_i, \quad i = 1, \dots, N_p, \quad (1)$$

где  $C_i$  — концентрация углерода в  $i$ -м пуле,  $F_{i,j}^k$  —  $k$ -й поток между резервуарами,  $u$  — скорость вертикального адвективного переноса,  $\lambda$  — коэффициент диффузии,  $q$  — скорость объемного стока воды в почве. Потоки представляются в мультипликативном виде согласно закону минимума Либиха.

Предложенный путь решения включает создание архитектуры конструктора на языке Fortran 2008, обеспечивающей: 1) единообразное задание структуры модели (пулы, потоки, множители); 2) использование базовых параметризаций для описания скоростей переходов; 3) численное интегрирование системы уравнений явным методом; 4) гибкую конфигурацию расчетов через задающие файлы.

В рамках данного подхода реализованы, протестированы и проведены сравнения следующих моделей углеродного цикла: INMCM, SOCS, RothC. В процессе реализации модель Romul\_HUM [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Конструктор динамических моделей углеродного цикла почвы / Г. М. Файкин, В. М. Степаненко, А. И. Медведев, С. К. Шангареева и др. // Вычислительные методы и программирование. 2025. Т. 26, № 3. С. 281–303. doi 10.26089/NumMet.v26r320.
- [2] Моделирование динамики лесных экосистем с учётом их структурной неоднородности на разных функциональных и пространственных уровнях / В. Н. Шанин и др. // FOREST SCIENCE ISSUES. 2022.

# Исследование блочно-теплицевой структуры матриц дискретизации интегральных уравнений для задач рассеяния с слоистыми диэлектриками

Масс Илья Александрович<sup>1</sup>, Валиахметов Булат Ильдарович<sup>2</sup>,  
Сетуха Алексей Викторович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: massia@my.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: valiahmetovbi@my.msu.ru

<sup>3</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: setuhaav@rambler.ru

**Постановка задачи** Решается задача численного моделирования рассеяния монохроматической электромагнитной волны при наличии диэлектрической области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ;  $\mu = 1$  и поверхности идеального проводника  $\Sigma$ . При этом диэлектрик является тонким покрытием идеального проводника, т.е

$$\Omega \approx \{x + nt, x \in \Sigma, t \in [0, h], n = n(x) - \text{нормаль к } \Sigma\}$$

Данную задачу можно записать в виде системы из двух интегральных уравнений относительно неизвестных поверхностных и объемных токов [1]:

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \mathbf{E}_{inc} + \mathcal{K}[\Omega, (\varepsilon' - 1)\mathbf{g}] + \frac{i}{\omega\varepsilon_0}\mathcal{K}[\Sigma, \mathbf{j}], & x \in \Omega, \\ \mathbf{n} \times \left( \mathbf{E}_{inc} + \mathcal{K}[\Omega, (\varepsilon' - 1)\mathbf{g}] + \frac{i}{\omega\varepsilon_0}\mathcal{K}[\Sigma, \mathbf{j}] \right) = 0, & x \in \Sigma \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathcal{K}[S, \mathbf{g}](x) = \text{rot rot} \int_S \mathbf{g}(y) F(x - y) d\sigma_y, \quad x \in \mathbb{R}^3, F(r) = \frac{e^{ik_0 r}}{r}. \quad (2)$$

**Дискретизация задачи** Система интегральных уравнений будет решаться методом Галеркина. В данной тезисе рассматривается только дискретизация объемного уравнения.

Т.к объем диэлектрика есть тонкий слой на поверхности металла, то объемная сетка строится следующим образом:

1. Для каждой точки  $x \in \Sigma$  строится среднее направление нормали  $v$ .
2. Вектор  $h(x)v$  разбивается на заранее заданные части. Данные части строятся так, чтобы на одном отрезке диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(x)$  была постоянной. Тем самым полагаются слои диэлектрика.
3. Объемная сетка состоит из слоев, в каждом слое находятся многогранники, образованные двумя треугольниками - с верхнего и с нижнего слоев (см рис 1).

На каждом многограннике вводится система из 3 кусочно-постоянных функций  $\mathbf{c}_i^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , равных 0 вне своего многогранника и линейно независимые внутри многогранника.

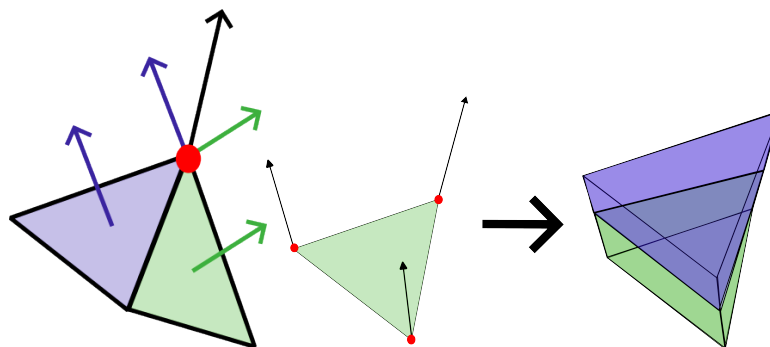


Рис. 1: Построение объемной сетки

**Блочная структура** В случае плоской поверхности металла подматрица  $A$  линейной системы, отвечающая объемному интегральному уравнению, обладает блочно-теплицевой структурой. В случае криволинейной поверхности это не так, однако при вычитании первого блока на диагонали из остальных оставшаяся подматрица имеет малую норму относительно исходной матрицы. Нами предложен алгоритм, представляющий  $A$  в виде суммы блочно-теплицевых матриц,

1. Сжимает первые блоки на каждой диагонали с точностью  $r_{tol}$ .
2. Вычитает из диагонали её первый блок, оценивая норму разности в каждом блоке относительно первого блока на диагонали.
3. Дожимает блоки с нужным  $r_{1tol}$ , чтобы точность всего сжатия была  $r_{tol}$ .

Сжатие блока в алгоритме выше происходит в мозаично скелетном формате [2] с помощью библиотеки ZaiMSK [3]. На примере сферы с четырехслойным покрытием и  $k = 10$  мы получили среднее сжатие матрицы 11.6% против 14.4% у мозаично-скелетонного формата.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Samokhin A. В Volume Singular Integral Equations of Electrodynamics (Tekhnosfera, Moscow, 2021) [in Russian]
- [2] Valiakhmetov B.I. “zaiMSk: Mosaic-skeleton method of dense matrix approximation,” <https://gitlab.com/bulatral/mosaic-skeleton>
- [3] Tyrtysnikov E. E. “Mosaic-skeleton approximations,” *Calcolo* 33, 47–57 (1996).

## Воздействие дефазирующего шума на темное квантовое состояние

Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: ozhigov@cs.msu.ru

В настоящей работе исследована устойчивость темного квантового состояния к дефазирующему шуму. Численное моделирование квантовой динами-

ки показало, что fidelity исходного темного состояния, несмотря на свое значительное снижение, демонстрирует асимптотическое стремление к постоянному ненулевому значению. Это свидетельствует о том, что дефазирующее воздействие не способно полностью разрушить темное состояние – в полости оптического резонатора сохраняется существенная доля темной компоненты, что подтверждает принципиальную устойчивость данного квантового состояния к рассматриваемому типу возмущений.

**Определение.** Темное состояние – это собственное состояние оператора гамильтониана системы, ортогональное образу оператора взаимодействия.

Иными словами, это такое состояние квантовой системы, в котором амплитуда перехода в возбужденное состояние тождественно равна нулю вследствие деструктивной квантовой интерференции различных путей перехода, что делает систему неспособной к взаимодействию с резонансным электромагнитным полем.

Температурная дефазировка, возникающая в системах типа «атомы в резонаторе», может быть описана в рамках модели Тависа-Каммингса как результат взаимодействия с тепловым резервуаром. Соответствующие операторы Линдблада содержат температурно-зависимые коэффициенты при операторах переходов отдельных атомов.

В модели Тависа-Каммингса температурная дефазировка может быть описана операторами вида

$$L_i = \sqrt{\gamma_{deph}} s_i^+ s_i,$$

где

$$\begin{aligned} s_i^+ &= |1\rangle\langle 0| - \text{оператор возбуждения } i\text{-го атома,} \\ s_i &= |0\rangle\langle 1| - \text{оператор релаксации } i\text{-го атома,} \\ \gamma_{deph} &- \text{интенсивность дефазировки.} \end{aligned}$$

Операторы Линдблада  $L_i$  входят в марковское мастер-уравнение для матрицы плотности открытой квантовой системы:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + \sum_i (L_i \rho L_i^+ - \frac{1}{2}\{L_i^+ L_i, \rho\}).$$

Для системы из двух атомов операторы Линдблада строятся как тензорные произведения операторов для отдельных атомов:

$$L_1 = \sqrt{\gamma_{deph}} (s_1^+ s_1 \otimes I), \quad L_2 = \sqrt{\gamma_{deph}} (I \otimes s_2^+ s_2).$$

График эволюции населенностей демонстрирует стабилизацию системы, при которой вероятности нахождения системы в каждом из трех базисных состояний асимптотически стремятся к значению 0.33. Это равномерное распределение населенностей указывает на установление специфического стационарного состояния, возникающего под влиянием дефазирующего шума. Данный факт является количественным свидетельством того, что исходное темное состояние не разрушается полностью, а трансформируется в смешанное состояние с остаточной когерентной компонентой.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ожигов Ю. И. О размерности пространства темных состояний в модели Тависа–Каммингса // Математические заметки. 2022. Т. 111, №3. С. 433–442.
- [2] B. Luo, H. Tang, H. Guo. Dark states in electromagnetically induced transparency controlled by a microwave field. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 42, 235505. 2009.
- [3] V. Afanasyev, R. Chen, Y. Ozhigov, J. You. Collapse of dark states in Tavis–Cummings model. *Comput Math Model* 33, 273. 2022.
- [4] M. Zanner, T. Orell, C. M. F. Schneider, R. Albert, S. Oleschko, M. L. Juan, M. Silveri, G. Kirchmair. Coherent control of a multi-qubit dark state in waveguide quantum electrodynamics. *Nature Physics* 18, 538. 2022.

## Секция: "Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром".

### Об особенностях решения коэффициентных обратных задач для нелинейных уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными различного типа

Лукьяненко Дмитрий Витальевич Кафедра математики, отделение прикладной математики, физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова

lukyanenko@physics.msu.ru

Задачи для нелинейных сингулярно возмущённых уравнений типа реакция-диффузия-адвекция возникают в газовой динамике, теории горения, химической кинетике, нелинейной теории волн, биофизике, медицине, экологии и других областях науки. Особенностью задач подобного типа является наличие разномасштабных процессов, математические модели которых описываются нелинейными параболическими уравнениями с малым сингулярным параметром при старшей производной. В связи с этим решения таких задач могут содержать узкие движущиеся фронты, которые разделяют пространство на две части: возмущённую часть, через которую фронт реакции уже прошёл, и невозмущённую часть. Фронт реакции представляет собой область, в которой функция, описывающая какую-либо характеристику среды (температуру, плотность и т.д.), достаточно резко изменяется от значений функции, описывающей одно состояние среды (например, невозмущённую), к значению функции, описывающей другое состояние. При достаточно малых значениях сингулярного параметра ширина такого фронта будет достаточно малой по отношению к размерам всей области. Как следствие, фронт реакции можно различить экспериментально, определяя его фактическое положение при наблюдении реального физического процесса в различные моменты времени. В связи с этим в докладе будут обсуждаться особенности решения коэффициентных обратных задач для нелинейных уравнений в частных производных типа реакция-диффузия-адвекция с дополнительными данными различного типа [1]. В качестве входных данных обратной задачи будут рассмотрены 1) данные в финальный момент времени, 2) данные на границе области по пространству и, главное, 3) данные о положении фронта реакции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lukyanenko D. V., Argun R. L., Borzunov A. A., Gorbachev A. V., Shinkarev V. D., Shishlenin M. A., Yagola A. G.. On the features of numerical

solution of coefficient inverse problems for nonlinear equations of the reaction–diffusion–advection type with data of various types // Differential Equations. 2023. T. 59, № 12. С. 1734–1757.

## Автомодельные решения уравнения реакции-адвекции-диффузии

Быков Алексей Александрович

Кафедра математики, e-mail: abykovmsu@mail.ru

В практике математического моделирования процессов, происходящих в пространстве  $n$  измерений (не менее двух), в том числе  $(x, t)$ ,  $(x, y)$ ,  $(x, y, t)$ , встречаются задачи, для которых существует решение в виде сложной функции, зависящей менее чем от  $n$  переменных. В гидродинамике, например, встречаются решения вида  $u(x, t) = v(x^\alpha \cdot t^\beta)$ , в теории внутренних переходных слоёв – решения вида бегущей квазиволны:  $u(x, t) = v(x - Vt)$ . Следуя терминологии, принятой в теории динамики сжимаемой среды, такие решения будем называть автомодельными. Мы в настоящей работе предложим ряд решений вида  $u(x, y, t) = v(g(x, y), t)$  уравнения реакции-адвекции-диффузии (РАД):

$$\varepsilon u'_t + \varepsilon V_x u'_x + \varepsilon V_y u'_y = \varepsilon^2 (\kappa u'_x)'_x + \varepsilon^2 (\kappa u'_y)'_y - f(u, x, y),$$

$(x, y) \in D$ ,  $t > t_0 = 0$ , с соответствующим образом поставленными начальными и граничными условиями. Мы приведём, в частности, примеры вида  $g(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$ ,  $g(x, y) = x^\alpha y^\beta$ . Автомодельные решения указанного вида, с одной стороны, обобщают решения типа бегущей квазиволны вида  $u(x, y, t) = v(x \cos \varphi + y \sin \varphi - Vt)$ , допуская криволинейный бегущий фронт внутреннего переходного слоя, а с другой стороны, структура автомодельного решения более проста и позволяет получить более глубокие физически оправданные результаты, чем общее решение в виде эволюционирующего фронта, в котором не найдены возможности автомодельности. Важность автомодельных решений обусловлена применимостью к практически важным задачам, из которых мы укажем только одну: реакция горения растительного покрова на местности. Математическая модель допускает решение вида двух или нескольких взаимодействующих фронтов, в месте пересечения которых образуется движущийся фронт более сложной формы, чем каждый из сталкивающихся фронтов, но допускающий автомодельное описание. Мы построим автомодельное решение задачи о взаимодействующих фронтах на плоскости. Обоснование включает в себя

- точное решение уравнения асимптотического разложения нулевого порядка методом Гамильтона–Якоби, аналитическое решение уравнения характеристик и вычисление эйконала, построение фронта нулевого порядка.

- Выражение решения первого порядка в виде квадратуры, вычисление скорости дрейфа первого порядка.
- Построение верхнего и нижнего решения методом Н.Н.Нефедова [1] с использованием модифицированной асимптотики. Мы приведем также результаты компьютерного моделирования.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение // Ж. вычисл. Матем. и матем. физ. (2021) 61, № 12, с. 2074–2094.

# Эволюция фронта трехмерной контрастной структуры в неоднородной среде с адвекцией

Быков Алексей Александрович<sup>1</sup>, Гань Цинчжао<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математики, e-mail: abykovmsu@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра математики, e-mail: qzhgan@qq.com

Изучается трёхмерная начально-краевая задача для квазилинейного уравнения реакции-адвекции-диффузии (РАД) с малым параметром  $\varepsilon > 0$  при адвекционном и диффузионном слагаемых:

$$\varepsilon u_t' + \varepsilon^2 \langle \vec{V}(\vec{r}), \nabla u \rangle = \varepsilon^2 \langle \nabla, \kappa(\vec{r}) \nabla u \rangle - f(u, \vec{r}), \quad \vec{r} \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $D$  – ограниченная область в трёхмерной системе координат, на границе  $\Sigma$  которой задаются граничные условия второго рода:  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi(\vec{r})$ . При  $\varepsilon = 0$  уравнение (1) становится алгебраическим, поэтому задача относится к классу сингулярно возмущённых. При  $\varepsilon > 0$  наличие малого параметра приводит к существованию решений типа контрастной структуры (КС): имеются обширные области с малым градиентом (пятна КС), разделяемые узкими слоями с большим градиентом (внутренние переходные слои, ВПС). Понятия «большой» и «малый» будут специфицированы. Показано, что (1) при главном (нулевом) порядке асимптотического ряда по степеням  $\varepsilon$  положение ВПС описывается уравнением Гамильтона-Якоби, (2) при первом порядке асимптотического ряда скорость перемещения ВПС также зависит от ее кривизны, и (3) найдено время разрушения контрастной структуры. Настоящая работа обобщает результаты, полученные для двумерной задачи в [1], на трёхмерную задачу и на случай несбалансированной функции плотности источников, когда к скорости дрейфа ВПС за счёт дисбаланса добавляется дрейф кривизны. Наши результаты включают также градиентный дрейф ВПС. Мы используем метод дифференциальных неравенств Нефедова Н. Н. [2] для обоснования существования и единственности решения.

В отличие от стандартного подхода для сингулярно возмущённых задач, в работе вводится второй малый параметр  $\mu$ :  $\vec{V}(\vec{r}, \mu) = \vec{V}_0(\vec{r}) + \mu \vec{V}_1(\mu)$ ,  $\kappa(\vec{r}, \mu) = \kappa_0(\vec{r}) + \mu \kappa_1(\vec{r})$ ,  $f(u, \vec{r}, \mu) = f_0(u, \vec{r}) + \mu f_1(u, \vec{r})$ . Зависимость от  $\mu$  вводим так, чтобы при  $\mu = 0$  задача (1) имела известное решение типа КС, выражающееся явно через элементарные функции. Мы даём исчерпывающее описание дрейфа ВПС в слабо неоднородной среде. Найдена форма ВПС для случая увеличенной и уменьшенной скорости. Результаты могут быть использованы для исследования процесса горения в трехмерной среде, распространения примесей в многокомпонентных растворах и в пористых средах, динамика популяций в природных ландшафтах с пространственной неоднородностью.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Поверхностное натяжение контрастных структур / А. А. Быков, В. В. Воеводин, О. В. Козырева, В. Ю. Попов, Д. Д. Соколов // Докл. АН СССР. 1999. 364, № 3. С. 319–322.
- [2] Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение // Ж. вычисл. Матем. и матем. физ. (2021) 61, № 12, с. 2074–2094.

# Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений колебаний

Нестеров Андрей Владимирович

РЭУ им. Г.В. Плеханова, e-mail: andrenerov@yandex.ru

Строится асимптотическое разложение (АР) решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений в критическом случае [1]

$$\begin{cases} \varepsilon^6(u_{tt} - k_1^2 u_{xx}) = -p(au - bv) - \varepsilon^3 p(au - bv)_t + \varepsilon^2 f(u, v), \\ \varepsilon^3(v_{tt} - k_2^2 v_{xx}) = p(au - bv) + \varepsilon^3 p(au - bv)_t - \varepsilon^2 f(u, v), \\ |x| < \infty, t > 0 \end{cases}$$

с начальными условиями специального вида „узкая шапочка“

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x/\varepsilon^2), & u_t(x, 0) = \varphi(x/\varepsilon^2), \\ v(x, 0) = v^0(x/\varepsilon^2), & v_t(x, 0) = \psi(x/\varepsilon^2). \end{cases}$$

Здесь  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $p, q, a, b > 0$ ,  $p, q, a, b = const$ , функция  $f(u, v)$  достаточно гладкая в области определения  $\Omega = \{|u|, |v| \leq G, G > 0\}$ ,  $f(0, 0) = 0$ . Функции  $u^0(x), v^0(x), \varphi(x), \psi(x)$  достаточно гладкие,  $|u^0(x)|, |v^0(x)| < G$ ,

$u^0(x), v^0(x), \varphi(x), \psi(x)$  удовлетворяют условиям быстрого убывания по переменной  $x$ .

Главные члены АР имеют вид

$$\begin{pmatrix} u(x, t, \epsilon) \\ v(x, t, \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^I u(\varsigma_1, t) + S_0^{II} u(\varsigma_2, t) + \Pi_0 u(\xi, \tau) \\ S_0^I v(\varsigma_1, t) + S_0^{II} v(\varsigma_2, t) + \Pi_0 v(\xi, \tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix}$$

Здесь  $\varsigma_{1,2} = (x \pm kt)/\epsilon^2$ ,  $\xi = x/\epsilon^2$ ,  $\tau = t/\epsilon^3$ ,  $k$  выражается через  $k_1, k_2, p, q, a, b$ . Слагаемые  $S_i^J u(\varsigma_j, t)$ ,  $J = I, II, j = 1, 2$  есть решения задач Коши для обобщенного уравнения Кортевега - де Вриса

$$-S_0 u_t + K S_0 u_{\varsigma\varsigma\varsigma} - (h(S_0 u))_{\varsigma} = 0$$

с быстро убывающими начальными условиями,  $S_0^J v = a/b S_0^J u$ ,  $K, h(z)$  определяются через данные исходной задачи. Оценка остаточного члена в АР сделана по невязке. При оценке остаточного члена по невязке использовались результаты работы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSWW 2023-0004).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов — М. : Изд-во МГУ, 1978, —262 с.
- [2] Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Асимптотика решения уравнения Уизема при больших временах//Математическое моделирование.-1990.Т.2. №3. С.72

## Приближённое решение задачи оптимального управления с параметром с использованием прямой схемы

**Даник Юлия Эдуардовна, Дмитриев Михаил Геннадьевич**

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, e-mail:  
yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

В вариационных задачах, в том числе и в задачах оптимального управления с малым параметром асимптотические приближения можно строить на основе так называемой прямой схемы, которая сначала была широко продемонстрирована для непрерывных регулярно и сингулярно возмущенных задач [1]-[2], когда формальные асимптотические разложения, когда эти разложения непосредственно подставляются в условия вариационной задачи и они раскладываются формально в соответствующие ряды по малому параметру. Обработка последних разложений позволяет формировать последовательность вариационных задач для нахождения членов асимптотических приближений. Решение полученных задач в каждом приближении позволяет формировать так

называемые композитные управления разного порядка, образующие минимизирующие последовательности для соответствующих критериев качества.

В докладе на примере одной дискретной вариационной задачи иллюстрируется использование прямой схемы для построения композитного управления регулярно возмущенной задачи.

**Постановка задачи.** Рассматривается дискретная система с малым параметром  $\varepsilon$

$$x(t+1) = (A_0 + \varepsilon A_1(x(t)))x(t) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где  $x \in X$  — ограниченное замкнутое множество, траектории системы существуют и единственны для всех допустимых  $u$ . В качестве критерия качества используется квадратичный критерий:

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} (x(t)^\top Q(x, \varepsilon)x(t) + u(t)^\top R_0 u(t)) \rightarrow \min_{x_0, u_0}, \quad (2)$$

где  $N$  — горизонт планирования,  $Q(x, \varepsilon) = Q_0 + \varepsilon Q_1(x) + \dots > 0$ ,  $R_0 > 0$ . Метод прямой схемы А.Б. Васильевой предполагает прямое разложение решения в виде рядов по параметру  $\varepsilon$

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots, \quad u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots$$

Подстановка в систему и критерий приводит к иерархии задач для  $x_0, u_0, x_1, u_1, \dots$

В нулевом приближении для  $x_0, u_0$  получаем стандартную задачу LQR

$$x_0(t+1) = A_0 x_0(t) + B u_0(t), \quad x_0(0) = x^0, \quad J_0 = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N-1} (x_0^\top Q_0 x_0 + u_0^\top R_0 u_0), \quad (3)$$

В первом приближении для  $x_1, u_1$  получаем задачу

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= A_0 x_1(t) + B u_1(t) + A_1(x_0(t)) x_0(t), \\ x_1(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

с соответствующим линейно-квадратичным функционалом относительно  $x_1, u_1$ .

Итоговое композитное управление первого порядка для задачи (1)-(2) имеет вид  $u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t)$ , где  $u_0, u_1$  — решения задач (3), (4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions // Systems and Control Letters. — 1986. — Vol. 8. — North-Holland.
- [2] Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982–2004 гг. // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 1. — С. 3–53.

# О периодических решениях с пограничным слоем в задаче с нелинейным сингулярно возмущенным граничным условием

Никулин Егор Игоревич

МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Рассмотрим сингулярно возмущенное уравнение реакция-диффузия, для которого мы поставим следующую краевую задачу с периодическим условием по времени:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon u &:= \varepsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, t) &\in D_t := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : x \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}, \\ B_\Gamma u &:= -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(x, t, \varepsilon) - g(u, x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) &= u(x, t + T, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ , производная  $\frac{\partial}{\partial n}$  берется по внутренней нормали к достаточно гладкой границе  $\Gamma$  заданной двумерной односвязной области  $D$ , а  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

Особенностью данной задачи является наличие в краевом условии нелинейности  $g$ , а также малого параметра при производной по нормали. Такие граничные условия называются сингулярно возмущенными: пренебрежение малой производной искомого решения на границе области приводит к существенному изменению структуры решения в пограничном слое. В отличие от стандартного граничного условия без малого параметра, когда пограничный слой слабый (порядка  $\varepsilon$ ), в этом случае возникает пограничный слой порядка единицы; он имеет более сложную структуру, чем в случае граничных условий Дирихле.

Основным результатом данной работы является доказательство существования и исследование устойчивости периодических решений, обладающих пограничным слоем, у задачи реакция-диффузия с нелинейным сингулярно возмущенным граничным условием. Получены условия, при которых эти решения как решения начально-краевой задачи, соответствующей исходной задаче, асимптотически устойчивы по Ляпунову. Доказательство проводится на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pao C. V. Periodic solutions of parabolic systems with nonlinear boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — 234. — P. 695–716.

- [2] Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. Существование и устойчивость периодических решений с пограничным слоем в двумерной задаче реакция-диффузия в случае сингулярно возмущенных граничных условий второго рода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2020. — № 2. — С. 15–20.

## Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе тихоновского типа, возникающей в дрейфо-диффузионной модели полупроводника

Никулин Е.И.<sup>1</sup>, Карамышев А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

<sup>2</sup> МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: karamyshevav@my.msu.ru

В работе рассматривается система быстрого и медленного уравнений реакция-диффузия-адвекция с нелинейностями, содержащими градиент искомой функции:

$$\begin{cases} N_u(u, v) := \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon^2 A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} - g(u, v, x, \epsilon) = 0, & 0 < x < 1, \\ N_v(u, v) := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - B(v, x) \frac{\partial v}{\partial x} - f(u, v, x, \epsilon) = 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

где  $\epsilon > 0$  — малый параметр.

Пусть также для функции  $u(x)$  задан один из следующих вариантов граничных условий: условие Дирихле  $u(0) = u_0$ ,  $u(1) = u_1$  или условие Неймана  $\frac{\partial u}{\partial x}(0) = u_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(1) = u_1$ . Для функции  $v(x)$  задано условие Дирихле:  $v(0) = v_0$ ,  $v(1) = v_1$ .

Такая задача находит физическое применение в электронно-дырочной модели полупроводника и описывает распределение электронов и дырок в образце. В настоящей работе выполнено построение асимптотики, доказательство существования и исследование устойчивости решения задачи. Для доказательства теорем существования используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Показано, что такое решение как решение соответствующей начально-краевой задачи является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коцюбинский К. А., Левашова Н. Т. Стационарное решение двухкомпонентной системы реакция-диффузия с сингулярным источником быстрой компоненты на границе // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2025. — Т. 80, № 4. — С. 2540103.

- [2] *Нефедов Н. Н., Орлов А. О.* Существование и устойчивость стационарных решений с пограничными слоями в системе быстрого и медленного уравнений реакция-диффузия-адвекция с  $k\mu z$ -нелинейностями // Теоретическая и математическая физика. — 2024. — Т. 220, № 1. — С. 137–153.
- [3] *Nikulin E. I., Nefedov N. N., Orlov A. O.* Existence and asymptotic stability of solutions for periodic parabolic problems in tikhonov-type reaction–diffusion–advection systems with  $k\mu z$  nonlinearities // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2024. — Vol. 31, no. 3. — P. 504–516.

## Задача граничного управления для уравнения реакция-диффузия-адвекция с разрывными коэффициентами

Волков Владимир Тарасович, Ли Чжицян, Орлов Андрей  
Олегович, Сюн Чжусюань

МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: volkovvt@mail.ru, 2106340412@qq.com, orlov.andrey\_@physics.msu.ru, 3273187750@qq.com

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача для параболического уравнения типа реакция-диффузия-адвекция. Особенностью изучаемой модели является то, что коэффициенты уравнения имеют разрыв первого рода в некоторой, заранее заданной, периодически движущейся точке  $x_0(t)$ .

Асимптотическое приближение решения, состоящее из регулярной части и функций переходного слоя, строится методом пограничных функций А.Б. Васильевой. Доказательство существования решения проведено с помощью метода дифференциальных неравенств путем модификации полученного асимптотического приближения. В результате асимптотического анализа удастся получить явные аналитические формулы, связывающие входные данные задачи и параметры наблюдаемого периодического режима: условие гладкого сшивания производных асимптотического представления в точке  $x_0(t)$  приводит к ключевому алгебраическому соотношению, связывающему главный член асимптотики уровня переходного слоя  $p_0(t)$  с коэффициентами в уравнении и граничными условиями.

На основе полученного асимптотического приближения решения прямой задачи поставлена задача граничного управления. Если в прямой задаче указанное выше соотношение является уравнением для нахождения уровня перехода  $p_0(t)$ , то в задаче управления оно рассматривается как уравнение относительно неизвестного граничного условия  $u_{right}(t)$  при заданной функции  $p_0(t)$ . Построено асимптотическое решение задачи граничного управления, а именно, определено граничное условие на одной из границ области, обеспечивающее с заданной точностью реализацию целевого периодического закона для уровня локализации переходного слоя.

Полученные результаты могут быть использованы для управления состоянием нелинейных систем с внутренними слоями, где важно поддерживать определенное, периодически изменяющееся значение в области резкого изменения решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Булатов П. Е., Хань Чэн, Вэй Юйсюань, Волков В. Т., Левашова Н. Т. Задача граничного управления для уравнения реакция-адвекция-диффузия в случае модульного разрыва адвекции // ТМФ. 2024. Т. 220, № 1. С. 44–58.
- [2] Волков В. Т., Нефедов Н. Н. Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62, № 11. С. 1851–1860.

# Асимптотический анализ движения фронта в уравнении реакции-диффузии с нелинейной диффузией

**Махмудов Артем Русланович, Орлов Андрей Олегович**

МГУ, физический факультет, кафедра математики, e-mail: makhmudov.ar21@physics.msu.ru,  
orlov.andrey@physics.msu.ru

В работе исследуется динамика контрастной структуры типа «ступенька» (движущегося фронта) для сингулярно возмущенного параболического уравнения с нелинейной диффузией. Модели такого типа находят широкое применение в задачах популяционной динамики и нелинейной теории теплопроводности. Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( D(u, x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in (-1, 1), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Одним из этапов работы является построение асимптотического приближения решения и вывод закона движения фронта. Предполагается, что для всех  $x \in [-1, 1]$  вырожденное уравнение  $f(u, x, 0) = 0$  имеет два устойчивых  $\varphi^{(\pm)}(x)$  и один неустойчивый корень. В отличие от критического (сбалансированного) случая, изученного в [2], здесь рассматривается некритический

(несбалансированный) режим:

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, 0) D(u, \hat{x}, 0) du \neq 0, \quad x \in [-1, 1].$$

С помощью метода пограничных функций Васильевой А. Б. построена формальная асимптотика решения. Из условия гладкого сшивания асимптотических приближений по обе стороны от фронта в главном порядке выведено обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее динамику его положения в нулевом приближении. Главный член приближения скорости явно выражается через интегральную характеристику, зависящую от нелинейных функций реакции и диффузии. С использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств Нефедова Н. Н. доказана теорема существования и единственности решения и получена оценка точности построенного асимптотического приближения. Результаты работы позволяют аналитически описывать динамику контрастных структур и служат основой для разработки эффективных численно-асимптотических методов решения жестких параболических задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 25-71-10024).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Махмудов А. Р., Орлов А. О., Волков В. Т. Формирование фронта в задаче реакция–диффузия с нелинейной диффузией // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНТИ, М., (2025) **243**, С. 56–62.
- [2] Орлов А. О., Махмудов А. Р. Движение фронта в задаче реакция–диффузия в случае баланса реакции и диффузии // ТМФ (2025) **224**, № 1, с. 181–195.

# Использование асимптотического приближения решения краевой задачи для восстановления граничного условия

Вэй Юйсюань<sup>1</sup>, Чэн Хань<sup>2</sup>, Левашова Н. Т.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математики физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: 591056451@qq.com

<sup>2</sup> Кафедра математики физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: chenghan99999999@qq.com

<sup>3</sup> Кафедра математики физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: levashovant@physics.msu.ru

**Постановка прямой задачи (2)** Рассматривается начально-краевая задача для уравнения типа Бюргерса

$$\begin{cases} \varepsilon(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}) + \frac{\partial |u|}{\partial x} - K \cdot q(t) = 0, \\ (x, t) \in D := x \in (-1, 1); t \in \mathbb{R}, \\ u(-1, t; \varepsilon) = u_{\text{left}}(t), u(1, t; \varepsilon) = u_{\text{right}}(t), t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T; \varepsilon), x \in [-1, 1], t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), функции  $q(t)$ ,  $u_{\text{left}}(t)$  и  $u_{\text{right}}(t)$  достаточно гладкие и  $T$ -периодические,

$$u_{\text{left}}(t) < 0, u_{\text{right}}(t) > 0, t \in \mathbb{R};$$

$$K = k^{(-)}, u < 0;$$

$$K = k^{(+)}, u > 0, k^{(\mp)} = \text{constants}.$$

**Постановка обратной задачи** Задача граничного управления для формулируется в рамках условий теоремы существования решения прямой задачи [1] и заключается в определении одного из граничных условий (например, правого  $u_{\text{right}}(t)$ ), при котором фронт будет двигаться по заданному временно-му закону (второе граничное условие  $u_{\text{left}}(t)$  при этом считается известным).

Асимптотическим решением задачи граничного управления мы называем такое решение задачи определения граничного условия, при котором требуемый закон движения фронта реализуется с заданной точностью, т.е. получается как асимптотическое приближение по малому параметру к заданному [2].

**Цель.** Определить функцию  $h_0(t)$ , чтобы за время  $t = T$  получить заданное распределение функции  $f(x) = \int_0^T u^2(x, t) dt$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Обратная задача решается путем минимизации функционала

$$J[h_0(t)] = \int_{-1}^1 \left( \int_0^T U_0(x, t, h_0(t)) dt - \int_0^T u_{\text{num}} dt \right)^2 dx$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nefedov N., Recke L., Schneider K. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // J. of Math. Analysis and Appl. 2013. V. 405, № 1. P. 90–103.
- [2] Волков В. Т., Нефедов Н. Н. Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнений типа Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60, № 6. С. 975–984.
- [3] Lukyanenko D. V, Borzunov A. A, Shishlenin M. A. Solving coefficient inverse problems for nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of a reaction front // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. V. 99, P. 105824.

## Секция: "Нелинейная динамика: качественный анализ и управление".

### Связь понятий отбора для систем дифференциальных и разностных уравнений на стандартном симплексе

Капитанов Дмитрий Валерьевич, Фомичев Василий Владимирович

Факультет ВМК МГУ, кафедра НДСиПУ, e-mail: kapitnovdv@ugra.ru, fomichev@cs.msu.ru

Важный класс задач при построении математических моделей образуют системы дифференциальных уравнений, в которых фазовые переменные принимают лишь неотрицательные значения. Примеров можно привести множество, например, в биофизических процессах [1],[2] неотрицательными остаются количества особей различных видов, в экономических [3] – величины производств, капиталов, а также цены на продукцию. Аналогичная ситуация встречается при рассмотрении многих других моделей [4],[5]. Среди систем с неотрицательным решением можно выделить системы, для которых вектор состояний принимает значения из стандартного симплекса – подмножества конечномерного евклидова пространства, состоящего из векторов с неотрицательными координатами, сумма которых равна единице. Рассматривая системы на стандартном симплексе, зачастую исследуют предельные свойства их решений. В частности, весьма интересным является вопрос о том, стремится ли одна из компонент решения к единице при неограниченном продолжении процесса. Системы, обладающие такими свойствами, называют системами отбора. Системы отбора находят широкое применение при построении математических моделей различных процессов реального мира [4]. В [6] подробно изложена математическая теория отбора для систем дифференциальных уравнений. В связи с распространением разностных методов [7] при решении математических задач интересным является вопрос отбора в соответствующих системах разностных уравнений [8]. В [9] изложены основные результаты математической теории отбора для систем разностных уравнений. Однако банальный переход от непрерывного времени к дискретному может быть вовсе не безобидным, как может показаться на первый взгляд. Примеров тому множество – начиная с широко известного примера дискретного аналога модели Ферхюльста и заканчивая более сложными примерами репликаторных систем [10] (которые по сути являются системами на стандартном симплексе), в которых при различных значениях шага дискретизации наблюдаются процессы различной природы [10],[11]. Всё это говорит о том, что дискрет-

ные системы требуют аккуратного исследования и получения собственных критериев сохранения предельных свойств их решений. Поэтому, несмотря на сходство условий отбора и очевидную связь систем дифференциальных уравнений с соответствующими разностными аппроксимациями, остаётся открытым ряд вопросов: при каких условиях отбор в разностном случае повлечёт за собой отбор в соответствующей системе дифференциальных уравнений и наоборот; каковы достаточные условия на шаг дискретизации, гарантирующие сохранение свойства отбора; какую роль играют функции Ляпунова и принцип Ла–Салля в этой связке. Ответы на эти вопросы и будут освещены в докладе.

Будут сформулированы простые и в то же время содержательные условия, уточняющие связь между непрерывными и дискретными системами на стандартном симплексе. Кроме того, покажем, что если система дифференциальных уравнений является системой строгого отбора, то при достаточно малом шаге дискретизации аналогичное свойство сохраняется и для соответствующей разностной системы. Также будут сформулированы достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости вершины симплекса для разностной системы, которые не требуют сложных вычислений: достаточно, чтобы правая часть первого уравнения системы сохраняла строго положительный знак на всём симплексе.

Отдельно рассмотрим пример дискретной репликаторной системы, для которой покажем, что известные функции Ляпунова естественным образом подходят к дискретному случаю и обеспечивают глобальную асимптотическую устойчивость вершины симплекса.

Проведём анализ влияния шага дискретизации на устойчивость вершины симплекса. Покажем, что спектр линеаризованной (в окрестности вершины симплекса) системы позволяет явно оценить допустимый шаг, при котором не нарушается устойчивость и сохраняется свойство отбора. Таким образом, установим связь между спектральными характеристиками непрерывной системы и параметрами её дискретной аппроксимации.

Особое внимание уделим роли функций Ляпунова и принципа Ла–Салля. Покажем, что при наличии глобальной функции Ляпунова для исходной системы соответствующая разностная система также является системой отбора при малых значениях шага. Кроме того, введем понятие равномерной по времени сходимости дискретных траекторий: если при уменьшении шага приближение к вершине становится устойчивым во времени, то и непрерывная система будет являться системой отбора.

Полученные результаты позволяют сформулировать прозрачные критерии сохранения свойства отбора при переходе от дифференциальных уравнений к разностным, а также дают практические рекомендации по выбору шага дискретизации, обеспечивающего корректное воспроизведение динами-

ки. Таким образом, работа объединяет теоретический и прикладной аспекты задачи и служит шагом к построению единой математической теории отбора для непрерывных и дискретных систем на стандартном симплексе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – М.–Ижевск : ИКИ, 2003. – 184 с.
- [2] Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. – М.–Ижевск : ИКИ, 2005. – 216 с.
- [3] Иванилов Ю. П., Лотов А. В. Математические модели экономики. – М. : Физматлит, 2013. – 312 с.
- [4] Бuzин А. И., Поспелов И. Г. Системы уравнений с неотрицательными решениями. // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия 1. Математика. 2018. Т. 6, № 3. С. 45–59.
- [5] Buzin A. I., Pospelov I. G. On systems of differential equations preserving nonnegativity. // Differential Equations. 2020. Vol. 56, No. 4. Pp. 451–460.
- [6] Кузенков О. А., Рябова Е. А. Математическое моделирование процессов отбора. – Н. Новгород : ННГУ, 2007. – 152 с.
- [7] Agarwal R. P. Difference Equations and Inequalities. – Boca Raton : CRC Press, 2019. – 706 p.
- [8] Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. – New York : Springer, 2020. – 536 p.
- [9] Кузенков О. А., Капитанов Д. В. Системы разностных уравнений на единичном симплексе. // Математическое компьютерное моделирование. 2006. Т. 2. С. 39–50.
- [10] Falniowski F., Mertikopoulos P. On the discrete-time origins of the replicator dynamics. // Preprint, 2024 (в печати).
- [11] Palaiopanos G., Panageas I., Piliouras G. Multiplicative weights update with constant step-size: convergence, limit cycles and chaos. // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS). 2017. Pp. 1–12.

## Управление квадрокоптером на основе глубокого обучения с подкреплением

Цыбина О.А.<sup>1</sup>, Атамась Е.И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: [olya.tsybina82@yandex.ru](mailto:olya.tsybina82@yandex.ru)

<sup>2</sup> Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: [eatamas@cs.msu.ru](mailto:eatamas@cs.msu.ru)

Задачи автономного управления беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) в условиях скоростного маневрирования, такие как FPV-гонки, пред-

ставляют значительный интерес для исследований в области искусственного интеллекта и робототехники. Одним из наиболее перспективных подходов к решению таких задач является глубокое обучение с подкреплением (Reinforcement Learning, RL), позволяющее агенту самостоятельно вырабатывать эффективные стратегии поведения в сложной среде [1]. В данной работе исследуется применение алгоритма Proximal Policy Optimization (PPO) [2] для обучения квадрокоптера автономному пролету через серию ворот в симуляционной среде.

**Задача.** Целью работы является разработка и обучение модели управления, обеспечивающей стабильный пролет квадрокоптера через заданную последовательность ворот. Обучение проводится в симуляторе `gym-pybullet-drones` [3], использующем физический движок PyBullet. В качестве модели аппарата выбран виртуальный аналог квадрокоптера Crazyflie 2.0. Агент напрямую управляет тягой каждого из четырех двигателей, что исключает использование каскадных ПИД-регуляторов и требует от агента обучения низкоуровневой динамике.

**Метод.** В основе системы лежит алгоритм Proximal Policy Optimization (PPO). Агент состоит из двух нейронных сетей: Актера (Policy Network) и Критика (Value Network). Обе сети реализованы в виде трехслойных перцептронов с функцией активации ELU. Функция вознаграждения поощряет сокращение расстояния до целевых ворот, штрафует за резкие изменения управляющих сигналов, высокую угловую и линейную скорости. Для оценки преимущества действий агента используется подход на основе Монте-Карло оценки.

**Результаты.** Обучение проводилось на трассе с шестью воротами. В результате агент продемонстрировал способность к стабильному прохождению всей трассы. На графике зависимости средней награды от номера эпизода (рис. 1) наблюдается рост с последующей стабилизацией на высоком уровне после 30000 эпизодов. Статистика прохождения ворот показывает, что в 4% экспериментов агент успешно проходил все 6 ворот, а в 29% случаев — 5 ворот.

**Заключение.** Модель демонстрирует эффективность применения алгоритма PPO для задачи автономного управления квадрокоптером. Разработанная система вознаграждения и архитектура нейронной сети позволили агенту освоить базовые навыки навигации и стабильно проходить упрощенную гоночную трассу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kaufmann E., Bauersfeld L., Loquercio A. и др. Champion-level drone racing using deep reinforcement learning // *Nature*. – 2023. – Т. 620. – С. 105–111.
- [2] Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal policy optimization algorithms. – 2017.

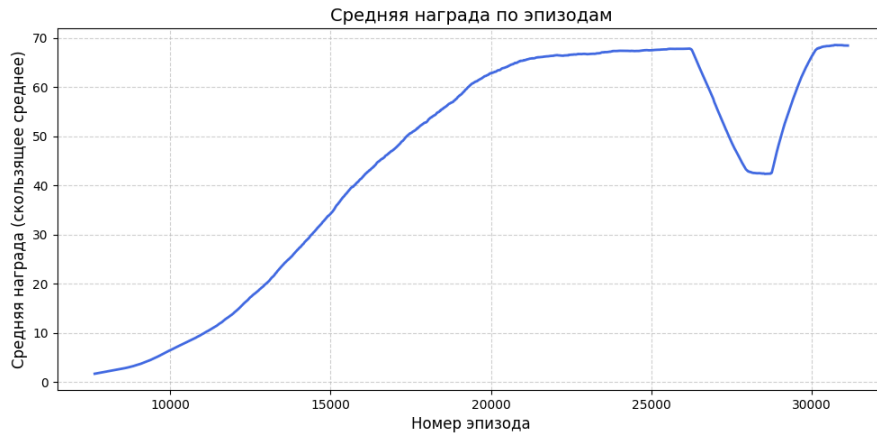


Рис. 1: Средняя награда по эпизодам.

- [3] Panerati J., Zheng H., Zhou S.Q. и др. Learning to Fly – a Gym Environment with PyBullet Physics for Reinforcement Learning of Multi-agent Quadcopter Control. – 2021.

## О некоторых условиях устойчивости замкнутой нелинейной аффинной системы

Крылов Павел Александрович

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: pavel@leftsystem.ru

Рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия в заданной выпуклой ограниченной области для нелинейной аффинной системы

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u, \quad g(0) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где  $g \in C^1(\bar{\Omega})$ , матрица Якоби  $\frac{\partial g}{\partial x}$  липшицева в  $\bar{\Omega}$  с константой  $L_g$ , вектор-функция  $p(x)$  — липшицева с константой  $L_p$  в  $\bar{\Omega}$  ( $\Omega$  — некоторый открытый выпуклый многогранник, содержащий точку  $x = 0$ ),  $u = u(x)$  принадлежит классу кусочно-линейных функций на  $\bar{\Omega}$ . В статьях [1], [2] был предложен подход к решению задачи на основе кусочно-линейной аппроксимации системы (1) вида

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F), \quad (2)$$

где  $F$  — некоторое множество разбиений  $\Omega$  на  $m$  выпуклых многогранников,  $\sigma = \sigma(x)$  — кусочно-постоянный переключающий сигнал, принимающий постоянное значение на каждом многограннике соответствующего разбиения. Стабилизирующей регулятор предлагается искать в виде переключаемой обратной связи  $u = -k_\sigma x + w_\sigma$ . Тогда

$$\dot{x} = g(x) - p(x)(k_\sigma x - w_\sigma), \quad x \in \Omega, \quad \sigma \in S(F), \quad (3)$$

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma k_\sigma)x + v_\sigma + b_\sigma w_\sigma, \quad \sigma \in S(F), \quad (4)$$

являются соответствующими замкнутыми системами. Обратим внимание, что замкнутая система (3) является переключаемой. Предлагаемый алгоритм поиска регулятора требует соблюдения равенства графов дискретных состояний систем (3) и (4). Далее графы дискретных состояний систем (3) и (4) будем обозначать  $G_{g,p}$  и  $G_{A,b}$  соответственно. В работе [3] было введено понятие состоятельной аппроксимации.

**Определение.** *Переключаемая система (4) является состоятельной аппроксимацией переключаемой системы (3), если найдётся переключающий сигнал  $\sigma_1 \in S(F)$  такой, что  $G_{A,b}(\sigma_1) = G_{g,p}(\sigma_1)$ .*

Ясно, что только устойчивости системы (4), при условии, что (4) является состоятельной аппроксимацией (3), недостаточно в общем случае для утверждения устойчивости нулевого положения равновесия системы (3) в  $\Omega$ .

**Теорема.** *Пусть для замкнутой переключаемым регулятором нелинейной аффинной системы (3) и её кусочно-линейной аппроксимации (4) выполнены следующие условия*

- нулевое решение системы (4) глобально асимптотически устойчиво
- система (4) является состоятельной аппроксимацией системы (3)
- граф дискретных состояний  $G_{A,b}(\sigma_1)$  не содержит циклов
- во всех угловых точках многогранника  $M_1$  выполнено неравенство

$$\|Px\| < \frac{1}{2} \frac{1}{L_g + \|k_1\|L_p},$$

где  $P$  — решение уравнения Ляпунова для матрицы  $(A_1 - b_1k_1)$

- $\forall i = \overline{2, m}$  матрица  $(A_i - b_ik_i)$  не вырождена
- $\forall i = \overline{2, m}$  точка  $(A_i - b_ik_i)^{-1}(-v_i - w_ib_i)$  не принадлежит  $\overline{M_i}$
- $\forall i = \overline{2, m}$  выполнены неравенства

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{n}_i, x - x_0^i \rangle - L_g \|(\overline{A_i}^T)^{-1} \tilde{n}_i\| \|x - x_i\|^2 > 0,$$

$$\frac{1}{2} \langle \tilde{n}_i, x - x_0^i \rangle - L_p \|(\overline{A_i}^T)^{-1} \tilde{n}_i\| \|x - x_i\| \|k_ix + w_i\| > 0,$$

Тогда нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво в  $\Omega$  при переключающем сигнале  $\sigma = \sigma_1$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-0053).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фурсов А. С., Крылов П. А. Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов // Дифференц. уравнения, 2023, Т. 59, N. 4, с. 554-562.

- [2] Фурсов А.С., Крылов П.А. О построении графа дискретных состояний переключаемой аффинной системы // Дифференц. уравнения, 2023, Т. 59, N. 11, с. 1541-1549.
- [3] Фурсов А.С., Крылов П.А. Достаточное условие состоятельности кусочно-линейной аппроксимации нелинейной аффинной системы // Дифференц. уравнения, 2025, Т. 61, N. 5,

## О задаче навигации в неопределенной среде с применением обучения с подкреплением

Бегишев Руслан Ренатович<sup>1</sup>, Ильин Александр Владимирович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: begrusso@gmail.com

<sup>2</sup> д.ф-м.н., кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: iline@cs.msu.ru

Навигация робота в неопределённой среде с препятствиями является одной из важных задач в робототехнике. Предложены методы как на основе классической алгоритмики, так и на основе искусственного интеллекта. В ИИ-направлении хорошо зарекомендовали себя методы, построенные на обучении с подкреплением [1][2], где используются показания датчиков лидар.

**Постановка задачи.** В определённой среде расположено некоторое количество препятствий круглой и квадратной формы, а также стартовая и целевая точки. В среде определён двухколёсный неголономный робот, динамика которого описывается уравнением:

$x_i, y_i$  – положение центра масс робота,  $\theta_i$  – угол поворота робота относительно заданной системы координат,  $i \in \overline{1, N}$ ,  $v_i$  – линейная скорость робота,  $w_i$  – поворотная скорость,  $|v_i| < v_{max}$ ,  $|w_i| < w_{max}$ :

$$\begin{cases} x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i \cos \theta_i(t) \\ y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + v_i \sin \theta_i(t) \\ \theta_i(t + \Delta t) = \theta_i(t) + w_i, \end{cases} \quad (1)$$

Дополнительно робот оснащён датчиком лидар с радиусом  $r$ .

Необходимо обеспечить прохождение робота от стартовой до целевой точки за минимальное время.

**Предложенное решение.** Для управления роботом было предложено использовать метод SAC (Soft Actor-Critic), поддерживающий обучение в средах с непрерывным пространством действий. Необходимо представить наблюдения среды, передающиеся агенту, в один вектор. Предложено представить наблюдения как вектор  $obs$  следующим образом:

$$obs = [[r_1, \dots, r_n], \cos(\theta_{goal}), \sin(\theta_{goal}), \cos(\Delta\theta), \sin(\Delta\theta), v_{last}, \omega_{last}, \Delta x, \Delta y]$$

Мы собираем наблюдения по последним 16 шагам среды, таким образом сохраняя временной контекст наблюдений.

Дополнительно предложено преобразовывать эти наблюдения с помощью экстрактора признаков, разделённого на две части: преобразования лидара и преобразования остальных скаляров. Архитектура экстрактора представлена на рисунке 1. При обработке показаний лидара используется несколько слоёв свёрток, после этого извлеченный вектор проходит через блок само-внимания, результаты которого преобразуются с помощью обычного линейного слоя. На вход подаются все 16 векторов наблюдений, преобразуемые экстрактором последовательно.

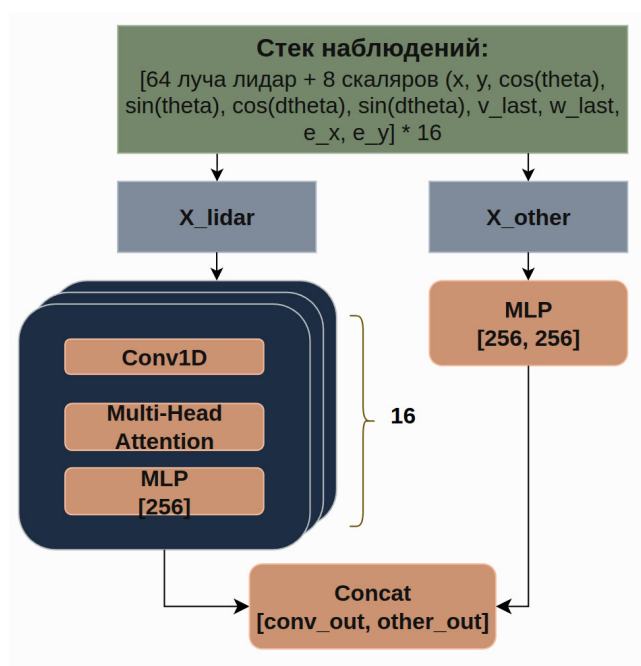


Рис. 1: Архитектура экстрактора наблюдений.

Таким образом модель получает возможность оценить текущее положение, основываясь также на нескольких предыдущих состояниях, что критически важно в сложных неизвестных средах.

**Результаты.** Проведено моделирование среды с препятствиями и роботом(1), с помощью которой была обучена модель на основе SAC с предложенным нами экстрактором наблюдений. В сравнении с решением из [2] получен больший процент успеха при прохождении одинаковых сред.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Liu Y. et al. A Soft Actor-Critic Deep Reinforcement-Learning-Based Robot Navigation Method Using LiDAR // Remote Sensing. – 2024. – Т. 16. – №. 12. – С. 2072.
- [2] Fahmy T. A., Shehata O. M., Maged S. A. Trajectory Aware Deep Reinforcement Learning Navigation Using Multichannel Cost Maps // Robotics. – 2024. – Т. 13. – №. 11. – С. 166.

## Секция: "Обратные задачи управления".

# Управляемые интегро – дифференциальные уравнения . Изучение свойств множеств ДОСТИЖИМОСТИ

**Никольский Михаил Сергеевич**

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, e-mail: mni@mi-ras.ru

Интегро - дифференциальные уравнения привлекают значительный интерес в связи с важными приложениями в различных областях знаний. Основы этого раздела математики были заложены В.Вольтерра в связи с новыми задачами математической биологии. Среди монографий, отчасти или полностью посвященных ИДУ, отметим монографии [1 - 3]. В монографиях [4, 5], в частности , рассматриваются задачи оптимального управления для управляемых объектов, описываемых ИДУ, и получен принцип максимума для них.

В настоящей работе рассматриваются линейные управляемые ИДУ. Для них изучаются свойства множеств достижимости . При широких предположениях обосновывается их компактность и выпуклость. Основным аппаратом для исследования были аппарат интегральных уравнений Вольтерра второго рода и результаты из выпуклого анализа, касающиеся вопросов интегрирования многозначных отображений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. 160 с.
- [2] Lakshmikantham V., Rao M. R. M. Theory of Integro-differential Equations. Gordon and Breach Science Publishers , 1995. 362 с.
- [3] Burton T. A. Volterra Integral and Differential Equations. Elsevier, 2005. 353 с.
- [4] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск : Наука и техника, 1974. 272 с.
- [5] Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. М. : Наука, 1992. 333 с.

# Об одной задаче синтеза нелинейной динамической системы с неполной информацией

Шатков Сергей Андреевич

Кафедра оптимального управления, e-mail: ShatkovSA@gmail.com

Для динамической системы, заданной нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка в  $R^k$ ,  $k \geq 2$ , рассмотрена задача перевода системы из произвольного допустимого состояния в окрестность точки, двигающейся по параметрически заданной дважды непрерывно дифференцируемой кривой. При этом ограничения на управление отсутствуют, вектор скорости предполагается неизмеряемым.

С помощью метода из работы [1] аналитическим способом построены функции управления, обеспечивающие асимптотическое сближение отображающей точки системы с целевой точкой в предположении, что вектор скорости наблюдаем. Затем с помощью другого метода [2] для рассмотренного вида системы построена модель асимптотического наблюдателя вектора скорости и его оценка. При выполнении оценок на систему и целевую траекторию доказаны асимптотическое стремление траектории к целевой точке и продолжимость решений полученной системы сконструированных функций управления.

Для проверки работы регулятора проведено моделирование управления движением космического аппарата, двигающегося в окрестности точки либрации  $L_1$  системы тел «Солнце—Земля». В качестве цели управления выбрана точка, двигающаяся по гало-орбите третьего порядка около данной точки [3]. При движении в окрестности орбиты максимальное значение модуля вектора управления составило  $3 \text{ нм/с}^2$ , а затраты характеристической скорости за год —  $70 \text{ м/с}$ , что сопоставимо с результатами в работе [4], где затраты на импульсные маневры составили  $10 \text{ м/с}$  за год. Затраты можно уменьшить, если в качестве цели выбрать точку, двигающуюся по гало-орбите пятого порядка [5]. Полученные законы управления тягой могут быть использованы при построении опорной траектории движения космическим аппаратом с двигателем «малой» тяги.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колесников А. А. Новые нелинейные методы управления полетом. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. 196 с.
- [2] Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019. 240 с.

- [3] Richardson D. L. Analytical construction of periodic orbits about the collinear points of the Sun—Earth system // *Celestial Mechanics*. 1980. V. 22. P. 241–253.
- [4] Farquhar R. W. The Flight of ISEE-3/ICE : Origins, Mission History, and a Legacy // *The Journal of the Astronautical Sciences*. 2001. V. 49(1). P. 23–73.
- [5] Fifth order solution of halo orbits via Lindstedt–Poincaré technique and differential correction method / Sheth D., Thomas V. O., Abouelmagd E. I., Srivastava V. K. // *New Astronomy*. 2021. V. 87. P. 1–25.

## Моделирование системы стабилизации мультикоптера в программном комплексе EULER

Бойков Владимир Георгиевич<sup>1</sup>, Потапова Валерия Вадимовна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: boykov@euler.ru

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: valeropotapova@mail.ru

В данной работе представлена методика моделирования системы стабилизации мультикоптера с произвольным количеством и расположением винтов и ее реализация в программном комплексе EULER/Эйлер [1].

Система стабилизации обеспечивает управление движением мультикоптера по шести фазовым координатам  $x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ . Она состоит из двух контуров — внешнего и внутреннего.

Внешний контур стабилизирует поступательные движения  $x, y$  в горизонтальной плоскости за счёт управления наклонами  $\varphi_x, \varphi_y$ . Внутренний контур стабилизирует движения по  $z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  за счёт изменения напряжений, подаваемых на электродвигатели винтов. Изменение подаваемого напряжения приводит к изменению скорости вращения винта и, как следствие, изменяются сила и момент, действующие на винт. Значения напряжений на электродвигателях представляют собой вектор параметров органов управления  $\delta$ , размерность которого равна числу винтов мультикоптера.

Для каждого параметра управления фазовыми координатами внутреннего контура  $u = (u_z, u_{\varphi_x}, u_{\varphi_y}, u_{\varphi_z})$  должен быть определён вектор значений  $D_u$  при единичном значении  $u$ . Объединив все векторы  $D_u$  в матрицу  $\mathbf{D}_u$ , можно записать следующее выражение для вычисления параметров органов управления при известных значениях параметров управления фазовыми координатами:

$$\delta = \mathbf{D}_u \cdot u. \quad (1)$$

Для определения требуемых ускорений фазовых координат  $a_u = (\ddot{x}, \ddot{\varphi}_x, \ddot{\varphi}_y, \ddot{\varphi}_z)$  используются пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы.

Используя физические соотношения линеаризованной модели движения мультикоптера и заданные векторы  $D_u$ , можно получить линейную систему уравнений для управляющих ускорений мультикоптера в осях, связанных с ним системой координат:

$$a_u = \mathbf{A}_u \cdot u. \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}_u$  — матрица изменения управляющих ускорений в зависимости от параметров управления фазовыми координатами.

Решив систему линейных уравнений (2), получаем значения требуемых параметров управления фазовыми координатами внутреннего контура. Подставив полученное значение вектора  $u$  в (1), получаем требуемое значение параметров органов управления  $\delta$ .

Значения требуемых параметров органов управления в виде сигналов передаются на соответствующие следящие приводы.

На рисунке 1 представлен внешний вид окна программного комплекса EULER при расчёте процесса стабилизации мультикоптера с шестью винтами.

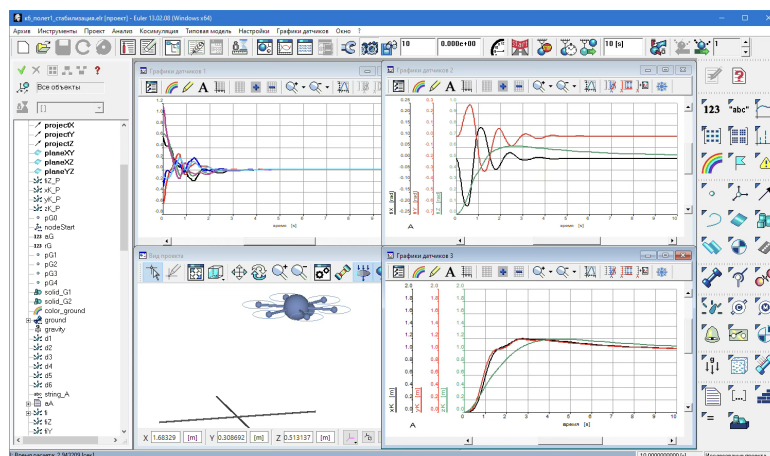


Рис. 1: Окно программного комплекса EULER.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бойков В. Г., Юдаков А. А. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Информационные технологии и вычислительные системы, 2011, № 1, с. 42-52

## К решению задач терминального управления для модели Лотки-Вольтерры

Хайлов Евгений Николаевич<sup>1</sup>, Григоренко Николай Леонтьевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: khailov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru

В докладе рассматривается нелинейная управляемая система дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие популяций здоровых и раковых клеток во время проведения антираковой терапии. В основе этой системы лежит модель конкуренции Лотки-Вольтерры [1]. В уравнения такой системы также добавлены слагаемые, которые содержат управляющую функцию, отражающую дозу лекарственного препарата или интенсивность терапии, нацеленную на уничтожение раковых клеток. Ставится задача терминального управления, заключающаяся в нахождении позиционного управления, которое переводит исходную систему из заданного начального положения в малую окрестность положения равновесия неуправляемой системы, отвечающего состоянию полного выздоровления пациента.

Для решения поставленной задачи управления используются методы аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [2]. В рамках АКАР задача терминального управления заключается в построении в пространстве состояний управлений (регуляторов), не имеющих ограничений, которые обеспечивают перевод траектории рассматриваемой системы из начального положения в окрестность положения, задаваемого целевыми многообразиями, и последующее асимптотическое удержание такой траектории в этой окрестности. В докладе демонстрируются различные способы построения требуемых регуляторов, обсуждаются их достоинства и недостатки. Приводятся результаты численных расчетов, выполненных в среде MAPLE. Делаются соответствующие выводы. Оптимальные управления, найденные для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений и представленные в [1], содержат участки релейного типа. Управления, полученные с помощью методов АКАР, являются гладкими функциями, что приветствуется в ряде приложений, описанных в [3].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хайлов Е.Н., Григоренко Н.Л., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д. Управляемые системы Лотки-Вольтерры в моделировании медико-биологических процессов. М. : МАКС Пресс, 2021. 202 с.
- [2] Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М. : Либроком, 2019. 240 с.
- [3] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.

# О линейном преобразовании множества

Кулевский Александр Владиславович

Кафедра оптимального управления, e-mail: kulevskyav@cs.msu.su

Рассматривается вопрос о свойстве дистрибутивности линейного преобразования множества (умножения матрицы на множество) относительно сложения матриц в конечномерном пространстве. Выражения, содержащие в различных комбинациях линейное преобразование множества и сложение матриц и множеств, активно применяются при решении дифференциальных игр и задач оптимального управления.

Известно, что для произвольных множества  $X \subset R^n$  и матриц  $A_{m \times n}, B_{m \times n}$  равенство  $(A + B)X = AX + BX$  (1) не имеет места, в общем случае справедливо лишь включение  $(A + B)X \subseteq AX + BX$ . При этом выполняется дистрибутивность умножения множества на число относительно сложения чисел  $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$  (2) для  $\alpha, \beta \geq 0$  и выпуклого  $X$ , которая может быть записана в матричной форме  $(\alpha E + \beta E)X = (\alpha E)X + (\beta E)X$ .

К сожалению, соотношение (2) не обобщается до условия (1), что видно из характерного примера, где в (1) лишь строгое включение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0, \quad X = S_1(\theta) \text{ выпуклое,}$$

$$S_3(\theta) = (A+B)X \subsetneq AX+BX = \left\{ x \in R^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1 \right\} + \left\{ x \in R^2 : x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} \leq 1 \right\}$$

Легко строятся из (2) формально удовлетворяющие (1), но не представляющие интереса тривиальные примеры: добавлением в множество фиктивных координат либо приписыванием к матрицам нулевых столбцов. По-видимому, для сколько-нибудь более широкого, чем вида  $\lambda E$ , класса матриц  $A, B$  и конечномерных множеств  $X$  условие (1) не выполняется.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кулевский А. В. Об одном свойстве геометрической разности множеств // Современная математика и концепции инновационного математического образования. — 2024. — Т. 11, № 1. — С. 76–80.

# О множестве управляемости одной системой второго порядка с мнимыми собственными значениями при наличии фазового ограничения

Гончарова Марина Николаевна<sup>1</sup>, Самсонов Сергей Петрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, e-mail: m.gonchar@grsu.by

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: samsonov@cs.msu.su

Рассматривается объект, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка, линейной относительно фазовых переменных и линейной относительно переменных управления. Собственные значения матрицы, составленной из коэффициентов при фазовых переменных, имеют мнимые собственные значения. Допустимым управлением является векторная кусочно-непрерывная функции, принимающая значения из заданной области управления. В качестве области управления рассматривается четырехугольник со сторонами, параллельными осям координат, и содержащий начало координат в качестве внутренней точки. На поведение объекта накладывается фазовое ограничение, определяемое полуплоскостью с границей, параллельной одной из осей координат. Исследуется проблема построения множества управляемости [1] рассматриваемого объекта в некоторую точку, удовлетворяющую фазовому ограничению, при условии, что длина интервала движения не сильно велика. В фазовом пространстве выделено множество конечных состояний, для которых фазовое ограничение не оказывает влияния на построение множества управляемости. При этом длина интервала движения вычисляется в зависимости от координат конечной точки. Построены уравнения линий, определяющих границу множества управляемости, в такую конечную точку, когда фазовое ограничение оказывает влияние на построение множества управляемости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения О свойствах  $k$ -значных функций // Вестник Эмского государственного университета. Серия 9. Математическая кибернетика. 2015. Т. 1, № 2. С. 33–47.

## Анализ множеств достижимости и оценивание стратегий управления в моделях DICE

Орлов Сергей Михайлович<sup>1</sup>, Ровенская Елена Александровна<sup>2</sup>,  
Бакланов Артём Павлович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления и IIASA, Laxenburg, Austria, e-mail: sergey.orlov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> IIASA, Laxenburg, Austria и Кафедра оптимального управления, e-mail: rovenska@iiasa.ac.at

<sup>3</sup> IIASA, Laxenburg, Austria, e-mail: baklanov@iiasa.ac.at

В докладе рассматривается подход к анализу сценариев климатической политики с точки зрения устойчивого развития (sustainability) на основе численного построения множеств достижимости в модифицированных версиях интегрированной модели DICE (Integrated Assessment Model). В отличие от традиционных оптимизационных постановок, где ищется стратегия, максимизирующая целевую функцию общественного благосостояния, здесь исследуется, как изменение ограничений и параметров модели — в частности, допустимого диапазона мер по сокращению выбросов и темпов декарбонизации — влияет на форму и взаимное расположение проекций множеств достижимости в пространстве агрегированных переменных.

В качестве модели используется версия DICE [1], которая учитывает уточнённые параметры углеродного цикла, энергетического баланса и климатических потерь, что обеспечивает согласование с целями Парижского соглашения. В пространстве переменных совокупного выпуска и приращения глобальной температуры строятся двумерные проекции множеств достижимости к 2100 году при различных ограничениях на снижение эмиссий и доступность технологий отрицательных выбросов.

Показано, что задержка мер по ограничению эмиссий приводит к сужению области достижимых состояний: например, при откладывании начала активного снижения эмиссий до 2060 года исчезает существенная часть проекции, соответствующая низким температурам и высоким значениям выпуска. Это сужение интерпретируется как потеря пространства возможностей будущих поколений и, следовательно, как утрата свойства устойчивого развития данным сценарием.

Для количественной оценки этой потери предложены две метрики: первая описывает относительную потерю площади исходного множества достижимости, не перекрытую новой областью; вторая — минимальное увеличение параметра максимального темпа декарбонизации, необходимое для компенсации потери достижимых состояний.

Предлагаемый подход позволяет визуализировать и количественно оценивать последствия различных сценариев климатической политики без введе-

ния предположений о функции общественного благосостояния, что делает его перспективным инструментом анализа sustainability в рамках интегрированных моделей климата и экономики.

Исследования поддержаны Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению № 075-15-2025-345.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Climate economics support for the UN climate targets / M. C. Hänsel, M. A. Drupp, D. J. A. Johansson, F. Nesje, C. Azar, M. C. Freeman, B. Groom, T. Sterner // Nature Climate Change. 2020. № 10. P 781–789.

# Оптимальные пропорции инвестиций в многофакторной модели экономического роста

Аввакумов Сергей Николаевич<sup>1</sup>, Орлов Михаил Владимирович<sup>2</sup>,  
Орлов Сергей Михайлович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: asn@cs.msu.su

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: orlov@cs.msu.su

<sup>3</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: sergey.orlov@cs.msu.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления на бесконечном горизонте планирования для многофакторной модели экономического роста с производственной функцией Кобба–Дугласа и различными коэффициентами амортизации производственных факторов. Целевой функционал представляет собой дисконтированное интегральное потребление, подлежащее максимизации.

Ранее значительное внимание уделялось задачам оптимального управления для моделей с двумя производственными факторами. В зависимости от конкретной постановки в них наблюдались различные типы поведения: стабилизация гамильтоновой системы в окрестности положения равновесия [1,2] либо возникновение особого режима, обеспечивающего пропорциональный рост факторов производства при достаточно малых значениях коэффициента дисконтирования [3–5]. В последних работах оптимальность таких особых режимов обосновывалась с помощью достаточных условий оптимальности [6].

В настоящем исследовании рассматривается случай различных коэффициентов амортизации производственных факторов — постановка, аналогичная рассмотренной в работе [7], но без экзогенных допущений. Этот случай существенно усложняет вывод аналитических выражений для особого режима.

Отличительной особенностью предложенного подхода является то, что пропорциональный рост факторов производства возникает эндогенно в многомерной задаче оптимального управления. Это расширяет как классические

результаты теории магистралей, так и более ранние исследования особых режимов в двумерных моделях. Существенным также является тот факт, что решение задачи получено в полностью аналитическом виде, а его оптимальность строго обоснована.

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект № 075-15-2025-345) МГУ имени М. В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тарасьев А. М., Усова А. А. Стабилизация гамильтоновой системы для построения оптимальных траекторий // Труды МИАН. 2012. Т. 277. С. 257–274.
- [2] Тарасьев А. М., Усова А. А. Анализ модели роста с производственной CES-функцией // МТИП. 2022. Т. 14, вып. 4. С. 96–114.
- [3] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В. Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба-Дугласа при различных коэффициентах амортизации // Дифференц. уравн. 2012. Т. 48. № 12. С. 1642–1657.
- [4] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование краевой задачи принципа максимума Понтрягина в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1812–1826.
- [5] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Оптимальные процессы в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности // Дифференц. уравн. 2017. Т. 53. № 2. С. 250–263.
- [6] Киселёв Ю. Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии. М. : МАКС-Пресс. 2003. С. 57–67.
- [7] Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Оптимальное управление для пропорционального экономического роста // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 115–133.
- [8] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука. 1961.

## Математические модели с управлением для описания лечения ракового заболевания

Лебедев Владимир Алексеевич<sup>1</sup>, Хайлов Евгений Николаевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: lva1098@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: khailov@cs.msu.su

В настоящем докладе проводится сравнение трех стратегий андрогенной терапии для лечения рака предстательной железы с использованием математического моделирования и последующим привлечением методов оптимизации. Основная задача заключается в сокращении популяции раковых клеток при сохранении популяции здоровых клеток выше некоторого критического уровня и учете побочных эффектов, возникающих при такой терапии. Привлекаемая из [1, 2, 3] математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие между популяциями здоровых эпителиальных клеток простаты, андроген-зависимых и кастрационно-резистентных раковых клеток, с одной стороны, и различными андрогенами (тестостерон, дигидротестостерон, PSA), с другой стороны. Воздействие андрогенной терапии на организм пациента моделируется с помощью управляющей функции, которая регулирует рост популяции раковых клеток.

В качестве сравниваемых стратегий андрогенной терапии выступают: альтернативная стратегия, опирающаяся на анализ устойчивых положений равновесия исходной системы дифференциальных уравнений; субоптимальная стратегия, связанная с решением задачи оптимального управления без фазового ограничения и, наконец, оптимальная стратегия, использующая решение задачи оптимального управления с фазовым ограничением. Численные расчеты, обеспечивающие сравнение этих стратегий, показали уменьшение популяции раковых клеток и снижение уровня PSA с одновременным поддержанием популяции здоровых клеток на требуемом уровне.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jain H.V., Clinton S.K., Bhinder A., Friedman A. Mathematical modeling of prostate cancer progression in response to androgen ablation therapy // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2011. Vol. 108, no. 49. P. 19701–19706.
- [2] Litzinger M.-C., Todorov Y., Föller-Nord M., Chaudhary M.K., Bratus A.S. On optimal therapy protocols in the mathematical model of prostate cancer progression // Adv. Syst. Sci. Appl. 2020. Vol. 4. P. 83–104.
- [3] Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф. Изучение биологически мотивированной математической модели предстательной железы // Евразийское Научное Объединение. 2021. № 6-1 (76). С. 6-21.

## О методе устойчивой аппроксимации $\Omega$ -нормального решения задачи квадратичной минимизации

Артемяева Людмила Анатольевна, Дряженков Андрей  
Александрович, Потапов Михаил Михайлович

Кафедра оптимального управления, e-mail: artemieva.luda@gmail.com, andrja@yandex.ru,  
mmpotapovrus@gmail.com

В работе рассматривается задача квадратичной минимизации

$$J(u) = \|Au - f\|_F^2 \rightarrow \min_{u \in U}, \quad U = \{u \in U_0 \mid Bu = g, \|Qu - w\|_W^2 \leq R^2\}, \quad (1)$$

где  $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $B \in \mathcal{L}(H \rightarrow G)$ ,  $Q \in \mathcal{L}(H \rightarrow W)$  — линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовых пространствах  $H$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $W$ , а  $f \in F$ ,  $g \in G$ ,  $w \in W$  — элементы соответствующих пространств,  $R > 0$ ,  $U_0 \subset H$  — выпуклое замкнутое множество. Требуется найти  $\Omega$ -нормальное решение  $u_*$  [1] задачи (1):

$$u_* = \arg \min_{u \in U_*} \Omega(u), \quad U_* = \operatorname{Arg} \min_{u \in U} J(u).$$

Предполагается, что вместо точных исходных данных известны лишь их приближения  $A_n \in \mathcal{L}(H \rightarrow F)$ ,  $B_n \in \mathcal{L}(H \rightarrow G)$ ,  $Q_n \in \mathcal{L}(H \rightarrow W)$ ,  $f_n \in F$ ,  $g_n \in G$ ,  $w_n \in W$ ,  $R_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причём информация об уровнях погрешностей, как и в [2], имеет неклассический вид. В работе предложена модификация экстраградиентного метода [2], рассчитанная на присутствие дополнительного критерия  $\Omega(u)$  и обеспечивающая сильную сходимость приближённых решений к искомому элементу  $u_*$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильев Ф. П. Методы оптимизации: В 2-х кн. М. : МЦНМО, 2011. 1053 с.
- [2] Артемяева Л. А., Дряженков А. А., Потапов М. М. Устойчивое решение неравномерно возмущённой задачи квадратичной минимизации экстраградиентным методом с отделённым от нуля шагом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 2. С. 7–22.

## О системе управления совпадением двух движущихся тел

Григоренко Николай Леонтьевич<sup>1</sup>, Горьков Валерий Павлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Лаборатория обратных задач, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru

Рассматривается дифференциальная игра двух игроков, управляющих нелинейными системами дифференциальных уравнений имеющих форму машины

Маркова с управляемыми параметрами [1]. Игра рассматривается с позиции первого игрока [2] в классе контруправлений [3]. Второй игрок использует ограниченные управления, измеримые по Лебегу функции. Целью первого игрока является сближение со вторым игроком. Рассматриваются различные формы сближения: сопровождение, мягкая встреча, жесткая встреча. Приведены достаточные условия существования управления первого игрока гарантирующего сближение со вторым игроком на заданное расстояние для заданной начальной позиции. Получена оценка сверху гарантированного времени окончания игры. В докладе поставленные задачи решаются методом „аналитического конструирования агеированных регуляторов“ [4]. Этот подход не связан с линеаризацией уравнений динамики и позволяет более полно учесть реальные свойства объекта управления. Рассмотрены следующие виды задачи совпадения: найти управление, которое сводит к нулю рассогласование как по положению тел, так и по их скорости (задача мягкой стыковки); найти управление, которое сводит к нулю только рассогласование по положению тел, в то время как скорость управляемого тела может быть любой (задача стыковки). Приводятся результаты численных расчетов управлений, траекторий первого и второго игроков, характеристик скорости и перегрузок первого игрока в процессе управляемого сближения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марков А. А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2. 1889. Т. 1, № 2. С. 250-276.
- [2] Понтрягин Л. С. Избранные труды./ Л.С.Понтрягин. М. МАКС Пресс.2004.-552 с.
- [3] Красовский Н. Н. Избранные научные труды / Н.Н.Красовский.- Екатеринбург: УрО РАН, 2024,-776 с.
- [4] Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного синтеза. М. Книжный дом „Либроком“ 2019, 240 с.

## Игра поставщиков на энергетическом рынке

**Пивоварчук Денис Геннадьевич<sup>1</sup>, Иванова Анна Евгеньевна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: pivovarchuk@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: a.e.ivanova@cs.msu.ru

В работе рассматривается модель энергетического рынка, который объединяет двух поставщиков носителей энергии. Для наглядности в качестве носителя энергии рассматривается природный газ. Поставщики планируют размеры своих поставок таким образом, чтобы максимизировать свою прибыль, что

приводит к игровой постановке задачи. Игровые модели разрешения конфликта между поставщиками газа на этапе планирования газопроводов рассматривались в [1, 2]. Данная работа является продолжением этих исследований и нацелена на рассмотрение случая, когда на рынке зафиксирован спрос на газ. Заданный спрос, ведёт к тому, что поставщики газа при выборе объёма своих поставок должны учитывать дополнительное ограничение на суммарный объем всех поставок на рынок.

По своей структуре предложенная модель укладывается в классическую структуру дуополии Курно [3], для случая, когда каждая из фирм имеет свою собственную функцию издержек, и, с другой стороны, расширяет её, так как отражает спрос на рынке не только в механизме формирования цены, но и непосредственно в ограничении на объем совокупных поставок на рынок.

Основная задача данной работы — описать множество всех точек равновесия по Нэшу [4, 5] для игровой модели энергетического рынка при верхнем суммарном ограничении на объёмы поставок. Решение задачи основано на исследовании свойств функций наилучших ответов поставщиков в случае наличия верхнего суммарного ограничения. В результате удаётся получить полную классификацию точек равновесия по Нэшу в аналитическом виде. Проводится анализ и интерпретация полученных результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Klaassen G., Kryazhimskii A., Tarasyev A. Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects // J. Optim. Theory Appl. 120 (2004), 147-179.
- [2] Brykalov S. A., Golovina O. N., Kryazhimskii A. V. Nash equilibrium in multi-player games with the choice of time instants and integral cost functionals // J. Mathem. Sci. 140 (2007), 796-806.
- [3] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория // М.: Прогресс, 1975.
- [4] Воробьев Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов // Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1974.
- [5] Оуэн Г. Теория игр // М.: Мир, 1977.
- [6] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // М.: Наука, 1985.

## Секция: "Системный анализ".

### Оценка загруженности помещения в задаче моделирования потоков людей

Зайцева Маргарита Владимировна

Кафедра системного анализа, e-mail: zaimarko@gmail.com

Работа посвящена задаче моделирования динамики потоков людей в помещении. В её основе лежит известная транспортная модель Cell Transmission Model [1].

Рассматриваемое помещение описывается с помощью ориентированного графа, вершины которого представляют комнаты (или части больших пространств), а рёбра — возможные переходы между ними. Подробное описание модели содержится в работе [2]. Данная модель позволяет по известным характеристикам комнат и переходов строить краткосрочные прогнозы на количество людей в каждой комнате через некоторые промежутки времени. Более того, если в начальный момент времени количество людей известно лишь приближённо, то можно строить такие прогнозы в виде множеств достижимости [3], описывающих все возможные состояния, в которых может находиться система. Алгоритму построения таких оценок посвящена работа [4].

Предположим, что некоторые переходы помещения допускают два режима работы: режим свободного движения и режим отсутствия движения. Таким управлением в реальной жизни могут выступать временные ограждения, которые часто используются в московском метро. Такие ограждения, с одной стороны, позволяют не допускать давки, а, с другой стороны, в случае небольшого числа людей в помещении, могут создавать помеху для быстрого передвижения каждого пассажира. Поэтому возникает задача управления системой переходов, которая позволяла бы гибко подстраиваться под текущую ситуацию. Здесь возможным решением могут выступать эвристические алгоритмы, учитывающие структурные особенности того или иного помещения.

В работе рассматривается пример помещения с одним управляемым переходом. Для того, чтобы получить теоретические оценки загруженности для данного помещения, необходимо исследовать решение динамической системы для случая свободного движения и закрытого прохода. Далее рассматривается управление с переключением в момент времени  $t_1$ . Для такой системы доказано следующее свойство, обосновывающее выбор субоптимальных стратегий управления.

**Утверждение 1.** Суммарное количество  $n_{out}(T) = n_{out}(T, t_1)$  людей, вышедших из помещения к моменту времени  $T$ , монотонно возрастает по  $t_1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Daganzo C.F. The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // Transp. Res.-B. 1994. V. 28B. N. 4. P. 269–287.
- [2] Зайцева М.В., Точилин П.А. Управление потоками людей в здании во время эвакуации // Вестник Московского университета. Серия 15. 2020. № 4. С. 3–17.
- [3] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Birkhäuser, 2014. 445 p.
- [4] Зайцева М.В., Точилин П.А. Методы построения оценок множеств достижимости в задаче моделирования потоков людей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 7. С. 164 – 177.

## Условия существования положения равновесия в модели рынка „спрос-предложение“

Арутюнов Арам Владимирович<sup>1</sup>, Журавлева Ксения  
Александровна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ИПУ РАН, e-mail:

<sup>2</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: kseniazhur@gmail.com

Основной целью современного общества является экономический рост, предполагающий увеличение производства и улучшение качества производимого продукта, а также увеличение потребительского спроса. Взаимоотношения продавца и потребителя регулируются рынком, который подчиняется определенным законам. Основным принципом рыночной экономики является закон спроса и предложения. Под предложением будем понимать общий объем произведенной продукции, который регулируется производителем. Под спросом будем понимать общий объем необходимого потребителям товара. Данный закон утверждает, что снижение цены на товар увеличивает спрос и уменьшает предложение. Ключевой проблемой является нахождение равновесия между спросом и предложением.

**Постановка задачи.** Пусть дано  $n$  товаров, причем  $i$ -ый товар имеет цену  $p_i > 0, p_i \in [c_{1i}, c_{2i}], 0 < c_{1i} < c_{2i}, i = \{1, n\}$ . Рассмотрим следующие отображения спроса и предложения соответственно:

$$D(p, p') = \tilde{A}p' + \tilde{B}p + \tilde{C},$$

$$S(p, p') = \hat{A}p' + \hat{B}p + \hat{C},$$

где  $\tilde{A}, \tilde{B}, \hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{C}, \hat{C} \in \mathbb{R}^n$ . Вектор цен  $p = p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t)) \in \mathbb{R}_+^n$  является вектором непрерывных функций, принимающих положительные значения при  $t > 0$ , где  $p_i(t)$  — цена на  $i$ -ый товар,  $i = \overline{1, n}$ , в момент времени  $t$ .

Дополнительные требования, которые накладываются на матрицы  $\tilde{A}, \tilde{B}, \hat{A}, \hat{B}$  связаны с их экономической интерпретацией. По закону рынка величина (объем) спроса уменьшается, а величина предложения товара на рынке увеличивается с ростом его цены. С математической точки зрения это означает, что отображение  $D$  является монотонно убывающим по переменной  $p$ , а отображение  $S$  должно быть монотонно возрастающим по переменной  $p$ .

**Определение 1.** Рыночное равновесие — ситуация на рынке, когда объём спроса на товар равен объёму предложения. Объём продукта и его цену в такой ситуации называют равновесными.

Равенство данных отображений можно записать следующим образом:

$$\tilde{A}p' + \tilde{B}p + \tilde{C} = \hat{A}p' + \hat{B}p + \hat{C} \Leftrightarrow (\tilde{A} - \hat{A})p' = (\hat{B} - \tilde{B})p + (\hat{C} - \tilde{C}).$$

Исследуя данное уравнение, были получены необходимые и достаточные условия неотрицательности решения линейной динамической экономической модели рынка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. Vol. 5. No. 1. P. 5–16.
- [2] Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
- [3] Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А. А. Равновесные цены в одной модели экономического равновесия. Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 3–22.
- [4] Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 2. С. 225–237.
- [5] Арутюнов А.В., Котюков А.М., Павлова Н.Г. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. 2021. Vol. 24. No. 4. P. 130–144.

# Об асимптотической устойчивости кривых Лоренца в модели государства всеобщего благосостояния

Парастаев Григорий Сергеевич

Кафедра системного анализа, e-mail: parastaew1996@yandex.ru

Данная работа является логическим продолжением исследования [1], в котором выведена модель эволюции кривой Лоренца, описывающей распределение дохода между экономическими агентами. В этой модели система передач Пигу-Дальтона порождает выбранное социальным государством стационарное распределение доходов. Модель представляет собой смешанную задачу для интегро-дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Численные эксперименты позволили выдвинуть гипотезу об асимптотической устойчивости стационарного решения основного уравнения смешанной задачи. Сформулирована и доказана теорема, устанавливающая асимптотическую устойчивость для широкого класса кривых Лоренца. Идея доказательства заключается в изучении спектра интегрального оператора, полученного путем линеаризации исходного интегро-дифференциального оператора. Можно показать возможность осуществления перехода к краевой задаче на собственные значения для линейной неавтономной системы ОДУ первого порядка, которая поддается аналитическому решению. В конечном итоге изучение спектра сводится к проблеме поиска нулей функции комплексной переменной, которая является интегралом с комплексным параметром. Для данной функции даются достаточные условия отсутствия нулей в правой полуплоскости  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ , что позволяет применить соответствующий результат об устойчивости решения дифференциального уравнения (см. [2, Гл. VII, § 2]).

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 24-11-00329).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Парастаев Г. С., Шананин А. А. Мажоризация по Лоренцу в модели Рамсея-Бьюли // Ломоносовские чтения. Научная конференция. 24 марта – 4 апреля 2025 г.: тезисы докладов. – Москва: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс, 2025. – С. 118–120.
- [2] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.

# Исследование корректности постановки краевой задачи для системы уравнений типа Риккати на основе концепции игр среднего поля

акад. РАН, проф., д.ф.-м.н. Шананин Александр Алексеевич<sup>1</sup>,  
Федоров Федор Алексеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: alexshan@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: phd02243186@gse.cs.msu.ru

Доклад берет начало с исследования, проведенного Лореллой Фатоне, Франческой Мариани, Марией Кристиной Рекчиони и Франческо Зирилли [1], посвященного моделированию поведения неквалифицированных трейдеров на рынке акций. Представленная в статье модель основана на концепции игр среднего поля и представляет собой систему из двух связанных уравнений в частных производных: уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка, для которого задаются начальные условия, и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, для которого задаются условия в конечный момент времени. Подробное описание подхода игр среднего поля приведено в лекциях Пьера-Луи Лионса, Жана-Мишеля Ласре и Оливера Гейнона [2]. Полученную систему можно численно решать. Один из подходов заключается в выборе оптимизируемого функционала определенного вида таким образом, чтобы при использовании метода множителей Лагранжа функция цены из уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана представляла собой сопряженные переменные, а условие в конечный момент времени являлось условием трансверсальности. Однако вопрос о существовании и единственности решения системы остается открытым.

В статье предполагается, что решение уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка может быть найдено в виде гауссианы, а функция цены уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана может быть представлена в полиномиальной форме. Это позволяет свести краевую задачу для уравнений в частных производных к многомерной краевой задаче для уравнений Риккати. Хотя полученную систему можно решать численно, вопрос существования и единственности решения остается неопределенным. В представленной работе исследовался этот вопрос. Было установлено, что данная краевая задача не порождается никакой вариационной формулировкой. С помощью методов анализа поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений и теории Пуанкаре-Бендиксона были получены следующие результаты: установлено условие существования решения системы, доказано, что в случае выполнения этого условия решение единственно, а также получены оценки на начальные данные, при которых краевая задача имеет решение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fatone L., Mariani F., Recchioni M., Zirilli F. A trading execution model based on mean field games and optimal control // Applied Mathematics, 2014, vol. 5, p. 3091–3116.
- [2] Guéant O., Lasry J.-M., Lions P.-L.: ParisPrinceton Lectures on Mathematical Finance 2010, chapter «Mean field games and applications», Shpringer, 2011. p. 205–266.

## Об алгоритме построения субоптимальной траектории в задаче целевого управления при наличии фазовых ограничений, за счёт использования двух случайных деревьев

Точилин Павел Александрович<sup>1</sup>, Паршиков Мирон Вячеславович<sup>2</sup>, Дэн Шумо<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: tochilin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: miron232734@gmail.com

<sup>3</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: shumodeng@yandex.ru

**Постановка задачи.** Для управляемого объекта, динамика которого в пространстве  $\mathbb{R}^n$  описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Az + Bu + f, \quad z \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad (1)$$

при заданных, не зависящих от  $t$  матрицах:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $f \in \mathbb{R}^n$ , рассмотрим задачу о переводе объекта из начального состояния  $z(0) = z_0 \in \Omega$  в некоторое компактное множество  $\mathcal{Z}_{goal} \subset \Omega$ , где  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  — компактное фазовое пространство. На управляющие параметры наложены жёсткие, точечные ограничения:  $u \in \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P)$ ,  $\mathcal{E}(p, P)$  — эллипсоид с центром  $p \in \mathbb{R}^m$  и матрицей конфигурации  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $P = P^T \geq 0$ .

Фазовый вектор представляется как  $z = (x; y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $n_1 \leq n$ ,  $n_2 = n - n_1$ . Движение объекта в фазовом пространстве ограничено по части переменных множествами  $\mathcal{M}_i \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $i = 1, \dots, M$ .

Требуется найти программное управление  $u(\cdot)$  и момент времени  $t_1 > 0$ :

$$z(t_1, 0, z_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{Z}_{goal}, \quad u(\tau) \in \mathcal{P}, \quad z(\tau) \in \Omega, \quad \forall \tau \in [0, t_1],$$

учитывая фазовые ограничения на  $z(\cdot)$  и отобрав те из них, для которых  $t_1$  принимает минимальное значение.

**Субоптимальное решение задачи.** Ранее авторами был представлен алгоритм [1], позволяющий находить субоптимальное решение данной задачи с помощью модификации алгоритма EllipsoidalKRRT\* [2], разработанного

для задачи с ограничениями по всем переменным фазового вектора. Оба алгоритма основываются на методе построения "случайных деревьев" [3] из начальной позиции для поиска пути в целевое множество и использовании эллипсоидального исчисления [4] для построения оптимальной траектории системы из одной вершины дерева в другую.

В данной работе предлагается использовать алгоритм [1] и его основные идеи — разделение переменных и уточнение значений для вершин дерева после построения оптимальной траектории,— добавив построение дерева, корнем которого является целевое множество: на очередной итерации случайная точка добавляется в одно из деревьев в зависимости от времени попадания в соответствующую эллипсоидальную трубку достижимости или разрешимости; при "пересвязывании" вершина из одного дерева может попасть в другое, что позволяет быстрее находить субоптимальное решение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Точилин П. А., Паршиков М. В. О построении субоптимальных траекторий для линейной управляемой системы при фазовых ограничениях по части переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2025. Т. 31, № 2. С. 244–261.
- [2] Точилин П. А., Паршиков М. В. Об использовании методов эллипсоидального оценивания в алгоритме поиска субоптимальных путей RRT\* // АиТ. 2024. № 2. С. 60–80.
- [3] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Birkhäuser, 2014.
- [4] Karaman S., Frazzoli E. Optimal kinodynamic motion planning using incremental sampling-based methods // Proc. of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. 2010. P. 7681–7687.

## Секция: "Математическая кибернетика".

### Гомеоморфные вложения полных троичных деревьев в прямоугольные решётки с асимптотически минимальной площадью

Ложкин Сергей Андреевич, Мо Ди

Кафедра математической кибернетики, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru, xdmodi1991@163.com

Рассматривается задача вложения полных  $n$ -ярусных двоичных и троичных деревьев в прямоугольные решётки (ПР), при которых образами вершин дерева являются так называемые основные вершины ПР, а образами его рёбер — так называемые транзитные цепи ПР, соединяющие соответствующие основные вершины. При этом транзитные цепи не могут иметь общих рёбер, а число проходящих через одну и ту же неосновную вершину различных транзитных цепей не превосходит заданной величины  $v$ ,  $v \in \{1, 2\}$ , называемой перегрузкой вложения, причём вложения с перегрузкой 1 считаются *гомеоморфными вложениями*.

Данная задача была рассмотрена в [1–3], где для оптимальной площади любого указанного вложения полного  $k$ -ярусного  $d$ -ичного, где  $d = 2, 3$ , дерева была получена асимптотически точная при  $k = 1, 2, \dots$  оценка порядка  $kd^k$ . При этом высота построенного вложения, то есть минимальный линейный размер используемой ПР, во всех рассматриваемых случаях за исключением случая, когда перегрузка равна 1, а листья располагаются на двух противоположных сторонах ПР, не больше, чем на константу, отличалась от минимально возможного значения высоты ПР, допускающих указанное вложение при произвольном расположении листьев как на границе, так и внутри ПР, равного  $\lceil (k+1)/(4-d) \rceil$ .

Для оставшегося случая в работе [4] рассматривается вопрос о получении асимптотически оптимальных двусторонних вложений полных  $k$ -ярусных двоичных деревьев в ПР. Там представлен алгоритм построения искомого вложения и получена асимптотически точная верхняя оценка оптимальной площади допускающей его ПР вида  $\frac{k}{3}2^k$ , причем высота указанной ПР асимптотически равна  $\frac{2}{3}k$ .

В настоящей работе аналогичный результат устанавливается для гомеоморфного вложения полного троичного дерева в ПР с расположением его листьев на её горизонтальных сторонах. Доказывается, что полное троичное  $k$ -ярусное дерево, где  $k = 1, 2, \dots$ , можно гомеоморфно вложить в ПР с расположением его листьев на её горизонтальных сторонах, длина и высота которой асимптотически равны  $\frac{1}{2}3^k$  и  $\frac{4}{3}k$  соответственно. Доказано, что

площадь любой ПР, допускающей указанное вложение, асимптотически не меньше, чем  $\frac{2}{3}k \cdot 3^k$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ложкин С. А., Ли Да Мин О некоторых оптимальных вложениях двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибер. 1995. № 4. С. 49–55.
- [2] Ли Да Мин Некоторые оптимальные вложения древовидных графов в плоские прямоугольные решетки. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. МГУ, 1994.
- [3] Ложкин С. А., Мо Ди Некоторые близкие к оптимальным вложения полных двоичных и троичных деревьев в прямоугольные решетки минимальной длины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибер. 2025. № 2. С. 30–37.
- [4] Высоцкий Л. И., Ложкин С. А. Оптимальные двусторонние вложения полных двоичных деревьев в прямоугольные решетки // Прикладная математика и информатика. № 59. М.: МАКС Пресс, 2018. С. 25–39.

## О сложности мультиплексорной функции в классе схем из функциональных элементов

Ложкин Сергей Андреевич<sup>1</sup>, Власов Никита Вадимович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической кибернетики, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru

<sup>2</sup> NVIDIA Corporation, e-mail: nikita.v.vlasov@gmail.com

Рассматривается задача оптимальной по сложности реализации мультиплексорной функции алгебры логики (ФАЛ) в классе схем из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе  $B_0 = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$  (см., например, [1, 2]).

Мультиплексорной ФАЛ (мультиплексором)  $\mu_n$  порядка  $n$  называется ФАЛ от  $n + 2^n$  булевых переменных (БП), где первые  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  называются «адресными», оставшиеся  $2^n$  переменных  $y_0, \dots, y_{2^n-1}$  — «информационными», а значение функции равно значению той её информационной БП, номер которой в двоичной системе счисления задаётся набором значений её адресных БП.

Сложность  $L(\Sigma)$  СФЭ  $\Sigma$  в базисе  $B_0$  определяется как число функциональных элементов (ФЭ) «&», « $\vee$ » и « $\neg$ » в ней. Сложностью ФАЛ или системы ФАЛ  $f$  в классе СФЭ в стандартном базисе называется величина  $L(f)$ , равная минимальной сложности СФЭ в базисе  $B_0$ , реализующих ФАЛ  $f$ .

Сложность мультиплексорной ФАЛ изучалась в ряде работ. Известно (см., например, [3]), что сложность реализации ФАЛ  $\mu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , как СФЭ, так

и формулами в стандартном базисе  $B_0$ , асимптотически равна  $2^{n+1}$ . В работе [4] получена нижняя оценка вида  $2^{n+1} + c_1 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - O(2^{\frac{n}{4}})$  и верхняя оценка вида  $2^{n+1} + c_2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - O(2^{\frac{n}{4}})$ , для сложности реализации мультиплексора порядка  $n$  в классе СФЭ над базисом  $B_0$ , где  $c_1 = \frac{1}{3}$ ,  $c_2 = 2$ , если  $n$  чётно, и  $c_1 = 0, 32$ ,  $c_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , если  $n$  нечётно. Кроме того, в [3] была установлена асимптотика сложности ФАЛ  $\mu_n$  в классе СФЭ в базисе  $\{x \& y, x \oplus y, \bar{x}\}$ , равная  $2^{n+1}$ .

Что касается сложности  $L(\mu_n)$ , то в работах [5, 6] для неё были получены нижняя оценка  $2^{n+1} + \sqrt{2^{n-1}} - O(n)$  и верхняя оценка  $2^{n+1} + c(n) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + O(n \cdot 2^{\frac{n}{4}})$ , где  $c(n) = 2$  при чётном  $n$  и  $c(n) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  при нечётном  $n$ .

В данной работе указанная нижняя оценка для сложности ФАЛ  $\mu_n$  уточняется следующим образом

$$L(\mu_n) \geq 2^{n+1} + 2^{\frac{n}{2}} - O(n).$$

Кроме того, доказываем, что сложность совместной реализации мультиплексора  $\mu_n$  и дешифратора порядка  $n$ , то есть системы из всех элементарных конъюнкций ранга  $n$  от  $n$  булевых переменных, асимптотически равна  $3 \cdot 2^n$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [2] Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004.
- [3] Коровин В. В. О сложности реализации универсальной функции схемами из функциональных элементов // Дискретная математика, 1995. 7. Вып. 2. С. 95–102.
- [4] Румянцев П. В. О сложности реализации мультиплексорной функции схемами из функциональных элементов. // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIV Международной конференции (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 2005. С. 133.
- [5] Власов Н. В. О сложности мультиплексорных функций в некоторых классах схем: Диссертация канд. физ.-мат. наук. М., МГУ им М. В. Ломоносова, 2013.
- [6] Власов Н. В. О сложности мультиплексорной функции в классе схем из функциональных элементов // Материалы XI международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 18–23 июня 2012 г.). 2012. С. 100–101.

# О сложности проверки равенства нулю полиномиальных форм с ограничениями на мономы в классе булевых функций

Бухман Антон Владимирович

Кафедра математической кибернетики, e-mail: antvbx@gmail.com

В данной статье рассматривается задание функций в виде обобщённых полиномов. Рассматривается задача проверки выполнимости обобщённого полинома. Неизвестно, есть ли для данной задачи полиномиальный алгоритм.

**Определение.** *Обобщённый полином – это константа 0 или сумма по модулю два обобщённых мономов. Обобщённый моном – это 1 или произведение различных переменных и их отрицаний.*

Для задач, у которых нет полиномиального алгоритма решения, перспективным направлением является сужение пространства входных данных. Применение такого подхода зачастую позволяет строить полиномиальные алгоритмы, применимые к данным, удовлетворяющим ограничениям. Например, можно наложить ограничения на структуру полинома, как это сделано в [1]. В данной заметке будет рассмотрено другое ограничение, чтобы его сформулировать введём следующее определение.

**Определение.** *Будем говорить, что множество конъюнкций от  $n$  переменных обладает свойством  $k$ -ограниченной совместимости, если для любых  $k+1$  различных конъюнкций из этого множество их пересечение пусто.*

Для обобщённых полиномов, мономы которых удовлетворяют свойству  $k$ -ограниченной совместимости, можно построить полиномиальный алгоритм проверки выполнимости (при условии, что  $k$  будет константой). Идея алгоритма состоит в том, чтобы проверить, что симметрическая разность множеств единиц, задаваемых мономами, была пустым множеством, то есть имела мощность 0. Для симметрической разности есть формула

$$\left| \bigoplus_{i=1}^l A_i \right| = \sum_{i=1}^l (-2)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq l} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}|$$

Благодаря свойству  $k$ -ограниченной совместимости не более, чем  $O(l^k)$  слагаемых будут ненулевыми.

**Теорема 1.** *Пусть  $k$  - натуральное число, существует полиномиальный алгоритм, который для любого обобщённого полинома, слагаемые которого обладают свойством  $k$ -ограниченной совместимости, с  $l$  слагаемыми от  $n$  переменных, определяет его выполнимость со сложностью  $O((nl)^k)$ .*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Csanky L. Perkowski M. A. Schaefer I. Canonical restricted mixed-polarity exclusive-OR sums of products and the efficient algorithm for their minimisation // IEEE Proceedings (Computers and Digital Techniques). — 1993. Т. 140, № 1. — с. 69–77.

## Алгоритм сжатия графа, сохраняющий возможность поиска путей

Шуплецов Михаил Сергеевич<sup>1</sup>, Есипова Дарья Владимировна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> кафедра математической кибернетики, e-mail: shupletsov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> кафедра математической кибернетики, e-mail: daria2002yes@gmail.com

Рассматривается задача сжатия неориентированного невзвешенного графа, представленного в виде списка смежности. Некоторые алгоритмы сжатия графов представлены в [1,2]. Будем рассчитывать сжатие с точки зрения уменьшения количества информации, требуемого для хранения JSON-файла представления графа. Формат JSON представляет собой текстовый формат обмена данными, основанный на структуре «ключ–значение» и списках. Граф задаётся в формате JSON, где ключами являются метки вершин, а значениями — списки их соседей.

Пусть задан неориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  — множество вершин,  $|V| = n$ , а  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$  — множество рёбер,  $|E| = m$ . Список смежности задаётся отображением:

$$A_G : V \rightarrow 2^V, \quad A_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}.$$

Пусть заданы процедуры:

$$C : G \mapsto S, \quad S = C(G),$$

где  $C$  — компрессор, строящий представление  $S$ , и

$$D : S \mapsto G, \quad D(S) = G,$$

где  $D$  — декодер, восстанавливающий исходный граф.

В данной работе представлен алгоритм сжатия графа, состоящий из компрессора и декодера, сохраняющий и ускоряющий операции проверки существования пути и нахождения конкретного пути между двумя вершинами на сжатом графе, уменьшающий размер JSON-файла представления графа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bannach M., Marwitz F. A., Tantau T. Faster graph algorithms through DAG compression // 41st International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2024). Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik, 2024.

- 
- [2] Arman N., Khamayseh F. A path-compression approach for improving shortest-path algorithms // International Journal of Electrical and Computer Engineering. 2015. Vol. 5, No. 4. P. 772–779.

## Секция: "Исследование операций".

### Накопители электроэнергии с лучшей инвестиционной доходностью

Васин Александр Алексеевич<sup>1</sup>, Абдулаев Саид Юсупович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: vasin@cs.msu.su

<sup>2</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: said\_v15@mail.ru

Для рынков электроэнергии характерны большие перепады цен между пиковыми периодами с большими объемами потребления и ночными периодами с низким потреблением. В этой ситуации полезную роль для потребителя может сыграть накопитель энергии: потребитель накапливает в нем энергию при низких ценах и использует ее при высоких ценах. Накопители могут также использоваться для получения прибыли от перепродажи энергии в указанном режиме.

Данная работа продолжает наши исследования доходности инвестиций в разные типы накопителей на разных рынках электроэнергии [1,2]. Рассматриваются небольшие накопители, работа каждого из которых не влияет на рыночные цены, и тип суточных тарифов на электроэнергию, соответствующий российскому рынку. Обычно оценка инвестиционной доходности основывается на расчете чистой приведенной стоимости (ЧПС или NPV) потока затрат и доходов, соответствующих данной инвестиции. При этом будущие платежи дисконтируются с учетом банковской процентной ставки для безрисковых вложений. Если найденная ЧПС положительна, то инвестиция считается выгодной, в противном случае – убыточной. В случае накопителей основная компонента затрат – единовременная стоимость покупки накопителя данного типа с определенными значениями мощности (скорости загрузки и разгрузки) и объема накопителя. На основе ранее полученных результатов указываются оптимальное значение объема накопителя и соответствующая прибыль в зависимости от параметров тарифа и накопителя. Для нескольких типов накопителей, применяемых в разных странах и обсуждаемых в литературе, определяются инвестиционные доходности. Указываются типы накопителей, представляющие интерес с точки зрения инвестиций в условиях российского рынка. Обсуждаются данные об использовании накопителей энергии разных типов в мировой экономике в последние годы и перспективы до 2030 года. В случае, когда цены на энергию и стоимости накопителей меняются в соответствии с банковской процентной ставкой и инвестиция приносит доход с учетом инфляции, оптимальная стратегия включает реинвестирование получаемой прибыли в увеличение мощности используемых накопителей.

Динамика NPV при этом описывается следующим уравнением:

$$NPV_{t+1} = NPV_t \times (1 - k + \frac{Pr(e)}{c(e)}), \quad (1)$$

где  $k$  – коэффициент износа оборудования,  $c(e)$  – стоимость накопителя с объемом  $e$ ,  $Pr(e)$  – максимальная суточная прибыль для накопителя с данным объемом. В работе [2] решается задача оптимизации темпа роста NPV и определяется оптимальный объем накопителя в зависимости от тарифного плана. На основе данных о накопителях различных типов [3] рассчитываются инвестиционные доходности и указываются типы накопителей, представляющие интерес с точки зрения инвестиций. Перспективные согласно нашим расчетам типы накопителей (PHS, CAES, SCES, TES) реально используются и имеют перспективы для дальнейшего внедрения на российском рынке. Накопители на основе технологии преобразования электроэнергии в водород (P2G) показали наилучшую динамику: темп роста ЧПС в 2023 году составил 0.0443% в день (приблизительно 16.2% в год), а к 2030 году – 0.1867% в день (примерно 68.1% в год).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vasin A., Grigoryeva O. Optimal strategies of consumers with energy storages in electricity market // Communications in Computer and Information Science, издательство Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2022. P. 300–312.
- [2] Васин А.А., Григорьева О.М., Серегина И.Ю. Оптимизация параметров накопителей для потребителей на рынке электроэнергии // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2023, № 1, С. 21–27.
- [3] Nadeem F., Suhail Hussain S.M., Kumar Tiwari P., Kumar Goswami A., Selim Ustun T. Comparative review of energy storage systems, their roles, and impacts on future power systems // IEEE Access 7, P. 4555–4585 (2018). DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2888497

## Предотвращение сходимости кусочного метода Левенберга–Марквардта к нестационарным точкам

Янь Чжибай

Кафедра исследования операций, e-mail: yanzhibai@cs.msu.ru

Современные версии метода Левенберга–Марквардта для уравнений с ограничениями обладают сильными свойствами локальной сверхлинейной сходимости, допускающими возможную неизоллированность решений и возможную негладкость уравнений [1]. Недавно был разработан соответствующий

глобальной сходящийся вариант алгоритма для кусочно-гладкого случая, основанный на одномерном поиске для квадрата невязки в евклидовой норме [2, 3]. Для этого алгоритма была показана глобальная сходимость к стационарным точкам для какого-то активного гладкого кусочного отображения, причем примеры показывают, что установить более сильные свойства глобальной сходимости для этого алгоритма без дальнейших его модификаций невозможно.

В данной работе разрабатывается такая модификация глобализованного кусочного метода Левенберга–Марквардта, позволяющая избегать нежелательных предельных точек, тем самым обеспечивая желаемое свойство В-стационарности предельных точек для задачи минимизации квадрата невязки исходного уравнения в евклидовой норме, на множестве, задаваемом ограничениями. Конструкция, идея которой основана на [4], состоит в идентификации гладких кусочных отображений, активных в потенциальных предельных точках, посредством использования подходящей оценки расстояния для активного гладкого кусочного отображения, используемого на текущей итерации, с последующим переключением, при необходимости, на более перспективное идентифицированное кусочное отображение.

Устанавливаются глобальная сходимость к В-стационарным точкам и асимптотическая сверхлинейная скорость сходимости, где последнее также основано на подходящей оценке расстояния, но в этом случае до решений исходного уравнения с ограничениями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fischer A., Izmailov A.F., Solodov M.V. The Levenberg-Marquardt method: An overview of modern convergence theories and more // Computational Optimization and Application. 2024. V. 89. P. 33–67.
- [2] Izmailov A. F., Uskov E. I., Yan Z. The piecewise Levenberg–Marquardt method // Advances in System Sciences and Applications. 2024. V. 24. P. 29–39.
- [3] Izmailov A. F., Uskov E. I., Yan Z. Globalization of convergence of the constrained piecewise Levenberg–Marquardt method // Optimization Methods and Software. 2025. V. 40. P. 243–265.
- [4] Fischer A., Herrich M., Izmailov A.F., Scheck W., Solodov M.V. A globally convergent LP-Newton method for piecewise smooth constrained equations: escaping nonstationary accumulation points // Computational Optimization and Application. 2018. V. 69. P. 325–349.

## Оптимальное потребление для риск-нейтрального инвестора

Морозов Владимир Викторович<sup>1</sup>, Ковяшев Роман Алексеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: vmorosov@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: koviashev@gmail.com

Предположим, что процесс стоимости рискового актива  $S(t)$  удовлетворяет уравнению  $dS(t) = S(t)(\alpha dt + \sigma z(t))$ , где  $\alpha$  — математическое ожидание доходности актива,  $\sigma > 0$  — волатильность, а  $z(t)$  — винеровский процесс,  $z(0) = 0$ . На рынке также имеется безрисковый актив с доходностью  $r > 0$ . Пусть  $w(t)$  — стоимость портфеля, состоящего из рискового и безрискового активов,  $\pi(t)$  — доля рискового актива, а  $c(t) \in [0, \bar{c}]$  — интенсивность потребления в момент  $t$ . Тогда процесс  $w(t)$  удовлетворяет уравнению

$$dw(t) = w(t)((\alpha - r)\pi(t) + r)dt - c(t)dt + \pi(t)w(t)\sigma dz(t), \quad w(0) = w.$$

Стратегия инвестора задается функциями потребления  $C(w)$  и инвестирования  $\Pi(w)$ . Она порождает процесс  $(\pi(t), c(t)) = (\Pi(w(t)), C(w(t)))$ , для которого определим момент разорения  $\tau$  как момент первого достижения процессом  $w(t)$  уровня  $\hat{w} > 0$ , когда инвестор уходит с рынка, получая сумму  $P > 0$  в виде компенсации. Инвестор решает задачу максимизации

$$J(w) = \max_{\pi(\cdot), c(\cdot)} E \left[ \int_0^{\tau} e^{-\beta t} c(t) dt + P e^{-\beta \tau} | w(0) = w \right], \quad (1)$$

где  $\beta$  — ставка дисконтирования, а максимизация осуществляется по всем процессам  $(\pi(t), c(t)) = (\Pi(w(t)), C(w(t)))$ . В [1] вместо  $c(t)$  использована  $U(c(t))$ , где  $U$  — строго вогнутая функция полезности.

Функция  $J(w)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\beta J(w) = \max_{0 \leq c \leq \bar{c}, \pi} [(\alpha - r)\pi w J'(w) + (rw - c)J'(w) + c + \frac{1}{2}\pi^2 \sigma^2 w^2 J''(w)], \quad (2)$$

где  $c = c(0)$ ,  $\pi = \pi(0)$ ,  $w = w(0)$ . Оптимальная стратегия имеет вид

$$\Pi(w) = -\frac{(\alpha - r)J'(w)}{\sigma^2 w J''(w)}, \quad C(w) = \bar{c} 1_{\{w > \bar{w}\}}, \quad w \geq \hat{w},$$

где  $1_M$  — индикатор множества  $M$ , а  $\bar{w}$  — корень уравнения  $J'(w) = 1$ .

В докладе будет представлено решение уравнения (2) в виде строго вогнутой дважды непрерывно дифференцируемой функции  $J(w)$ , совпадающей с ее первоначальным определением по формуле (1).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Karatzas I. et al. Explicit solution of a general consumption/investment problem // Math. Oper. Res. 1986. Vol. 11. No. 4. Pp. 261–294.

## Формирование рекламной сетки для производителей дополняющих товаров

Поспелова Ирина Игоревна<sup>1</sup>, Куренкова Дарья Александровна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций; научный руководитель, e-mail: ipospelova05@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: kurenkovadsh@gmail.com

**Введение.** Телевизионная реклама товаров является одним из ключевых инструментов массового охвата потенциальных потребителей. Для компаний, продвигающих *взаимодополняющие товары*, координация их рекламных стратегий способна усилить совокупный эффект при ограниченном эфирном ресурсе. Цель работы — построение математической модели совместного медиапланирования, обеспечивающей оптимальное распределение показов с учётом синергии рекламы дополняющих товаров.

**Математическая модель.** Модель опирается на подход теории игр, описывающий взаимодействие участников с взаимозависимыми интересами. В качестве исходной схемы рассматривается игра размещения агентов на отрезке [4], что позволяет анализировать согласование стратегий.

Рассматриваются две компании, размещающие рекламу во временной сетке телеканалов. Каждая распределяет бюджет  $S^{(m)}$ ,  $m = 1, 2$ , между медиасобытиями (показами рекламы)  $i = 1, \dots, N$ , стремясь максимизировать эффективный охват аудитории при заданных ограничениях.

Считая, что первая компания осуществляет первичный выбор слотов для размещения рекламы, получаем следующую задачу оптимизации:

$$\sum_{i=1}^N F_{\text{eff}}^{(1)}(k_i^{(1)}) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^N a_i k_i^{(1)} \leq S^{(1)}, \quad 0 \leq k_i^{(1)} \leq n_i.$$

Для второй компании добавляется учёт влияния размещений первой, что отражается во введении весовых коэффициентов  $w_i$ :

$$\sum_{i=1}^N w_i F_{\text{eff}}^{(2)}(k_i^{(2)}) \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^N a_i k_i^{(2)} \leq S^{(2)}, \quad 0 \leq k_i^{(2)} \leq n_i - k_i^{(1)}. \quad (1)$$

Здесь  $k_i^{(m)}$  — количество размещений  $m$ -й компании в  $i$ -м медиасобытии,  $F_{\text{eff}}^{(m)}$  — эффективный охват аудитории, зависящий от числа показов и рейтинга события, а  $a_i$  — стоимость одного размещения. Пусть первая компания заняла слоты  $X^{(1)} = \{x_\ell\}_{\ell=1}^m$ ,  $m \leq N$ . Тогда одно из простейших определений весовой зависимости имеет вид:

$$w_i = \frac{2}{1 + d_i}, \quad d_i = \min_{\substack{j \in [1, N], \\ x_j \notin X^{(1)}}} |x_i - x_j|.$$

С учётом структуры функции эффективного охвата [5] система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N w_i \sum_{\nu=\nu_{\text{eff}}^{(2)}}^{k_i^{(2)}} F_{\infty,i}^{(2)} C_{k_i^{(2)}}^{\nu} \left( \frac{R_i}{F_{\infty,i}^{(2)}} \right)^{\nu} \left( 1 - \frac{R_i}{F_{\infty,i}^{(2)}} \right)^{k_i^{(2)}-\nu} \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^N a_i k_i^{(2)} \leq S^{(2)}, \quad 0 \leq k_i^{(2)} \leq n_i - k_i^{(1)}. \end{cases} \quad (2)$$

Для анализа взаимодействия компаний рассматривались различные типы весовых функций  $w_i$ : гиперболические, треугольные, биквадратные, гауссовские и ядра Епанечникова [3].

**Полученные результаты.** Для решения задачи (2) были реализованы два численных подхода: метод динамического программирования [1] и метод проекции градиента [2]. Первый обеспечивает поиск оптимального распределения бюджета при дискретных ограничениях на основе рекуррентных соотношений Беллмана. Второй позволяет эффективно решать задачу при большом числе переменных, выполняя итерационное уточнение решения с проекцией на допустимое множество. Оба метода были апробированы на исторических данных базы PalomARS. Расчёты показали, что полученные решения согласуются между собой и обеспечивают сопоставимую точность. Метод динамического программирования при этом даёт несколько более высокий уровень эффективного охвата аудитории, тогда как метод проекции градиента позволяет ускорить вычисления без существенной потери качества результата. Таким образом, предложенная модель совместного медиапланирования обеспечивает согласованное распределение рекламных слотов и способствует увеличению совокупного охвата аудитории.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press, 1957.
- [2] Bertsekas D.P. *Nonlinear Programming*. 2nd ed. Belmont, MA: Athena Scientific, 1999.
- [3] Silverman B.W. *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. London: Chapman & Hall, 1986.
- [4] Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики*. М.: Мир, 1985.
- [5] Шматов Г. А. *Основы экономико-математической теории медиапланирования*. М.: ЛЕНАНД, 2021.

## Прогнозирование индекса таг на основе данных видео о походке

Белянкин Георгий Андреевич<sup>1</sup>, Забелло Мария Алексеевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: gbelyank@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: mariya.zabello@mail.ru

Заболевания опорно-двигательного аппарата и возрастные изменения являются основными факторами риска падений, что приводит к серьёзным травмам и инвалидности [1].

Целью данной работы является прогнозирование индекса TUG на основе видеоданных походки. Определяются отклонения движений и показатели, характеризующие нарушения координации и баланса. Результатом исследования стало решение задачи оптимизации, где целевая функция — предсказанное время выполнения теста TUG. Это позволяет определить такие комбинации биомеханических параметров, при которых время выполнения теста минимально, то есть походка наиболее эффективна.

Для формирования признаков использовалась нейросетевая архитектура, извлекающая 16 ключевых точек суставов из видеопотока [2]. После удаления тренда, связанного с изменением положения человека относительно камеры, были рассчитаны 63 биомеханических признака, описывающих длины конечностей, углы сочленений и другие кинематические характеристики движения.

Для анализа зависимости между биомеханическими параметрами и временем теста TUG была построена линейная модель методом наименьших квадратов (Ordinary Least Squares, OLS). Этот подход, являясь частным случаем обобщённой линейной модели, позволяет оценить влияние каждого признака при предположении линейной связи между переменными и нормальности ошибок.

Полученные коэффициенты регрессии позволяют количественно оценить вклад признаков в формирование итогового показателя. Знак коэффициента отражает направление влияния, а его абсолютное значение — степень вклада [4]. Таким образом, модель обеспечивает интерпретируемую связь между биомеханическими характеристиками и функциональной скоростью передвижения.

Анализ статистической значимости показал, что наибольшее влияние на время выполнения теста оказывают параметры, связанные с длиной шага, угловыми амплитудами движений таза и базой шага. Увеличение амплитуды подъёма голеностопа и скорости перемещения таза ассоциируется с улучшением устойчивости походки, тогда как избыточная длина шага и широкая база шага — с увеличением времени выполнения теста.

Таблица 1: Коэффициенты линейной модели OLS для прогноза времени теста TUG

| Признак                                 | Коэф.    | Std. err | t      | p     |
|-----------------------------------------|----------|----------|--------|-------|
| step/fps                                | 10.1273  | 0.472    | 21.474 | 0.000 |
| отклонение голеностопа по x             | 0.0738   | 0.026    | 2.797  | 0.005 |
| максимальное отклонение плеч по x       | -29.9832 | 5.702    | -5.258 | 0.000 |
| минимальное отклонение голеностопа по y | -1.0756  | 0.408    | -2.638 | 0.008 |
| амплитуда голеностопа                   | -2.8573  | 0.644    | -4.436 | 0.000 |
| максимальная скорость центра таза       | -2.2826  | 0.499    | -4.570 | 0.000 |
| минимальное ускорение голеностопа       | 2.1695   | 0.793    | 2.734  | 0.006 |
| минимальное ускорение центра таза       | -2.1235  | 0.791    | -2.686 | 0.007 |

Для повышения устойчивости и интерпретируемости модели был проведён отбор признаков на основе показателя мультиколлинеарности (VIF) и уровня статистической значимости (p-value) [3]. В итоговую модель включены только независимые и значимые предикторы, обеспечивающие оптимальное соотношение точности и простоты интерпретации.

Сравнение моделей показало, что линейная регрессия на основе OLS обеспечивает коэффициент детерминации  $R^2 = 0.40$ , указывающий на наличие выраженной линейной зависимости между биомеханическими параметрами и временем теста. Модель случайного леса показала более высокое значение  $R^2 = 0.63$ , что подтверждает её способность учитывать нелинейные взаимодействия между признаками.

Полученные результаты можно считать удовлетворительными: линейная модель обеспечивает прозрачную интерпретацию факторов, а методы машинного обучения — более высокую точность. Совместное использование этих подходов позволяет сочетать объяснимость и эффективность, что важно при анализе биомеханики походки и оценке функционального состояния пациента.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] The Identification of Elderly People with High Fall Risk Using Machine Learning Algorithms / Ziyang Lyu, Li Wang, Xing Gao, Yingnan Ma // Healthcare. 2023. P.11–13.
- [2] Cao Z., Simon T., Wei S.-E., Sheikh Y. OpenPose: Realtime Multi-Person 2D Pose Estimation using Part Affinity Fields // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2019. Vol. 43, No. 1. P.172–186.
- [3] Bishop Christopher M. Pattern Recognition and Machine Learning. / Springer, 2006.
- [4] Investigation of performance metrics in regression analysis and machine learning-based prediction models / Vagelis Plevris, German Solorzano,

Nikolaos P. Bakas, Mohamed El Amine Ben Seghier // The 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. 2022. P. 5–11.

## **Об эвристическом подходе к решению задачи о приёме и доставке грузов с временными ограничениями**

**Голембиовский Дмитрий Юрьевич, Царьков Никита Владимирович**

Кафедра исследования операций, ВМК, e-mail: [golemb@cs.msu.ru](mailto:golemb@cs.msu.ru), [tsarkov90@yandex.ru](mailto:tsarkov90@yandex.ru)

Одними из наиболее популярных в научной литературе транспортных задач являются задачи маршрутизации транспортных средств (Vehicle Routing Problem, VRP). Задачи VRP относятся к классу NP-сложных задач, а поэтому при их решении необходимо учитывать, что вычислительная сложность резко возрастает при увеличении размерности задачи.

Задачи о приёме и доставке грузов (Pickup and Delivery Problems, PDP) представляют собой подкласс задач маршрутизации, в которых необходимо распределить по машинам набор запросов, каждый из которых заключается в доставке груза из пункта приёма в пункт доставки. Цель задачи заключается в построении маршрутов для машин (или курьеров), при этом каждый запрос должен быть выполнен только одной машиной, при этом суммарные расходы должны быть минимальными.

В данном докладе рассматривается задача о приёме и доставке грузов с временными ограничениями (Pickup and Delivery Problem with Time Windows, PDPTW) и предлагается эвристический подход к её решению с использованием модификации локального поиска – адаптивного поиска в больших окрестностях (Adaptive Large Neighbourhood Search, ALNS), заключающего в применении некоторых операторов разрушения и восстановления решения. Алгоритм модифицирован быстрыми жадными и сожалеющими вставками, что позволяет ускорить поиск решения. Предлагаемый подход демонстрирует хороший баланс между точностью решений и временем вычислений, и позволяет легко адаптироваться под различные стохастические или динамические расширения задачи PDPTW. Эффективность метода подтверждена на тестовых наборах Li & Lim и Sartori.

**Описание ALNS** Адаптивный поиск в больших окрестностях достаточно хорошо зарекомендовал себя в статьях в качестве способа решения транспортных задач VRP [6].

В ALNS на каждой итерации к выполнимому решению последовательно применяются две операции упростить до двух видов:

- Разрушение решения (Destroy), т.е. удаление запросов из некоторых маршрутов
- Восстановление решения (Repair), т.е. вставка удаленных запросов в новые позиции в маршрутах

И тогда, в рамках ALNS, окрестностью текущего решения будет считаться множество решений, которые могут быть получены путём применения пары операторов разрушения и восстановления к исходному решению, и эта окрестность задаётся множеством подокрестностей решений, порожденных всеми возможными комбинациями операторов разрушения и восстановления (декартово произведение).

Кроме того, ALNS включает в себя механизм адаптивного выбора операторов, что добавляет в алгоритм некий элемент обучающей стратегии — результаты применения операторов на предыдущих операторах влияют на вероятность их выбора в будущем, то есть алгоритм не просто последовательно или случайным образом выбирает определенные операторы разрушения или восстановления, он во время поиска подстраивается под определённый пример задачи, выбирая ту пару операторов разрушения и восстановления, которые быстрее всего стремятся к экстремуму.

В совокупности все это позволяет эффективно «перескакивать» через локальные экстремумы и значительно расширить область поиска по сравнению с обычным локальным поиском.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Царьков Н. В., Голембиовский Д. Ю. (2025). Обзор методов решения задачи о приёме и доставке с временными ограничениями. Часть I: точный подход. *International Journal of Open Information Technologies*. Том 13, № 7.
- [2] Toth, P., Vigo, D. (2002). An Overview of Vehicle Routing Problems. *The Vehicle Routing Problem*, 1–26.
- [3] Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*, 35(2), 254–265.
- [4] Lau, H. C. W., Liang, Z. (2002). Pickup and delivery problem with time windows using a hybrid genetic algorithm. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 17(3), 1470–1475.
- [5] Pisinger, D., Ropke, S. (2007). A general heuristic for vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, 34(8), 2403–2435.
- [6] Ropke, S., Pisinger, D. (2006). An Adaptive Large Neighborhood Search Heuristic for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows. *Transportation Science*, 40(4), 455–472.
- [7] Li, H., Lim, A. (2003). A metaheuristic for the pickup and delivery problem with time windows. *Proceedings of the 13th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, 160–167.
- [8] Nanry, W. P., Barnes, J. W. (2000). Solving the pickup and delivery problem with time windows using reactive tabu search. *Transportation Research Part B: Methodological*, 34(2), 107–121.
- [9] Montemanni, R., Gambardella, L. M., Rizzoli, A. E., Donati, A. V. (2005). Ant colony system for a dynamic vehicle routing problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, 10(4), 327–343.
- [10] Harbaoui, M. H., Kammarti, R. (2010). Multi-objective optimization of the dynamic pickup and delivery problem with time windows using a genetic algorithm.
- [11] Semet, F., Taillard, E. (1993). Solving real-life vehicle routing problems efficiently using tabu search. *Annals of Operations Research*, 41(4), 469–488.
- [12] Laporte, G. (2009). Fifty Years of Vehicle Routing. *Transportation Science*, 43(4), 408–416.
- [13] Mancini, S. (2016). A real-life multi depot multi period vehicle routing problem with a heterogeneous fleet: Formulation and adaptive large neighborhood search based methaeuristic. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 70, 100–112.

- [14] Cordeau, J.-F., Maischberger, M. (2012). A parallel iterated tabu search heuristic for vehicle routing problems. *Computers & Operations Research*, 39(9), 2033–2050.
- [15] Shaw, P. (1998). Using constraint programming and local search methods to solve vehicle routing problems. *International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, 417–431.
- [16] Li, H., Lim, A. (2001). A metaheuristic for the pickup and delivery problem with time windows. *International Journal of Artificial Intelligence Tools*, 12(2), 160–170.
- [17] Fang, Y., Lin, X., Luo, J. (2024). Learning-based heuristics for pickup and delivery with time windows. Under Review.
- [18] Rabecq, C., Chevrier, V. (2022). A deep learning architecture based on attention mechanisms for dynamic pickup and delivery problems.
- [19] Ropke, S. Cordeau, J.-F. (2007). Models and branch-and-cut algorithms for pickup and delivery problems with time windows. *Networks*, 49(4), 258–272.
- [20] Набор данных Li & Lim Benchmark. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.sintef.no/projectweb/top/pdptw/li-lim-benchmark/> (дата обращения: 01.02.2025)
- [21] Sartori, C.S., Buriol, L.S. (2020). Instances for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows based on open data. *Mendeley Data*, V2. [Электронный ресурс]. URL: <https://data.mendeley.com/datasets/wr2ct4r22f/2> (дата обращения 01.02.2025)

## Онлайн-распределение задач для сельскохозяйственной техники при ограничении на топливо как задача «бандита с рюкзаком» (Bandits with Knapsacks, BwK)

Мамедов Руслан Саярович

МГУ им. М. В. Ломоносова, Высшая школа управления и инноваций, 4 курс, e-mail:  
777rambler00@mail.ru

**Постановка задачи.** Рассматривается онлайн-задача управления парком сельскохозяйственной техники при ограниченных ресурсах, прежде всего топливе и моторесурсе. В каждом раунде необходимо назначить технике одну из возможных работ. При выполнении задачи агрегат приносит некоторую выработку (например, обработанную площадь) и расходует топливо. Однако точные показатели выработки и затрат для разных вариантов заранее

неизвестны и наблюдаются только в процессе работы. Требуется разработать стратегию распределения задач, максимизирующую общую выработку техники в долгосрочном периоде, не допуская исчерпания ограниченного запаса топлива.

**Модель Bandits with Knapsacks.** Указанную проблему можно формализовать как задачу многорукого бандита с рюкзаком (Bandits with Knapsacks, BwK) [2]. В этой модели каждое действие  $a$  при выборе даёт случайный выигрыш (награду  $X_a$ ) и требует расхода определённого ресурса (стоимость  $C_a$ ). Накопленный расход не должен превышать заданный бюджет  $B$ . Цель агента — максимизировать суммарную награду за горизонт  $T$ , не превысив бюджет по ресурсу. В рассматриваемом случае награда соответствует выработке сельхозтехники, а стоимость — расходу топлива. Задача осложняется тем, что распределения  $X_a$  и  $C_a$  не известны заранее. В отличие от классического многорукого бандита [1,4], в модели BwK оптимальная стратегия не сводится к выбору одного лучшего действия: необходимо искать компромисс между величиной выигрыша и «ценой» его получения [2].

**Алгоритм UCB-R.** Для решения задачи предлагаем модификацию алгоритма Upper Confidence Bound (UCB) [1] с учётом расходуемого ресурса — условно назовём её UCB-R. Алгоритм поддерживает оценки  $\hat{\mu}_a(t)$  и  $\hat{c}_a(t)$  для среднего выигрыша и средних затрат топлива для каждого действия  $a$  на шаге  $t$ , а также использует параметр  $\lambda > 0$ , интерпретируемый как «теневая цена» единицы ресурса. На каждом шаге выбирается действие  $a_t = \arg \max_a I_a(t)$ , максимизирующее индекс:

$$I_a(t) = \hat{\mu}_a(t) + \sqrt{\frac{2 \ln t}{n_a(t)}} - \lambda \hat{c}_a(t).$$

Здесь  $n_a(t)$  — число выборов действия  $a$  к моменту  $t$ . Таким образом, алгоритм оценивает для каждого действия разность ожидаемой выработки и приведённых затрат  $\lambda \hat{c}_a(t)$ , добавляя бонус для недоисследованных действий (первый член — оптимистичная оценка по UCB). Параметр  $\lambda$  можно подобрать заранее или обновлять на основе оставшегося топлива — интуитивно он отражает предельную ценность ресурса. Алгоритм UCB-R относится к классу оптимистичных стратегий: при достаточно большом  $T$  он сужает оценки  $\hat{\mu}_a, \hat{c}_a$  к истинным средним и выбирает близкое к оптимальному с точки зрения награды решение с учётом бюджета.

**Выводы.** Предложена постановка задачи онлайн-распределения работ агротехники с ограниченными ресурсами в виде BwK. Это позволило применить эффективный алгоритм по принципу UCB, дополняемый компонентой учёта расхода топлива. Данный подход обеспечивает высокую суммарную продуктивность при соблюдении ресурсного ограничения и обладает теоретическими гарантиями по регрету. В будущем планируется учесть дополни-

тельный контекст (например, разнородность полей, условий) и рассмотреть многокритериальные варианты (с несколькими видами ресурсов либо целевых метрик).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Auer P., Cesa-Bianchi N., Fischer P. Finite-time analysis of the multiarmed bandit problem // Machine Learning. 2002. Vol. 47, No. 2–3. P. 235–256.
- [2] Badanidiyuru A., Kleinberg R., Slivkins A. Bandits with knapsacks // Proc. 54th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS). 2013. P. 207–216.
- [3] Agrawal S., Devanur N.R. Bandits with concave rewards and convex knapsacks // Proc. 15th ACM Conf. on Economics and Computation (EC). 2014.
- [4] Bubeck S., Cesa-Bianchi N. Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems // Foundations and Trends in Machine Learning. 2012. Vol. 5, No. 1. P. 1–122.

## Секция: "Системное программирование и информационные технологии".

Подсекция кафедр суперкомпьютеров и квантовой информатики и автоматизации систем вычислительных комплексов

### О классификации трёхмерных изображений с помощью графовых нейросетей

Сайбель Тимофей Александрович<sup>1</sup>, Никольский Илья Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: saibeltimofei@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: nikolsky@cs.msu.ru

В 1987 году нейробиолог Ирвинг Бидерман предложил теорию распознавания по компонентам [1], в которой утверждалось, что человек распознаёт объекты, раскладывая их на элементарные геометрические формы, которые Бидерман назвал геонами. Таких геонов было выделено более 20, в их числе цилиндр, конус, параллелепипед и другие.

Данная теория стала достаточно популярной, её принципы используются в некоторых алгоритмах компьютерного зрения. Так, например, в [2] для описания трёхмерной сцены используется разложение её в совокупность примитивов из множества [призма, цилиндр, конус, эллипсоид, пирамида, тор], объединённых отношениями взаимного расположения ("над", "под" и др.). Распознавание сцены в указанной работе выполняется с помощью свёрточной нейросети YOLACT.

В предлагаемой работе рассматривается задача распознавания объектов из коллекции ShapeNet. Объекты представляются в виде топологического графа геометрических примитивов из следующего набора: [плоскость, цилиндр, сфера, конус, тор]. Примитивы выделяются из облака точек с помощью алгоритма RANSAC [3].

В работе проводится сравнительный анализ эффективности графовых нейросетей при распознавании объектов по их топологическим графам. Рассматриваются следующие GConv-слои: GCNConv, GraphConv, GATConv, GINConv и GraphSAGE. С помощью методики AdaptiveGNN с контроллером на базе LSTM было подобрана наиболее эффективное сочетание слоёв, позволившее достичь точности более 90% на некоторых категориях объектов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Biederman I. Recognition-by-components: A theory of human image understanding // Psychological Review, 1987, 94(2), pp. 115–147.

- [2] Сливницин П.А., Мыльников Л.А. Распознавание объектов по составляющим их примитивам и отношениям между ними // Информатика и автоматизация, 2023, 22(3), с. 511-540
- [3] Fischler M.A., Bolles R.C. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography // Communications of the ACM, 1981, 24(6), pp. 381-395

## Модель контактного взаимодействия пылевых кластеров с фрактальной внутренней структурой в протопланетных газопылевых дисках

Русол Андрей Владимирович<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН (ГЕОХИ РАН), Москва, Россия, e-mail: [fermatainbox.ru](mailto:fermatainbox.ru)

<sup>2</sup> Кафедра Суперкомпьютеров и квантовой информатики, ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail:

В данной работе рассматривается развитие ранее предложенной модели контактного взаимодействия пылевых кластеров в газопылевом протопланетном диске [1,2,3,4]. Модель направлена на упрощение учета процессов в зоне контакта сталкивающихся частиц при исследовании процессов образования и эволюции пылевых структур и твердых тел на ранних стадиях формирования планетных систем. В основе модели лежит представление о формировании пылевых фрактальных кластеров как результата агрегации первичных пылевых частиц, образующихся на супрамолекулярном уровне еще на стадии протозвездных молекулярных облаков.

В условиях протопланетного газопылевого диска процесс дальнейшего роста частиц твердотельной компоненты приводит к постепенному преодолению нано-, микро- и мезомасштабных размеров, с сохранением сложной внутренней структуры порового пространства. Для оценки результатов столкновительной эволюции пылевых кластеров необходимо учитывать влияние их внутренней структуры на физические процессы в зоне контакта. В работе предложено описание реологических свойств таких пылевых структур с помощью их фрактальной размерности, как меры заполнения объема твердой компонентой. Допустимые значения фрактальной размерности приняты в диапазоне от 2.0 (двумерные пространственные структуры) до 3.0 (плотные квазиоднородные частицы).

Используемые алгоритмы позволяют реализовать вычисления на современных вычислительных архитектурах, таких как многоядерные процессоры, вычислительные кластеры, а также архитектуры на основе GPU-вычислителей. Такой подход дает возможность моделировать динамику больших ансамблей

взаимодействующих пылевых кластеров в широком диапазоне временных шкал: от долей секунды для микрочастиц, до сотен миллионов и более лет для крупных гравитирующих тел. Разработанная модель позволяет проводить параметрические исследования процессов роста и эволюции пылевых агрегатов в различных зонах протопланетного диска для разных начальных распределениях частиц по размерам и составу. Полученные результаты позволили выявить основные закономерности локальной эволюции твердотельной компоненты протопланетных газопылевых дисков.

Работа выполнена в рамках государственного задания ГЕОХИ РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маров М. Я., Русол А. В. Модель ударного взаимодействия тел в газопылевом протопланетном диске // ДАН. — 2011. — Т. 441, № 4. — С. 464–467.
- [2] Маров М. Я., Русол А. В. Оценка параметров столкновений пылевых фрактальных кластеров в газопылевом протопланетном диске // Письма в Астрон. журн. 2018. Т. 44. № 7. С. 1–8.
- [3] Русол А. В. Имитационное моделирование структуры пылевых фрактальных кластеров в протопланетных газопылевых дисках // Астрон. вестн. 2021. Т. 55. № 3. С. 232–243.
- [4] Маров М. Я., Русол А. В., Макалкин А. Б. Моделирование фрагментации пыле-ледяных кластеров на линии льда в протопланетных дисках // Астрон. вестн. 2021. Т. 55. № 3. С. 244–264.

## Экспериментальное исследование эффективности двухконтурного многоагентного метода балансировки сетевых потоков

Гарькавый Иван Сергеевич<sup>1</sup>, Степанов Евгений Павлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации вычислительных комплексов, e-mail: garx@asvk.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации вычислительных комплексов, e-mail: estepanov@lvk.cs.msu.ru

Представлено экспериментальное исследование эффективности многоагентного метода балансировки сетевых потоков [1], основанного на многоагентном методе MARON (Multi-Agent Routing using Hashing) [2]. В отличие от MARON, в этом методе контур управления агента построен на принципах принятия решений человеком и состоит из двух уровней. Первый уровень обеспечивает автономное принятие решений агентом на основе накопленного опыта — состояний, которые наблюдал агент, и знания действий в этих состояниях. Второй уровень позволяет агенту принимать решения для незнакомых состояний. Состояние считается знакомым агенту, если оно близко (по определённой метрике) к состоянию, с которым агент уже сталкивался.

На 4 топологиях (содержащих до 96 агентов) экспериментально исследована эффективность метода SAMARON-2L (Simultaneous Actions MARON with Two-Layer Control Plane) с двухуровневым контуром управления по сравнению с одноконтурными методами SAMARON и MARON, равномерной балансировкой Equal-cost Multi-Path (ECMP) [3] и централизованным генетическим алгоритмом. На двух из этих топологий также исследована эффективность метода SAMARON-2L для разных вариантов меры сходства состояний (метрики L2 и L1, косинусное расстояние), порога сходства состояний и размера памяти агента.

Экспериментально показано, что двухконтурный метод SAMARON-2L превосходит по эффективности метод с одноуровневым контуром управления — например, быстрее принимает решения. При этом объем межагентной коммуникации снижается на 1–80% (в зависимости от выбранного порога сходства) по сравнению с методом SAMARON с одновременными действиями агентов, и на 80–96% по сравнению с методом MARON с неодновременными действиями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Okonishnikov A. A., Stepanov E. P. Memory mechanism efficiency analysis in multi-agent reinforcement learning applied to traffic engineering // 2024 International Scientific and Technical Conference Modern Computer Network Technologies (MoNeTeC). – IEEE, 2024. – P. 1-8.
- [2] Stepanov E. P., Smeliansky R. L., Plakunov A. V., Borisov A. V., Zhu X., Pei J., Yao Z. On fair traffic allocation and efficient utilization of network resources based on MARL // Computer Networks. – 2024. – Vol. 250. – P. 110540.
- [3] ECMP Load Balancing [Электронный ресурс] // URL: [https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/ios-xml/ios/mp\\_l3\\_vpns/configuration/xr-3s/asr903/mp-l3-vpns-xr-3s-asr903-book/mp-l3-vpns-xr-3s-asr903-book\\_chapter\\_0100.pdf](https://www.cisco.com/c/en/us/td/docs/ios-xml/ios/mp_l3_vpns/configuration/xr-3s/asr903/mp-l3-vpns-xr-3s-asr903-book/mp-l3-vpns-xr-3s-asr903-book_chapter_0100.pdf) (дата обращения: 16.10.2025).

## Методы оптимизации использования GPU для структурного анализа белков: сопоставление пар фрагментов белков

Тимохин Иван Александрович<sup>1</sup>, Попова Нина Николаевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: [deadsongner@mail.ru](mailto:deadsongner@mail.ru)

<sup>2</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: [popova@cs.msu.ru](mailto:popova@cs.msu.ru)

Одним из частых вариантов применения графических ускорителей является ускорения процесса пакетной обработки данных. В рамках данной задачи

можно выделить отдельные этапы - подготовка данных на CPU, передача обрабатываемых данных на GPU, обработка пакета задач на графическом ускорителе, копирование результатов обработки с GPU и постобработка результатов на CPU. Так же при адаптации алгоритмов под архитектуру графических процессов часто возникает необходимость реализации пакетной обработки типовых задач для контроля объема используемой памяти GPU при обработке данных.

При реализации пакетной обработки данных на графических ускорителях важным фактором, влияющим на производительность, является не только оптимизация кода, исполняемого непосредственно на GPU, но и организация взаимодействия между CPU и GPU. В этом случае основными приемами оптимизации являются:

1. Организация конвейера вычислений на GPU.

Современные графически ускорители предполагают возможность одновременного исполнения копирования данных на устройство, с устройства и выполнение вычислений. Организация конвейера вычислений предполагает разбивку пакета задач на подпакеты меньшей размера и выстраивание пайплайна состоящего отправки данных для обработки подпакета, обработки подпакета и копирования результатов, позволяющих перекрыть обмена полезными вычислениями.

2. Организация двойной буферизации для GPU.

Использование метода двойной буферизации позволяет производить постобработку предыдущего пакета задач и предподготовку данных для следующего одновременно с обработкой текущего пакета на графических ускорителях.

Было рассмотрено влияние применения указанных ранее подходов оптимизации использования GPU при пакетной обработке задач на примере этапа сопоставления пар фрагментов белков методом Кабша [1, 2] при построении структурных выравниваний AFP-алгоритмом МАТТ [3], рассмотренном в рамках нашей предыдущей работы [4]. Проведённый анализ показал, что комбинированное использование конвейеризации и перекрытия вычислений позволяет существенно повысить эффективность использования графических ускорителей.

Рассмотренные методы могут быть использованы как при переносе других алгоритмов структурного анализа белков на GPU, так и при проектировании гетерогенных вычислительных приложений, требующих согласованного взаимодействия между CPU и GPU.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kabsch W. A solution for the best rotation to relate two sets of vectors // Acta Crystallographica Section A. – 1976. Vol. 32. P. 922–923.

- [2] Kabsch W. A discussion of the solution for the best rotation to relate two sets of vectors // Acta Crystallographica Section A. 1978. Vol. 34. P. 827–828.
- [3] Menke M., Berger B., Cowen L. Matt: local flexibility aids protein multiple structure alignment // PLoS Computational Biology. 2008. Vol. 4, No. 1. P 10.
- [4] Timokhin I. A., Popova N. N., Suplatov D. A. Efficient gpu implementation of afp-based algorithmsto accelerate comparative bioinformatic analysisof protein structures in 3d-space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 4. P. 904–915.

## Применение сверточных нейронных сетей в задачах быстрой реконструкции треков частиц

Минь Синжань<sup>1</sup>, Ершов Николай Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: ella.minxr@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: ershov@cs.msu.ru

Рассматривается задача реконструкции треков заряженных частиц [1] по данным трековых детекторов в эксперименте BM@N [2]. Основная сложность данной задачи, обусловленная физическим устройством применяемых детекторов, заключается в генерации ими большого числа ложных точек, сопровождающих истинные данные. Для разработки и исследования методов решения рассматриваемой задачи была поставлена двумерная модельная задача, в которой искомые траектории описываются прямыми линиями или дугами окружностей. Предложены и исследованы два подхода к решению поставленной задачи: свёрточная сеть U-Net [3] и модель Transformer [4].

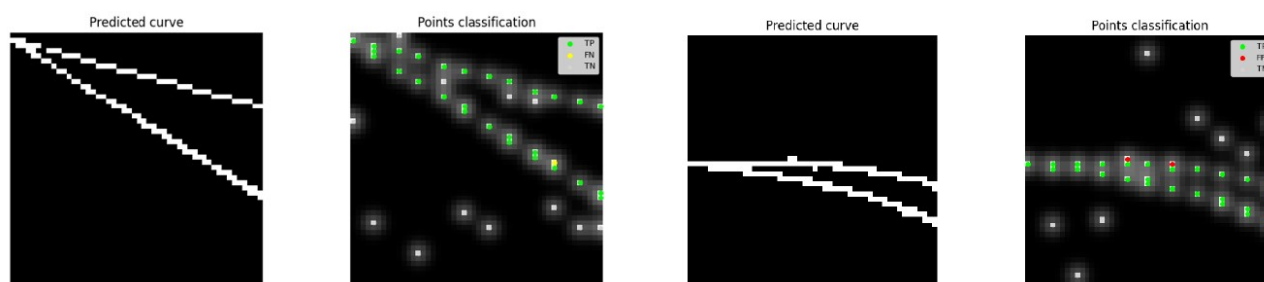


Рис. 1: Распознавание треков моделями U-Net (слева) и Transformer (справа)

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что U-Net обеспечивает наилучшие результаты для прямых треков:

$$\text{IoU} \approx 0.95, \text{ F1} \approx 0.997,$$

тогда как модель Transformer оказалась более устойчивой при решении задачи реконструкции дуг:

$$\text{IoU} \approx 0.89, \text{ F1} \approx 0.990.$$

Метрика IoU характеризует точность восстановления всей траектории, а метрика F1 отражает способность различать истинные хиты и шум. Таким образом, сверточная архитектура оказывается эффективнее при восстановлении линейных треков, а модели на основе механизма внимания лучше справляются со случаем криволинейных траекторий (рис. 1).

В дальнейшем планируется расширение реализованных методов на трёхмерный случай.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Arslanok M., Hellbär E., Ivanov M., Münzer R.H., Wiechula J. Track reconstruction in a high-density environment with ALICE // *Particles*, 2022, vol. 1(1), pp. 1–13.
- [2] Kapishin M. Studies of baryonic matter at the BM@N experiment (JINR) // *Nuclear Physics A*, 2019, vol. 982, p. 967–970.
- [3] Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // *MICCAI 2015, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 9351. Springer, Cham, 2015.
- [4] Van Stroud S., et al. Transformers for Charged Particle Track Reconstruction in High Energy Physics // *arXiv:2411.07149*, 2024.

## Прогнозирование размера окна перегрузки на основе метода EVAR

Го Фэнжуй<sup>1</sup>, Смелянский Руслан Леонидович<sup>2</sup>, Королев Виктор Юрьевич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра АСВК, ф-т ВМК МГУ, e-mail: guofengrui@lvk.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра АСВК, ф-т ВМК МГУ, e-mail: smel@cs.msu.ru

<sup>3</sup> Кафедра МС, ф-т ВМК МГУ, e-mail: bruce27@yandex.ru

Окно перегрузки (*cwnd*) — ключевая управляющая переменная ТСП: оно ограничивает объём неподтверждённых данных «в пути» и тем самым фактически задаёт темп отправки. В дата-центрах и сети Интернет параметры трафика быстро меняются; конкурирующие потоки вызывают краткосрочные скачки RTT и доступной полосы пропускания. Традиционные алгоритмы управления перегрузкой, основанные на потерях/задержках (например, Reno или CUBIC), корректируют *cwnd* уже по факту возникшей перегрузки в сети — это пассивная логика управления. Если же, опираясь на историческую информацию о потоке, заранее прогнозировать ключевые сетевые параметры (например, RTT) и тем самым оценивать значение *cwnd* в будущем моменте времени, то можно реализовать активное управление *cwnd* и повысить эффективность передачи данных.

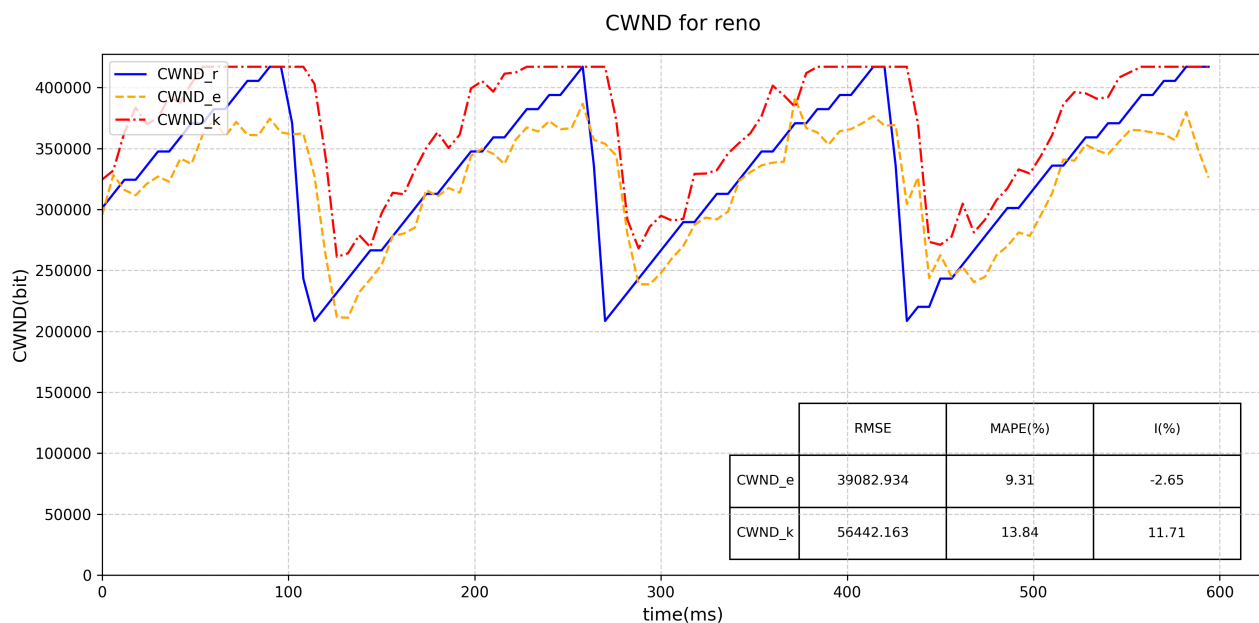


Рис. 1: Иллюстрация краткосрочного прогноза и эффективности метода на наборе Reno; наблюдаемый *cwnd* и прогноз EVAR (прирост  $\approx 11,71\%$ ).

Метод опирается на операционное приближение, в котором *cwnd* представляется как произведение двух компонент — RTT и пропускной способности канала. Обе компоненты прогнозируются отдельно методом EVAR (Exponential Vector Autoregression): (i) по скользящему окну строится взвешенная эмпирическая функция распределения с экспоненциальным затуханием к давним наблюдениям; (ii) из неё вычисляются векторные квантили окна; (iii) многомерный ряд квантилей моделируется VAR для краткосрочного прогноза. При выраженной нестационарности пропускной способности (скачки/смены режимов) вместо VAR используется робастная квантильная оценка как запасной путь.

Используя открытый набор данных сети дата-центра [?], по меткам времени устанавливаем шаг выборки 6 мс; 10 000 исторических наблюдений берём на обучение и прогнозируем значения на следующие 100 интервалов. RTT прогнозируется методом EVAR, пропускная способность вычисляется по квантилям. Как показано на рис. 1, на наборе Reno новый метод обеспечивает прирост эффективности 11,71% по сравнению с наблюдаемым *cwnd*. Кроме того, мы обнаружили, что предложенный подход даёт прирост 5–10% и на наборах с другими алгоритмами управления перегрузкой (например, CUBIC, BBRv2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fesl, J., Čapková, T., Konopa, M., Beránek, L., Fiala, J., Houda, M., Chládek, P., Klicnarová, J., Remeš, R., Šulista, M., Vocetková, K., and Feslová, M. *Data center TCP dataset*. Data in Brief, vol. 54, 110522, 2024.

## Об одном алгоритме балансировки вычислительной нагрузки мобильного робота

Дьяченко Данил Сергеевич<sup>1</sup>, Никольский Илья Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: danil.dyach@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: nikolsky@cs.msu.ru

Работа посвящена оптимизации процесса оценки перемещения мобильного робота на основе данных с датчиков, который также называется одометрией. В робототехнике часто используются лазерные дальномеры (LiDAR) [1], которые способны с высокой точностью сканировать окружающее пространство, генерируя так называемое облако точек. Лидарная одометрия основывается на сопоставлении пары облаков точек, полученных в последовательные моменты времени (например, с помощью алгоритма ICP[2]).

В случае, когда робот обладает слабыми вычислительными ресурсами, целесообразно переместить вычисления на более мощный внешний сервер. Однако если канал связи нестабилен, то более быстрым вариантом будет выполнение вычислений на роботе.

Таким образом, в системе робот-сервер должна использоваться адаптивная стратегия планирования вычислений которая в зависимости от складывающейся обстановки вычисляет одометрию либо локально, либо полностью перемещает вычисления на удалённый сервер, либо выбирает гибридный вариант, когда робот частично обрабатывает данные самостоятельно, а частично отправляет их во внешнюю инфраструктуру.

В данной работе предложен алгоритм адаптивного распределения нагрузки между роботом и сервером. С помощью вычислительных экспериментов выполнена оценка эффективности данного алгоритма при использовании разных видов беспроводных протоколов связи (Wi-Fi, 4G, LPWAN). Показано, что предложенный подход позволяет повысить скорость обработки данных с сохранением достаточно низкой ошибки определения траектории.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mohamed A.S., Sherif H., Haghbayan H., Westerlund T., Heikkonen J., Tenhunen H., Plosila J. A Survey on Odometry for Autonomous Navigation Systems //IEEE Access, 2019, 7, pp. 66 - 86
- [2] Somani A., Huang T., Blostein S. Least-square fitting of two 3-D point sets// IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1987, 9 (5), pp. 698–700

## Анализ применимости средств оценки максимального времени выполнения программ к коду обработки сетевых пакетов.

Балашов Василий Викторович<sup>1</sup>, Загайнов Данила Кириллович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: hbd@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: dzagaynov@cs.msu.ru

Для обеспечения требований качества обслуживания (QoS) в сетях передачи данных необходимо оценивать максимальное время выполнения (WCET) программ обработки пакетов на программируемых коммутаторах.

В данной работе мы рассматриваем применимость методов оценки WCET для программ выделения заголовка, классификации и модификации пакета на программируемом сетевом коммутаторе.

Задача вычисления оценки WCET разбивается на этапы анализа графа потока управления программы (вычисление возможных путей, оценка числа итераций цикла), низкоуровневого анализа (учет влияния процессорного конвейера, кэш-памяти), подсчет оценки на основе вычисленной информации.

В данной работе CFG рассматриваемых программ является нетривиальным, так как содержит вложенные циклы, ветвления внутри циклов и ветвления на основе переменных с широким диапазоном значений.

Сравнительный анализ средств оценки WCET на этапе анализа CFG в рамках данной задачи был проведен по следующим критериям: масштабируемость (вычислительная сложность при увеличении объема входных данных), величина погрешности оценки, набор поддерживаемых конструкций. В рамках обзора рассматривались лишь инструменты с открытым исходным кодом, а именно OTAWA [1] и SWEET [2]. OTAWA для анализа вычисления оценок числа итераций циклов и исключения невозможных путей выполнения использует oRange и Pathfinder, в основе которых лежит абстрактная интерпретация. SWEET на этапе предварительного анализа использует абстрактное выполнение [3].

SWEET запускался как с выключенными, так и полностью включенными стратегиями слияния состояний (merge=none/all соответственно). Входные данные задавались диапазонами извне или через фиксированные значения в самом коде. В код oRange была внесена модификация, позволяющая задавать переменные через аннотации в виде диапазона значений. Эксперименты проводились на Intel Xeon Silver 4114 2.20ГГц.

Результаты анализа представлены в таблице ниже.

В таблице X означает, что инструмент не поддерживает данную конструкцию. П+/П- означает верно ли было определено число невыполнимых путей. И+/И- означает верно ли было определено число итераций цикла.

| Тип конструкции                 | SWEET<br>(merge=all) | SWEET<br>(merge=none) | oRange    | Pathfinder |
|---------------------------------|----------------------|-----------------------|-----------|------------|
| Несколько предикатов            | <b>П+,И+</b>         | <b>П+,И+</b>          | <b>И-</b> | <b>П-</b>  |
| Досрочный выход из цикла        | <b>П+,И+</b>         | <b>П+,И+</b>          | <b>Х</b>  | <b>П+</b>  |
| Побитовые операции              | <b>П+,И+</b>         | <b>П+,И+</b>          | <b>Х</b>  | <b>И-</b>  |
| Ветвления по внешним переменным | <b>П+,И+</b>         | <b>П+,И+</b>          | <b>И+</b> | <b>Х</b>   |

Все приведенные типы конструкций используется в программах обработки сетевого пакета, поэтому на основе полученных результатов можно сделать вывод, что ни один из представленных инструментов не обладает в одиночку функциональностью, достаточной для оценки **WCET** кода обработки пакетов. Лишь **SWEET** поддерживает все перечисленные конструкции, но при этом используемый в нем алгоритм имеет экспоненциальную сложность, что проявилось в примере с ветвлением по внешним переменным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ballabriga, Clément, et al. "OTAWA: An open toolbox for adaptive WCET analysis." IFIP International Workshop on Software Technologies for Embedded and Ubiquitous Systems. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] Lisper, Björn. "SWEET—a tool for WCET flow analysis." International symposium on leveraging applications of formal methods, verification and validation. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [3] Gustafsson, Jan, et al. "Automatic derivation of loop bounds and infeasible paths for WCET analysis using abstract execution." 2006 27th IEEE International Real-Time Systems Symposium (RTSS'06). IEEE, 2006.

## Решение задачи планирования траекторий в многоагентных системах с применением моделей машинного обучения

Горина Елизавета Сергеевна<sup>1</sup>, Ершов Николай Михайлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: gorina007@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: ershov@cs.msu.ru

Эффективное управление группой роботов в динамически изменяющейся среде до сих пор остаётся сложной задачей [1]. Традиционные методы планирования часто не справляются с необходимостью быстрой адаптации к изменяющимся условиям. В данной работе на примере решения задачи планирования траекторий в многоагентных системах [2, 3] исследуется применение технологии резервуарных вычислений — подхода, обладающего преимуществами в

обработке временных последовательностей при низких вычислительных затратах [4]. Основная сложность в рассматриваемой задаче заключается в необходимости координации множества агентов в условиях ограниченного пространства, наличия препятствий и постоянно меняющихся целей.

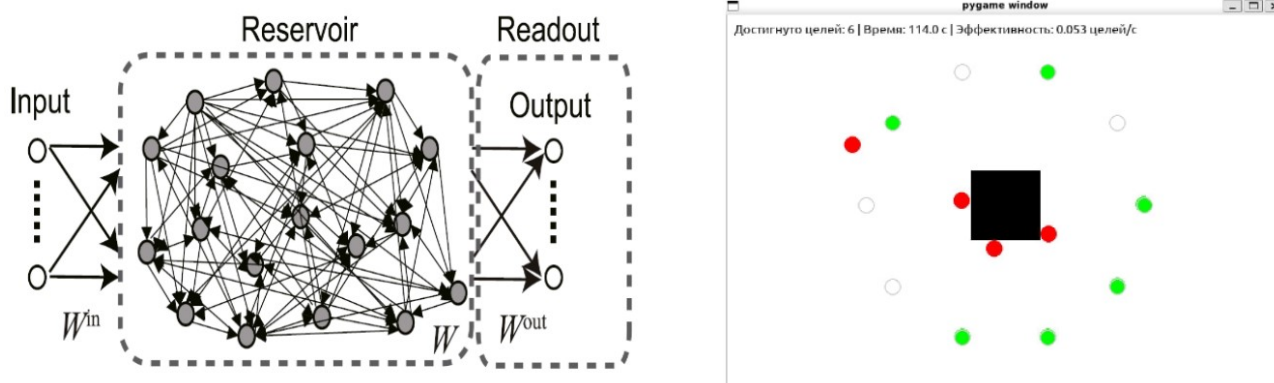


Рис. 1: Резервуарная нейронная сеть (слева) и пример миссии в задаче планирования траекторий (справа)

В настоящей работе предложен гибридный подход, сочетающий резервуарные вычисления (Echo State Network, рис. 1) и обучение с подкреплением [5]. Реализована имитационная модель на языке программирования Python, позволяющая исследовать адаптивное поведение агентов (рис. 2). Проведён сравнительный анализ эффективности предложенного метода с базовым подходом, основанным на модели случайных блужданий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kuckling J. Recent trends in robot learning and evolution for swarm robotics // Front. Robot. AI, 24 April 2023, Sec. Robot Learning and Evolution, Volume 10-2023.
- [2] Hildreth D., Guy S.J. Coordinating Multi-Agent Navigation by Learning Communication // Proc. ACM Comput. Graph. Interact. Tech, 2019.
- [3] Skrynnik A. et al. Learn to Follow: Decentralized Lifelong Multi-agent Pathfinding via Planning and Learning // arXiv:2310.01207, 2023.
- [4] Lukosevicius M. A Practical Guide to Applying Echo State Networks // Neural Networks: Tricks of the Trade, 2012.
- [5] Sutton R.S., Barto A.G. Reinforcement Learning: An Introduction // MIT Press, 2018.

Подсекция кафедры алгоритмических языков

## Нормализация медицинских терминов на наборе данных NEREL-BIO с вложенными сущностями

Борисовский Лев Юрьевич

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: s02240365@gse.cs.msu.ru

**Описание задачи.** Нормализация медицинских терминов представляет собой установление связей между упоминаниями сущностей в тексте и их идентификаторами в графах знаний, таких как UMLS [1]. Эта задача лежит в основе интеллектуального анализа медицинских текстов.

Основная трудность нормализации терминов в UMLS связана с терминологической неоднозначностью — омонимией и синонимией концептов. Дополнительные трудности обусловлены отсутствием русскоязычных переводов части концептов UMLS.

Главной целью исследования является анализ и улучшение качества нормализации медицинских терминов на корпусе NEREL-BIO [2].

**Набор данных.** Набор данных NEREL-BIO представляет собой коллекцию аннотированных заголовков научных статей, отобранных из базы данных PubMed. Все упоминания медицинских понятий в текстах размечены и связаны с уникальными идентификаторами концептов из UMLS.

Особенностью корпуса является наличие вложенных сущностей, когда одно упоминание содержится внутри другого или пересекается с ним (например, «злокачественная лимфома» → «лимфома»). Контекст более крупной сущности уточняет вложенную и помогает разрешать неоднозначность.

**Эксперименты.** Базовые подходы основаны на *уточнении* результатов модели BioSyn [3]: первый использует меру близости между контекстуализированным упоминанием и сущностью (*nested score*), второй — дополнительную модель поверх заранее обученной BioSyn (*reranker*).

Выявлены две основные группы ошибок базовых методов. *Ошибочные лексические совпадения* возникают при выборе терминов по созвучию, а не по смыслу (например, «гибели» → «гипс», а не «смерть»). *Аббревиатуры* приводят к ошибкам из-за отсутствия контекста («СВБА» → «shvartsa-bartera sindrom», а не «синдром верхней брыжеечной артерии»).

Для решения указанных проблем предложены две модификации базовых подходов: первая — интеграция *nested score* непосредственно в процесс обучения и этап *первичного* подбора кандидатов; вторая — усложнение модели *reranker*. Обе направлены на более глубокое использование контекста.

Эксперименты показали близкие к базовым результаты ( $\text{Acc}@1 \approx 0.6$ ), при этом предложенные методы продемонстрировали устойчивость и потенциальную применимость.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bodenreider O. The unified medical language system (UMLS): integrating biomedical terminology // *Nucleic acids research*. 2004. Т. 32, № 1. С. 267–270.
- [2] Loukachevitch N., Sakhovskiy A., Tutubalina E. Biomedical Concept Normalization over Nested Entities with Partial UMLS Terminology in Russian // *Proceedings of the 2024 Joint International Conference on Computational Linguistics, Language Resources and Evaluation (LREC-COLING 2024)*. 2024. С. 2383–2389.
- [3] Kang J. Biomedical Entity Representations with Synonym Marginalization // *Annual Conference of the Association for Computational Linguistics (ACL 2020)*. – *Annual Conference of the Association for Computational Linguistics (ACL 2020)*, 2020.

## Об одном подходе к разработке и реализации сервера для онлайн-транслятора

Ганжин Захар Александрович<sup>1</sup>, Корухова Юлия Станиславовна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: s02240389@gse.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: yulia@cs.msu.ru

Разработка веб-ориентированных сред выполнения кода представляет значительный интерес для образовательных целей и совместной работы над проектами. Целью данной работы является создание безопасного и масштабируемого многопользовательского веб-приложения, реализующего функции онлайн-транслятора. К основным требованиям относятся: безопасная аутентификация пользователей, многопользовательский режим работы, сохранение текста программ с возможностью их редактирования с различных устройств, а также выполнение программ на указанном языке программирования.

Веб-интерфейс реализован на HTML, CSS и JavaScript с использованием технологии AJAX для динамического обновления контента без полной перезагрузки страницы, что обеспечивает быструю реакцию на действия пользователя. Интерфейс позволяет вводить текст программ, передавать его транслятору, отображать результат работы, а также возможность сохранения программ с формированием ссылки для доступа к ним.

Сервер написан на языке Go[1]. Для обеспечения высокой производительности и конкурентной обработки множества запросов используются горутины. Они являются легковесными потоками выполнения (используют около

2 Кб стека), что позволяет эффективно масштабировать систему в сравнении с традиционными потоками операционной системы (требуют около 1 Мб памяти).

На уровне хранения данных пользователей и их программ используется СУБД PostgreSQL.

Реализована безопасная система аутентификации и авторизации. Пароли пользователей хэшируются с использованием алгоритма bcrypt перед сохранением в базу данных. Для управления сессиями применяются JWT-токены, которые подписываются на стороне сервера и передаются клиентом в заголовках AJAX-запросов для авторизации последующих операций и доступа к программам по сети.

Итогом работы стало создание клиент-серверного приложения, включающего веб-интерфейс, многопоточный сервер на языке Go и базу данных. Система обеспечивает безопасную аутентификацию пользователей и позволяет работать с транслятором подмножества языка Плэнер[2] в многопользовательском режиме. Предложенная архитектура демонстрирует хорошую масштабируемость.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shiju Varghese Web Development with Go. Building Scalable Web Apps and RESTful Services. Springer Nature, 2024
- [2] В.Н. Пильщиков Язык Плэнер. М.:Наука, 1983

# Об одном подходе к генерации оценочных функций в игровых программах

Корухова Юлия Станиславовна<sup>1</sup>, Пономаренко Вячеслав Сергеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: yulia@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: slponomaren@yandex.ru

Целью данной работы является создание и реализация метода автоматической генерации статических оценочных функций для программ, моделирующих настольные игры с полной информацией. При выборе очередного хода игрока-компьютера традиционно алгоритмы просматривают на определенную глубину дерево возможных ходов. Построение такого дерева за приемлемое время возможно только на ограниченную глубину, достигнув которой, позиции игры требуется оценить.

Обычно оценка позиций в настольных играх строится с использованием ресурсоемких статистических методов, эффективное применение которых невозможно на доступном широкому кругу людей оборудовании, либо на основе статических оценочных функций, требующих дорогих и не всегда доступных экспертных знаний.

Для решения поставленной задачи выбран метод машинного обучения, основанный на нейросетевой архитектуре NNUE (Efficiently Updatable Neural Network) [1]. Ключевыми особенностями архитектуры являются разреженные входные данные, простая масштабируемость и небольшая глубина сети, позволяющая использовать целочисленную арифметику для максимального быстродействия. Для генерации обучающих данных применен алгоритм UCT (Upper Confidence bound applied to Trees) [2] — метод поиска оптимальных ходов в дереве игры, который с помощью симуляции случайных партий позволяет оценить вероятность выигрыша из заданной позиции без наличия предварительных знаний об игре.

Предложенный подход реализован на языке Python в виде программного инструмента с использованием библиотеки PyTorch. Разработка включала четыре основных этапа: реализация компактной NNUE-сети; реализация алгоритма UCT для генерации оценок игровых позиций; построение обучающего набора пар «позиция-оценка»; обучение NNUE-сети.

В качестве демонстрационного примера выбрана игра «Крестики-нолики». Для кодирования позиций использован бинарный вектор, указывающий на занятость полей фигурами игроков. В результате обучения получена оценочная функция, которая достаточно хорошо имитирует оценки, вычисляемые алгоритмом UCT. На тестовых данных была получена средняя ошибка оценки 8.5%, при этом скорость оценки позиций полученной оценочной функцией превосходит скорость оценки с помощью UCT.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yu Nasu. Efficiently Updatable Neural-Network-based Evaluation Functions for Computer Shogi [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. — URL: [https://github.com/asdfjkl/nnue/blob/main/nnue\\_en.pdf](https://github.com/asdfjkl/nnue/blob/main/nnue_en.pdf)
- [2] Bradberry J. Introduction to Monte Carlo Tree Search [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. — URL: <http://jeffbradberry.com/posts/2015/09/intro-to-monte-carlo-tree-search/>

## Гибридный подход к хранению и индексации аудитных логов в СУБД

Абрамов Владимир Геннадьевич<sup>1</sup>, Савицкая Анастасия Олеговна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail: [vlabr@cs.msu.ru](mailto:vlabr@cs.msu.ru)

<sup>2</sup> МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АЯ, e-mail: [savitskaya02@list.ru](mailto:savitskaya02@list.ru)

Аудитные логи (журналы аудита) представляют собой системные записи, которые фиксируют все значимые события, инициированные пользователями или автоматическими процессами в приложении. Их сбор и анализ критически важны для контроля соблюдения внутренних политик и стандартов без-

опасности, выявления уязвимостей и недостатков в системе защиты и предотвращения несанкционированного доступа со стороны пользователей.

Ключевая проблема работы с аудитными логами заключается в конфликте требований. С одной стороны, системе необходимо одновременно обеспечивать скорость записи, мониторинг в реальном времени и оперативность расследования инцидентов, с другой стороны - возможность глубокого анализа всех хранящихся данных.

Цель исследования состоит в оптимизации хранения логов и доступа к ним для усовершенствования процессов работы с информацией. В качестве решения предлагается модель гибридного хранения, использующая комбинацию разных типов хранилищ, что позволяет эффективно выполнять все задачи. В ходе исследования запросы были разделены на три типа: требующие быстрого ответа и актуальности информации, требующие среднего времени ответа, около трех секунд, и полной информации о пользователе и требующие информации за весь период хранения данных. По этим запросам выделены три основные задачи для работы с логами - выявление аномалий, контроль действий пользователей и аналитика.

При решении задачи выявления аномалий данные хранятся в усечённом виде — только идентификаторы и временная метка, работа с данными построена на потоковой модели, где каждая запись имеет уникальный временной ключ, что позволяет работать с данными как с временными интервалами, а не с отдельными записями. Задача включает в себя анализ статистики и извлечение событий за заданный промежуток времени. Для этого используется *in-memory* база данных *Valkey*.

В задаче контроля пользователей данные имеют дополнительное поле «метаданные», где содержится полная информация о событии. Работать с данными можно с помощью точечных запросов или поиску по диапазонам, с фильтрацией по всем полям, кроме поля «метаданные». Данные хранятся в реляционной базе *Postgres*.

Для анализа логи используются в полном объеме. Среди основных возможностей - выполнение запросов с фильтрацией по полю «метаданные» и выполнение аналитических запросов за весь период хранения. Для этого используется *MapReduce* база данных *YTsauros* (YT).

В результате исследования разработана гибридная модель для хранения логов и работы с ними. Предложенный подход увеличивает производительность обработки запросов за счет их классификации, основанной на учете времени отклика и перераспределении данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Joe Reis, Matt Housley *Fundamentals of Data Engineering* // O'Reilly Media, Inc., 1005 Gravenstein Highway North, Sebastopol, CA 95472

- [2] Домбровская Г., Новиков Б., Бейликова А. Оптимизация запросов PostgreSQL // ДМК-Пресс, 2022

## Методы обеспечения безопасности в СУБД

Абрамов Владимир Геннадьевич<sup>1</sup>, Князев Андрей Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: vlabr@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: aknyazev.mailbox@gmail.com

Проблема защиты данных остаётся одной из главных при проектировании СУБД. По мере усложнения инфраструктуры и развития распределённых сервисов привычные меры безопасности теряют эффективность [1]. Системе может быть закрыт доступ извне, но это не гарантирует, что записанные однажды данные не будут изменены.

Большинство традиционных механизмов защиты работают на административном уровне: контролируют права пользователей, проверяют целостность таблиц, ведут журналы операций. Однако всё это требует доверия к самой системе и её администраторам. При ошибках конфигурации или намеренном вмешательстве гарантировать сохранность данных будет невозможно.

Для решения этой проблемы появились архитектуры, где неизменность рассматривается не как политика, а как конструктивное свойство хранения. В таких системах данные не перезаписываются, а сохраняются как последовательность версий. Каждая версия связана с предыдущими с помощью хэш-значений, что позволяет подтвердить их подлинность без обращения к внешним источникам. [2]

Подобные решения реализованы в неизменяемой модели и используют криптографические структуры (Merkle-tree)[3]. Из набора записей формируется корневой хэш, который отражает текущее состояние всей базы. При изменении хотя бы одного элемента, дерево перестаёт совпадать с сохранённым корнем, и факт изменения будет зафиксирован.

В традиционных реляционных СУБД обновление значения затирает предыдущее. В неизменяемой модели, напротив, каждая версия остаётся в базе, и вся последовательность изменений формирует прослеживаемую историю. Это даёт возможность проверять подлинность данных не по отдельным записям, а по всей цепочке состояний. Контроль целостности при этом опирается не на административные процедуры, а на вычисляемые отношения между хэшами.

Неизменяемая архитектура не отменяет привычных средств защиты, однако дополняет их гарантией сохранности данных даже в случае нарушения привилегий администратора. Сама структура хранения исключает возможность незаметного изменения информации, что делает систему устойчивой к внутренним сбоям и ошибкам управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петров А. А. *Компьютерная безопасность. Криптографические методы защиты*. — М.: ДМК Пресс, 2023. — 352 с.
- [2] Духан Е. И., Коллеров А. С., Синадский Н. И. *Методы и средства криптографической защиты информации*. — М.: Академия, 2016. — 272 с.
- [3] Ищукова Е. С., Панасенко Н. С., Романенко А. Г. *Криптографические основы блокчейн-технологий*. — СПб.: Лань, 2021. — 224 с.

## О построении универсального интерпретатора на основе L-преобразователя

Вылиток Алексей Александрович<sup>1</sup>, Николаев Андрей Андреевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра Алгоритмических языков, e-mail: vylytok@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра Алгоритмических языков, e-mail: Nikas\_0604@mail.ru

L-преобразователь представляет собой формализм для описания алгоритмов преобразования слов, подобных машинам Тьюринга и нормальным алгоритмам Маркова [1]. Данный формализм сочетает строгость математического описания с наглядностью визуального представления в виде ориентированного графа, где вершины соответствуют состояниям вычислительного процесса, а дуги — правилам переходов между ними [2]. Для задачи построения универсального интерпретатора рассматривается подкласс бесконтекстных L-преобразователей.

L-преобразователи, сочетая грамматические и автоматные свойства, могут служить основой для построения универсального интерпретатора. Универсальный интерпретатор получает на вход: 1) синтаксис и семантику языка программирования в виде L-преобразователя с семантическими действиями, 2) программу на заданном языке, 3) входные данные для заданной на этом языке программы. На выходе получается результат работы программы.

Унификация задания синтаксиса и семантики языка программирования с помощью L-преобразователя дает гибкий инструмент для проектирования и тестирования языков программирования, позволяя проводить различные эксперименты: можно легко изменять не только программу или ее входные данные, но и семантику языка программирования, наблюдая, изменится ли поведение той же программы на тех же данных при коррекции семантических действий. Также в таком подходе появляется возможность более наглядной визуализации процессов трансляции по сравнению с классическими подходами [3]. Данный инструмент может быть полезен студентам при обучении основам языков программирования и конструирования трансляторов.

Архитектура проектируемого универсального интерпретатора включает в себя несколько взаимодействующих функциональных модулей. Среди них есть конструктор, предназначенный для визуального описания синтаксиса

языка программирования в виде графа, позволяя добавить действия по переводу во внутреннее представление, например, в польскую инверсную запись, а также есть виртуальная машина для интерпретации польской записи с помощью стека. В перспективе предполагается возможность выбора виртуальной машины и использования трансляции в другие представления, например, в одноадресный или многоадресный автокод (ассемблер).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пильщиков В.Н., Абрамов В.Г., Вылиток А.А., Горячая И.В. Машина Тьюринга и алгоритмы Маркова. // М.: Макс-Пресс – 2-е издание – 2016
- [2] Вылиток А. А., Лай В. Построение композиции L-преобразователей // Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения (2023 г., МАКС Пресс, Москва, тезисы). — Москва: ООО МАКС Пресс, 2023. — С. 106–106.
- [3] Серебряков В.А. Теория и реализация языков программирования. — Москва: Наука, 2012. — 236 с.

# Об одном подходе к распараллеливанию алгоритмов построения автомата PRI и его алгебраических структур

Вылиток Алексей Александрович<sup>1</sup>, Мельников Борис Феликсович, Мэн Линцянь<sup>2</sup>, Мэн Линцянь<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: vylytok@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Университет МГУ–ППИ в Шэньчжэне, e-mail: bormel@smbu.edu.cn

<sup>3</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: kostya45e@mail.ru

Рассматривается подход к распараллеливанию алгоритмов для построения специального вида конечных автоматов и алгебраических структур, используемых для изучения итераций формальных языков. Эти алгоритмы могут помочь в поиске практически приемлемого решения задачи проверки эквивалентности в бесконечности для конечных языков.

Для двух конечных непустых формальных языков отношение эквивалентности их итераций алгоритмически разрешимо с помощью так называемого автомата PRI и алгоритмов его построения [1–3]. Ввиду высокой вычислительной сложности известных алгоритмов построения автомата PRI, актуальна задача их распараллеливания для уменьшения времени вычислений. Интерес также представляет распараллеливание алгоритмов для построения алгебраических структур, связанных с автоматами PRI.

Трудность распараллеливания алгоритма для построения автомата PRI заключается в сложности предсказать на основе свойств формального языка, какие промежуточные множества состояний будут возникать на каждой итерации в процессе построения.

Обычным подходом является равномерное разбиение на множество подзадач, решаемых на параллельных процессорах. Но такой подход в нашем случае неэффективен ввиду того, что на каждой итерации может выполняться слишком мало задач и большая часть времени тратится на обмен данными. Предлагаемое нами решение заключается в использовании эвристических методов, которые увеличивают количество подзадач, выполняемых на одной итерации [4].

Программы с эвристическими методами могут выполнять избыточные вычисления, не связанные с проверкой эквивалентности в бесконечности, и в самом крайнем случае получается так называемый *полный* автомат, требующий большого объёма дополнительных вычислений. Проведённые эксперименты показывают, что каждый эвристический метод имеет свои преимущества и недостатки, связанные со свойствами формального языка, например, с распределением длин цепочек языка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мельников Б. Ф. Варианты конечных автоматов, соответствующих бесконечным итерационным деревьям морфизмов. Часть I // International Journal of Open Information Technologies. 2021. Т. 9, № 7. С. 5–13.
- [2] Мэн Л., Мельников Б. Ф. О группоиде первичного автомата PRI, определяемом для одного конечного языка // International Journal of Open Information Technologies. 2023. Т. 11, № 9. С. 1–12
- [3] Вылиток А. А., Мельников Б. Ф., Мэн Л. Свойства группоида и полугруппы конечного автомата PRI // Тезисы докладов научной конференции «Тихоновские чтения»: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова (Москва, 28 октября – 02 ноября, 2024 г.). М. : МАКС Пресс, 2024. С. 108.
- [4] Мельников Б. Ф., Мэн Л. Подход к параллельной реализации проверки бинарного отношения покрытия для заданной пары конечных языков // Параллельные вычислительные технологии – XIX всероссийская конференция с международным участием, ПаВТ'2025, Короткие статьи и описания плакатов (Москва, 8–10 апреля, 2025 г.). Ч. : Издательский центр ЮУрГУ, 2025. С. 323.

## Метод минимизации синтаксических диаграмм на основе конечных автоматов

Пучкин Данила Андреевич

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: danila.puchkin@mail.ru

Предлагаемый в [1] способ контроля исполнения процессов в операционных системах основан на моделировании потока управления (ПУ) с помощью гра-

фов ПУ функций программ процессов. В ходе моделирования графы преобразуются в структуры, представляющие собой синтаксические диаграммы (СД), совокупность которых определяет последовательности команд, которые могут быть исполнены процессом. Получаемые таким образом СД оказываются избыточными за счет того, что одна и та же последовательность команд может быть получена различными способами, что обуславливает актуальность задачи оптимизации СД.

Любую СД можно преобразовать в конечный автомат (КА), как и по любому КА может быть построена СД. В силу этого алгоритмы минимизации КА могут быть использованы для оптимизации СД. Тогда алгоритм оптимизации СД будет состоять из трех шагов: преобразование СД в КА, минимизация КА (например, с помощью алгоритма Бржозовского [2]) и обратное преобразование минимизированного КА в новую СД. СД и КА имеют представление в виде орграфа, в силу чего преобразование СД в КА и обратно может быть описано преобразованием графов.

Первым шагом преобразования СД в КА должно быть добавление вершин состояний КА между всеми последовательными вершинами СД, а также вершин начального и конечного состояния на входе и выходе СД соответственно. После этого каждая исходная вершина СД должна быть заменена на ребро соответствующего перехода в КА. Получаемые в [1] СД могут иметь вершины, не имеющие выходных ребер. Такие вершины должны заменяться на ребра переходов, которые ведут в конечное состояние КА, а такие переходы должны быть определенным образом помечены.

После минимизации КА преобразование в СД происходит в обратном порядке — переходы КА заменяются на вершины СД, а вершины состояний КА удаляются. В силу того, что как алгоритмы преобразования СД в КА и обратно, так и алгоритмы минимизации КА инвариантны относительно задаваемых ими последовательностей [2], исходные и полученные СД также инвариантны.

Предложенный метод позволил сократить объем модели процесса в вершинах СД, а уникальность получаемых в СД последовательностей команд позволила сократить время, необходимое для принятия решения о корректности исполнения процесса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Патент № 2817547 RU, МПК G06F 12/14 (2006.01), G06F 21/52 (2013.01). Система и способ контроля работоспособности процессов в операционной системе: № 2023130106 : заявлен 20.11.2023: опубликован 16.04.2024 / Со-рокин И. А., Пучкин Д. А., Духвалов А. П.; заявитель Акционерное обще-ство «Лаборатория Касперского» (RU).

- [2] Ахо А., Ульман Д. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции.: Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.

## Оценка скорости работы компонентов синтаксического анализатора

Антипова Алёна Алексеевна<sup>1</sup>, Волкова Ирина Анатольевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: alyona.al.antipova@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: irinaavolkova@gmail.com

Синтаксический анализ — ключевой этап обработки естественного языка, выявляющий грамматическую структуру предложений и синтаксические связи между словами. Современные анализаторы используют нейронные сети для повышения точности анализа. Производительность синтаксических анализаторов критична: даже небольшие задержки снижают эффективность, поэтому оптимизация скорости работы компонентов анализа важна для высокопроизводительных систем обработки естественного языка.

Обзор существующих исследований показал что детальная статистика по времени работы внутренних компонентов синтаксических анализаторов, особенно предсказаний нейросетевых моделей, представлена крайне ограничено.

В данной работе рассмотрены три синтаксических анализатора: Stanza, Natasha и spaCy [1]. Первые два — графовые, последний — на основе переходов. Для каждого выделены ключевые компоненты и измерено время работы на русскоязычных корпусах синтаксических деревьев: Taiga, Poetry, SynTagRus, GSD, и PUD из проекта Universal Dependencies [2]. Для точной оценки использован профилировщик cProfile, измеряющий время активной работы процессора и выдающий детализированную статистику. Ключевые функции выбраны на основе анализа исходного кода. Дополнительно применены инструменты для визуализации дерева вызовов функций. Каждый анализатор запускался на всех корпусах по 10 раз на предложение. Результаты усреднены по числу запусков и внутри каждого датасета.

Исследование показало, что во всех анализаторах основная часть времени работы приходится на получение предсказаний нейросети. В spaCy предсказание переходов занимает около 48% времени обработки предложения. Основные показатели для графовых анализаторов приведены в Таблице 1.

|         | Получение предсказаний | Построение графа зависимостей |
|---------|------------------------|-------------------------------|
| Natasha | 66.45%                 | 2.74%                         |
| Stanza  | 99.17%                 | 0.33%                         |

Таблица 1. Вызов модели нейронной сети

Полученный результат подчёркивает необходимость оптимизации получения предсказаний нейросети для повышения производительности систем обработки естественного языка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Parser\_stat: исходный код проекта исследования «Оценка скорости работы компонентов синтаксического анализатора» [Исходные материалы проекта]. — GitHub, 2025. — URL: [https://github.com/Derinhelm/parser\\_stat/tree/parser\\_speed](https://github.com/Derinhelm/parser_stat/tree/parser_speed) (дата обращения: 17.10.2025).
- [2] contributors Universal Dependencies. Universal Dependencies [Электронный ресурс]. — 2014–2024. — Электрон. дан. — URL: <https://universaldependencies.org/russian-treebanks> (дата обращения: 07.05.2025).

# Применение ядра Вайсфейлера-Лемана для выявления структурных ошибок нейросетевого синтаксического анализа

Шамаева Елена Денисовна<sup>1</sup>, Карамела-Аждер Драгош Сергеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: Derinhelm@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: Tornado11073@gmail.com

Для русского языка наиболее часто используемым способом представления синтаксической структуры предложения является дерево зависимостей. Дерево зависимостей — это ориентированный граф вида дерево, в котором каждый токен (слово или знак препинания) связан с соответствующим главным токеном. Стандартными метриками оценки качества синтаксического анализа являются метрики LAS и UAS, которые измеряют долю правильно определённых зависимостей с учётом и без учёта корректности определения типа связи соответственно.

Стандартные метрики ориентированы на количественную оценку и не всегда выявляют существенные отличия с точки зрения графовой структуры. Данная работа посвящена разработке метода для обнаружения предложений с ошибками такого вида. Предложенная в данной работе адаптация алгоритма Вайсфейлера-Лемана (Waisfeiler-Leman algorithm, WL) позволяет оценить структурное сходство между деревьями зависимостей.

Ядро алгоритма Вайсфейлера-Лемана основано на итеративном\* обновлении хешей вершин графа. Инициализация выполняется присвоением каждой вершине значения, равного её степени. На каждой итерации хеш вершины

---

\*В данной работе использовалось 3 итерации.

обновляется на основе её текущего значения и отсортированного множества хешей смежных вершин.

При применении ядра Вайсфейлера-Лемана и для эталонного дерева зависимостей, и для дерева зависимостей, построенного анализатором, выполняется:

1. инициализация начальных меток вершин
2. итеративное обновление хешей за  $n$  шагов
3. построение гистограммы полученных хешей

Далее вычисляется метрика сходства деревьев зависимостей по формуле  $WL = \frac{H_1 H_2}{||H_1|| * ||H_2||}$ , где  $H_1$  и  $H_2$  — векторы гистограмм хешей вершин сравниваемых графов.

Экспериментальная оценка предложенной метрики проведена на синтаксических анализаторах Natasha, UDPipe, DeepPavlov, spacy, Stanza и русскоязычных корпусах предложений с синтаксической разметкой Taiga, Poetry, GSD, PUD, SynTagRus. В Таблице 1 показаны средние значения метрики WL для рассматриваемых анализаторов и датасетов. Анализаторы DeepPavlov и Stanza показывают наиболее высокие значения метрики WL, что указывает на лучшее сохранение структурных особенностей синтаксических деревьев.

| Синтаксический анализатор | Taiga | Poetry | GSD   | PUD   | SynTagRus |
|---------------------------|-------|--------|-------|-------|-----------|
| Natasha                   | 0.696 | 0.700  | 0.788 | 0.836 | 0.805     |
| UDPipe                    | 0.724 | 0.763  | 0.786 | 0.835 | 0.854     |
| spacy                     | 0.743 | 0.770  | 0.822 | 0.871 | 0.838     |
| DeepPavlov                | 0.761 | 0.808  | 0.838 | 0.886 | 0.895     |
| Stanza                    | 0.752 | 0.801  | 0.823 | 0.881 | 0.901     |

Таблица 2: Средние значения метрики WL по парсерам и корпусам

В результате экспериментов также установлено, что метрика WL успешно выявляет предложения с существенным изменением структуры дерева зависимостей и небольшим количеством токенов, для которых неверно выполнен синтаксический анализ. Поэтому данная метрика может быть использована как дополнительный инструмент для выявления ошибок синтаксических анализаторов, которые не могут быть распознаны с помощью метрик UAS и LAS.

**Ключевые слова:** дерево зависимостей, ядро Вайсфейлера-Лемана, синтаксический анализ, LAS, UAS

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Weisfeiler B., Lehman A. The Reduction of a Graph to Canonical Form // NTI, Series 2. — 1968.

[2] Nivre J., et al. Universal Dependencies v2 // Proceedings of LREC 2020. — 2020.

## Применение векторных представлений ELMo в задаче лексической типологии языков

Волкова Ирина Анатольевна<sup>1</sup>, Полозов Илья Константинович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: irina.a.volkova@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра алгоритмических языков, e-mail: ilya-polozov@mail.ru

В современной мире все чаще автоматизируются различные виды деятельности. Однако для задачи определения лексической типологии языков способов автоматизации пока разработано не так много. В работе предлагается использование векторных представлений ELMo (Embeddings from Language Models) для помощи лингвистам. За основу берется работа [1], в которой вручную исследуется семантическая зона “тянуть” – “толкать”.

Сама задача лексической типологии состоит в определении явлений, для которых может использоваться данная языковая единица. Самым популярным подходом для решения этой проблемы является использование фреймов [2]. Например, для семантического поля “тянуть”-“толкать”, могут быть найдены такие фреймы, как: “перемещать перед собой”, “открывать от себя”, “проявлять агрессию”.

В данной работе для решения задачи применяются векторные представления ELMo [3], используется Национальный корпус русского языка [4]. Все слова переводятся в начальную форму. Удаляются стоп-слова и все спецсимволы. Затем в корпусе находятся все предложения со словами “тянуть”, “толкать” и производными от них, такими как: “протянуть”, “вытянуть”, “тянуть-ся”, “затянуть”, “втянуть”, “перетянуть”, “дотянуться” и т.п. Для всех найденных слов вычисляются векторы ELMo. Для дальнейшей обработки создается структура, в которой сохраняются предложения с найденными словами, отдельно сами найденные слова в этих предложениях, векторы найденных слов и исходное предложение из корпуса, чтобы после фильтрации сформировать фрейм. Для сохранения данных используется библиотека Pickle.

Для слова “тянуть” на корпусе постсоветских текстов НКРЯ было получено 27 249 предложений. Для слова “толкать” 2 257 предложений. Их необходимо отфильтровать, чтобы убрать близкие по смыслу. Для фильтрации используется близость по косинусной мере. Предложения, векторы ELMo которых сильно отличаются по косинусной мере, считаются фреймами исследуемого поля. Эмпирически был выбран порог близости 0.5, т.к. он дает наиболее близкие к работе [1] результаты, в которой фреймы находились вручную. На корпусе постсоветских текстов НКРЯ для зоны “толкать” были получены 7 фреймов, а для зоны “тянуть” 5.

Таким образом, лингвисты могут использовать метод для ускорения своей работы, автоматизировано получать фреймы и уточнять их.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Савельева А. Ю. Глаголы семантических зон 'ТЯНУТЬ' и 'ТОЛКАТЬ' в типологической перспективе // Проблемы компьютерной лингвистики и типологии. 2017. № 6. С. 142-152
- [2] Рахилина Е. В., Резникова Т. И., Шаблонов Ш. Ш. Фреймовый подход к лексической типологии // Вопросы языкознания. 2013. № 2. С. 3–31.
- [3] Сайт Википедия, статья ELMo. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/ELMo> (дата обращения: 11.10.2025).
- [4] Сайт Национального корпуса русского языка. URL: <https://ruscorpora.ru/> (дата обращения: 11.10.2025).

## Секция: "Теория вероятностей и математическая статистика".

### Статистические свойства критерия эквивалентности в логнормальной модели с недостающими данными

Драницына Маргарита Александровна<sup>1</sup>, Захарова Татьяна Валерьевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ООО «Центр научного консультирования», Российский университет дружбы народов, e-mail: margarita13april@mail.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, e-mail: zaharovatv@my.msu.ru

В клинических исследованиях вероятность ошибки первого рода соответствует риску ошибочного признания эффективности и безопасности и, как следствие, риску пациента получить лекарственный препарат, не подтвердивший свои терапевтические эффекты. Ошибочное признание биоэквивалентности означает, что пациент получит воспроизведенный препарат, эффекты которого клинически значимо отличаются от оригинального препарата, подвергнувшегося масштабной разработке. Традиционно в клинических исследованиях уровень значимости  $\alpha$  устанавливается равным 5% или ниже, при необходимости с поправкой на множественные сравнения. Конкретное значение  $\alpha$  зависит от априорной правдоподобности проверяемой гипотезы и ожидаемого влияния результатов на последующие регуляторные решения [1].

Одним из источников систематической ошибки в таких исследованиях могут являться недостающие данные и выбросы в выборках фармакокинетических измерений, особенно в терминальной части кривой зависимости концентрации от времени. Это приводит к смещенным оценкам площади под кривой ( $AUC$ ) и, следовательно, к искажению оценки биоэквивалентности. В условиях клинических и этических ограничений (в частности, невозможность отбора большого числа образцов крови у добровольцев) влияние неполноты данных становится особенно существенным [2].

В настоящей работе рассматривается модель неполноты наблюдений для логнормальных оценок, описанная в [3]. Исследуется поведение критерия для проверки гипотезы  $H_0$  о небиоэквивалентности в условиях недостающих данных и возможная инфляция ошибки первого рода. Для указанной модели построены границы области отвержения гипотезы, в которых контролируется ошибка первого рода (1)–(2) :

$$\text{левая граница равна} \quad \frac{-\ln \theta_2}{\hat{\sigma}_d \sqrt{\frac{2}{n}}} + t_\alpha \frac{\tilde{\sigma}_d}{\hat{\sigma}_d}, \quad (1)$$

$$\text{правая граница равна} \quad \frac{\ln \theta_2}{\hat{\sigma}_d \sqrt{\frac{2}{n}}} - t_\alpha \frac{\tilde{\sigma}_d}{\hat{\sigma}_d}. \quad (2)$$

Проведено численное моделирование, подкрепляющее теоретические результаты. Полученные результаты позволяют количественно оценивать влияние доли недостающих наблюдений на уровень значимости в задачах проверки биоэквивалентности и могут быть использованы при проектировании подходов к анализу эквивалентности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] International Conference on Harmonisation. *Statistical Principles for Clinical Trials E9: ICH Harmonised Tripartite Guideline*. Geneva, 5 Feb. 1998. 36 p.
- [2] Chow S. C., Liu J. P. *Design and Analysis of Bioavailability and Bioequivalence Studies*. Third Edition. Boca Raton: CRC Press, 2009. 754 p.
- [3] Захарова Т. В., Тархов А. А. Оценка уровня значимости критерия Шуирмана для проверки гипотезы биоэквивалентности при наличии пропущенных данных // *Информатика и ее применения*. 2019. Т. 13, № 3. С. 58–62.

## Существование и единственность решений для СДУ в нормированных пространствах $L_p, p < 2$

Захарова Татьяна Валерьевна<sup>1</sup>, Савушкин Евгений  
Владимирович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, e-mail: zaharovatv@my.msu.ru

<sup>2</sup> ФИАН имени П. Н. Лебедева РАН, e-mail: evsavush@yandex.ru

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) широко применяются при моделировании динамических систем, на поведение которых влияет случайность. Их использование позволяет корректно описывать эволюцию стохастических процессов в задачах физики, биологии, финансов и других областей. Вопрос существования и единственности решений СДУ является центральным для корректности построенной модели и для разработки численных методов ее анализа.

Классическим результатом является теорема Ито[1], которая утверждает, что если коэффициенты являются липшицевыми функциями по пространственным аргументам и имеют рост не выше линейного по временному аргу-

менту, то СДУ в гильбертовом пространстве  $L_2$  имеет решение и оно единственно по траекториям, т.е. имеет единственное сильное решение.

Однако многие прикладные модели требуют рассмотрения пространств  $L_p$  при  $p < 2$ , что существенно усложняет анализ из-за потери гильбертовой структуры.

Целью настоящей работы является обобщение классической теоремы Ито на случай банахова пространства  $L_p$ ,  $1 < p \leq 2$ , и доказательство существования сильного решения соответствующего стохастического дифференциального уравнения. Авторами впервые показано, что при выполнении условий липшицевости и ограниченного роста коэффициентов решение существует и принадлежит пространству  $L_p$ .

Доказательство основано на методе последовательных приближений. Построена сходящаяся последовательность приближений, для которой получены оценки в норме  $L_p$ . В процессе доказательства использованы неравенства для стохастических интегралов [2, 3] и свойства вогнутых непрерывных функций из класса  $L_p$ .

Полученный результат расширяет класс моделей, для которых гарантируется существование сильного решения, и может служить теоретической основой для построения устойчивых численных схем в пространствах, отличных от  $L_2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Круглов В. М. *Случайные процессы*. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 336 с.
- [2] Yamada T., Watanabe S. On the Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equations // *J. Math. Kyoto Univ.* 1971. **11**. P. 155–167.
- [3] Kim Y. A note on the moment inequalities for stochastic integral // *Mathematical Inequalities and Applications*. 2013. **16**(4). P. 1023–1029.

## Анализ биоэквивалентности для произвольных классов распределений

Захарова Татьяна Валерьевна<sup>1</sup>, Панов Павел Владиславович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: tvzaharova@mail.ru

<sup>2</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: mazeinmind@yandex.ru

В работе рассматривается задача проверки лекарственных препаратов на биоэквивалентность. Проверка биоэквивалентности является обязательным этапом регистрации воспроизведенных лекарственных препаратов и служит подтверждением их взаимозаменяемости и безопасности.

Традиционно для проверки гипотезы биоэквивалентности используется процедура двух односторонних тестов (TOST), применяемая к логарифмически трансформированным фармакокинетическим характеристикам, таким

как  $\log \text{AUC}$  и  $\log C_{\max}$ . При этом предполагается, что указанные величины имеют нормальное распределение и, как правило, одинаковые дисперсии [3].

Основным ограничением классического подхода является его зависимость от параметрических предположений: при отклонениях от нормальности (например, при наличии выбросов, асимметрии или смесей распределений) оценки средних и дисперсий становятся неустойчивыми, что может привести к ошибочным выводам. Кроме того, процедура TOST учитывает только различия в средних, игнорируя возможные расхождения в форме распределений тестового и референтного препаратов [1].

Авторами предложен универсальный подход к анализу биоэквивалентности, не зависящий от предположений о виде распределения и, тем самым, не требующий нормальности распределения фармакокинетических характеристик. Метод основан на использовании симметризированной дивергенции Кульбака–Лейблера как меры расстояния между полными распределениями фармакокинетических характеристик.

Идея применения дивергенции для оценки биоэквивалентности была впервые высказана в работе [2], однако ее параметрическая реализация остается чувствительной к нарушениям модельных предположений. В настоящей работе эта проблема решается за счет непараметрической оценки плотностей. Для оценки плотностей применяется робастная ядерная оценка, в которой веса учитывают как наличие аномальных наблюдений, так и пропуски данных. Пороговое значение дивергенции калибруется так, чтобы сохранить эквивалентность с регуляторным критерием 80/125% в случае нормальности, но при этом метод остается корректным для произвольных классов распределений.

В численных экспериментах показано, что предложенный подход обеспечивает более надежное принятие решений в условиях малых выборок, пропусков и выбросов, существенно снижая частоту ложных заключений о биоэквивалентности.

В настоящее время продолжают исследования, направленные на адаптацию метода к данным с произвольными распределениями и разработку статистически обоснованных пороговых критериев, обеспечивающих согласие метода с регуляторными требованиями. По результатам данной работы подготовлена и сдана в печать статья для сборника *BIOKYBERNETIKA*.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Захарова Т. В., Панов П. В. Проверка гипотез биоэквивалентности лекарственных препаратов // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2023. — № 4.

- [2] Dragalin V., Fedorov V., Patterson S., Jones B. Kullback–Leibler divergence for evaluating bioequivalence // Statistics in Medicine. — 2003. — Vol. 22, № 6. — P. 913–930.
- [3] Chow S.-C., Liu J.-P. Design and Analysis of Bioavailability and Bioequivalence Studies. — 3rd ed. — Chapman & Hall/CRC, 2014.

## **Анализ модели коллективного риска с ИНВЕСТИЦИЯМИ**

**Хохлов Юрий Степанович, Котова Анна Игоревна**

Кафедра математической статистики, e-mail: yskhokhlov@yandex.ru, annaki8865@gmail.ru

Модель коллективного риска является очень популярной в актуарной математике. В классической постановке анализу этой модели посвящено большое число работ и некоторое количество монографий. При этом предполагается, что все доступные средства используются в самой страховой компании. Но в реальных задачах страховщики стараются как-то использовать часть средств для инвестиций, чтобы улучшить финансовую ситуацию. Такая задача также рассматривалась в работах некоторых авторов, но в одномерном случае (смотри, например, [1]).

В нашем докладе мы обобщаем известные результаты на случай, когда имеется несколько возможных направлений страхования. Как и в одномерном случае главная задача состоит в том, чтобы описать динамику такой системы. Для двумерной модели коллективного риска с инвестициями составлено стохастическое дифференциальное уравнение динамики капитала компании и найдено в явном виде его решение. Это наш основной результат. Его доказательство потребовало некоторых усилий и является нетривиальным. Затем, используя этот результат и опираясь на уже известные результаты других авторов, получена некоторая оценка для вероятности разорения.

Это исследование было проведено в соответствии с научной программой Московского центра фундаментальной и прикладной математики и факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Куркина А. О. Стохастические модели управления инвестициями страховой компании без использования заимствований. Канд. диссертация. М. : МИЭМ, 2011.

## Вероятностные распределения потоков тепла в Северной Атлантике по результатам данных многолетних наблюдений

Ромашина Ксения Алексеевна<sup>1</sup>, Беляев Константин Павлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: romashinaka@my.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра математической статистики, e-mail: kosbel55@gmail.com

Объектом исследования в данной работе служат тепловые потоки в Северной Атлантике, показанные во взаимодействии океана и атмосферы. Предметными задачами исследования является их количественный и качественный анализ для представления внутригодовой изменчивости (выявления закономерности) в практическом приложении результатов в метеорологии, океанологии и климатологии. Выборка – набор данных, полученных за 1999 год. Основным математическим методом, использованным в данной работе, является представление процесса изменчивости тепловых потоков в виде

$$dX = a(t, X)dt + b(t, X)dW$$

где  $X(t)$  – изучаемый процесс, а именно сумма потоков скрытого и явного тепла в момент времени  $t$ ,  $dX = X(t + dt) - X(t)$  – приращение за интервал времени  $dt = t + dt - t$  в фиксированной точке,  $a(t, X), b(t, X)$  – коэффициенты дрейфа и диффузии соответственно, а  $dW$  – стандартное обозначение «белого шума», независимого от  $X(t)$  с нулевым средним и дисперсией, равной единице.

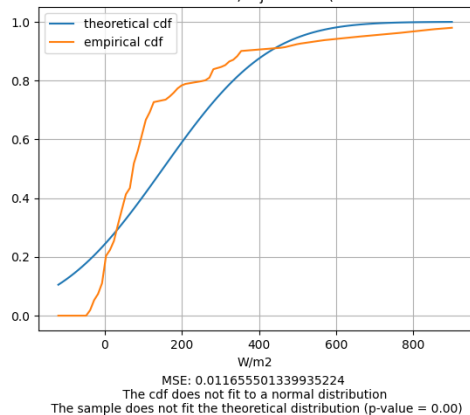
В работе приводятся результаты статистических экспериментов с данными наблюдений из базы данных ERA5 [1]. Вычисления выполнялись с использованием стандартной библиотеки из пакета PYTHON 5. Исходя из статистически построенной эмпирической функции распределения, последовательно вычислялось новое распределение(я). Коэффициенты были взяты из предыдущих исследований [2] и использованы для подстановки в интегральные выражения

$$P_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_{n+1} = x \mid X_n = u) dP_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - u - a_{n+1}(u)}{b_{n+1}(u)}\right) dP_n(u)$$

База данных ERA5 содержит данные не только о тепловых потоках, но и о температуре поверхности моря (SST), давлении поверхности моря (SSP) и ряде других характеристик. Чтобы обеспечить более широкое возможное представление данных для экспериментов, выбраны фиксированные значения SST и рассмотрены тепловые потоки при заданном значении SST по всей области (Северная Атлантика). Для SST были выбраны множества 3 значений, а именно минимальное, среднее и максимальное SST по региону,

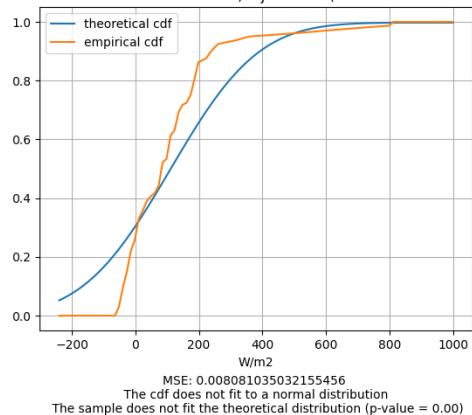
и изучалось распределение теплового потока при выбранных значениях SST. Начальным днем было выбрано 1 января 1999 г.

heat fluxes cdf at  $277^{\circ}\text{K} < T < 282^{\circ}\text{K}$ , 2 jan 1999 (interval from -67 to -64 W/m<sup>2</sup>)



(a)

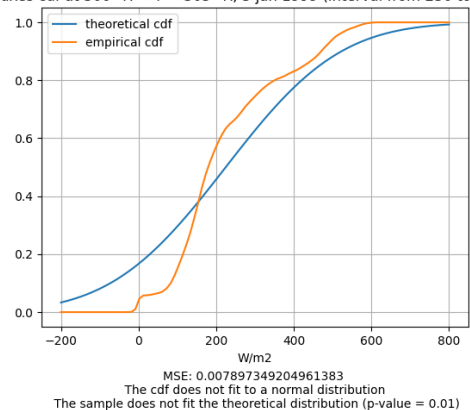
heat fluxes cdf at  $276^{\circ}\text{K} < T < 281^{\circ}\text{K}$ , 6 jan 1999 (interval from -67 to -64 W/m<sup>2</sup>)



(б)

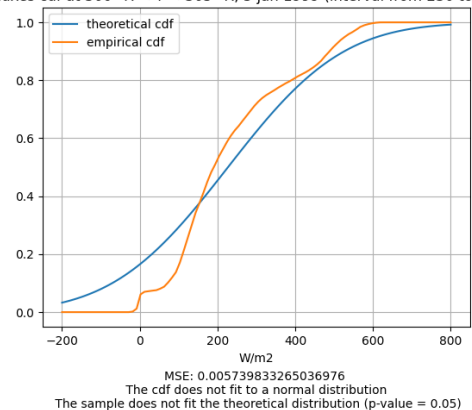
Рис. 1. Распределение теплового потока при минимальном значении SST: (а) для 2 января и (б) для 6 января 1999 г. Синяя кривая — модельное распределение, желтая кривая — наблюдаемое распределение

heat fluxes cdf at  $300^{\circ}\text{K} < T < 305^{\circ}\text{K}$ , 3 jan 1999 (interval from 230 to 233 W/m<sup>2</sup>)



(a)

heat fluxes cdf at  $300^{\circ}\text{K} < T < 305^{\circ}\text{K}$ , 5 jan 1999 (interval from 230 to 233 W/m<sup>2</sup>)



(б)

Рис. 2. Распределение теплового потока при максимальном значении SST: (а) для 3 января и (б) для 5 января 1999 г. Синяя кривая — модельное распределение, желтая кривая — наблюдаемое распределение

На рис. 1–3 показано временное поведение распределений теплового потока для минимального, максимального и среднего SST. Теоретические распределения хорошо согласуются с эмпирическими, особенно в «хвостовых зонах». Наибольшие отклонения наблюдаются для минимального и максимального SST, в средней зоне, но со временем они уменьшаются. Для среднего SST соответствие почти идеальное, критерий Колмогорова подтверждает совпадение с порогом 0,05. Для среднего SST (по всей области), где вероятность

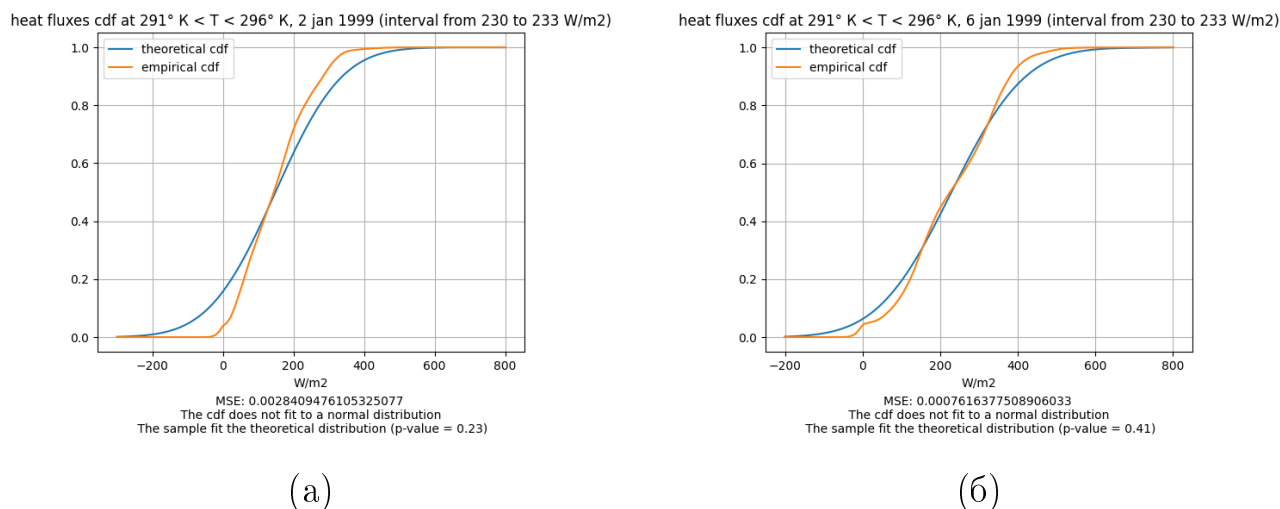


Рис. 3. Распределение теплового потока при среднем значении SST: (а) для 2 января и (б) для 6 января 1999 г. Синяя кривая — модельное распределение, желтая кривая — наблюдаемое распределение

появления SST максимальна, соответствие распределению теплового потока намного лучше, чем для менее вероятностных (по SST) зон. Модельное распределение лучше описывает тепловые потоки для наиболее вероятных значений SST.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hersbach H., et al. The ERA5 global reanalysis // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. — 2024. — Vol. 146, No. 730. — P. 1999–2049.
- [2] Belyaev K.P., Tuchkova N.P. Analysis of spatiotemporal variability of the coefficients of stochastic differential equation of the heat fluxes in the North Atlantic in their modeling by stochastic process // Lobachevskii J. of Math. — 2023. — Vol. 44, No. 7. — P. 2601–2606. — DOI: 10.1134/S1995080223070090.
- [3] Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A. Comparison of statistical approaches for reconstructing random coefficients in the problem of stochastic modeling of air–sea heat flux increments // Mathematics. — 2024. — Vol. 12, No. 2. — P. 1–21.
- [4] Belyaev K.P., Tuchkova N.P. Approximation of the heat fluxes dynamics in the North Atlantic by stochastic diffusion process // Lobachevskii J. of Math. — 2022. — Vol. 43, No. 7. — P. 1805–1812. — DOI: 10.1134/S1995080222100055.
- [5] Tuchkova N.P., Belyaev K.P., Mikhaylov G.M., Romashina K.A. Analysis of intraannual variability of heat fluxes in the North Atlantic based on approximation of trajectories of the stochastic diffusion process // Autom. Doc. Math. Linguist. — 2024. — Vol. 58, No. 6. — P. 389–397. — DOI: 10.3103/S0005105525700487.

## Моделирование и анализ групповых наблюдений

Белов Андрей Григорьевич<sup>1</sup>, Белова Оксана Андреевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Лаборатория обратных задач кафедры математической физики, e-mail: belov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Федеральный научный центр исследований и разработки иммунобиологических препаратов имени М. П. Чумакова, e-mail: mikasusha@bk.ru

В разных областях используется объединенное (групповое) тестирование. Более 80 лет, начиная с работы Дорфмана [1] по скринингу крови, групповое тестирование является активной областью исследований в статистической науке.

В контексте зараженности иксодовых клещей в эпидемиологии состояние зараженности особи можно описать двумя исходами “заражена” или “не заражена”. Однако окончательное заключение делается после проведения диагностического теста на наличие патогена в образце. Проведение теста часто сопряжено с определенными затратами. Поэтому при оценивании уровня зараженности при большом числе индивидов, необходимо минимизировать число тестов. Для решения этого вопроса широкое распространение получил метод объединенного (группового) исследования. Он заключается в случайном объединении особей в группы (пулы, “pools”) с фиксированным или переменным их числом и каждая группа анализируется как целое. Если группа содержит хотя бы один инфицированный индивид, то результат анализа группы считается “положительным”, иначе — “отрицательным”, когда отсутствует инфицированный объект в группе.

Также необходимо учитывать, что любой тест не является идеальным. Например, скрининговый иммуноферментный анализ на вирус иммунодефицита человека способен непосредственно обнаружить вирус, однако точность теста зависит от ошибок измерения при тестировании. Несовершенство теста может быть описана двумя характеристиками:

“чувствительность” (“sensitivity”) — вероятность дать положительный диагноз “заражен” для действительно зараженной особи;

“специфичность” (“specificity”) — вероятность правильно дать отрицательный результат теста.

На реальных данных проведено моделирование и оценка зараженности совокупности иксодовых клещей вирусом клещевого энцефалита и боррелиями *Borrelia burgdorferi sensu lato* с помощью метода максимального правдоподобия и моментов, дается их сравнительный анализ. Сделан обзор методов решения прямых и обратных задач распространения бинарных объектов по индивидуальным и групповым наблюдениям [2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dorfman R. The detection of defective members of large populations // Annals Math. Stat. 1943. V. 14. P. 436–440.
- [2] Белов А. Г., Белова О. А. Моделирование и анализ бинарных объектов по групповым наблюдениям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн., 2025. № 2. С. 3–14.