

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва, 2020

УДК 519.71  
ББК 22.18  
Л75

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
МГУ имени М. В. Ломоносова*

**Л75 Ломоносовские чтения:** научная конференция, Москва, факультет  
ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2020 г. : тезисы докладов. — Москва :  
Издательский отдел факультета ВМиК МГУ (лицензия ИД 05899 от  
24.09.2001), 2020. — 172 с.

ISBN 978-5-89407-608-9 (ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова)

В настоящий сборник вошли тезисы докладов секции Вычислительная математика  
и кибернетики конференции «Ломоносовские чтения-2020», проводимой Московским  
государственным университетом М. В. Ломоносова в 2020 году.

УДК 519.71  
ББК 22.18

**ISBN 978-5-89407-608-9**

© Издательский отдел факультета вычислительной математики  
и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова, 2020  
© Авторы докладов, 2020.

# Содержание

*Yu. A. Eremin*

Influence of the non-local dispersion on the near field of core-shell particles deposited on a plane substrate . . . . . 15

*S.V. Gavrilov*

Numerical method for determining the inhomogeneity boundary in the two-dimensional Electrical Impedance Tomography problem in the case of piecewise constant conductivity . . . . . 16

*P. V. Golubtsov*

Optimal image processing on a continuous plane via convolution: balancing processing quality and efficiency . . . . . 17

*I. V. Lopushenko*

Hybrid scheme of the Discrete Sources Method to solve nonlocal scattering problems in plasmonic applications . . . . . 19

*E.A. Mikhailov, S. A. Elistratov, D. A. Grachev*

Correlation tensor of the magnetic field in dynamo theory . . . . . 20

*V.D. Ustinov, E. G. Tsybrov, S. Y. Nikitin*

Static laser diffraction — reconstruction of red blood cells size and shape distributions . . . . . 21

*A. A. Vasilyeva, D. S. Efremenko, A. Doicu*

Image simulator for the total internal reflection microscopy . . . . . 22

*M. A. Yurkin*

Characterization of single particles from light-scattering profiles using parametric shape models . . . . . 23

*M. A. Yurkin*

Discrete dipole approximation for electromagnetic scattering simulations 24

*С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселёв, М. В. Орлов, С. М. Орлов*

Исследование задач оптимального управления для математических моделей экономического роста на основе принципа максимума Понтрягина . . . . . 25

<i>Е. Л. Аксенова, О. Д. Борисенко, Л. С. Корухова</i>	
Система развертывания распределенных сервисов в облачной среде	27
<i>В. С. Анашин</i>	
Некоторые особенности теоретико-автоматных моделей смарт-контрактов в среде блокчейн . . . . .	28
<i>А. В. Баев</i>	
Обратная задача для уравнений мелкой воды в бассейне с переменной глубиной . . . . .	30
<i>В. В. Балашов, Е. А. Антипина</i>	
Итерационное планирование вычислений и обмена данными в модульных вычислительных системах реального времени . . . . .	31
<i>А. А. Белолипецкий, К. О. Семенов</i>	
Математическая модель разрушения криогенного дейтерий-тритиевого слоя в цилиндрической лазерной мишени . . . . .	32
<i>Т. В. Белянкина</i>	
Эффективность дискретного наблюдения с памятью в задаче обратной экстраполяции стохастических процессов . . . . .	33
<i>С. В. Богомолов, А. Е. Кувшинников, И. В. Павлов</i>	
Разрывный метод частиц. Двумерный случай . . . . .	34
<i>Е. И. Большакова, А. С. Сапин</i>	
Задачи построения программных морфологических моделей для русского языка . . . . .	36
<i>Е. А. Бордаченкова, А. Д. Лихтарова</i>	
Автоматическое обнаружение наводящих вопросов в социологических опросах . . . . .	37
<i>А. В. Борисов</i>	
Алгоритмы классификации матриц Адамара . . . . .	38
<i>А. С. Братусь, В. В. Тихомиров</i>	
О замкнутых траекториях системы уравнений Лотки—Вольтерры в многомерном пространстве . . . . .	40
<i>С. С. Будзинский, А. Veuter, В. А. Вольперт</i>	
Исследование нелинейной динамики периодических волн в модели нейронного поля . . . . .	41
<i>А. А. Васин, М. С. Огнева</i>	
Последовательные равновесия в многошаговых играх с сигналами . . . . .	42
<i>А. А. Васин, Н. И. Цыганов</i>	
Алгоритмы оптимизации сети передачи некоторых энергетических рынков . . . . .	43

<i>Ю. С. Владимирова</i>	
Пример применения алгебраической системы рассуждения, основанной на силлогистическом выводе . . . . .	45
<i>Д. Ю. Волканов, С. А. Курдюкова</i>	
Метод разбора заголовка пакета в ячейках конвейера сетевого процессорного устройства . . . . .	46
<i>М. О. Воронцов, А. А. Кудрявцев, Ю. Н. Недоливко</i>	
О представлении масштабных смесей обобщенных гамма-распределений . . . . .	47
<i>А. А. Вылиток, Т. В. Генералова</i>	
Условия регулярности L-графов без псевдоциклических путей . . . . .	48
<i>А. В. Галков, И. И. Машечкин, И. С. Попов</i>	
Разработка системы биометрической аутентификации пользователей мобильных устройств на основе поведенческих характеристик ввода текста . . . . .	49
<i>А. И. Гетьман, М. К. Иконникова</i>	
Разработка методов классификации сетевого трафика на основе машинного обучения . . . . .	51
<i>В. М. Головизнин, Н. А. Афанасьев</i>	
Балансно-характеристический метод расчета трансзвуковых течений с учетом переноса локальных римановых инвариантов . . . . .	52
<i>В. М. Головизнин, Д. Ю. Горбачев</i>	
Алгоритм обобщенной схемы КАБАРЕ на трехмерных треугольных расчетных сетках . . . . .	53
<i>В. М. Головизнин, Петр А. Майоров, Павел А. Майоров</i>	
Негидростатическая модель уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости с поверхностью в приближении «мягкой крышки» . . . . .	54
<i>С. Г. Головина, Е. В. Захаров, Е. Г. Цыбров</i>	
Об одной задаче дифрактометрии на диэлектрическом теле вращения	55
<i>А. Г. Гомзин</i>	
Предсказание рода деятельности пользователей социальной сети . . . . .	56
<i>М. Г. Гонопольский, А. Б. Глонина</i>	
Исследование алгоритмов оценки времени отклика задач в многопроцессорных системах с интервальной неопределенностью длительности выполнения работ . . . . .	58
<i>А. В. Горемыкин, А. Е. Бородин, А. А. Белеванцев</i>	
Поиск ошибок переполнения массивов с неизвестным размером в программах на языке С . . . . .	59

<i>О. Е. Горохов, М. И. Петровский, И. В. Машечкин</i>	
Методы обнаружения аномалий в сложно структурированных данных, основанные на нейронных сетях . . . . .	61
<i>А. К. Горшенин, В. Ю. Королев</i>	
Обобщенные вероятностные модели экстремальных осадков . . . . .	62
<i>Н. Л. Григоренко, В. П. Горьков</i>	
О свойствах одного класса позиционных управлений в межорбитальных перелетах задачи двух тел . . . . .	63
<i>Н. Л. Григоренко, Е. Н. Хайлов, А. Д. Клименкова</i>	
Минимизация концентрации раковых клеток в модели конкуренции Лотки–Вольтерры с немонотонной функцией терапии . . . . .	64
<i>А. П. Груздев, Н. Б. Мельников</i>	
Предобусловливание метода Крылова для решения динамических моделей общего экономического равновесия . . . . .	65
<i>А. В. Гуляев, Е. Н. Раевский, А. С. Бубнов</i>	
Перспективы создания Вики-систем в сфере образования (на примере Википедии факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ) . . . . .	66
<i>Д. А. Гуляев, К. А. Жуков, Е. Н. Раевский, А. С. Бубнов</i>	
Использование ботов в Вики-системах (текущее состояние и перспективы) . . . . .	67
<i>М. Р. Давидсон, П. С. Гринько</i>	
О решении динамической задачи оптимизации движения грузовых железнодорожных вагонов . . . . .	68
<i>А. Р. Данилишин, Д. Ю. Голембиовский</i>	
Риск-нейтральная динамика для модели ARIMA-GARCH с ошибками, распределенными по закону $S_u$ Джонсона . . . . .	70
<i>В. Н. Денисов</i>	
Достаточные условия стабилизации решений параболических уравнений с растущим младшим коэффициентом . . . . .	71
<i>А. А. Дряженков, М. М. Потапов</i>	
Применение модифицированного обобщенного принципа невязки к задаче граничного управления квазилинейным волновым уравнением . . . . .	72
<i>В. А. Егоренков, М. М. Логинова</i>	
Сравнение эффективности подходов для построения адаптивных краевых условий для уравнения Шредингера при моделировании индуцированных лазерным импульсом контрастных структур в полупроводнике . . . . .	73

*Г. Г. Еленин, Т. Г. Еленина*

Редукция 3D задачи рассеяния на силовом центре и численные методы ее решения . . . . . 75

*П. А. Ермолаев, И. Н. Полякова*

Анализ методов поиска похожих судебных решений . . . . . 75

*Т. Я. Ершова*

О сходимости сеточного решения задачи для уравнения третьего порядка в случае сильного пограничного слоя . . . . . 77

*В. И. Жуковский, Л. В. Жуковская, К. Н. Кудрявцев*

Коалиционная равновесность и риск в конфликтах с нетрансформальной полезностью . . . . . 78

*М. И. Журавский, М. И. Петровский, И. В. Машечкин, М. А. Казачук*

Применение метрических и нейросетевых методов построения модели пользователя в задаче динамической аутентификации пользователей на основе анализа работы с клавиатурой компьютера . . . . . 79

*Р. Д. Закляков, И. В. Машечкин*

Концепция системы поведенческого мониторинга корпоративных пользователей . . . . . 80

*В. Н. Игнатъев, Д. А. Корябкин, Н. В. Шимчик*

Повышение точности анализа помеченных данных с помощью символьных вычислений . . . . . 81

*М. А. Казачук, М. И. Петровский, И. В. Машечкин, В. В. Тюляева*

Применение kernel-методов построения модели пользователя в задаче динамической аутентификации пользователей на основе анализа работы с клавиатурой компьютера . . . . . 82

*Н. Ю. Капустин*

Об одной неклассической задаче для оператора теплопроводности . . . . . 83

*М. Е. Карпов, П. С. Андрианов, А. В. Хорошилов*

Метод переиспользования абстракций в статическом анализе для поиска состояний гонки . . . . . 84

*Ю. А. Комаров, А. Б. Куржанский*

Минимаксные соотношения в задачах с векторным функционалом . . . . . 85

*М. В. Коровина*

Типы асимптотических разложений решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности . . . . . 86

*Ю. С. Корухова, Д. И. Пташник*

Об одном подходе к генерации аккомпанемента музыкальных произведений на основе машинного обучения . . . . . 87

<i>А. В. Краев, А. И. Rogovskiy</i>	
Об одновременном приведении двух линейных систем к виду с ГНОП	88
<i>Л. В. Крицков</i>	
Классы равномерной сходимости спектральных разложений для общих операторов четного порядка на прямой	90
<i>А. А. Кудрявцев, Е. А. Цветков</i>	
О выборках из обобщенного отрицательного биномиального распределения	92
<i>Д. И. Кукушкин, В. А. Антоненко</i>	
Исследование возможности использования зависимости по данным при реализации бессерверных вычислений	93
<i>А. В. Кулагин, Ю. И. Ожигов, Н. Б. Викторова</i>	
Темные состояния ансамблей n-уровневых атомов: структура, отбор и применение	94
<i>Л. Н. Лукьянова</i>	
Оптимизация дисконтированного потребления в модели Солоу с учетом запаздывания при вводе новых фондов	98
<i>Д. В. Маркин, А. С. Братусь</i>	
Математическая модель эволюционной адаптации в открытой системе квазивидов в условиях конкурентного взаимодействия видов	99
<i>Н. Б. Мельников, Г. В. Парадеженко, Б. И. Резер</i>	
Простой вывод выражения для фактора Дебая—Валлера	100
<i>В. В. Морозов, С. И. Мартынов</i>	
Оценка стоимости американского опциона с помощью бермудского опциона	101
<i>Д. Е. Намиот, И. А. Пучкина</i>	
Анализ матриц корреспонденций для описания транспортных потоков	102
<i>И. М. Никольский</i>	
О моделировании сенсорных сетей	103
<i>М. С. Никольский</i>	
О линейных многошаговых управляемых процессах	104
<i>Н. М. Новикова, И. И. Поспелова, М. Г. Некрасова</i>	
Смешанные расширения двух типов для модельной двухкритериальной матричной игры	105
<i>Ю. И. Ожигов</i>	
Квантовая операционная система	106
<i>Е. А. Павельева, М. А. Проценко</i>	
Сопоставление изображений на основе информации о фазе	109



---

<i>А. А. Панфёров</i>	
Сильно циклические векторы дифференциальных систем с полиномиальными коэффициентами . . . . .	110
<i>В. Н. Пашков</i>	
Метод выбора конфигурации отказоустойчивой распределенной платформы управления для программно-конфигурируемых сетей . . .	112
<i>В. Н. Пашков, А. А. Курдюкова</i>	
О методе кэширования видео для сетей доставки контента с иерархической структурой . . . . .	113
<i>Л. И. Петрова</i>	
Исследование интегрируемости дифференциальных уравнений с помощью кососимметричных дифференциальных форм . . . . .	115
<i>А. М. Попов, Н. Э. Шагиров</i>	
Моделирование возбужденных состояний квантовой точки . . . . .	116
<i>Н. Н. Попова, К. Г. Хамитов, Ю. А. Коньков, М. Т. Кастильо</i>	
Анализ методов настройки гиперпараметров глубоких нейросетей на многопроцессорной системе на базе процессоров POWER8 . . . . .	117
<i>А. М. Портной, Д. Ю. Турдаков, М. Д. Дробышевский</i>	
Оптимизация выбора шума в алгоритме ERGG для обеспечения вариабельности графов . . . . .	119
<i>Я. А. Пчелинцев, А. В. Насонов, А. С. Крылов</i>	
Регуляризирующие методы повышения резкости изображений мерцающей флуоресцентной микроскопии . . . . .	120
<i>Д. А. Руденко, А. Ю. Корчагин, В. Ю. Королев</i>	
Автоматическое составление ледовых возрастных карт по спутниковым снимкам нейросетевыми методами сегментации . . . . .	121
<i>М. Н. Саблин</i>	
Особенности применения метода конечных разностей для краевых задач с обобщенными решениями . . . . .	122
<i>Н. П. Савенкова, А. Ю. Мокин, Н. С. Удовиченко</i>	
Математическое моделирование возникновения анодного эффекта в электролизной ванне . . . . .	124
<i>И. В. Садовничая, А. М. Савчук</i>	
Базисность Рисса из подпространств для оператора Дирака с суммируемым потенциалом . . . . .	125
<i>С. П. Самсонов</i>	
Об одном классе численных методов оптимального управления . . .	126
<i>С. Н. Селезнева</i>	
Проверка мультиаффинности многочленов над конечным полем . .	127

<i>Д. А. Семенихин, В. О. Писковский</i>	
Разработка системы идентификации канала утечки информации по фотографии документа, сделанной с экрана компьютера . . . . .	128
<i>А. В. Сетуха, В. С. Степанищева, А. С. Ненашев</i>	
О некоторой модели антенного порта на основе граничных интегральных уравнений . . . . .	129
<i>С. С. Симаков, А. Е. Тимофеев</i>	
Моделирование сердечно-сосудистой системы пациента с имплантированным аппаратом вспомогательного кровообращения .	130
<i>М. А. Синякова, Е. П. Степанов</i>	
Об одном подходе к обеспечению качества сервиса в виртуальных пластах . . . . .	131
<i>А. П. Смирнов, Р. Р. Загидуллин, С. А. Матвеев, С. Г. Рыкованов</i>	
Гибридный параллелизм в алгоритмах, основанных на методе конечных объемов . . . . .	132
<i>А. С. Смирнов, В. А. Костенко</i>	
Свойства потокового алгоритма построения статико-динамических расписаний. . . . .	134
<i>И. Н. Смирнов</i>	
О многошаговом методе усвоения данных в климатических моделях	135
<i>С. Н. Смирнов, Н. А. Андреев</i>	
Численное решение уравнения Беллмана—Айзекса в задачах управления портфелем финансовых активов . . . . .	138
<i>М. А. Соловьев, Д. В. Манушин, Е. Ю. Папазьян, С. С. Макаров</i>	
Построение предиката пути как задача абстрактной интерпретации бинарного кода . . . . .	139
<i>А. Г. Сорока, А. В. Мещеряков, С. В. Герасимов</i>	
Классификация астрономических данных без разметки . . . . .	140
<i>Е. П. Степанов</i>	
Методика исследования эффективности динамического демультимплексирования . . . . .	141
<i>В. И. Строев, Д. Ю. Турдаков</i>	
Анализ пользователей многопользовательских онлайн-игр . . . . .	143
<i>В. В. Терновский</i>	
Численные методы в задачах оптимального управления . . . . .	144
<i>И. В. Тимохин, Е. Е. Тыртышников</i>	
Построение базиса для циклических решений уравнения Смолуховского . . . . .	145

---

<i>П. А. Точилин</i>	
О построении кусочно-аффинной функции цены в одной задаче оптимального управления . . . . .	146
<i>Р. М. Третьякова, А. В. Сетуха, Г. А. Бочаров</i>	
Численное моделирование фильтрационных течений вязкой жидкости в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений . . . . .	147
<i>С. Н. Фёдоров</i>	
О классе 2-платовидных булевых функций . . . . .	148
<i>М. В. Федотов, Д. М. Харитонов</i>	
Самозахват волн при трехволновом взаимодействии световых импульсов в среде с комбинированной нелинейностью . . . . .	150
<i>В. В. Фомичёв, А. О. Высоцкий</i>	
Алгоритм построения каскадного наблюдателя состояния для систем с неопределенностью . . . . .	151
<i>А. С. Фурсов, П. А. Крылов</i>	
О существовании колебательных режимов в модели термомеханической установки . . . . .	153
<i>Ю. С. Хохлов, А. С. Грачева</i>	
Оценки вклада отдельной компоненты в общий риск портфеля для многомерного распределения с тяжелым хвостом . . . . .	155
<i>И. В. Чижов, Е. А. Попова</i>	
Атака на постквантовую криптосистему Мак—Элиса—Сидельникова, построенную на комбинировании кодов Рида—Маллера со случайными кодами . . . . .	157
<i>М. В. Чистолинов</i>	
Схема распределенного конфигурационного управления в стендах функционального тестирования с различными уровнями защиты . . . . .	158
<i>В. А. Шапошников, В. О. Писковский</i>	
Метод управления процессами реконфигурации ПКС при выполнении конкурирующих запросов построения маршрутов . . . . .	159
<i>И. Г. Шевцова, М. А. Целищев</i>	
Оценки точности показательной аппроксимации для геометрических сумм независимых случайных величин . . . . .	160
<i>О. В. Шестаков</i>	
Пороговая обработка вейвлет-коэффициентов сигнала в модели со случайной сеткой . . . . .	161

---

<i>И. А. Широков</i>	
Построение пространственной расчетной сетки для моделирования внешнего обтекания треугольного крыла . . . . .	162
<i>А. Г. Шишкин</i>	
Анализ параметров емкостного высокочастотного газового разряда .	164
<i>Г. Н. Шумкин</i>	
Квантовомеханический расчет коэффициента теплопроводности а-С, построение эмпирического потенциала с учетом теплопроводящих свойств а-С. . . . .	165
<b>Авторский указатель</b> . . . . .	167

# **Influence of the non-local dispersion on the near field of core-shell particles deposited on a plane substrate**

**Eremin Yuri Aleksandrovich**

Lomonosov Moscow State University, CMC Faculty, e-mail: [eremin@cs.msu.ru](mailto:eremin@cs.msu.ru)

Core-shell nanomaterials have gained a huge popularity due to their advanced abilities to control light via manipulations of its core or shell materials and dimensions compared to their homogeneous counterparts. Nanoshells provide greater flexibility in tuning plasmon resonances over a wide range of wavelength, as well as realizing enhancement of the electromagnetic fields. In particular, core-shell particles have emerged as valuable nanomaterials for energy storage and conversion, biosensing, photothermal enhancement, solar cell elements, cancer diagnostic and treatment, and plasmonic nanolaser [1]. When the characteristic size of a metallic nanofeatures become comparable to the Fermi wavelength of the electrons in that metal, the so-called spatial non-locality of the metal arises. Various approaches have been developed that take into account the emerging quantum effect, but still remain within the framework of the Maxwell electromagnetic theory. One of the most popular semi-classic approach which incorporates the spatial dispersion is the Generalized nonlocal optical response model which can be easily incorporated in the Maxwell theory. Such approach has proven to be an excellent tool for plasmonic nanofeatures investigation [2].

In our research we apply an extended version of the Discrete Sources Method (DSM) to consider core-shell nanoparticle deposited on a glass prism. DSM is a semi-analytical surface based method, in which the electromagnetic fields are representing as a finite linear combinations of discrete sources (DS) fields satisfying the Maxwell equations and radiation conditions analytically. DS amplitudes are determined from the boundary conditions enforced at the surfaces of medium discontinuities. So called lowest order distributed multipoles are employed as a basis for solution construction [3]. As compared to other surface based approaches, the DSM (1) does not require any mesh generation or an integration procedure, (2) provides the near and far fields in clear analytical form, (3) solves simultaneously the scattering problem for all external excitations and polarizations, (4) can handle particles with high refractive indices by choosing the different DS numbers in accordance with the refractive indexes, and (5) allows a posterior estimation of the solution errors via the residual of the surface fields computation. The latter ability enables to compute near-fields with a guaranteed accuracy [4]. In case of an obstacle deposited near a layered interface the external field outside the particle are constructed based on the Green Tensor of the layered structure which allows to keep all basic features of the DSM numerical scheme unchanged

## REFERENCES

- [1] Stockman M., Bozhevolnyi S.I., et al. Roadmap on plasmonics //J. Opt. 2018. Vol. 20. P. 04300.
- [2] Raza S., Bozhevolnyi S.I., Wubs M., Mortensen N. A. Nonlocal optical response in metallic nanostructures. Topical Review //J. Phys. Condens. Matter. 2015. Vol. 27. P. 183204.
- [3] Doicu A., Eremin Yu., Wriedt T. Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources. 2000. San Diego: Academic Press.
- [4] Eremin Yu., Doicu A., Wriedt T. Extension of the discrete sources method to investigate the non-local effect influence on non-spherical core-shell particles //J. Quantit. Spectr. Radiat. Trans. 2019. Vol. 235. P. 300–308.

## Numerical method for determining the inhomogeneity boundary in the two-dimensional Electrical Impedance Tomography problem in the case of piecewise constant conductivity

Gavrilov Sergei Vadimovich

Lomonosov Moscow State University, CMC Faculty, e-mail: gvr1serg@gmail.com

Consider a simply connected bounded domain  $\Omega$  with a boundary  $\Gamma_0$ . Let  $\Omega_1$  be a simply connected bounded domain with a boundary  $\Gamma_1$  such that  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ . Boundaries  $\Gamma_0$  and  $\Gamma_1$  are smooth:  $\Gamma_0, \Gamma_1 \in C^2$ . Denote  $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$  and let  $\sigma_0, \sigma_1$  be positive constants.

Consider the functions  $f^j(M)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  that are continuous and not constant on  $\Gamma_0$ . Let the functions  $w^j(M)$  satisfy the conditions  $w^j \in C(\overline{\Omega})$ ,  $w^j(M) = w_i^j(M)$ ,  $M \in \Omega_i$  ( $i = 0, 1$ ), where  $w_i^j \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega_i})$ ,

$$\Delta w_i^j(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \quad (1)$$

$$w_0^j(M) = w_1^j(M), \quad M \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial w_0^j(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial w_1^j(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \quad (3)$$

$$w_0^j(M) = f^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (4)$$

The Electric Impedance Tomography problem can be stated as the problem inverse to the Dirichlet problems (1)–(4). Let the curve  $\Gamma_0$ , constants  $\sigma_0, \sigma_1$  and functions  $f^j(M)$  be given. The problem is to determine the curve  $\Gamma_1$  on the basis

of the following additional information on the solutions  $u^j(M)$  of the Dirichlet problems (1)-(4)

$$\sigma_0 \frac{\partial u^j(M)}{\partial n} = g^j(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (5)$$

where  $n$  is the inward normal on  $\Gamma_0$  and  $g^j(M)$  are given functions continuous on the curve  $\Gamma_0$ .

A numerical method for determining the unknown boundary is proposed. Method is based on the decomposition of the function parameterizing unknown boundary  $\Gamma_1$  using finite-dimensional basis.

## REFERENCES

- [1] Gavrilov S. V., Denisov A. M. Numerical method for determining the inhomogeneity boundary in the Dirichlet problem for Laplace's equation in a piecewise homogeneous medium // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, Vol. 50. N. 8. P. 1391–98

# Optimal image processing on a continuous plane via convolution: balancing processing quality and efficiency

Golubtsov Peter Viktorovich

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, e-mail: golubtsov@physics.msu.ru

Consider an imaging system with a convolution-type distortion:  $g = a * f + \varepsilon$ , where the unknown image  $f$  is a function on  $\mathbb{R}^2$ ;  $a$  is a point spread function (PSF), representing distortion of the imaging system;  $\varepsilon$  is an additive noise, represented by a random field on  $\mathbb{R}^2$ ; and  $g$  is an observed image, a function on  $\mathbb{R}^2$ ,  $*$  is convolution on  $\mathbb{R}^2$ .

We assume that  $a$  is a *circularly symmetric* function  $a(\mathbf{x}) = a(\|\mathbf{x}\|)$   $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  with a *bounded support*. It implies that  $a(\mathbf{x})$  is completely determined by its one-dimensional *profile*  $a(\rho)$ , where  $\rho \in [0, \rho_a] = \text{supp}(a)$ . The additive random noise  $\varepsilon$  is an isotropic homogeneous random field [1] with zero mean and circularly symmetric covariance function  $s$ , i.e.,  $E\varepsilon(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{y}) = s(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ . We will also assume that certain *prior* information about the unknown image  $f$  is known. Specifically,  $f$  is an isotropic homogeneous random field with zero mean and circularly symmetric covariance function  $t$ .

In the reconstruction problem an estimate  $\hat{f}$  of signal  $f$  is computed by applying the *reconstruction* PSF  $r$  to the observed image  $\hat{f} = r * g$ , where  $r$  is a symmetric PSF with radius some fixed radius  $\rho_r$ . The *optimal* reconstruction PSF  $r$  is a function that provides a minimum expected mean-square estimation error:

$$H(r) = E[\hat{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = E[(r * g)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 \sim \min_{r: \text{supp}(r)=[0, \rho_r]} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

In [2] it was shown that taking into account symmetry of measurement model can significantly simplify processing. Here we show that the above optimization problem reduces to a certain *Fredholm integral equation* on the interval  $[0, \rho_r]$ . Specifically, in the case of white noise  $\varepsilon$ , i.e., when  $s = \sigma^2 \cdot \delta$ , it reduces to the *Fredholm integral equation of the second kind*:

$$\sigma^2 \cdot r + \bar{P}r = q : \quad \sigma^2 \cdot r(x) + \int_0^{\rho_r} \bar{P}(x, y) r(y) dy = q(x) \quad \forall x \in [0, \rho_r]$$

where  $q = a * t$ ,  $\bar{P}(x, y) = y \int_0^{2\pi} \bar{p} \left( \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi} \right) d\varphi$  and  $\bar{p} = a * t * a$ .

Figure 1 shows an example of the optimal reconstruction PSF  $r$  and the synthesized PSF  $r * a$  for the flat PSF  $a$  with a slightly blurred edge.

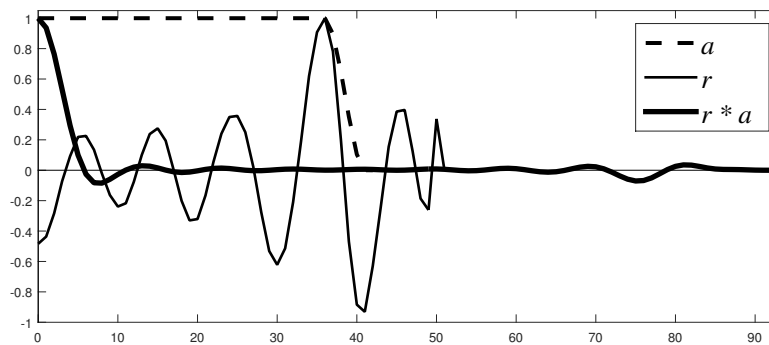


Fig. 1: Normalized profiles of the PSFs  $a$ , optimal  $r$ , and the synthesized  $r * a$ .

Larger radius  $\rho_r$  of the reconstruction PSF  $r$  results in a better estimation quality (smaller  $H_{\text{Opt}}(\rho_r)$ ) as on Fig. 2. However, increasing  $\rho_r$  would also require increased computational complexity for computing optimal  $r$  and applying it to the observed image  $g$ .

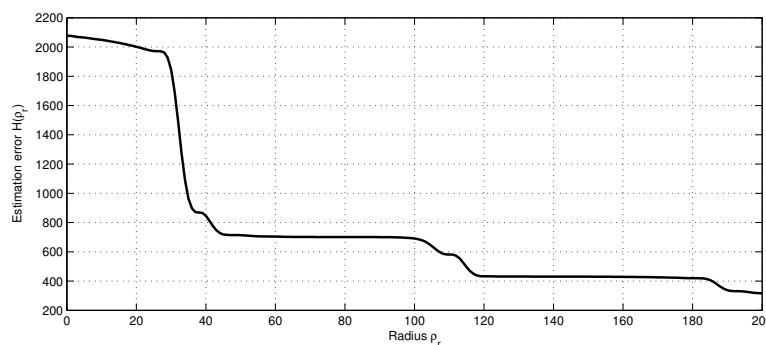


Fig. 2: Reconstruction quality  $H_{\text{Opt}}(\rho_r)$  as a function of  $\rho_r$ .

## REFERENCES

- [1] Gikhman I. I., Skorokhod A. V. Introduction to the theory of random processes. M. : Nauka, 1977. 568 p. (in Russian).
- [2] Filatova S. A., Golubtsov P. V. Invariant Measurement Computer Systems // Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. Vol. 1. N. 2. P. 224–235.



# Hybrid scheme of the Discrete Sources Method to solve nonlocal scattering problems in plasmonic applications

**Lopushenko Ivan Vladimirovich**

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, e-mail: Ivan.Lopushenko@oulu.fi

Aim of the current work is to present a comprehensive up-to-date review of one of the most recently developed numerical schemes based on the Discrete Sources Method (DSM) [1]. These developments are focused on implementation and justification of new efficient mathematical models allowing to accurately simulate response of small plasmonic nanoparticles with scale less than 10nm to the different types of incident fields relevant in applications [2].

It is important to note that material spatial dispersion effects are non-negligible at the given scales [2–4]. Spatial dispersion leads to the more complicated form of constitutive relations as opposed to the ones traditionally used in solving scattering problems. From the point of physics, when we reduce the metal particle size to a scale smaller than electron mean free path, volume currents appear in the interior domain. Then internal electromagnetic field ceases to be purely transversal and obtains longitudinal component. Key thesis is that presence of longitudinal waves actually allows to account for the spatial dispersion in metals. The main problem is that in order to appropriately describe the behavior of longitudinal waves additional theoretical framework is required.

Generalized Nonlocal Optical Response approach has recently proved to be a useful framework to account for these effects [4]. It was successfully incorporated into the proposed numerical DSM technique. Electron energy loss and plane wave scattering problems are considered, with the latter additionally featuring account for the presence of the substrate in the medium. Validity of the obtained results is ensured via a posteriori residual estimation, via comparison of computed scattering properties to the other available simulation techniques, and via comparison to the experimental electron energy loss measurements available in reference literature [5].

## REFERENCES

- [1] Eremin Yu. A., Lopushenko I. V. An analysis of the quantum effect of nonlocality in plasmonics using the discrete sources method // Moscow University Physics Bulletin. 2019. Vol. 74. Iss. 6. P. 570–576.
- [2] Klimov V. V. Nanoplasmonics. Jenny Stanford Publishing, CRC Press, 2014.
- [3] Landau L. D., Lifshitz E. M. Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon Press Ltd, 1984.

- [4] Raza S., Bozhevolnyi S. I., Wubs M., Mortensen N. A. Nonlocal optical response in metallic nanostructures. Topical Review // J. Phys. Condens. Matter. 2015. Vol. 27. P.183204.
- [5] Campos A. et al. Plasmonic quantum size effects in silver nanoparticles are dominated by interfaces and local environments // Nature Physics. 2019. Vol. 15. P.275–280.

## **Correlation tensor of the magnetic field in dynamo theory**

**Mikhailov Evgeny Alexandrovich, Elistratov Stepan Alexeevich, Grachev Denis Allexandrovich**

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru,  
invsblmn@mail.ru, dengrac@mail.ru

Magnetic fields play an important role in evolution of spiral galaxies. For example, they describe the propagation of particles of cosmic rays. Their generation is described by so-called dynamo mechanism which is based on differential rotation and alpha-effect which competes with the turbulent diffusion. For  $\alpha\Omega$  galaxies the averaged governing parameters are used, which characterize the dynamo action [1]. For the galaxies with active processes it is more convenient to use the equations with random coefficients [2,3].

We consider magnetic field using no-z approximation, which has the equations:

$$\begin{aligned}\frac{dB_r}{dt} &= -R_\alpha B_\varphi - k B_r, \\ \frac{dB_\varphi}{dt} &= -R_\alpha B_r - k B_\varphi,\end{aligned}$$

where  $R_\alpha$  characterizes alpha-effect,  $R_\Omega$  characterizes differential rotation. Coefficient  $k$  is connected with turbulent diffusion and it is described by random law [2]

$$k = \begin{cases} k_1, & \text{with probability } p, \\ k_2, & \text{with probability } (1 - p). \end{cases}$$

The magnetic field can be described by the correlation tensor which has the components:

$$K_{ij}(t, \tau) = \langle B_i(t) B_j(t + \tau) \rangle.$$

The components of the correlation tensor were found numerically. It can be shown that for most of the cases they grow exponentially. So we can take the tensor normed to the mean value of squared module of the magnetic field:

$$K_{ij}^N(t, \tau) = \frac{K_{ij}(t, \tau)}{\langle B^2(t) \rangle}.$$

In this work we find numerically the components of this tensor both for the linear case and its nonlinear modification, which describes the saturation of the field near the equipartition value.

## REFERENCES

- [1] Arshakian T. G., Beck R., Krause M., Sokoloff D. Evolution of magnetic fields in galaxies and future observational tests with the square kilometre array // *Astronomy and Astrophysics*. 2009. Vol. 494. P. 21–32.
- [2] Mikhailov E. A., Pushkarev V. V. Fluctuating governing parameters in galaxy dynamo // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. 2018. Vol. 30. N. 3. P. 343–350.
- [3] Mikhailov E. A., Grachev D. A. Galaxy dynamo in inhomogeneous interstellar medium // *Communications of the Byurakan Astrophysical Observatory*. 2018. Vol. 65. N. 2. P. 346–352.

## **Static laser diffraction — reconstruction of red blood cells size and shape distributions**

**Ustinov Vladislav Dmitrievich, Tsybrov Evgeniy Germanovich<sup>1</sup>, Nikitin Sergey Yurievich<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University, CMC Faculty, e-mail: vladustinov90@gmail.com, tsybrovevgeniy@yandex.ru

<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, e-mail: sergeynikitin007@ya.ru

Static laser diffraction method was proposed in 1970 and is now widely used in industry for routine analysis of the size of small particles, see [1]. The essence of the method is that the particles are illuminated with a laser beam and the angular distribution of the intensity of the light scattered by the particles is observed. This is the so-called diffraction pattern. The intensity distribution function serves as known data for the Fredholm equation of the first kind. Solving this equation numerically, one can find the particle size distribution.

In laser ektacytometry, red blood cells of human blood are placed in a shear fluid flow, which orients and elongates the cells. Similarly to laser diffractometry, a diffraction pattern is observed in the low-angle range. The measure of elongation of the cells allows one to determine how much the cells are able to deform. Red blood cells deformability is an important medical parameter, but existing ektacytometers allow only an average deformability to be estimated. In recent works, it was proposed to measure the dispersion of red blood cells deformability distribution [2].

The aim of this work is to generalize the method of laser diffractometry to find particle distributions over two characteristic sizes for the case when the particles are identically oriented elongated spheroids. This will make it possible to determine not only the particle sizes from the diffraction pattern, but also their elongation,

which is especially important for characterizing the deformability of red blood cells in a shear flow.

As a result of the work, the uniqueness theorem for the solution of the corresponding two-dimensional Fredholm integral equation of the first kind was proved. It was also determined in numerical calibration experiments that the solution retains its structure and key features even with a noise amplitude in the diffraction pattern of up to 10%. Natural calibration experiments with blood cells also confirmed this.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 18-71-00158.

## REFERENCES

- [1] Xu R. Particle characterization: light scattering methods // Springer Science and Business Media. 2001. 13.
- [2] Nikitin S. Y. et al. Laser ektacytometry and evaluation of statistical characteristics of inhomogeneous ensembles of red blood cells // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2014. Vol. 146. P. 365–375.

# Image simulator for the total internal reflection microscopy

Vasilyeva Alina<sup>1</sup>, Efremenko Dmitry, Doicu Adrian<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Rosenheim University of Applied Sciences, e-mail: alina.vasilyeva@yahoo.com

<sup>2</sup> German Aerospace Center (DLR), e-mail: dmitry.efremenko@dlr.de, adrian.doicu@dlr.de

Total internal reflection microscopy (TIRM) is an advanced technique for quantitative analysis of particles. In our talk, we present a program for modeling TIRM images. This program consists of (i) the T-matrix module for computing electromagnetic field scattered by axis-symmetric particles and (ii) the visualization subroutine. The T-matrix method is implemented for a particle which is near to the plane surface [1]. The visualization tool is implemented for the optical scheme shown in Fig. 1 [2]. The scattered field on the Gaussian reference sphere of the collector lens is computed by means of the T-matrix method, while the transmitted field on the Gaussian reference sphere of the detector lens is computed by using the ray-tracing technique. For focus field calculation, the Debye diffraction integral is applied.

By using the developed tool, two regimes of TIRM are analyzed. The first regime corresponds to the incident angle less than the angle of total reflection. It provides sharp pictures of particles suitable for retrieving the particle size and shape. The second regime corresponds to the incident angle larger than the angle of total reflection. In this case the measurements are very sensible to the distance between the particle and the surface, although the images are blurry.

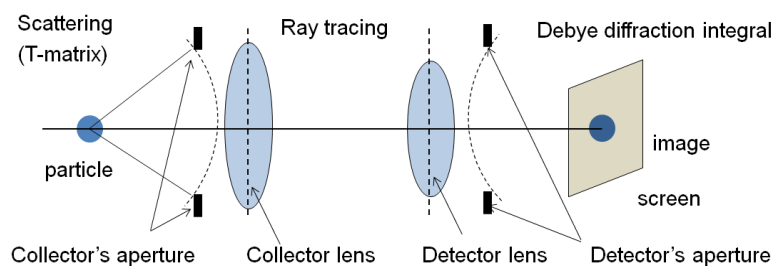


Fig. 1: Optical scheme implemented in the particle visualization module.

## REFERENCES

- [1] A light scattering model for total internal reflection microscopy of geometrically anisotropic particles / A. Doicu, A. A. Vasilyeva, D. S. Efremenko, C. L. Wirth, and T. Wriedt (eds.) // *Journal of Modern Optics*. 2019. Vol. 66. P. 1139–1151.
- [2] Vasilyeva A. A. Modelling of electromagnetic wave scattered by an axisymmetric composite particle and imaging of the scattered field. Master Thesis. Rosenheim University of Applied Sciences, 2018. 65 p.

# Characterization of single particles from light-scattering profiles using parametric shape models

Yurkin Maxim Aleksandrovich

Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion, Novosibirsk State University, e-mail: yurkin@gmail.com

Measurement of angle-resolved light-scattering profiles (LSPs) of single particles provides unique capabilities for detailed and accurate characterization of disperse media. A prominent example of instrument for such measurements is a scanning flow cytometer (SFC) [1]. This talk reviews our results of developing characterization methods for various kinds of particles, mostly focusing on parametric inverse light-scattering problems, i.e. when the particle model is specified up to a few free parameters. The first class of particles (homogeneous and concentric spheres) allow for fast solution of the direct problem (using the Mie theory). The characterization is then based on the direct fit (non-linear regression) using a global optimization technique, which also provides standard errors of estimated characteristics. It has been successfully applied to polystyrene beads, milk fat globules, extracellular vesicles, and lymphocytes.

Unfortunately, such approach is not practical for other particle shapes that require slower solution methods (e.g., the discrete dipole approximation). For this class of particles, we developed a method based on the nearest-neighbor interpolation using a database of simulated LSPs [2]. It also provides standard errors of characteristics and can be accelerated using hierarchical clustering of the database. This general

approach has been successfully applied to blood platelets, erythrocytes, vesicles aggregates, and E. Coli bacteria. The applications of the developed methods are all based on measurements of LSPs of single particles in water using a SFC. However, the same methodology can be applied to other experimental set-ups.

## REFERENCES

- [1] Maltsev V.P. Scanning flow cytometry for individual particle analysis // Rev. Sci. Instrum. 2000. Vol. 71. P. 243–255.
- [2] Moskalensky A.E. et al. Accurate measurement of volume and shape of resting and activated blood platelets from light scattering // J. Biomed. Opt. 2013. Vol. 18. P. 017001.

# Discrete dipole approximation for electromagnetic scattering simulations

**Yurkin Maxim Aleksandrovich**

Voevodsky Institute of Chemical Kinetics and Combustion, Novosibirsk State University, e-mail: yurkin@gmail.com

Light scattering is widely used in remote sensing of various objects ranging from metal nano-particles and macromolecules to atmospheric aerosols and interstellar dust. Moreover, the structure of electromagnetic fields near a particle is of major importance for other phenomena, such as surface-enhanced Raman scattering (SERS) or electron energy-loss spectroscopy (EELS). All these applications require accurate simulations of interaction of electromagnetic fields with particles of arbitrary shape and internal structure. The discrete dipole approximation (DDA) is one of the general methods to handle such problems [1].

The DDA is a numerically exact method derived from the volume-integral form of frequency-domain Maxwell's equation for the electric field [2], and is a special case of method of moments. It commonly employs a regular rectangular grid of dipoles, leading to the computational complexity (and required memory) linear in number of dipoles. This allows one to solve the problems with up to 1 billion dipoles using modern supercomputers. Overall, the DDA is widely used for light-scattering and near-field simulations, thanks to the availability of robust and easy-to-used open-source codes, such as DDSCAT and ADDA.

Importantly, the DDA can be applied to a broad range of electromagnetic applications apart from the standard problem of far-field scattering by single isolated particles. This includes complicated environments (e.g., particles on substrate) and unusual incident fields (leading to SERS and EELS). The DDA can even be applied to simulate fluctuation phenomena, i.e. near-field radiative transfer and Casimir forces, which are related to the Green's tensor in the presence of a particle. The only drawback is that the latter applications require much larger computational resources.

## REFERENCES

- [1] Yurkin M. A., Hoekstra A. G. The discrete dipole approximation: an overview and recent developments // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2007. Vol. 106. P. 558–589.
- [2] Yurkin M. A., Mishchenko M. I. Volume integral equation for electromagnetic scattering: Rigorous derivation and analysis for a set of multilayered particles with piecewise-smooth boundaries in a passive host medium // Phys. Rev. A. 2018. Vol. 97. P. 043824.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА**

**Аввакумов Сергей Николаевич, Киселёв Юрий Николаевич, Орлов  
Михаил Владимирович, Орлов Сергей Михайлович**

Кафедра оптимального управления, e-mail: asn@cs.msu.su, kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su,  
sergey.orlov@cs.msu.su

В докладе предполагается представить краткий отчёт на основе опубликованных статей по указанной тематике в последние годы.

Перечислим основные характеристики исследованных задач оптимального управления.

1. Нелинейная динамика управляемого объекта.
2. Математическая модель допускает экономическую интерпретацию.
3. Модель может иметь различные размерности динамической системы, причём с ростом размерности задача усложняется.
4. Построение решения задачи оптимального управления основано на применении принципа максимума Понтрягина — теореме о необходимых условиях оптимальности [1].
5. Для экстремального решения, построенного на основе принципа максимума, проводится обоснование его оптимальности с привлечением теоремы о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина [2].
6. В изученных задачах при определённых предположениях оптимальное решение может иметь особые участки.
7. Построение экстремального решения в ряде случаев оказывается возможным описать конструктивно с привлечением элементарных функций или некоторых специальных функций.

8. Результаты исследования допускают проведение численных экспериментов для визуализации оптимальных законов управления и соответствующих им оптимальных траекторий.

Отметим работу [3], которая предшествовала серии публикаций авторов доклада и является одной из первых монографий, посвящённых математической экономике и исследованию экономических моделей. Работа [4] является первой работой части авторов коллектива в данном направлении и достаточно популярна среди пользователей социальной сети учёных Researchgate.

В докладе будут детально изложены результаты статей [5, 6]. В публикации [7] представлены результаты для многомерной задачи экономического роста большой размерности.

Результаты исследований можно использовать в методической работе, в том числе при чтении курса оптимального управления.

Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1961.
- [2] Киселёв Ю. Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Материалы научного семинара «Математические модели в экономике и биологии». М. : МАКС Пресс, 2003. С. 57–67.
- [3] Ашманов С. А. Математические модели в экономике. М. : Изд-во МГУ, 1980.
- [4] Аввакумов С. Н., Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Тарасьев А. М. Задача максимизации прибыли для производственных функций Кобба–Дугласа // Нелинейная динамика и управление. Вып. 5. М. : Физматлит. 2007. С. 309–350.
- [5] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование одной двухсекторной модели экономического роста с производственной функцией Кобба–Дугласа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2010. № 2. С. 56–63.
- [6] Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией типа CES // Труды международной конференции «Динамика систем и процессы управления», посвящённой 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2015. С. 220–227.



- [7] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Многомерная модель экономического роста с интегральной функцией полезности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2020. № 2. С. 23–36.

## **СИСТЕМА РАЗВЕРТЫВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЕРВИСОВ В ОБЛАЧНОЙ СРЕДЕ**

**Аксенова Елена Леонидовна<sup>1</sup>, Борисенко Олег Дмитриевич<sup>2</sup>, Корухова  
Людмила Сергеевна<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: lenaaxenova@ispras.ru

<sup>2</sup> Институт системного программирования им. В. П. Иванникова, e-mail: borisenko@ispras.ru

<sup>3</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: sp@cs.msu.ru

Задачи хранения и обработки больших объемов данных требуют использования специализированных распределенных сервисов и значительных объемов вычислительных ресурсов. Облачные среды позволяют развертывать виртуальные вычислительные кластеры с запрошенными характеристиками и устанавливать необходимые сервисы [1]. При этом для ручной настройки вычислительных кластеров и сервисов в облачной среде необходимы значительные временные затраты и высокая квалификация от пользователя, а время и сложность такой ручной настройки возрастает в зависимости от размера кластера. Кроме того, такой режим не позволяет сохранять конфигурации развернутой системы и воспроизводить сценарии развертывания.

В рамках работы реализована система развертывания виртуальных вычислительных кластеров и сервисов по запросу в облачной среде. Инструмент реализован в виде сервиса с системой групп и пользователей, доступ к системе осуществляется при помощи REST API. Реализованная система взаимодействует с открытой облачной платформой OpenStack и обладает следующими свойствами.

1. Управление этапами жизненного цикла распределенной системы: создание, модификация и уничтожение кластера и сервисов на нем.
2. Хранение информации о развернутой системе.
3. Система контроля версий сервисов и зависимостей между различными сервисами.
4. Особенности формата описания развертываемых сервисов: реализован специальный формат описания развертываемых сервисов, за счет чего возможно добавление поддержки новых сервисов без перепрограммирования системы.
5. Локальное развертывание без использования сети Интернет.
6. Хранение готовых шаблонов кластера.

Создание виртуальных кластеров в облаках, построенных на базе облачной платформы OpenStack, реализовано при помощи системы управления конфигурациями Ansible и основано на методах, описанных в работе [2].

В работе приводится разработанная классификация сервисов, поддерживающих работу в распределенной системе: master-slave сервисы, сервисы хранения, независимые сервисы и сервисы-клиенты. Разработанная система включает поддержку следующих сервисов в различных версиях: Apache Spark, Apache Hadoop, Apache Ignite, Cassandra, Jupyter, Jupyterhub, Nextcloud, PostgreSQL. При помощи модуля описания сервисов также возможно добавление поддержки новых сервисов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mell P., Grance T. The NIST Definition of Cloud Computing. United States: National Institute of Standards and Technology, 2011.
- [2] Aleksiyants A., Borisenko O., Turdakov D., Sher A., Kuznetsov S. Implementing Apache Spark jobs execution and Apache Spark cluster creation for Openstack Sahara // Труды Института системного программирования РАН. 2015. Т. 27. № 5.

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТЕОРЕТИКО-АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЕЙ СМАРТ-КОНТРАКТОВ В СРЕДЕ БЛОКЧЕЙН

Анашин Владимир Сергеевич

Кафедра информационной безопасности, e-mail: vs-anashin@yandex.ru

Доклад посвящен текущему состоянию проблемы описания на теоретико-автоматном языке смарт-контрактов, функционирующих в среде блокчейн. С точки зрения математического описания, любой юридически правильно составленный контракт можно рассматривать как конечный автомат, см., например, [1]. Известны методы извлечения описания смарт-контрактов как конечных автоматов из функционирующей во времени среды блокчейн [2]. Сказанное означает, что функционирование смарт-контрактов в среде блокчейн можно рассматривать как взаимодействие автоматов во времени.

В [3] используется теоретико-автоматная модель смарт-контракта на основе т.н. *автоматов с метками времени* (timed automata, далее кратко ТА), введенных в [4], где время представляется действительными числами, а сам автомат принимает на вход *последовательность*  $((a_i, \tau_i))_{i=0}^{\infty}$  пар  $(a_i, \tau_i)$ , где  $a_i \in \mathcal{A}$  — символ конечного алфавита  $\mathcal{A}$ , а  $\tau_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  — неотрицательное действительное число, причем последовательность  $(\tau_i)_{i=0}^{\infty}$  строго возрастающая (выходная последовательность автомата аналогична входной). В работе [5] показано, что при некоторых естественных предположениях каждый моделирующий смарт-контракт ТА аппроксимируется с любой наперед заданной точностью (в смысле,

определенным в упомянутой работе) некоторым «обычным» автоматом над двухсимвольным алфавитом и, следовательно, для моделирования функционирования смарт-контрактов в среде блокчейн можно использовать не ТА, а обычные автоматы.

Однако возможен и альтернативный подход, основанный на *автоматах с действительным временем*, входом/выходом которых служит не последовательность (т.е. функция натурального аргумента), а *сигнал*, т.е. функция, определенная всюду на  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  и принимающая действительные значения. Такие автоматы ранее рассматривались в литературе (см., например, [6]), однако эта модель не выглядит релевантной для описания смарт-контрактов ввиду накладываемых в этих работах ограничений. Тем не менее представляется возможным эти ограничения ослабить так, что модель автомата с действительным временем станет релевантной для описания функционирования смарт-контрактов в реальном времени; соответствующий подход также будет описан в докладе.

Данная работа поддержана грантом РФФИ 18-29-03124.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Flood M. D., Goodenough O. R. Contract as automaton: The computational representation of financial agreements // SSRN Electronic Journal. March 2015. DOI: 10.2139/ssrn.2538224.
- [2] Guth F. et al. Specification mining for smart contracts with automatic abstraction tuning // Препринт URL: <https://arxiv.org/abs/1807.07822>, извлечен 15.03.2020.
- [3] Andrychowicz M. et al. Modelling bitcoin contracts by timed automata // Lecture Notes Computer Sci. Vol. 8711. Springer, 2014. P. 7–22.
- [4] Alur R., Dill D. The theory of timed automata // Lecture Notes Computer Sci. Vol. 600. Springer, 1992. P. 45–73
- [5] Анашин В. С. О теоретико-автоматных моделях блокчейна // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13. № 2. С. 48–55.
- [6] Rabinovich A. Automata over continuous time // Theoretical Computer Science. 2003. N. 300. P. 331–363.

# ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В БАССЕЙНЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНОЙ

Баев Андрей Владимирович

Кафедра математической физики, e-mail: drbaev@mail.ru

Движение жидкости с малыми колебаниями поверхности  $\zeta$  в мелком бассейне переменной медленно изменяющейся глубины  $h$  описывается системой

$$\begin{aligned} \varphi_{zz} + \varepsilon \Delta \varphi &= 0, & -h(\mathbf{r}) \leq z \leq 1 + \varepsilon \zeta(\mathbf{r}, t), \\ \varphi_t + \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \varphi_z^2 &= 0, & z = 1 + \varepsilon \zeta(\mathbf{r}, t), \\ \zeta_t + \varepsilon (\nabla \zeta, \nabla \varphi) &= \frac{1}{\varepsilon} \varphi_z, & z = 1 + \varepsilon \zeta(\mathbf{r}, t), \\ \varphi_z &= -\varepsilon (\nabla h, \nabla \varphi), & z = -h(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, z, t)$  — потенциал поля скорости жидкости,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр.

Для круговой расходящейся волны с формой поверхности  $q(\xi, \tau)$  получаем уравнение Кортевега—де Вриза с переменными коэффициентами, которые определяются глубиной в переменной эйконал  $\tau$ ,  $\xi$  — фазовая переменная:

$$q_\tau - 6A(\tau)qq_\xi + c(\tau)q_{\xi\xi\xi} = 0, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad \tau > 0. \quad (1)$$

Установившиеся решения (1) определяются гамильтоновой системой, период их колебаний и адиабатический инвариант удовлетворяют равенствам

$$T(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A(\tau)q_1(\tau)}} \int_{-1}^1 \frac{d\lambda}{\psi(\mu(\tau), \lambda)}, \quad I = 4A(\tau)q_1^5(\tau) \int_{-1}^1 \psi(\mu(\tau), \lambda) d\lambda, \quad (2)$$

$q_1(\tau)$  — амплитуда колебаний,  $\psi(\mu, \lambda) = \sqrt{(\mu - \lambda)(1 - \lambda^2)}$ ,  $\mu(\tau)$  — не известна.

Сформулируем обратную задачу для уравнения КдВ на отрезке  $[\tau_1, \tau_2]$ : по периоду  $T(\tau)$  и амплитуде колебаний  $q_1(\tau) = \max_\theta |q(\theta, \tau)|$  найти функции  $A(\tau), c(\tau)$ , если хотя бы одна из них известна в некоторой точке  $\tau_0 \in [\tau_1, \tau_2]$ .

**Теорема 1.** *Поставленная обратная задача имеет не более одного решения.*

Предложен и численно реализован алгоритм решения системы (2), основанный на установленном в работе свойстве строгой монотонности функции

$$\sigma(\mu) = 4 \int_{-1}^1 \psi(\mu, \lambda) d\lambda \int_{-1}^1 \frac{d\lambda}{\psi(\mu, \lambda)}, \quad \mu > 1.$$

Приведены результаты численного решения модельных задач. Показано, что учет геометрического расхождения волн, т. е. фактора размерности, влияет на результаты восстановления рельефа дна по данным обратной задачи.

Работа выполнена в рамках проекта № АААА-А16-116021510092-2.

# ИТЕРАЦИОННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ОБМЕНА ДАННЫМИ В МОДУЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

**Балашов Василий Викторович, Антипина Екатерина Андреевна**

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: hbd@cs.msu.su,  
antipantipovych@gmail.com

Современные модульные вычислительные системы реального времени (МВС РВ) состоят из набора стандартизированных модулей, соединенных коммутируемой сетью передачи данных (СПД) с поддержкой виртуальных каналов (FC-AE-ASM-RT, AFDX). Вычислительная нагрузка для МВС РВ представляет из собой набор взаимосвязанных периодических задач, сгруппированных в разделы. Передача сообщений между задачами, выполняющимися на разных модулях, вносит вклад в загрузку СПД.

Планирование вычислений в МВС РВ состоит из трех этапов: распределение вычислительной нагрузки по модулям и процессорным ядрам; настройка СПД и конфигурирование виртуальных каналов для каждого потока данных; построение для каждого ядра расписания окон (временных интервалов) выполнения разделов. Для каждого этапа задаются ограничения (максимальные загрузки ядер, максимальные длительности передач сообщений и т. д.), которые необходимо учитывать при решении соответствующей задачи [1].

Схема планирования вычислений, основанная на последовательном выполнении каждого из этапов, является широко распространенной [2,3]. Но она не всегда позволяет спланировать выполнение всех работ. Например, минимизируя нагрузку на сеть, алгоритм распределения вычислительной нагрузки может значительную часть трафика локализовать между парой модулей, тем самым сделав невозможным построение виртуальных каналов, укладывающихся в ограничения на пропускную способность физических каналов.

В докладе предложена итерационная схема планирования вычислений, основанная на использовании обратных связей для повторного выполнения этапов после анализа произошедших неудач на каком-либо из этапов последовательной схемы. Итерация включает в себя уточнение входных ограничений для предшествующих этапов на основе проведенного анализа и повторное выполнение предшествующих этапов с уточненными ограничениями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00614).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Балашов В. В. Семейство систем автоматизации проектирования бортовых вычислительных систем реального времени // Программные продукты, системы и алгоритмы. № 4. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2017. С. 1–19.

- [2] Balashov V. V., Balakhanov V. A., Kostenko V. A. Scheduling of computational tasks in switched network-based IMA systems // Proc. International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization. Athens, Greece: National Technical University of Athens (NTUA), 2014. P. 1001–1014.
- [3] Буздалов Д., Зеленев С., Корныхин Е., Петренко А., Страх А., Угненко А., Хорошилов А. Инструментальные средства проектирования систем интегрированной модульной авионики // Тр. ИСП РАН. 2014. Т. 26. Вып. 1. С. 201–230.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КРИОГЕННОГО ДЕЙТЕРИЙ-ТРИТИЕВОГО СЛОЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛАЗЕРНОЙ МИШЕНИ

Белоліпецкі Александр Алексеевич<sup>1</sup>, Семенов Константин Олегович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: abelolipet@mail.ru

<sup>2</sup> Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, e-mail: kostya\_24@mail.ru

Для проведения экспериментов по программе инерциального термоядерного синтеза (ИТС) в схеме LAPLAS на установке FAIR с тяжелоионным драйвером требуются цилиндрические мишени с криогенным топливным ядром [1,2]. В докладе дан краткий анализ проблемы разогрева и возможного разрушения криогенного D-T слоя при доставке таких мишеней в центр экспериментальной камеры, стенки которой разогреты до высоких температур [3]. Основным результатом заключается в том, что оболочка мишени, лежащей на холодной подложке, не разогревается до критических значений температур, разрушающих внутренний криогенный топливный слой за время, необходимое для доставки мишени в центр рабочей камеры. Введём обозначения:  $T_{sh}(r, z, \varphi)$  — температура оболочки в точке с соответствующими цилиндрическими координатами;  $C_{sh}, \rho_{sh}, \kappa_{sh}$  — теплоёмкость, плотность, коэффициент теплопроводности материала оболочки;  $r_1, r_0$  — внутренний и внешний радиусы цилиндрической оболочки;  $T_H$  — температура подложки, на которой лежит мишень;  $(-\varphi_0, \varphi_0)$  — угловой интервал соприкосновения оболочки и подложки;  $T_w$  — температура стенок рабочей камеры;  $T_i$  — начальная температура мишени;  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $\alpha$  — доля потока электромагнитного излучения, идущего от стенок камеры, поглощаемого оболочкой. Можно показать, что время разогрева оболочки в контрольной точке, наиболее удаленной от точки центра соприкосновения мишени и подложки, до температуры  $T$  задается формулой

$$t(T) = \frac{1}{\mathbf{a}(r_1, \varphi_0)} \ln \left[ \frac{T_i - T_H - \mathbf{b}(r_1, \varphi_0)}{T - T_H - \mathbf{b}(r_1, \varphi_0)} \right],$$

где  $\mathbf{a}(r, \varphi_0) = \frac{\pi^2 \kappa_{sh}}{2(\pi - \varphi_0)^2 r^2 C_{sh} \rho_{sh}}$ ,  $\mathbf{b}(r, \varphi_0) = \frac{16\alpha(\pi - \varphi_0)^2 \sigma T_w^4 r^2}{\pi^3 (r_0 - r_1) \kappa_{sh}}$ .

Коэффициенты  $\mathbf{a}(r_1, \varphi_0) = 3,42 \cdot 10^2 c^{-1}$ ,  $\mathbf{b}(r_1, \varphi_0) = 1,13 \cdot 10^{-2} K$  для свинцовой оболочки при значениях параметров  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\alpha = 1$ ,  $r_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $T_w = 300$ ,  $T_H = 10K$ ,  $T_i = 4.5K$ .

Времена разогрева оболочки в контрольной точке до температур  $T$  приведены в таблице.

T(K)	5	6	7	8	9	10	10,01	10,011	10,0111
100t(c)	0,028	0,092	0,18	0,29	0,5	1,81	2,4	2,87	2,99

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aleksandrova I. V., Belolipetskiy A. A., Blazevic A., et al. Cryogenic targets for the LAPLAS experiments: fabrication, manipulation and survival study // Report P034 30th European Conf. on Laser Interaction with Matter. Darmstadt, Germany, 31 Aug. – 05 Sept., 2008.
- [2] Александрова И. В., Корешева Е. Р., Кошелев И. Е. и др. Криогенное водородное топливо для управляемого инерциального термоядерного синтеза (цилиндрические мишени для экспериментов LAPLAS) // Вопросы атомной науки и техники. 2016. Т. 39. Вып. 3. С. 40–71.
- [3] Белолипецкий А. А. Оценка скорости деградации торцов цилиндрической лазерной мишени // Тезисы докладов научной конференции «Тихоновские чтения». М. : МАКС-Пресс, 2019. С. 71.

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО НАБЛЮДЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ В ЗАДАЧЕ ОБРАТНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Белянкина Татьяна Валерьевна

Кафедра исследования операций, e-mail: tbelyank@mail.ru

В работе [1] рассмотрена задача обратной экстраполяции многомерного ненаблюдаемого стохастического процесса  $x(t)$  с непрерывным временем одновременно в произвольном числе  $L$  будущих моментов времени  $s_1, \dots, s_L$  по совокупности непрерывных  $z(t)$  и дискретных  $\eta(t_m)$  наблюдений, которые зависят как от текущих  $x_t, x_{t_m}$ , так и от произвольного числа  $N$  прошлых значений  $x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_N}$ , ненаблюдаемого процесса  $x(t)$ .

В настоящей работе для частного вида скалярных процессов:

$$dx_t = -ax_t dt + \Phi_1 dw_t \quad (a > 0), \quad dz_t = H_0 z_t dt + \Phi_2 dv_t,$$

$$\eta(t_m) = G_0 x_{t_m} + G_1 x_{\tau_1} + G_2 x_{\tau_2} + \Phi_3 \xi(t_m) \quad (\tau_1 = t - t_1^*, \tau_2 = t - t_2^*),$$

где  $a, H_0, G_0, G_1, G_2, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, t_1^*, t_2^*$  — константы,  $w_t, v_t$  — стандартные винеровские процессы,  $\xi(t_m), m = 0, 1, \dots$  — последовательность гауссовских величин, и случая редких дискретных наблюдений исследуется эффективность

дискретного наблюдения с памятью второго порядка относительно дискретного наблюдения без памяти ( $G_1 = G_2 = 0$ ) при решении задачи обратной экстраполяции в будущие моменты времени  $s_1$  и  $s_2$ . В качестве мер эффективности вводятся величины:  $\epsilon_{2,0}^1 = \gamma(s_1, t_m) / \tilde{\gamma}(s_1, t_m)$  и  $\epsilon_{2,0}^2 = \gamma(s_1, t_m) / \gamma(s_2, t_m)$ , где  $\gamma(s_1, t_m)$ ,  $\gamma(s_2, t_m)$  — точности оценок экстраполяции в моменты времени  $s_1$  и  $s_2$  ( $s_1 < s_2$ ) при оценивании по дискретному каналу наблюдений с памятью второго порядка,  $\tilde{\gamma}(s_1, t_m)$  — точность оценки экстраполяции в момент времени  $s_1$  по соответствующему каналу без памяти.

Рассмотренный пример показал, что дискретные наблюдения с памятью могут как улучшать, так и ухудшать точность оценки экстраполяции относительно наблюдений с памятью меньшего порядка, что определяется как глубиной памяти, так и характеристиками ненаблюдаемого процесса  $x_t$  (дисперсия, время корреляции, структура множества коэффициентов). Был проведён анализ введённых мер эффективности, получены точные формулы для эффективной глубины памяти, дана физическая и графическая интерпретация доказанных свойств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Демин Н. С., Сушко Т. В., Яковлева А. В. Обобщённая обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 48–59.

## РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ЧАСТИЦ. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Богомолов Сергей Владимирович, Павлов Илья Витальевич<sup>1</sup>,  
Кувшинников Артем Евгеньевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительной математики, e-mail: bogomo@cs.msu.ru, i.pavlov-psu@yandex.ru

<sup>2</sup> ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, e-mail: kuvsh90@yandex.ru

Для решения задач газовой динамики предлагается использовать разрывный метод частиц. Особенностью данного метода является минимальное размазывание разрывов. В разрывном методе частиц искомая функция представляется в виде набора  $\delta$ -функций, которые аппроксимируются последовательностью прямоугольных фигур. Эти фигуры будем считать частицами, обладающими центром, объемом и массой. На каждом шаге по времени решаются уравнения движения частиц. Из-за разницы скоростей между частицами образуются пересечения или зазоры. На этапе корректора необходимо минимизировать эту погрешность, для чего будем изменять ширину частиц. Данный алгоритм хорошо показал себя для решения одномерных задач [1, 2].

Однако в двумерном случае данный алгоритм не работает даже для более простого квазилинейного уравнения переноса [3]. На рисунке 1 А видно, что скорость движения разрыва вычисляется некорректно. Для решения этой



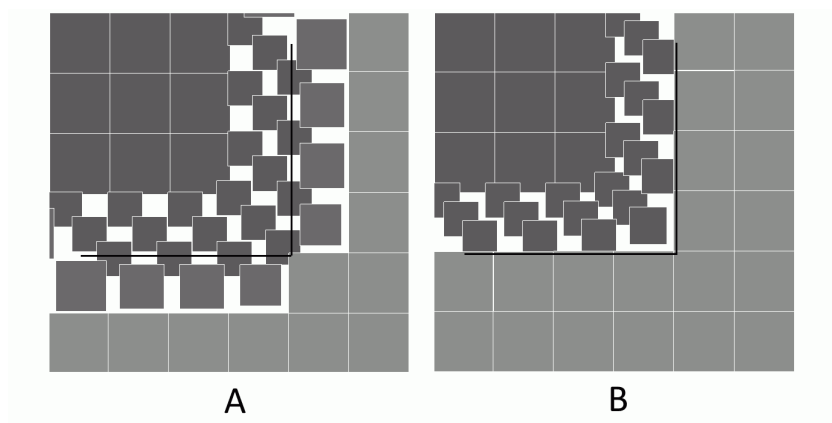


Рис. 1: Метод частиц. Квадраты — частицы, черная линия — фронт.

проблемы было принято решение использовать штрафной параметр, аналог прицельного параметра из молекулярной динамики, зависящий от косинуса угла между вектором движения частицы и вектором, соединяющим центры частиц. Воспользовавшись определением скалярного произведения для рисунка 2

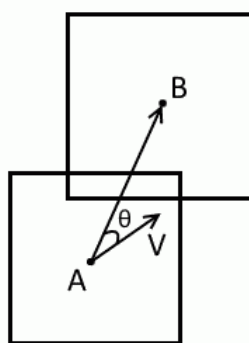


Рис. 2: Частица А наезжает на частицу В.

получим:

$$\cos(\theta) = \frac{(\vec{AB}, \vec{AV})}{|\vec{AB}| |\vec{AV}|}.$$

Вариант с использованием штрафного параметра приведен на рисунке 1 В. Таким образом, добавление штрафного параметра приводит к более точному решению задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Богомолов С. В., Кузнецов К. В. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 7. С. 93–100.
- [2] Богомолов С. В., Кувшинников А. Е. Разрывный метод частиц на газодинамических примерах // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 2. С. 63–77.

- [3] Богомолов С. В., Заричанский Д. А., Павлов И. В. Разрывный метод частиц для двумерного уравнения Бюргера // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Тезисы докладов. 15-25 апреля 2019 г. — Секция вычислительной математики и кибернетики, Факультет вычислительной математики и кибернетики. Москва: МАКС ПРЕСС, 2019. С. 27–28.

## **ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНЫХ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РУССКОГО ЯЗЫКА**

**Большакова Елена Игоревна, Сапин Александр Сергеевич**

Кафедра алгоритмических языков, Кафедра алгоритмических языков, e-mail: eibolshakova@gmail.com,  
alesapin@gmail.com

Методы и средства автоматической обработки текстов на естественном языке (АОТ) относятся к числу актуальных научных направлений в области искусственного интеллекта. В большинстве систем АОТ применяется морфологический анализ текста, результаты которого необходимы для последующих этапов его обработки. Также морфологический анализ используется при построении распределенного векторного представления слов высоко флективного языка, каковым является русский. Известные открытые морфологические процессоры для русского языка реализуют в первую очередь такие виды анализа (разбора) словоформы, как определение ее части речи, нормальной формы (леммы) и морфологических тегов (характеристик: падеж, род и т.д.). Однако не менее важным является решение сопутствующих задач: выбор нужного варианта анализа в случае неоднозначности (разрешение морфологической омонимии), разбор новых слов, отсутствующих в словаре процессора, а также определение морфемного состава слова (разбиения его на составляющие морфы). Последнее не реализовано ни в одном морфопроекторе, однако необходимо для предсказания смысла новых слов языка.

В докладе рассматриваются программные модели, разработанные при создании многофункционального морфологического процессора XMorphy [1]. Процессор базируется на словарной модели морфологии русского языка, его словарь словоформ русского языка основан на размеченных данных проекта OpenCorpora (opencorpora.ru) и представлен компактной структурой данных (DAFSA) с эффективным доступом к хранимым элементам. Для морфологического разбора несловарных словоформ применяется ряд эвристик, включая отсечение известного префикса и аналогию по финальным буквам словоформы. Дополнительно реализован модуль автоматической конвертации исходных морфологических тегов в универсальную систему разметки UD (universaldependencies.org), все более востребованную при разработке современных систем АОТ.

Для разрешения морфологической омонимии были рассмотрены и реализованы два подхода. В программной модели бесконтекстного разрешения осуществляется выбор наиболее вероятного варианта разбора для заданной словоформы, который определяется на базе статистики, собранной по нескольким размеченным корпусам русского языка (НКРЯ, ГИКРЯ, SynTagRus). Для создания модели контекстного разрешения рассматривались методы машинного обучения с учителем по размеченным данным: метод условных случайных полей (CRF) и обучение свёрточной нейронной сети (CNN).

Уникальной особенностью процессора XMorphy является встроенный модуль, выполняющий сегментацию заданного слова на морфы (минимальные значимые единицы языка) с определением их типа. Данная задача решается как классификация букв слова по соответствующим типам морфем (приставка, корень, суффикс, окончание, постфикс). При помощи машинного обучения были построены несколько программных моделей сегментации: на основе метода CRF, на базе деревьев решений с градиентным бустингом (GBDT) и на базе рекуррентных нейронных сетей (LSTM). В качестве обучающих выборок применялись словари морфемного разбора русского языка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bolshakova E. I., Sapin A. S. A morphological processor for Russian with extended functionality. // Analysis of Images, Social Networks and Texts. Lecture Notes in Computer Science, 10716. Springer, 2018, pp. 22-33.

## **АВТОМАТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ НАВОДЯЩИХ ВОПРОСОВ В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ОПРОСАХ**

**Бордаченкова Елена Анатольевна, Лихтарова Анна Дмитриевна**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: elena.cmc.msu@gmail.com, netaklerow@gmail.com

Наводящий вопрос (leading question) — это вопрос, сформулированный таким образом, что он подталкивает отвечающего к определённому ответу. Например: «Что Вы думаете о Дональде Трампе? Многие аналитики негативно относятся к нему». Формулировка вопроса заставляет респондента отрицательно характеризовать Трампа. Наводящие вопросы оказывают влияние на мнение отвечающего, что показано в работе Р. Харриса [1]. При ответе на вопрос: «Насколько высокие были баскетболисты?» был получен средний ответ 190 см, в то время как при ответе на вопрос: «Насколько низкие были баскетболисты?» был получен ответ 175 см. При проведении социологических исследований важно исключить возможность искажения мнения респондентов. Наличие наводящих вопросов в опросном листе может привести к неверным результатам анкетирования, поэтому важно уметь определить является ли вопрос наводящим и переформулировать его в нейтральный либо удалить из опросной анкеты.

Задача автоматического определения, является ли вопрос наводящим, довольно трудна: можно привести примеры близких по формулировке вопросов, один из которых является наводящим, а другой — нет («На сколько вырастет стоимость жилья в новостройках?», «На сколько вырастет морковь к осени?»). Для классификации наводящих вопросов может оказаться эффективным комбинирование признаков разных уровней — лексических, синтаксических и семантических [2].

На данный момент не существует готовой коллекции наводящих вопросов. В рамках данного исследования была получена коллекция анкет социологических опросов из ЕАЭСД [3]. В коллекции представлены социологические опросы от таких организаций как «ВЦИОМ», «Аналитический Центр Юрия Левады», «Центр социального прогнозирования и маркетинга», «ЦИРКОН», «Социологический факультет Санкт-Петербургского государственного университета», «РОМИР Мониторинг» и др.

Коллекция была вручную размечена на наводящие и ненаводящие вопросы на основе следующих признаков наводящих вопросов: 1) содержит предположение; 2) содержит оценку; 3) содержит описание объекта; 4) требует согласия; 5) дихотомические [4]. В итоге была получена размеченная коллекция из 2263 вопросов, из которых 851 наводящих и 1412 ненаводящих.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Harris R. Answering questions containing marked and unmarked adjectives and adverbs // *Journal of Experimental Psychology*. 97(3). P. 399–401
- [2] Loni B. A Survey of State-of-the-Art Methods on Question Classification // *Literature Survey*. Published on TU Delft Repository, 2011.
- [3] Единый Архив Экономических и Социологических Данных [Электронный ресурс]. НИУ ВШЭ. URL: <http://sophist.hse.ru> (дата обращения: 20.04.2019).
- [4] Leading Questions [Электронный ресурс]. URL: [http://changingminds.org/techniques/questioning/leading\\_questions.htm](http://changingminds.org/techniques/questioning/leading_questions.htm) (дата обращения: 20.04.2019)

## АЛГОРИТМЫ КЛАССИФИКАЦИИ МАТРИЦ АДАМАРА

**Борисов Август Валерьевич**

Кафедра информационной безопасности, e-mail: [prazo+lomo+y2020@ya.ru](mailto:prazo+lomo+y2020@ya.ru)

В работе рассматривается задача классификации матриц Адамара [1], широко применяемых в информационных технологиях, в теории кодирования [2,3], при сжатии информации [4,5], в блок-схемах при планировании эксперимента [1].

**Определение.** Две матрицы  $A$  и  $B$  называются  $H$ -эквивалентными, если из  $A$  можно получить  $B$  следующими четырьмя операциями: а) умножение строки на  $-1$ , б) умножение столбца на  $-1$ , в) перестановка строк, г) перестановка столбцов.

Все матрицы которые могут быть построены из одной матрицы  $H$  принадлежат одному  $H$ -классу.

В [6] вводятся «переключающие операции» над матрицами Адамара, сохраняющие свойство матрицы быть адамаровой, и понятие  $Q$ -эквивалентности матриц Адамара.

**Определение.**  $Q$ -эквивалентными называются матрицы  $A$  и  $B$ , если одна из другой может быть получена четырьмя операциями из  $H$ -эквивалентности и переключающими операциями.

В [6] описан алгоритм построения  $Q$ -эквивалентных классов.

В данной работе предлагается более простой алгоритм для построения переключающих операций, а именно:

Найти в матрице Адамара  $H$  подматрицу  $H_4$  порядка 4, вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и инвертировать найденную подматрицу.

Кроме того, в работе даётся теоретико-графовое описание операции переключения. В частности, наглядно видна связь между  $H$ -эквивалентными и  $Q$ -эквивалентными матрицами Адамара на порядках до 28-го включительно.

В дальнейшем предполагается использовать выработанную методику для нахождения переключений между различными  $Q$ -классами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
- [2] Agaian S. S. Hadamard Matrices and Their Applications. Springer, 1985.
- [3] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Радио и связь, 1979.
- [4] Соколов А. В. Применение неэквивалентных классов матриц Адамара для сжатия изображений с помощью алгоритма JPEG / А. В. Соколов, В. В. Авекин // Информационные технологии в образовании, науке и производстве : V Международная научно-техническая интернет-конференция. Секция Информационные технологии в производстве и научных исследованиях [Электронный ресурс]. 2017.

- [5] Столов Е. Л. Обобщенное преобразование Адамара и его применение для сжатия изображений. Исслед. по информ. Т. 2. Казань: Отечество, 2000. С. 77–84.
- [6] William P. O. Switching operations for Hadamard matrices // SIAM Journal on Discrete Mathematics. 2008. Vol. 22. N 1. P. 31–50.

## О ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛОТКИ—ВОЛЬТЕРРЫ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Братусь Александр Сергеевич<sup>1</sup>, Тихомиров Василий Васильевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Российский университет транспорта, e-mail: alexander.bratus@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра общей математики, e-mail: zedum@cs.msu.ru

В работе предложен метод определения достаточных условий существования или отсутствия замкнутых траекторий для системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лотки—Вольтерры.

Рассмотрим систему уравнений Лотки—Вольтерры общего вида

$$\frac{du_i}{dt} = u_i(r_i - (Au)_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad u \in R_+^n. \quad (1)$$

Здесь матрица  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $(Au)_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij}u_j)$ , матрицу  $A$  можно представить в виде  $A = B + C$ , где  $B = \frac{A+A^T}{2}$ ,  $C = \frac{A-A^T}{2}$ ,  $B^T = B$ ,  $C^T = -C$ .

Пусть  $\bar{u} \in \text{int}R_+^n$  — положение равновесия системы.

**Теорема. 1.** Система (1) не имеет замкнутых траекторий, если матрица  $B$  — положительно или отрицательно определена.

2. Если  $B = 0$ , то все траектории системы (1) лежат на множестве  $M \in \text{int}R_+^n$ , гомеоморфном шару.

3. Если  $n = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$  и кососимметрическая матрица  $C$  может

быть представлена в блочном виде  $C = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_k \end{pmatrix}$ ,  $C_k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_k \\ -\alpha_k & 0 \end{pmatrix}$ ,

$k = 1, 2, \dots, s$ , причем числа  $\alpha_k$  рационально зависимы, то система (1) имеет замкнутые траектории на торе  $T^S$ . В противном случае траектория системы всюду плотна на торе.

Доказательство теоремы основано на специальном выборе функций Ляпунова для исследования устойчивости положения равновесия.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сивережев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М. : Наука, 1978.

- [2] Hofbauer J., Sigmund K. Evolutionary games and population dynamics. Cambridge : Cambridge University Press, 2003.
- [3] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1987.

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН В МОДЕЛИ НЕЙРОННОГО ПОЛЯ

Будзинский Станислав Сергеевич<sup>1</sup>, Beuter Anne<sup>2</sup>, Вольперт Виталий Айзикович<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра математической физики, ИВМ им. Г. И. Марчука РАН, e-mail: stanislav.budzinskiy@protonmail.ch

<sup>2</sup> Университет Бордо, e-mail: anne.beuter@wanadoo.fr

<sup>3</sup> Институт Камиля Жордана, Университет Лиона, Российский университет дружбы народов, e-mail: volpert@math.univ-lyon1.fr

Мозг изобилует проявлениями сложной нелинейной динамики. В частности, с процессами в коре головного мозга связано распространение бегущих волн нейронной активности [1]. Для описания динамики электрической активности нейронов активно применяют модели нейронного поля [2], которые рассматривают кору головного мозга как непрерывную среду.

В данной работе изучалась двухкомпонентная модель нейронного поля относительно электрических активностей возбуждающих и тормозящих нейронов. Она представляет собой систему двух интегро-дифференциальных уравнений на прямой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} P_{1,1}(y-x)\psi_1(u(y, t))dy - \int_{\mathbb{R}} P_{1,2}(y-x)\psi_1(v(y, t))dy, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma v(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} P_{2,1}(y-x)\psi_1(u(y, t))dy - \int_{\mathbb{R}} P_{2,2}(y-x)\psi_1(v(y, t))dy. \end{aligned}$$

Здесь

$$P_{i,j}(x) = a_{i,j}e^{-b_{i,j}|x|}, \quad i, j = 1, 2,$$

с положительными  $a_{i,j}$  и  $b_{i,j}$  — функции связи между нейронами,  $\psi_1(u)$  и  $\psi_2(v)$  обозначают сигмоидальные (монотонно растущие) функции отклика, и  $\sigma$  положительна. В литературе также встречаются модели нейронного поля с асимметричными функциями связи, диффузией, запаздыванием [3–5].

При естественных условиях система обладает постоянным решением  $(u_0, v_0)$ , и мы провели нелинейный анализ его устойчивости при изменении  $\sigma$ , бифуркационного параметра. Нами получены условия на  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $\psi_1(u_0)$  и  $\psi_2(v_0)$ , при выполнении которых система претерпевает бифуркацию Андронова–Хопфа на пространственной частоте  $\xi_*$ . Для периодической краевой задачи на отрезке  $(0, 2\pi/\xi_*)$  нами построена нормальная форма  $O(2)$ -эквивариантной бифуркации Андронова–Хопфа и в общем виде посчитаны ее

коэффициенты, определяющие устойчивость решений вида бегущих и стоячих волн.

Были проведены численные эксперименты, в ходе которых в систему с нулевым начальным состоянием были добавлены точечные источники вида  $\delta(x - x_{u,v}) \sin(\omega t)$ . Результаты экспериментов показали, что если источники в обоих уравнениях расположены в одной точке,  $x_u = x_v$ , то решение становится стоячей волной; если же  $x_u \neq x_v$ , то решение становится периодической бегущей волной, чье направление движения зависит от взаимного положения источников.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы РУДН “5-100”, РФФИ проект № 18-11-00171, Французско-Российского проекта PRC2307.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cortical travelling waves: mechanisms and computational principles / L. Muller, F. Chavane, J. Reynolds, T. J. Sejnowski // Nature Reviews Neuroscience. 2018. Vol. 19, Iss. 5. P. 255–268.
- [2] Wilson H. R., Cowan J. D. A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue // Kybernetik. 1973. Vol. 13. P. 55–80.
- [3] Ermentrout G. B., McLeod J. B. Existence and uniqueness of travelling waves for a neural network // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. 1993. Vol. 123, Iss. 3. P. 461–478.
- [4] Modeling of post-stroke stimulation of cortical tissue / A. Beuter, A. Balossier, S. Trofimchuk, V. Volpert // Mathematical Biosciences. 2018. Vol. 305. P. 146–159.
- [5] Conditions for wave trains in spiking neural networks / J. Senk, K. Korvasová, J. Schuecker, E. Hagen, T. Tetzlaff, M. Diesmann, M. Helias // arXiv:1801.06046 [math, q-bio]. 2019.

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ В МНОГОШАГОВЫХ ИГРАХ С СИГНАЛАМИ

Васин Александр Алексеевич, Огнева Мария Сергеевна

Кафедра исследования операций, e-mail: foravas@yandex.ru, mashog@rambler.ru

Сигнальные игры относятся к динамическим играм с неполной информацией. В них описываются ситуации, когда каждый игрок может принадлежать к одному из нескольких типов, влияющих на его функцию выигрыша. Игроки обладают разной априорной информацией об условиях взаимодействия: каждый знает свой тип, но не знает типов других участников. Перед основным этапом взаимодействия они обмениваются сигналами, которые могут нести информацию о типах игроков. Существуют примеры таких моделей в экономике: рынок труда [1] и ограничивающее ценообразование [2]. Кроме того, такие



модели используются в поведенческой биологии. Рассматриваются как простые модели взаимодействия отправителя и получателя [3], так и двухэтапные модели парных конкурентных столкновений [4].

В данной работе рассматривается байесовская многошаговая игра, для которой формулируется понятие последовательного равновесия [5–7]. Указываются необходимые условия для разделяющего равновесия, в котором действия игроков в начале игры раскрывают их типы, а также для объединяющего равновесия, в котором типы игроков не уточняются в течение игры. Данные соотношения позволяют искать возможные разделяющие равновесия методом типа динамического программирования, последовательно определяя равновесные стратегии поведения для всевозможных предысторий. Далее исследуется конкретная модель парных конкурентных столкновений с двумя типами участников: сильными и слабыми. Получены необходимые и достаточные условия существования разделяющих равновесий с упорядочением конкуренции, в которых победитель определяется на основе поданных сигналов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Spence A. M. Job market signaling // *The Quarterly Journal of Economics*. 1973. Vol. 87, № 3. P. 355–374
- [2] Milgrom P., Roberts J. Limit Pricing and Entry Under Incomplete Information: An Equilibrium Analysis // *Econometrica*. 1982. Vol. 50, № 2. P. 443–460.
- [3] Gardner R., Morris M. R. The evolution of bluffing in animal contests: an ESS approach // *Journal of Theoretical Biology*. 1989. Vol. 137, Iss. 2. P. 235–243.
- [4] Kim Y.-G. Status signaling games in animal contests // *Journal of Theoretical Biology*. 1995. Vol. 176, Iss. 2. P. 221–231.
- [5] Kreps D. M., Wilson R. B. Sequential Equilibrium // *Econometrica*. 1982. Vol. 50, № 4. P. 863–894.
- [6] Reny P. J. Backward induction, normal form perfection and explicable equilibria // *Econometrica*. 1992. Vol. 60, № 3. P. 627–649.
- [7] Fudenberg D., Tirole J. *Game theory* // MIT Press, 1991.

## **АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ НЕКОТОРЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РЫНКОВ**

**Васин Александр Алексеевич, Цыганов Никита Игоревич**

Кафедра исследования операций, e-mail: foravas@yandex.ru, nikita-93@mail.ru

Рассматривается сетевой энергетический рынок однородного товара, такого как газ или нефть, с древовидной транспортной структурой, состоящий из множества узлов  $N$  и множества линий  $L \subseteq \{\{i, j\} | i, j \in N\}$ . Каждый узел  $i \in N$

задается функциями спроса  $D_i(p_i)$  и предложения  $S_i(p_i)$ , характеризующими потребителей и производителей узла соответственно.

Каждая линия  $\{i, j\} \in L$  задается предельными затратами на передачу  $e_{ij}^t$ , начальной пропускной способностью  $Q_{ij}^0$ , а также фиксированными  $E_{ij}^f$  и переменными  $E_{ij}^v(\Delta Q_{ij})$  затратами на увеличение пропускной способности, где  $\Delta Q_{ij}$  — объем расширения линии. Для заданного потока  $q_{ij}$  от узла  $i$  к узлу  $j$  транспортные затраты для линии имеют следующий вид:

$$E_{ij}(q_{ij}) = \begin{cases} e_{ij}^t \cdot |q_{ij}|, & |q_{ij}| \leq Q_{ij}^0, \\ E_{ij}^f + E_{ij}^v(|q_{ij}| - Q_{ij}^0) + e_{ij}^t \cdot |q_{ij}|, & |q_{ij}| > Q_{ij}^0. \end{cases}$$

Пусть  $\vec{q}$  — вектор потоков для линий, а  $\vec{v}$  — вектор объемов производства для узлов. Общественное благосостояние определяется следующим образом:

$$W(\vec{q}, \vec{v}) = \sum_{i \in N} U_i(v_i - \sum_{j \in L, i < j} q_{ij}) - \sum_{i \in N} c_i(v_i) - \sum_{\{i, j\} \in L, i < j} E_{ij}(q_{ij}),$$

где функции  $U_i(v_i^d)$  и  $c_i(v_i)$  определяют полезность потребления и производственные затраты в узле  $i$  соответственно. Они соответствуют функциям спроса

и предложения:  $U_i(v_i^d) = \int_0^{v_i^d} D_i^{-1}(u) du$ ,  $c_i(v_i) = \int_0^{v_i} S_i^{-1}(u) du$ .

Рассматривается задача максимизации общественного благосостояния:

$$\max_{\vec{q}, \vec{v} \geq 0} W(\vec{q}, \vec{v}). \quad (1)$$

В общем случае для рынка типа «дерево» задача (1) является NP-трудной [1]. Однако, если зафиксировать множество расширяемых линий, задача становится задачей выпуклого программирования и может решаться стандартными методами [2]. Таким образом задача (1) сводится к задаче нахождения оптимального множества расширяемых линий.

В работах [3,4] представлены алгоритмы решения задачи (1) для рынков типа «цепочка» и «звезда». В данном исследовании предлагается алгоритм для рынка гибридного случая типа «звезда-цепочка» и исследуется его среднестатистическая эффективность.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 19-01-00533а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vasin A. A., Grigoryeva O. M., Tsyganov N. I. A model for optimization of transport infrastructure for some homogeneous goods markets // Journal of Global Optimization 76. 2020. P. 499–518.
- [2] Васин А. А., Григорьева О. М., Цыганов Н. И. Оптимизация транспортной системы энергетического рынка // Доклады Академии Наук. 2017. Т. 475, №4. С. 377–381.

- [3] Vasin A. A., Tsyganov N. I. Optimization of transmission systems for chain-type markets // Communications in Computer and Information Science. 2019. V. 974 of Optimization and Applications. OPTIMA 2018. P. 482–493.
- [4] Vasin A. A., Grigoryeva O. M., Tsyganov N. I. Energy Markets: Optimization of Transmission Networks // International Journal of Public Administration. 2019. V. 42, №15-16. P. 1311–1322.

## **ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РАССУЖДЕНИЯ, ОСНОВАННОЙ НА СИЛЛОГИСТИЧЕСКОМ ВЫВОДЕ**

**Владимирова Юлия Сергеевна**

Лаборатория дискретных управляющих систем и их приложений, e-mail: vladimirova@cs.msu.ru

Н.П. Брусенцовым предложен метод алгебраизации силлогистики Аристотеля, невыразимой в математической логике, и установлен критерий содержательности суждений — принцип сосуществования противоположностей (ПСП) [1]. Алгебраическая система, позволяющая выразить все модусы силлогистики основана на методах диаграмм и индексов Льюиса Кэрролла [2, 3]. В [4] предложено использовать данную систему в качестве основы компьютеризации рассуждения.

Создание соответствующего программного инструментария кроме уже имеющихся правил представления и преобразования суждений, требует выработки основных принципов устройства ее компонент, исследования области применения и возможных проблем. Доклад посвящен рассмотренному с этой целью примеру решения задачи составления расписаний занятий в учебных заведениях.

Задача формулируется в виде системы посылок, выражающих логические отношения между заданными особенностями. Предлагаемый алгоритм по исходной системе посылок строит набор особенностей, характеризующий искомое расписание.

Рассмотрение данной задачи позволило выделить несколько типов особенностей, определить допустимый способ хранения посылок в памяти, выявить необходимость арифметических операций, определить некоторые другие характеристики разрабатываемого программного инструментария.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Брусенцов Н. П. Воссоздание аристотелевой безукоризненной силлогистики // Современные информационные технологии и ИТ-образование. М. : ИНТУИТ.РУ, 2011. С. 73–76.
- [2] Кэрролл Л. Символическая логика. История с узелками. М. : Мир, 1973.

- [3] Брусенцов Н. П. Диаграммы Льюиса Кэррола и аристотелева силлогистика // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 13. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. С. 164–182.
- [4] Владимирова Ю. С. Метод индексов Льюиса Кэрролла как основа компьютеризации рассуждения // Программные системы и инструменты. № 12. М. : Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2011. С. 23–26.

## **МЕТОД РАЗБОРА ЗАГОЛОВКА ПАКЕТА В ЯЧЕЙКАХ КОНВЕЙЕРА СЕТЕВОГО ПРОЦЕССОРНОГО УСТРОЙСТВА**

**Волканов Дмитрий Юрьевич, Курдюкова Софья Андреевна**

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: volkanov@asvk.cs.msu.ru,  
skurdyukova@lvk.cs.msu.ru

В современных сетях связи коммутаторы и маршрутизаторы используют сетевые процессорные устройства (СПУ). СПУ — это программируемый микропроцессор, архитектура которого оптимизирована для использования в сетевых устройствах и обеспечения устойчивого режима обработки пакетов. В СПУ используются специализированные ядра (их может быть несколько), оптимизированные для обработки сетевых пакетов [1]. СПУ выполняет разбор заголовка пакета, производит поиск правил обработки, модификации и передачи пакета, в соответствии с выбранными правилами отправляет его дальше или сбрасывает.

Современные СПУ способны обрабатывать пакеты со скоростью в сотни гигабайт. Но из-за постоянно возрастающего количества сетевого трафика, возникновения новых более сложных политик передачи трафика и изменения вида трафика появляется требование к увеличению скорости работы СПУ.

В данной работе предлагается метод увеличения скорости разбора заголовка пакета в СПУ с целью в дальнейшем добиться увеличения скорости работы всего устройства. Разбор заголовка пакета означает выделение полей из заголовка пакета, значения которых необходимы для обработки пакета и принятия решения о его дальнейшем месте следования в рамках реализуемых устройством протоколов передачи данных. В данной работе за основу была взята модель СПУ, состоящая из нескольких конвейеров обработки пакетов, каждый из которых содержит несколько одинаковых процессорных устройств [2]. В докладе будут рассмотрены несколько вариантов улучшения базового алгоритма разбора заголовка [3, 4] и результаты экспериментального исследования предложенных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-01076).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Perissakis S., Orphanoudakis T. Embedded multi-core processing for networking. Multi-core embedded systems. : CRC Press, 2010. 399–463 с.

- [2] Об одном подходе к построению сетевого процессорного устройства / С. О. Беззубцев, В. В. Васин, Д. Ю. Волканов, Ш. Р. Жайлауова, В. А. Мирошник, Ю. А. Скобцова, Р. Л. Смелянский. // Моделирование и анализ информационных систем. 2019. Т. 26, № 1. С. 39–62.
- [3] Attig M., Brebner G. 400 gb/s programmable packet parsing on a single fpga. 2011 ACM/IEEE Seventh Symposium on Architectures for Networking and Communications Systems. IEEE, 2011. С. 12–23.
- [4] Design principles for packet parsers. G. Gibb, G. Varghese, M. Horowitz, N. McKeown. // Architectures for Networking and Communications Systems. IEEE, 2013. С. 13–24.

## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАСШТАБНЫХ СМЕСЕЙ ОБОБЩЕННЫХ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Воронцов Михаил Олегович, Кудрявцев Алексей Андреевич, Недоливко  
Юлия Николаевна

Кафедра математической статистики, e-mail: m.vtsov@mail.ru, nubigena@mail.ru,  
mouse98@mail.ru

Большую роль в прикладных задачах, решаемых методами теории вероятностей, играет обобщенное гамма-распределение, или распределение Крицкого—Менкеля [1], имеющее плотность

$$f(x) = \frac{|v|x^{vq-1}e^{-(x/\theta)^v}}{\theta^{vq}\Gamma(q)}, \quad v \neq 0, \quad q > 0, \quad \theta > 0, \quad x > 0.$$

К распределениям гамма-типа относятся экспоненциальное распределение,  $\chi^2$ -распределение, гамма-распределение, распределение Максвелла—Больцмана,  $\chi$ -распределение,  $m$ -распределение Накагами, распределение Вейбулла—Гнеденко, обратное распределение Рэлея, распределение Фреше и др.

Во многих прикладных задачах важную роль играют масштабные смеси обобщенных гамма-распределений [2], основные вероятностные характеристики которых (плотность, функция распределения, моменты) были описаны в [3] для случая разных знаков параметров формы распределений. Также в [3] было показано, что при параметрах формы одного знака нахождение плотности смеси сопряжено с принципиальными трудностями вычисления интеграла

$$\int_0^{\infty} y^{r-1} e^{-(y/\alpha)^u - (y/\theta)^{-v}} dy.$$

В докладе обсуждаются возможные пути нахождения вероятностных характеристик масштабных смесей обобщенного гамма-распределения, основанные на преобразовании Меллина; приводятся графики плотностей смесей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00655).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крицкий С. Н., Менкель М. Ф. Выбор кривых распределения вероятностей для расчетов речного стока // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1948. № 6. С. 15–21.
- [2] Кудрявцев А. А. Байесовские модели баланса // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12, № 3. С. 18–27.
- [3] Кудрявцев А. А. Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях баланса // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, № 3. С. 27–33.

## УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ L-ГРАФОВ БЕЗ ПСЕВДОЦИКЛИЧЕСКИХ ПУТЕЙ

**Вылиток Алексей Александрович, Генералова Татьяна Владимировна**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: vylitok@cs.msu.su, tanya.generalova@gmail.com

L-графы без ограничений [1, 2] определяют класс рекурсивно-перечислимых языков, то есть эквивалентны по описательной силе машинам Тьюринга и формальным грамматикам без ограничений (тип 0 по классификации Хомского). В докладе рассматриваются бесконтекстные L-графы без псевдоциклических путей [3]. Такие L-графы характеризуют класс бесконтекстных (контекстно-свободных) языков.

Отсутствие псевдоциклических путей гарантирует, что каждый цикл в успешном пути L-графа может повторяться (либо самостоятельно, либо в паре с другим циклом), приводя к новым успешным путям.

Это свойство, наряду с требованием детерминированности, позволило найти необходимое и достаточное условие для проверки регулярности задаваемого L-графом языка. Проверку предлагаемого условия можно осуществить с помощью известных полиномиальных алгоритмов обработки графов (поиск кратчайших путей, сильно связанных компонент и др.).

На практике проверка регулярности может быть полезна для оптимизации вычислительных моделей, лежащих в основе компьютерных программ. Задача проверки регулярности для детерминированных магазинных автоматов исследовалась Р. Стирнзом в [4], однако приведенная там тройная экспоненциальная оценка и улучшенная до двойной экспоненциальной в работе [5] не давали поводов для практической реализации предложенных в них методов проверки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вылиток А. А., Сутырин П. Г. Характеризация формальных языков графами // Сборник тезисов конференции «Тихоновские чтения» (Москва, 25–29 октября 2010 г.). М : Макс-Пресс, 2010. С. 81–82.
- [2] Вылиток А. А., Ростовский А. С. О подклассах графовых представлений формальных языков // Сборник тезисов конференции «Ломоносовские чтения». М : Макс-Пресс, 2011. С. 98–99.
- [3] Вылиток А. А., Генералова Т. В. L-графы без псевдоциклических путей. // Сборник тезисов конференции «Ломоносовские чтения». М : Макс-Пресс, 2018. С. 38–39.
- [4] Stearns R. E. A regularity test for pushdown mashines // Inform. And Control. 1967. Vol. 11, N. 3. P. 323-340.
- [5] Valiant L. G. Regularity and Related Problems for Deterministic Pushdown Automata // J. Assoc. Comput. Mach. 1975. Vol. 22, Iss. 1. P. 1–10.

## **РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ БИОМЕТРИЧЕСКОЙ АУТЕНТИФИКАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ ПОВЕДЕНЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВВОДА ТЕКСТА**

**Галков Алексей Вадимович, Машечкин Игорь Валерьевич, Попов Иван Сергеевич**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: galkov1996alex@mail.ru,  
mash@cs.msu.su, ivan@jaffar.cs.msu.su

С помощью мобильных устройств в настоящее время пользователям доступно огромное количество сервисов, обеспечивающих доступ к конфиденциальным данным. Основой большинства систем защиты информации в подобных сервисах является процедура аутентификации на основе паролей и/или физиологических характеристик. Однако данные подходы имеют ряд существенных уязвимостей, которых лишены индивидуальные поведенческие характеристики, в частности, динамика ввода текста, обладающая свойством невоспроизводимости и не требующая специального оборудования.

Данная работа посвящена задаче аутентификации пользователей мобильных устройств на основе динамики нажатия клавиш в процессе работы с экранной клавиатурой. В качестве признаков для построения модели пользователя используются время удержания клавиши, время между нажатиями двух последовательных клавиш и сила нажатия [1]. Для фоновой аутентификации применяется адаптирующийся под пользователя алгоритм разбиения диграфов на группы по скорости нажатия в совокупности с разделением клавиш на

группы по функциональности. Проводится поиск и исправление выбросов на основе квартилей с последующей стандартизацией значений.

Одной из основных проблем при построении модели пользователя, способной обнаруживать вторжение, является отсутствие примеров нажатий клавиш злоумышленником в обучающей выборке. Для решения этой задачи используется нечеткий метод поиска исключений на основе потенциальных функций (Fuzzy), который не применялся в исследованных статьях, но показывает на ряде задач результаты выше, чем одноклассовые KNN и SVM [2].

Для сбора данных и экспериментальной оценки качества предложенного подхода был разработан программный стенд, состоящий из интегрирующейся в операционную систему Android OS экранной клавиатуры и классификатора, работающего на стационарном компьютере. В связи с отсутствием общепринятых наборов данных для тестирования собраны два датасета для статической и фоновой аутентификации с примерами нажатий клавиш более 40 пользователей. По результатам экспериментов установлено, что предложенные подходы к отбору признаков, поиску и исправлению выбросов, а также использование метода Fuzzy показывают качество классификации лучше, чем методы, представленные в существующих исследованных работах. FRR равен 0.149 и 0.245 для статической и фоновой аутентификации при FAR = 0.01.

На основе программного стенда разработан прототип системы аутентификации пользователей, использующий биометрические характеристики работы с экранной клавиатурой для защиты любых приложений на мобильном устройстве, использующих системную клавиатуру — появляется возможность добавить дополнительную процедуру статической аутентификации на основе динамики нажатий клавиш при вводе пароля. Также осуществляется фоновая аутентификация на протяжении всего времени работы с устройством.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Clustering di-graphs for continuously verifying users according to their typing patterns / T. Shimshon, R. Moskovitch, L. Rokach, Y. Elovici // Proceedings of the IEEE 26th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel (IEEEI '10). 2010. С. 445–449.
- [2] Петровский М. И. Применение методов интеллектуального анализа данных в задачах выявления компьютерных вторжений // Труды Второй Всероссийской научной конференции, Методы и средства обработки информации. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ. 2005. С. 158-168.



## РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ КЛАССИФИКАЦИИ СЕТЕВОГО ТРАФИКА НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Гетьман Александр Игоревич<sup>1</sup>, Иконникова Мария Кирилловна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, ИСП РАН, e-mail: thorin@ispras.ru

<sup>2</sup> ИСП РАН, e-mail: mikonnikova@ispras.ru

Классификация сетевого трафика может применяться в различных приложениях, однако требует решения многих вопросов как в процессе постановки задачи, так и в ходе её решения [1, 2]. Особенности рассматриваемой области являются работа в условиях неполноты классов, изменчивость данных, а также поиск компромисса между точностью, скоростью и объёмом хранимых данных. Проблема защиты конфиденциальности пользователей ограничивает количество и качество общедоступных материалов для обучения, и не существует единого набора данных для сравнения качества работы различных реализаций.

Таким образом, в ходе работы над задачей решаются следующие вопросы.

1. Получение данных. Поиск или самостоятельный сбор достаточного количества данных нужного вида.

2. Выбор классов. Классификация может производиться на разных уровнях: для прикладных протоколов, приложений, сервисов и т.д.

3. Разметка данных. При самостоятельном сборе данных есть возможность генерировать или собирать данные только нужного типа. В противном случае требуется использование только размеченных данных или применение сторонних инструментов с достаточной степенью качества работы.

4. Получение признаков для классификации. Существует много видов признаков интернет-трафика, которые могут быть использованы для классификации (номера портов, характеристики пакетов и их содержание, общие характеристики всего потока и т.п.), но не все из них в равной степени эффективны, доступны и удобны для получения и использования.

5. Выбор и обучение модели. Для задачи классификации применимы разные модели машинного обучения, которые требуется сравнить по качеству и времени работы на выбранных признаках.

Отдельного рассмотрения требуют вопросы классификации неизвестных протоколов, а также проблема ухудшения качества работы системы при изменении таких характеристик трафика, как время и место его получения.

Были рассмотрены и предложены решения для поставленных вопросов, большая часть предложенных решений была автоматизирована и встроена в разрабатываемую в ИСП РАН систему анализа трафика для получения рабочей модели, показывающей достаточно высокую точность при выбранных условиях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rezaei S., Liu X. Deep learning for encrypted traffic classification: an overview // IEEE Communications Magazine. 2019. Vol. 57. N 5. P. 76–81.
- [2] Гетьман А. И., Маркин Ю. В., Евстропов Е. Ф., Обыденков Д. О. Обзор задач и методов их решения в области классификации сетевого трафика // Труды ИСП РАН. 2017. Т. 29. № 3. С. 117–150.

## **БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ЛОКАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ ИНВАРИАНТОВ**

**Головизнин Василий Михайлович, Афанасьев Никита Александрович**

Кафедра вычислительных методов, e-mail: gol@ibrae.ac.ru, nafanas.cmc@gmail.com

Решение квазилинейных систем дифференциальных уравнений гиперболического типа является одной из основных задач вычислительной гидродинамики. Семейство таких систем включает в себя уравнения мелкой воды и уравнения газовой динамики, с помощью которых описываются такие актуальные задачи как, например, прорыв плотины или течение газа в сопле Лаваля. Особый интерес представляют задачи, описывающие трансзвуковые течения, построение вычислительных схем для которых требует дополнительных усилий.

В последнее время балансно-характеристические схемы хорошо себя зарекомендовали для решения квазилинейных систем гиперболического типа. Например, схема КАБАРЕ [1] позволяет решать такие системы с достаточно высокой точностью в случаях строго дозвукового или строго сверхзвукового течений. В случае трансзвуковых течений классическую схему КАБАРЕ надо дополнять аппроксимационным алгоритмом вычисления новых потоковых значений в звуковых точках, т. е. в тех узлах, по разные стороны от которых есть ячейки и с дозвуковым, и с сверхзвуковым течением. Такой алгоритм построен для случая одномерных уравнений мелкой воды [2], но его обобщение на случай уравнений газодинамики вызывает затруднения, так как алгоритм основан на переносе аналитических римановых инвариантов, выражения для которых в газодинамике в общем случае неизвестны.

В данной работе предлагается новый локально-неявный характеристический метод получения потоковых значений локальных линейных инвариантов Римана в звуковых точках, применимый к произвольной системе уравнений гиперболического типа. Метод имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству, обладает свойствами обратимости по времени и универсальности для всех типов звуковых точек. Также в работе приводятся результаты расчетов по новому методу на тестах Торо для задачи о распаде разрыва для уравнений мелкой воды [3], а также для некоторых задач для уравнений газодинамики.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 18-11-00163).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / В. М. Головизнин, М. А. Зайцев, С. А. Карabasов, И. А. Короткин. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013. 472 с.
- [2] Afanasiev N. A., Goloviznin V. M. The time reversibility property in analysis of sound points in balance-characteristic difference methods // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1392, 012028
- [3] Toro E. F. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. New York : Wiley, 2001. 326 p.

## **АЛГОРИТМ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ КАБАРЕ НА ТРЕХМЕРНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ РАСЧЕТНЫХ СЕТКАХ**

**Головизнин Василий Михайлович<sup>1</sup>, Горбачев Даниил Юрьевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

<sup>2</sup> ИПМ им. М. В. Келдыша, e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

Балансно-характеристический численный метод КАБАРЕ [1] протестирован и верифицирован на множестве задач вычислительной гидродинамики. Например, метод КАБАРЕ верифицирован на решении простого уравнения переноса, задач газовой динамики и промышленных задач, таких как: аэроакустика, моделирование химических реакций в многокомпонентных течениях, моделирование защитной оболочки контейнмента и многие другие. Несмотря на все преимущества этого метода, он требует использования четырехугольных расчетных сеток, что накладывает существенные ограничения на использование метода КАБАРЕ в существующих CFD кодах. Один из возможных вариантов снятия данного ограничения был предложен в статье [2]. В упомянутой статье описан и верифицирован обобщенный метод КАБАРЕ для расчета задач гидродинамики на различных типах двумерных неструктурированных сеток.

В данной работе описывается алгоритм обобщенной схемы КАБАРЕ для трехмерных неструктурированных треугольных сеток. Алгоритм разбит на три основных фазы, как и в двумерном случае: предиктор, генератор потоков и корректор. Для генерации потоков используется характеристический вид гиперболической системы и основные свойства тетраэдров и призм.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 19-11-00104).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных компьютерных комплексов / В. М. Головизнин, М. А. Зайцев, С. А. Карabasов, И. А. Короткин // Москва: Издательство Московского университета, 2013. 472 с.

- [2] Gorbachev D. Y., Goloviznin V. M. The Balance-Characteristic Numerical Method on Triangle Grids // J. Phys.: Conf. Ser. 2019 Vol. 1392, 012036

## **НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРИБЛИЖЕНИИ «МЯГКОЙ КРЫШКИ»**

**Головизнин Василий Михайлович<sup>1</sup>, Майоров Петр Александрович,  
Майоров Павел Александрович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных методов, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных методов, ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова; ИБРАЭ РАН, e-mail: maiorov.peter@gmail.com, pavel.a.mayorov@gmail.com

Многослойные гидростатические модели течений со свободной поверхностью [1] могут описать лишь основные характеристики движения стратифицированных жидкостей и слабо воспроизводят процесс перемешивания между слоями жидкости. Была предложена новая негидростатическая модель уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости с поверхностью в приближении «мягкой крышки». В отличие от моделей с «жесткой крышкой» вертикальные скорости на свободной границе в нашей модели не равны нулю. Для решения получившейся системы использовалась балансно-характеристическая схема КАБАРЕ [2].

В качестве валидации решения использовалась задача колебания малой амплитуды в прямоугольном бассейне [3]. Также в данной работе представлены результаты сравнения представленной модели с гидростатической моделью [1] на лабораторных тестах движения стратифицированной по плотности жидкости [3]. Эксперименты проводились в акриловом баке длиной 3 м и шириной 0.15 м, заполненном водопроводной водой на глубину 0.2 м. Водонепроницаемая перегородка находилась в 0.1 м от одного конца резервуара. В отделенную перегородкой область наливали два слоя солевых раствора различной плотности. Затем вынималась перегородка и наблюдалось движение слоистого раствора в основной части резервуара. Обе модели показывают хорошее воспроизведение движения фронта распространения раствора во времени. Но представленная негидростатическая модель лучше описывает вихревую структуру движения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-11-00163).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Новый численный алгоритм для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев // Морской гидрофизический журнал. 2019. Т. 35, № 6. С. 600–620.

- [2] Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных компьютерных комплексов / В. М. Головизнин, М. А. Зайцев, С. А. Карabasов, И. А. Короткин // Москва: Издательство Московского университета, 2013. 472 с.
- [3] An experimental investigation of density-stratified inertial gravity currents / C. Gladstone, L. J. Ritchie, R. S. J. Sparks, A. W. Woods // Sedimentology. 2004. Т. 51, №4. С. 767–789.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКТОМЕТРИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

Головина Светлана Георгиевна, Захаров Евгений Владимирович,  
Цыбров Евгений Германович

Кафедра математической физики, e-mail: sgolovina-msu@mail.ru, spec@cs.msu.ru,  
tsybrovevgeniy@yandex.ru

Рассматривается задача лазерной дифрактометрии эритроцитов (эктацитометрия) при анализе дифракционных картин, которая возникает при рассеянии лазерного пучка на суспензии эритроцитов в эктацитометре [1]. В случае системы источников, обладающих осевой симметрией, исследуем электромагнитное поле отраженное от диэлектрического тела вращения и обратную задачу определения границы тела.

Области  $\Omega_f$  и  $\Omega_p$ , где соответственно расположены источники и приёмники, не пересекаются с областью  $\Omega_0$  с параметрами  $\epsilon_0, \mu_0$ , содержащей исследуемое тело  $\Omega_1$  с параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$ . Введем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ , рассмотрим уравнения Максвелла для осесимметричных полей, когда все компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от азимутальной координаты  $\varphi$  [2]. Выпишем  $\mathbf{E} = \{0, E_\varphi(\rho, z), 0\}$ ;  $\mathbf{H} = \{H_\rho(\rho, z), 0, H_z(\rho, z)\}$  — магнитная мода и будем решать задачу относительно компоненты поля  $\mathbf{E}$ . Рассмотрена граничная задача с условиями сопряжения на границе неоднородности  $\partial\Omega_1$  для  $E_\varphi$ :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E(\varphi)}{\partial z} \right) + k_0^2 E_\varphi = E_{\varphi_0}, & \rho \text{ в } \Omega_0, \\ \mu \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E(\varphi)}{\partial z} \right) + k_1^2 E_\varphi = 0, & \rho \text{ в } \Omega_1, \\ [E_\varphi] = 0, \quad \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right] = -\frac{1}{\rho} E_\varphi \cos(n, \rho) \left[ \frac{1}{\mu} \right], & \rho \in \partial\Omega_1, \\ E_\varphi = O\left(\frac{1}{|\rho|}\right), \quad \frac{\partial E_\varphi}{\partial |\rho|} - ik_0 E_\varphi = o\left(\frac{1}{|\rho|}\right), & |\rho| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к границе,  $k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $\omega$  — частота,  $[\cdot]$  — разрыв значения функции на границе раздела,  $E_{\varphi_0}$  — первичное поле. Обратная задача сводится к нахождению коэффициента  $k_1(M)$ . От задачи (1)

перейдем к интегральным уравнениям:

$$\begin{cases} E_\varphi(M) - E_{\varphi_0}(M) = \int_{\partial\Omega_1} G(M, P) \frac{k_1^2(P) - k_0^2}{4\pi} E_\varphi(M) dS_P, & M \in \Omega_1, \\ E_{\varphi_p}(M) = \int_{\partial\Omega_1} G(M, P) \frac{k_1^2(P) - k_0^2}{4\pi} E_\varphi(M) dS_P, & M \in \Omega_p, \end{cases} \quad (2)$$

где  $G(M, P) = \rho \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr_{MP}}}{r_{MP}} \cos \varphi d\varphi$ . Для решения системы (2) использовался итеративно регуляризованный метод [3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nikitin S. Y. et al. Laser ektacytometry and evaluation of statistical characteristics of inhomogeneous ensembles of red blood cells // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2014 Т. 146, С. 365-375.
- [2] Дмитриев В. И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. - М. : МАКС Пресс, 2008. - 316 с.
- [3] A numerical way of solving the inverse problem for the wave equation in a medium with local inhomogeneity / Golovina S. G., Zakharov E. V., Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, Allerton Press Inc. (United States), Т. 41, № 4, с. 173-178

## ПРЕДСКАЗАНИЕ РОДА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

Гомзин Андрей Геннадьевич

Кафедра системного программирования, e-mail: gomzin@ispras.ru

Род деятельности, или профессия — это важная персональная характеристика, определяющая шаблон поведения и интересы пользователя социальной сети. Значения данного атрибута редко явно представлены самими пользователями, однако могут быть предсказаны по социальным связям.

**Постановка задачи.** Пусть  $\mathbf{L}$  — множество возможных значений атрибута,  $U = \{v_1, \dots, v_n\}$  — множество целевых пользователей, для  $t$  из них ( $t < n$ ) известно значение атрибута. Обозначим эти значения как  $Y_t = [y_1, \dots, y_t]$ , где  $y_i \in \mathbf{L}$  — деятельность пользователя  $v_i$ . Значения атрибута для  $v_{t+1}, \dots, v_n$  неизвестны и будут предсказываться. Обозначим их как  $Y_p = [y_{t+1}, \dots, y_n]$ .

Рассмотрим подмножество социального графа  $G = (V, E)$ . Вершины  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  представляют пользователей  $U$  и пользователей, на которых подписаны  $U$  ( $m > n$ ), направленные рёбра  $E = \{x \rightarrow y | x \in U, y \in V\}$  представляют отношения подписки целевых пользователей на вершины  $V$ .

Рассмотрим также расширенную версию графа  $G^* = (V, E^*)$ , где  $E^* = \{x \rightarrow y | x \in V, y \in V\}$  — все известные рёбра между вершинами  $V$ .

Задача — предсказать  $Y_p$  при заданном графе ( $G$  или  $G^*$ ) и  $Y_t$ .

**Набор данных.** Для данного исследования был собран, анонимизирован и выложен в открытый доступ\* набор данных из социальной сети Вконтакте, содержащий  $G$ ,  $G^*$  и референсные значения рода деятельности. Данные собирались с помощью аннотаторов-добровольцев.

**Методы.** Применяются методы, основанные на существующих решениях: алгоритм распространения меток [1], векторные представления вершин графа (LINE [2] и DeepWalk [3]) в качестве входа для классификатора XGBoost [4]. Вводится новый признак Distr — распределение значений деятельности по соседям вершины, в качестве входа для классификатора XGBoost. Рассматривается также конкатенация DeepWalk и Distr.

**Эксперимент.** Сбор графа  $G^*$  требует значительно больше ресурсов по сравнению со сбором  $G$ . В данной работе сравнивается качество предсказания рода деятельности пользователей для двух подмножеств графа:  $G$  и его расширенной версии  $G^*$ . На рисунке 1 представлены значения и доверительные интервалы F-меры, полученные в результате применения скользящего контроля.

**Вывод.** Показано, что для задачи предсказания рода деятельности дополнительные рёбра расширенного графа не улучшают значение F-1 меры.

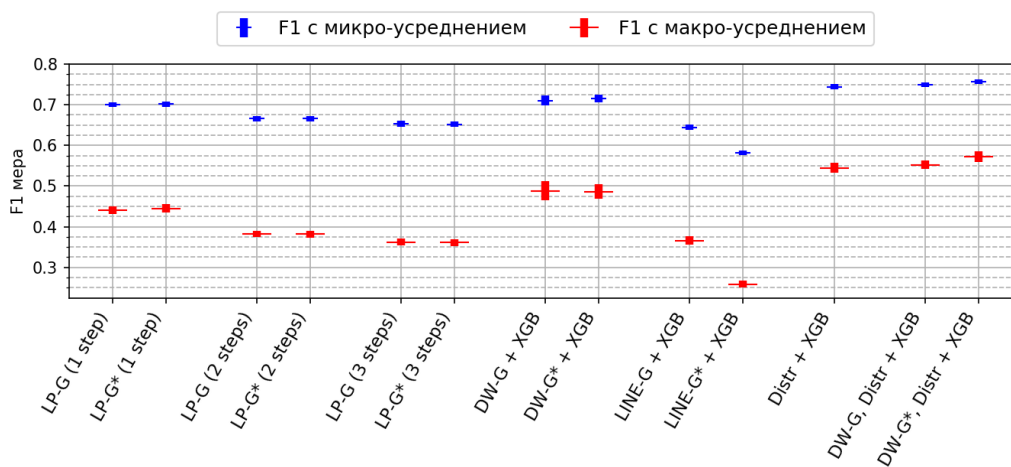


Рис. 1: Результаты оценки качества методов предсказания рода деятельности LP — распространение меток, DW — DeepWalk, XGB — XGBoost,  $G$  и  $G^*$  — подмножества графа

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Speriosu M. et al. Twitter polarity classification with label propagation over lexical links and the follower graph // Proceedings of the First workshop on Unsupervised Learning in NLP. – Association for Computational Linguistics, 2011. – С. 53-63.

\*<http://occupationprediction.ddns.net:8080/share.cgi?ssid=0dQ1xKa>

- [2] Tang J. et al. Line: Large-scale information network embedding //Proceedings of the 24th international conference on world wide web. – 2015. – С. 1067-1077.
- [3] Chen T., Guestrin C. Xgboost: A scalable tree boosting system //Proceedings of the 22nd acm sigkdd international conference on knowledge discovery and data mining. – 2016. – С. 785-794.
- [4] Perozzi B., Al-Rfou R., Skiena S. Deepwalk: Online learning of social representations //Proceedings of the 20th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. – 2014. – С. 701-710.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ОТКЛИКА ЗАДАЧ В МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМАХ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ**

**Гонопольский Марк Геннадьевич<sup>1</sup>, Глонина Алевтина Борисовна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: gmarkmgw@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: alevtina@lvk.cs.msu.su

В данной работе рассматриваются многопроцессорные вычислительные системы (ВС) с динамическими планировщиками со статическими приоритетами и вытеснением. Каждая задача в ВС характеризуется периодом, приоритетом и интервалом длительности выполнения на процессоре. В течение каждого периода должен быть выполнен один экземпляр задачи, называемый работой. Между задачами с одинаковым периодом могут существовать зависимости по данным. Конфигурация ВС задает характеристики задач и привязку задач к процессорам.

Будем называть временем отклика задачи величину, равную максимальному по всем работам этой задачи значению времен их завершения относительно начала периода. Наихудшее время отклика (WCRT – Worst Case Response Time) задачи – максимальное возможное время отклика задачи для данной конфигурации ВС. WCRT используется для решения ряда задач, возникающих при проектировании ВС реального времени.

В данной работе рассматривается следующая задача: для заданной конфигурации ВС и заданной задачи требуется найти WCRT этой задачи.

Задачу А будем называть аномальной для задачи В, если уменьшение времени выполнения задачи А может привести к увеличению WCRT задачи В.

Предложенный алгоритм решения поставленной задачи основан на методе из работы [1] и делится на два этапа:

1. Для заданной задачи находится множество аномальных ей задач. За основу был взят метод из работы [2]. Однако этот метод обладает недостатком: множество аномальных задач, которое он находит, неполно. Поэтому был



разработан новый алгоритм, с помощью которого для заданной конфигурации ВС и заданной задачи строится полное множество аномальных задач. Корректность этого алгоритма строго доказана.

2. Для заданной задачи решается задача оптимизации в пространстве, представляющем собой декартово произведение интервалов длительности выполнения всех аномальных задач. Целевая функция задается как WCRT исследуемой задачи при заданных временах выполнения ее аномальных задач.

Для решения этой оптимизационной задачи были реализованы два поисковых алгоритма: алгоритм имитации отжига и генетический алгоритм.

Было проведено исследование точности и времени работы каждого из алгоритмов, а также сравнение алгоритмов между собой. Оценка качества алгоритмов осуществлялась с помощью математического аппарата статистических гипотез.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00614).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Samii S. et al. A simulation methodology for worst-case response time estimation of distributed real-time systems // Proceedings of the Conference on Design, Automation and Test in Europe. IEEE, 2008. P. 556–561.
- [2] Racu R., Ernst R. Scheduling anomaly detection and optimization for distributed systems with preemptive task-sets // 12th IEEE Real-Time and Embedded Technology and Applications Symposium (RTAS'06). IEEE, 2006. P. 325–334.

## ПОИСК ОШИБОК ПЕРЕПОЛНЕНИЯ МАССИВОВ С НЕИЗВЕСТНЫМ РАЗМЕРОМ В ПРОГРАММАХ НА ЯЗЫКЕ С

Горемыкин А. В.<sup>1</sup>, Бородин А. Е.<sup>2</sup>, Белеванцев А. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: alexey.goremykin@ispras.ru

<sup>2</sup> ИСП РАН, e-mail: alexey.borodin@ispras.ru

<sup>3</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: abel@ispras.ru

Переполение массива — это ошибка, вызванная доступом массива по индексу за пределы выделенной ему памяти. Данный дефект может привести к некорректной работе программы или же к уязвимости в коде. В статье описывается реализация детекторов для поиска ошибок переполения массива с неизвестным размером в рамках инструмента статического анализа исходного кода Svace [3].

В Svace существуют детекторы, которые находят ошибочные ситуации связанные с переполением массива, размер которого известен в точке доступа к нему [1]. Но в исходном коде могут встречаться ситуации, где выделение

памяти для массива и обращение к нему значительно отделены друг от друга. В точке доступа есть только указатель на массив, а его размер для статического анализа определить затруднительно.

Но для ряда ситуаций в исходном коде даже в таком случае можно выдать предупреждение об ошибке. В частности, мы рассматривали случаи, в которых в качестве размера массива использовалось возвращаемое значение библиотечных функций: размер строки (`strlen`) или размер считанных данных (`fread`, `recv`, `read`). С помощью интервального анализа проверяется возможность переполнения массива [2].

```
void test0(char *buf) {
    int len = strlen(buf);
    if (len > 3) {
        buf[5] = 'a';
    }
}
```

#### Листинг 1: Пример ошибочной ситуации

В коде, приведённом в листинге 1, возникнет переполнение буфера, если длина строки в массиве `buf` будет равна четырём. Необходимо добавить условие, которое ограничит длину строки сверху.

Также был реализован аналог описанного детектора, который работает с ненадёжными данными.

Детекторы были запущены на проекте с открытым исходным кодом Tizen 5. Tizen 5 – это открытая операционная система на базе ядра Linux, содержащая около 6,626,400 строк кода C/C++. Всего было выдано 474 срабатывания; из них была взята случайная выборка из 150 срабатываний и размечена. В выборке оказалось 31 ложное срабатывание, т.е. 20,6%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дудина И. А., Кошелев В. К., Бородин А. Е. Поиск ошибок доступа к буферу в программах на языке C/C++ //Труды Института системного программирования РАН. – 2016. – Т. 28. – №. 4.
- [2] Шокин Ю.И. Интервальный анализ. //Новосибирск: Наука, 1981.
- [3] Аветисян А. И., Белеванцев А. А., Бородин А. Е., Несов В. С. Использование статического анализа для поиска уязвимостей и критических ошибок в исходном коде программ.//Труды ИСП РАН том 21, 2011 стр. 23-38.

# МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ В СЛОЖНО СТРУКТУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ, ОСНОВАННЫЕ НА НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

Горохов Олег Евгеньевич, Петровский Михаил Игоревич,  
Машечкин Игорь Валерьевич

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: owlman995@gmail.com,  
michael@cs.msu.su, mash@cs.msu.su

Обнаружение аномалий в сложно структурированных данных играет важную роль в современном мире. Это связано, в первую очередь, с тем, что в повседневной жизни человек работает именно с таким типом данных.

К ним можно отнести текстовые документы, с которыми взаимодействует пользователь. Также к сложно структурированным данным относятся различные журналы логов, которые создаёт операционная система. По всей этой информации можно оценить динамику работы пользователя с компьютером. Соответственно, можно построить психологический портрет нормального поведения пользователя или группы пользователей. Поэтому возникает вполне логичное предположение о важности анализа сложно структурированных данных в задаче поиска аномалий.

В последнее время популярным становится применение методов тематического моделирования для анализа сложно структурированных данных [1]. Однако, классические методы не позволяют добиться достаточно хороших результатов [2]. В данной работе предлагается рассмотреть усовершенствованный метод обнаружения аномалий, основанный на тематическом моделировании на базе свёрточных нейронных сетей с дальнейшей кластеризацией. Свёрточная часть сети позволяет выделить из документа так называемые латентные тематики, которые характеризуются группами слов, которые последовательно встречаются в тексте. Регуляризация и слой dropout позволяют избежать переобучения сети. Таким образом, в результате работы свёрточной части мы уменьшаем размерность признакового пространства. Далее, на основании алгоритма KNN мы пытаемся предсказать расстояние до  $k$ -го ближайшего соседа, выделяя тем самым кластеры, к которым принадлежат нормальные данные.

В ходе проведённых экспериментальных исследований, предложенный алгоритм позволил добиться лучшего результата по сравнению с классическими методами обнаружения аномалий, такими как одноклассовый SVM и Fuzzy.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly Detection: A Survey // ACM Computing Surveys. 2009. Vol. 41, № 3, P. 15:1–15:58.

- [2] Outlier Detection for Text Data : An Extended Version / K. Ramakrishnan, W. Hyenkyun, A. C. Charu, P. ZHaesun // arXiv preprint arXiv:1701.01325. 2017.

## **ОБОБЩЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОСАДКОВ**

**Горшенин Андрей Константинович, Королев Виктор Юрьевич**

Кафедра математической статистики ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; ФИЦ «Информатика и управление»  
РАН, e-mail: agorshenin@frccsc.ru, vkorolev@cs.msu.ru

В докладе предложены обобщенные математические модели статистических закономерностей поведения таких характеристик осадков, как продолжительность «дождливого» периода, максимальное суточное количество осадков за «дождливый» периода и суммарный объем осадков. Улучшенные модели (по сравнению с ранее предложенными в статье [1]) основаны на обобщенном отрицательном биномиальном (GNB) [2] и обобщенном гамма (GG) распределениях.

Продемонстрировано высокое согласие предложенных моделей с реальными данными, в частности, соответствие GNB-распределения и эмпирического распределения продолжительностей «дождливых» периодов, измеренных в днях. На основе этой модели предложены асимптотические аппроксимации для распределений максимального суточного объема осадков. Соответствующие результаты доказаны на основе предельных теорем для выборок случайного объема, в которых распределение размера выборки задается отрицательным биномиальным распределением.

Описан и статистически обоснован метод алгоритмического определения anomalously экстремальных объемов осадков на основе GG-теста. Показано, что распределение критерия в случае, если проверяемый объем не является экстремальным, описывается классическим распределением Снедекора—Фишера. Результаты обработки продемонстрированы для реальных данных на примере осадков в Элисте за 60 лет (см. рисунок 1).

Исследования А. К. Горшенина поддержаны РНФ (проект № 18-71-00156).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Korolev V., Gorshenin A., Belyaev K. Statistical tests for extreme precipitation volumes // Mathematics. 2019. Vol. 7. Art. No. 648.
- [2] Korolev V., Zeifman A. Generalized negative binomial distributions as mixed geometric laws and related limit theorems // Lithuanian Mathematical Journal. 2019. Vol. 59. P. 1461–1466

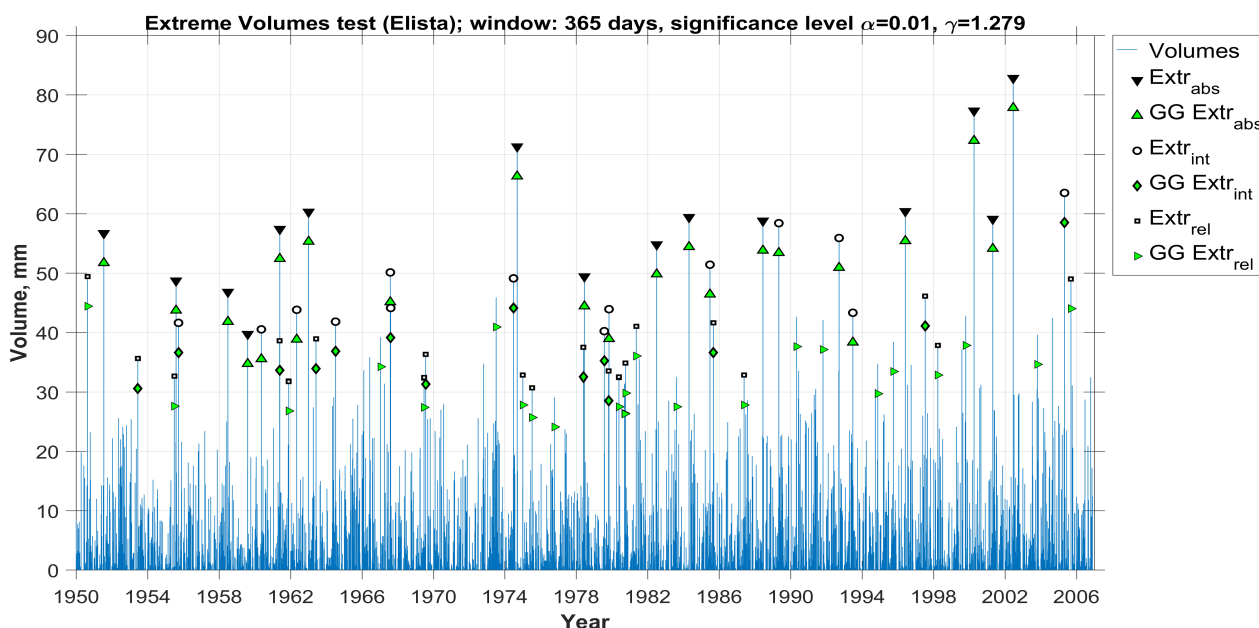


Рис. 1: Сравнение результатов тестов для объемов осадков на аномальную экстремальность на основе гамма- и обобщенного гамма-распределений (Элиста, размер скользящего окна – 365 дней).

## О СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ПОЗИЦИОННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТАХ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

Григоренко Николай Леонтьевич<sup>1</sup>, Горьков Валерий Павлович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Лаборатория обратных задач, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru

В докладе рассматривается задача управления для математической модели движения материальной точки в плоскости в поле силы тяжести. В качестве управляющего воздействия к точке приложена реактивная сила, возникающая в результате отделения частиц с некоторой массой. Математическая модель движения точки [1] имеет вид

$$\ddot{r} - r\dot{\psi}^2 + \frac{\nu}{r^2} = a_r \frac{\dot{m}}{m}, \quad r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} = a_\psi \frac{\dot{m}}{m}, \quad \dot{m} = u,$$

где  $r, \varphi$  – полярные координаты точки,  $m$  – масса точки,  $u, a_r, a_\psi$  – управляющие параметры. Целевым множеством является заданная эллиптическая орбита. Первая часть доклада посвящена результатам исследования свойств класса позиционных управлений, решающих задачу управляемости без фазовых ограничений на бесконечном отрезке времени из работы [2]. Приводится оценка времени перехода в окрестность целевого множества для заданных начальных условий, найдены начальные позиции, при которых траектория

при таком управлении удовлетворяет дополнительным фазовым ограничениям, получены оценки ресурса топлива, необходимого для перелета при таком управлении. Вторая часть доклада посвящена результатам исследования новых вариантов позиционного управления, решающего задачу управляемости на целевое множество и их использования в качестве начальных приближений при решении задач оптимизации параметров орбитального перелета на основании принципа максимума Понтрягина [3]. Рассмотрены задачи оптимизации по быстродействию и расходу топлива при переходе на другие орбиты, при стыковке двух аппаратов на орбите. Численные расчеты выполнены в среде “ВОСОР–2.1.1”, для различных условий рассматриваемой задачи минимизации. Авторы выражают благодарность профессору Никольскому М. С. за обсуждение постановок задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 476 с.
- [2] Колесников А. А. Новые нелинейные методы управления полетом // Физматлит. 2013. 196 с.
- [3] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Физматлит, 1961. 392 с.

## **МИНИМИЗАЦИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ РАКОВЫХ КЛЕТОК В МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ЛОТКИ—ВОЛЬТЕРРЫ С НЕМОНОТОННОЙ ФУНКЦИЕЙ ТЕРАПИИ**

**Григоренко Николай Леонтьевич, Хайлов Евгений Николаевич,  
Клименкова Анна Дмитриевна**

Кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru, khailov@cs.msu.ru,  
klimenkovaad@mail.ru

В докладе для описания взаимодействия концентраций здоровых и раковых клеток при заболеваниях, связанных с раком крови (лейкемия, лимфома, миелома), используется двумерная модель конкуренции Лотки—Вольтерры. В эту модель добавляется дифференциальное уравнение, описывающее изменение концентрации химиотерапевтического препарата. Это уравнение содержит скалярное ограниченное управление, которое задает интенсивность поступления такого препарата в организм. Эффективность применяемого лечения описывается с помощью немонотонной функции терапии. Для рассматриваемой управляемой системы ставится задача минимизации взвешенной разности концентраций раковых и здоровых клеток в конечный момент времени заданного периода лечения. Ранее, такая задача минимизации для монотонной функции терапии была изучена в [1], а для упомянутой управляемой модели эта задача минимизации была исследована в [2].

В рассматриваемой задаче минимизации с помощью принципа максимума Понтрягина аналитически устанавливаются свойства оптимального управления. Выделяются ситуации, когда такое управление является релейной функцией, а также ситуации, когда наряду с релейными участками, оно может также содержать и участок с особым режимом. Полученные результаты подтверждаются соответствующими численными расчетами, выполненными в среде “ВОСОР–2.0.5”, для различных значений параметров и начальных условий рассматриваемой задачи минимизации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Оптимальные стратегии лечения раковых заболеваний в математической модели конкуренции Лотки–Вольтерры / Н. Л. Григоренко, Е. Н. Хайлов, Э. В. Григорьева, А. Д. Клименкова // Труды института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 71–88.
- [2] Khailov E. N., Klimenkova A. D., Korobeinikov A. Optimal control for anticancer therapy // Extended Abstracts Spring 2018. Vol. 11. Trends in mathematics. Basel : Birkhäuser, 2019. P. 35–43.

## **ПРЕДОБУСЛОВЛИВАНИЕ МЕТОДА КРЫЛОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ**

**Груздев Арсений Павлович<sup>1</sup>, Мельников Николай Борисович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Научно-технический центр IBM, e-mail: gruzdev@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: melnikov@cs.msu.ru

Динамическая модель общего экономического равновесия описывается системой нелинейных уравнений в рамках теории Эрроу – Дебре. Число неизвестных в системе может достигать сотен тысяч и миллионов переменных. Для сокращения времени счета используются технологии параллельных вычислений. Альтернативным подходом является предобусловливание матрицы линеаризованной системы уравнений на каждой итерации решения нелинейной системы.

В работе [1] используется блочный предобуславливатель Якоби для метода Ньютона–Крылова, где блоки якобиана системы соответствуют переменным в фиксированный момент времени. Предобуславливатель Якоби и предобуславливатель на основе неполного LU-разложения применяются в работе [2] для стохастических моделей небольшой размерности. Однако методы ньютоновского типа могут оказаться неприменимы для моделей, которые рассматривают большое число регионов и длинный горизонт времени.

Мы используем обобщение метода Гаусса–Зейделя, в котором подсистема относительно внутривременных переменных модели решается методом крыловского типа GMRES. Нами реализован блочный предобуславливатель Якоби

по регионам для ускорения метода GMRES [3]. Проведено сравнение двух способов применения предобуславливателя. Первый способ требует хранения в памяти полного якобиана, второй требует только реализации функции умножения якобиана на вектор. Второй подход оказался эффективнее, поскольку требует меньшего числа вызовов функции и дает большее ускорение вычислений. В результате использование предобуславливателя дало ускорение в 1.6 раз и уменьшило число вызовов функции на порядок.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования высокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pauletto G., Gilli M. Parallel Krylov methods for econometric model simulation // *Computational Economics*. 2000. V. 16. N 1-2. P. 173–186.
- [2] Mrkaic M., Pauletto G. Preconditioning in economic stochastic growth models // *Modeling and Control of Economic Systems*. /Ed. by Neck R. Amsterdam: Elsevier, 2003. P. 349–353.
- [3] Gruzdev A. P., Melnikov N. B. Block Jacobi preconditioning for solving dynamic general equilibrium models // *Procs. International Conference «Stability, Control, Differential Games» (SCDG2019)*. Yekaterinburg: IMM UB RAS, 2019. P. 407–410.

## **ПЕРСПЕКТИВЫ СОЗДАНИЯ ВИКИ-СИСТЕМ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ (НА ПРИМЕРЕ ВИКИПЕДИИ ФАКУЛЬТЕТА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МГУ)**

**Гуляев Анатолий Викторович, Раевский Евгений Наумович**

Лаборатория программного обеспечения вычислительного практикума, e-mail: gav@cs.msu.ru,  
raev@cs.msu.ru

Бубнов Александр Сергеевич Лаборатория программного оборудовани-  
яab@cs.msu.ru

Доклад посвящён рассмотрению существующего опыта создания русскоязычных Вики-систем. Определены основные параметры подобных систем в зависимости от решаемых задач. Проанализированы особенности Вики-системы в сфере образования, проблемы, связанные с её созданием, организацией технической и функциональной поддержки; рассмотрены возможности использования созданной системы в учебном процессе. На основе проведённого исследования авторами предлагается осуществить практическое внедрение локальной Википедии для всего объёма информации, связанной с факультетом ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Для оптимального использования в сфере



образования, система Викисклада должна обладать набором специфических функций: возможность категоризации материалов на русском языке, возможность создания личных разделов преподавателей, обладающих сервисами облачных хранилищ (разрешение на чтение, правку и скачивание материалов в соответствии с перечнем пользователей, определяемым владельцем раздела). Наличие возможности выбора и указания типа лицензии, действующей в отношении материалов раздела по выбору его владельцем. Реализация этого проекта позволит: упорядочить данные, разместить их в сети Интернет в доступной структурированной форме, обеспечить их надёжное хранение. Практическая реализация проекта обеспечит естественное продвижение информации о факультете в сети, создаст новые инструменты для обучения (русский язык, иностранные языки, язык Викиразметки, программирование), а также предоставит возможность создания учебников и учебных пособий в электронном виде – цифровое издательство факультета. Создание локальной Википедии факультета ВМК МГУ приобретает особую актуальность в год его 50-летнего юбилея.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bo Leuf, Ward Cunningham. The wiki way. Boston, San Francisco, New York, Toronto, Montreal, London, Munich, Paris, Madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico City: Addison-wesley, 2001. 435 с.
- [2] Кошеляева В. Д. Использование социального сервиса Вики на занятиях по иностранному языку // Вестник ТГУ : журнал. 2010. № 4 (84). С. 119–122.
- [3] Рейтинг сервисов для ведения корпоративной базы знаний (Wiki) и хранения документации. URL: <https://tagline.ru/wiki-systems-rating/>
- [4] Московский международный рейтинг «Три миссии университета» (материалы к критериям рейтинга). URL: [https://mosiur.org/methods/criteria\\_studies/](https://mosiur.org/methods/criteria_studies/)

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БОТОВ В ВИКИ-СИСТЕМАХ (ТЕКУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ)

Гуляев Денис Анатольевич<sup>1</sup>, Жуков Константин Андреевич<sup>2</sup>, Раевский Евгений Наумович<sup>3</sup>, Бубнов Александр Сергеевич<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Кафедра функционального анализа и его применений, e-mail: gulden@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: zhukov\_k@cs.msu.ru

<sup>3</sup> Лаборатория программного обеспечения вычислительного практикума, e-mail: raev@cs.msu.ru

<sup>4</sup> Лаборатория программного оборудования, e-mail: ab@cs.msu.ru

Доклад посвящён рассмотрению задачи использования ботов в различных вики-системах, включая Википедию. Преимущества и недостатки широкого применения ботов. Использование ботов в локальных вики-системах для

решения многих задач. Определён перечень этих задач. Проанализирована статистика автоматических и ручных правок в Википедии и определены тенденции. В составе вики-систем образовательных учреждений боты могут быть использованы в качестве инструментов учебных процессов (русский язык, иностранные языки, языки программирования).

График числа правок (в основном пространстве Википедии) с момента открытия русскоязычной Википедии (2003) до настоящего времени представлен ниже.

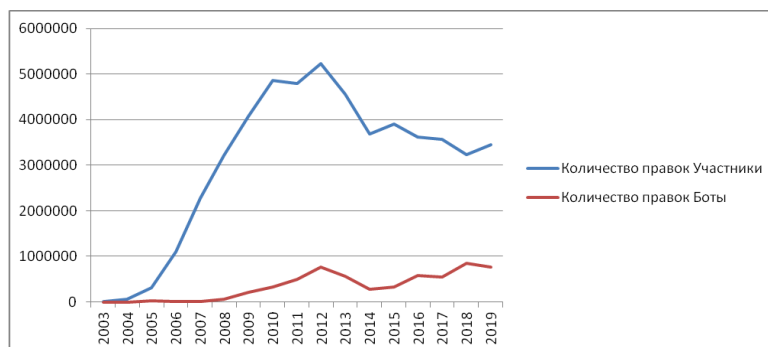


Рис. 1: График числа правок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bo Leuf, Ward Cunningham. The wiki way. Boston, San Francisco, New York, Toronto, Montreal, London, Munich, Paris, Madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico City: Addison-wesley, 2001. 435 с.
- [2] Кошеляева В. Д. Использование социального сервиса Вики на занятиях по иностранному языку // Вестник ТГУ : журнал. 2010. № 4 (84). С. 119–122.
- [3] Рейтинг сервисов для ведения корпоративной базы знаний (Wiki) и хранения документации. URL: <https://tagline.ru/wiki-systems-rating/>
- [4] Московский международный рейтинг «Три миссии университета» (материалы к критериям рейтинга). URL: [https://mosiur.org/methods/criteria\\_studies/](https://mosiur.org/methods/criteria_studies/)

## О РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗОВЫХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ВАГОНОВ

Давидсон Михаил Рувимович<sup>1</sup>, Гринько Петр Сергеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: mdavidson@consultnext.ru

<sup>2</sup> МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: petr.grinko.mob@gmail.com

В работе исследуется модель рынка грузовых перевозок на железнодорожном транспорте. Есть основания полагать, что в настоящий момент в Российской Федерации реальный рынок с точки зрения его территориальных и

продуктовых границ представляет собой не всю совокупность перевозимых по железной дороге грузов, а рынки отдельных грузов и маршрутов, в качестве игроков на которых выступает ограниченный круг компаний [1]. Более того, существующая модель дает преимущество более крупным и финансово устойчивым грузоперевозчикам, а тарифное руководство приводит к противоречию в интересах рыночных агентов [1].

Основным объектом исследования является задача оптимизации передвижения груженых и порожних вагонов по транспортной сети, в которой под оптимальностью подразумевается наименьшее значение функции суммарной себестоимости перевозки всех операторов — владельцев вагонов. При этом существует статический, неограниченный во времени вариант данной задачи, решение которого может быть использовано в качестве конкурентного ценообразования на услуги грузовых перевозок, в частности доказано, что цены, вычисленные как множители Лагранжа к ограничениям, будут являться индивидуально-рациональными для каждого оператора.

Однако важнейшим фактором индустрии является время перевозки груза, и статическая постановка задачи не может при этом гарантировать выполнение объемов перевозок в заданный срок, более того, в общем случае время выполнения всех заказов не зависит от объема вагонного парка и может достигать неадекватно больших значений.

С другой стороны, при решении расширенного динамического варианта задачи количество рассматриваемых переменных и ограничений вырастает в дополнительном измерении, что ведет к проблеме большой размерности для реальных параметров индустрии железнодорожных грузоперевозок.

Результатом исследования является алгоритм декомпозиции статической задачи, с помощью которого возможно получить оптимальное решение динамической задачи для каждого оператора.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бутов А. М. Рынок перевозок грузов железнодорожным транспортом // Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Центр развития, 2016. С. 2–55.
- [2] Мину М. Математическое программирование. М. : Наука, 1990.
- [3] Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. М. : МАКС-Пресс, 2005.

## РИСК-НЕЙТРАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ДЛЯ МОДЕЛИ ARIMA-GARCH С ОШИБКАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ЗАКОНУ $S_u$ ДЖОНСОНА

Данилишин Артём Ростиславович, Голембиовский Дмитрий Юрьевич

Кафедра исследования операций, e-mail: danilishin-artem@mail.ru, golemb@cs.msu.su

Моделирование динамики цен базовых активов лежит в основе нахождения справедливой стоимости производных финансовых инструментов [1]. Эконометрика предлагает множество моделей, однако, на данный момент среди дискретных, наиболее популярной является модель ARIMA-GARCH, которая позволяет описывать переменную волатильность моделируемого случайного процесса [2]. В рамках исследования была рассмотрена ARIMA-GARCH модель с ошибками, распределенными по закону  $S_u$  Джонсона. Преимуществом данного распределения является возможность описывать эффект «тяжелых хвостов», который часто встречается на финансовых рынках [3, 4].

Условие безарбитражности, т. е. отсутствие возможности получения безрисковой прибыли при нулевых затратах [5], является одним из главных принципов ценообразования финансовых инструментов. Наличию безарбитражности отвечает наличие риск-нейтральной вероятностной меры, которая для полного рынка является единственной. Однако, существуют неполные рынки, которые характеризуются наличием нескольких риск-нейтральных мер, каждой из которых отвечает своя стоимость финансового инструмента.

Существуют способы получения риск-нейтральных мер из физических мер (преобразование Эшера, расширенный принцип Гирсанова), данные способы получаются естественным образом — путем решения оптимизационных задач (максимизация индивидуальной функции полезности, минимизация индивидуальной функции затрат). Однако, все перечисленные способы требуют знания производящей функции моментов исследуемого распределения, что делает невозможным применение методов получения риск-нейтральной меры к распределениям, для которых производящая функция моментов не определена. Примером является распределение  $S_u$  Джонсона [6, 7]. Основным результатом исследования — обобщение расширенного принципа Гирсанова и нахождение риск-нейтральной меры для рассматриваемого случайного процесса.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hull J. Options, futures, and other derivatives. 10th ed. Pearson, 2018. 896 p.
- [2] Patton A. Quantitative finance. London: University of London Press Publisher, 2015. 65 p.

- [3] Akgiray V. Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: Evidence and forecasts // J. Bus., 1989. Vol. 62. Iss. 1. P. 55–80. DOI: 10.1086/296451.
- [4] Teräsvirta T. An introduction to univariate GARCH models // Handbook of financial time series / Eds. T.G. Andersen, R.A. Davis, J.-P. Kreiss, Th. V. Mikosch. Berlin–Heidelberg: Springer, 2009. Vol. 10. P. 17–42. DOI: 10.1007/978-3-540-71297-81.
- [5] Follmer H., Schied A. Stochastic finance: An introduction in discrete time. Berlin: Walter de Gruyter, 2002. 422 p.
- [6] Bollerslev T. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // Rev. Econ. Stat., 1987. Vol. 69. Iss. 3. P. 542–547. DOI: 10.2307/1925546.
- [7] Simonato J. G. GARCH processes with skewed and leptokurtic innovations: Revisiting the Johnson SU case. May 16, 2012. URL: <https://ssrn.com/abstract=2060994>.

## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАСТУЩИМ МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Денисов Василий Николаевич

Кафедра общей математики, e-mail: [vdenisov2008@yandex.ru](mailto:vdenisov2008@yandex.ru)

В полупространстве  $\bar{D} = E^N \times [0, \infty)$ ,  $N \geq 3$ , рассмотрим модельную задачу

$$\Delta u + c(x)u - u_t = 0 \text{ в } D, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in E^N. \quad (2)$$

Будем говорить, что  $c(x)$  удовлетворяет условию (C), если

$$c(x) \leq \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } |x| \leq 1, \\ -\alpha^2|x| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Пусть функция (2) непрерывна в  $E^N$  и удовлетворяет условию роста

$$|u_0(x)| \leq M \exp\{b|x|^{\frac{3}{2}}\}, \forall x \in E^N, \quad (3)$$

при некоторых  $b > 0, M > 0$ .

Изучаются достаточные условия, гарантирующие стабилизацию решения задачи (1), (2), т. е. существование предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \quad (4)$$

равномерно по  $x$  на каждом компакте  $K$  в  $E^N$ .

Обзор работ по стабилизации см. [1].

**Теорема.** Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (1), (2), начальная функция  $u_0(x)$  удовлетворяет условию (3), а коэффициент  $c(x)$  удовлетворяет условию (C) при

$$\alpha > \frac{3}{2}b. \quad (5)$$

Тогда решение задачи (1), (2) стабилизируется к нулю, равномерно по  $x$  на каждом компакте, т.е. существует предел (4).

**Замечание.** В работе [2] приведен пример, показывающий, что условие (5) не может быть заменено на противоположное:  $a \leq \frac{3}{2}b$ .

Результаты настоящей заметки могут быть перенесены на более общие параболические уравнения второго порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Денисов В. Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // УМН, 2005, Т. 60, № 4, С. 145–212.
- [2] Денисов В. Н. О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами // Фундамент. и прикл. матем., 2006, Т. 12, № 4, С. 79–97.

# ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА НЕВЯЗКИ К ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

Дряженков Андрей Александрович, Потапов Михаил Михайлович

Кафедра оптимального управления, e-mail: andrja@yandex.ru, mmpotapovrus@gmail.com

В докладе рассматривается задача граничного нейман-управления для квазилинейного уравнения колебаний струны:

$$\begin{aligned} y_{tt} &= y_{xx} + g(y), & 0 < t < T, & \quad 0 < x < l, \\ -y_x|_{x=0} &= u(t), \quad y|_{x=l} = 0, & 0 < t < T, \\ y|_{t=0} &= 0, \quad y_t|_{t=0} = 0, & 0 < x < l. \end{aligned}$$

Функция  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  предполагается липшицевой. При выборе управлений  $u = u(t)$  из гильбертова пространства Лебега  $H = L^2(0, T)$  рассматриваемая краевая задача имеет сильное обобщённое решение  $y = y(t, x)$  со следами  $y(T, \cdot) \in H^1(0, \overset{\circ}{l})$ ,  $y_t(T, \cdot) \in L^2(0, l)$ , где  $H^1(0, \overset{\circ}{l})$  — подпространство пространства Соболева  $H^1(0, l)$ , состоящее из функций, обращающихся в нуль при  $x = l$ .

Введём оператор  $\mathcal{A} : H \rightarrow F$ , действующий на управления  $u \in H = L^2(0, T)$  по правилу  $\mathcal{A}(u) = (y(T, \cdot), y_t(T, \cdot)) \in F = H^1(0, l) \times L^2(0, l)$ .

Целью управления в данной работе является безусловная минимизация следующего терминального функционала:

$$\|\mathcal{A}(u) - f\|_F^2 = \|y(T, \cdot) - f^0\|_{H^1(0, l)}^2 + \|y_t(T, \cdot) - f^1\|_{L^2(0, l)}^2 \rightarrow \min_{u \in H}, \quad (1)$$

где  $f = (f^0, f^1) \in F$  — заданная пара функций. Известно [1], что при  $T > 2l$  минимальное значение функционала в задаче (1) равно нулю  $\forall f \in F$ .

Для устойчивого численного решения задачи минимизации (1) предлагается использовать модификацию обобщённого принципа невязки, предложенную в [2]. Для её обоснованного применения в данной работе были получены следующие априорные оценки погрешности аппроксимации для приближённых операторов  $\tilde{\mathcal{A}}$ , построенных с помощью явной разностной схемы с одинаковыми шагами  $\tau$  по времени и пространству:

$$\|\tilde{\mathcal{A}}(u) - \mathcal{A}(u)\|_F \leq \tau \Psi^-(\|u\|_{H^-}), \quad \|\tilde{\mathcal{A}}(u) - \mathcal{A}(u)\|_{F^+} \leq \tau \Psi^+(\|u\|_H),$$

где  $H^- = H^1(0, T)$ ,  $F^+ = L^2(0, l) \times (H^1(0, l))^*$ , а функции  $\Psi^-$ ,  $\Psi^+$  имеют явное представление через данные задачи  $T$ ,  $l$  и константу Липшица функции  $g$ . С использованием полученных оценок были проведены тестовые расчёты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zuazua E. Exact controllability for semilinear wave equations // *Annales de l'Inst. Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. 1993. Vol. 10, N 1. P. 109–129.
- [2] Дряженков А. А., Потапов М. М. Об обобщённом принципе невязки для нелинейных операторных уравнений при наличии возмущений в ослабленных нормах // Тихоновские чтения МГУ им. М. В. Ломоносова. Научная конференция: Тезисы докладов, 29 октября—2 ноября 2018. М. : МАКС Пресс, 2018. С. 37.

# СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОДХОДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР В ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Егоренков Владимир Александрович, Логинова Мария Михайловна

Кафедра вычислительных методов, e-mail: egorenkov-v-a@cs.msu.ru, mloginova@cs.msu.ru

Рассматривается двумерная задача взаимодействия фемтосекундного лазерного импульса с полупроводником в условиях реализации оптической бистабильности. Математическая модель данного процесса представляет собой

систему нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений относительно концентраций свободных электронов и ионизированных доноров в зоне проводимости полупроводника, уравнения Пуассона относительно потенциала светоиндуцированного электрического поля, а также нелинейного уравнения Шредингера, описывающего эволюцию падающего оптического излучения при прохождении через полупроводник, в котором формируются контрастные структуры. Для адекватного описания процесса в уравнении Шредингера присутствует продольная дифракция оптического пучка [1], которая позволяет учитывать волну, отраженную от границ доменов высокой концентрации и от граней полупроводника. При компьютерном моделировании с ростом времени появляются волны, отраженные от границ области, которые могут исказить численное решение. Чтобы избежать этого, необходимо либо существенно увеличивать расчетную область, что приводит к неприемлемому увеличению расчетного времени, особенно в случае многомерных задач, либо вводить искусственные (прозрачные) краевые условия [2]. В связи с этим, в данной работе рассмотрены разные подходы к постановке таких краевых условий для уравнения Шредингера [3, 4]. Для повышения их эффективности необходимо выполнять адаптацию параметров, входящих в искусственные краевые условия, к решению задачи вблизи искусственной границы, что демонстрируется в настоящем докладе.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант № 19-11-00113).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Trofimov V. A., Loginova M. M., Egorenkov V. A. Fast and slow light observation at laser pulse interaction with contrast structures induced in semiconductor due to its nonlinear absorption and optical beam diffraction // *Proceedings of SPIE—The International Society for Optical Engineering*. 2018. V.10755. P.107550A.
- [2] Menza L. Di Transparent and absorbing boundary conditions for the Schrodinger equation in a bounded domain // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 1997. V. 18, № 7–8. P. 759–775.
- [3] Antoine X., Besse C., Mouysset V. Numerical schemes for the simulation of the two-dimensional Schrödinger equation using non-reflecting boundary conditions // *Mathematics of computation* // *Mathematics of computation*. 2004. V. 73, № 248. P. 1779–1799.
- [4] Терёшин Е. Б., Трофимов В. А., Федотов М. В. Консервативная разностная схема для задачи двухволнового взаимодействия фемтосекундных импульсов в фотонном кристалле // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2003. Т. 43, № 10. С. 1530–1535.



## **РЕДУКЦИЯ 3D ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НА СИЛОВОМ ЦЕНТРЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ**

**Еленин Георгий Георгиевич<sup>1</sup>, Еленина Татьяна Георгиевна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных методов, ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: elenin2@rambler.ru

<sup>2</sup> Кафедра математического моделирования и информатики, физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: t.yelenina@gmail.com

В докладе рассматривается задача о рассеянии материальной точки на кулоновском силовом центре [1] в трехмерной постановке. Особенностью этой задачи для гамильтоновых уравнений движения является наличие погранслоя. Для эффективного численного решения задачи следует привлекать численные методы с автоматическим выбором шага, сохраняющие геометрию фазового пространства и интегралы движения в рамках точной арифметики.

На основе параметризаций решения задачи и ее редукций строятся семейства адаптивных вычислительных методов, осуществляющих симплектическое отображение начального состояния в текущее состояние и сохраняющих все первые интегралы задачи, орбиту движения и годограф скорости. Предложенный подход позволяет получать методы высокого порядка аппроксимации зависимостей фазовых переменных от времени. Приводится конкретный вид методов второго, четвертого и шестого порядком. При некоторых соотношениях между параметрами методы являются точными. Методы решения рассматриваемой задачи, аналогичны методам, предложенным ранее для решения задачи Кеплера [2, 3]. Новые результаты обобщают ранее полученные результаты для задачи в двумерной постановке.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
- [2] Еленин Г. Г., Еленина Т. Г. Адаптивные симплектические консервативные численные методы решения задачи Кеплера // Дифференциальные уравнения, 2017. Т. 53, № 7. С.950-961.
- [3] Еленин Г. Г., Еленина Т. Г. Тестовые испытания адаптивных симплектических консервативных численных методов решения задачи Кеплера // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58, № 6, С. 895-913.

## **АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПОИСКА ПОХОЖИХ СУДЕБНЫХ РЕШЕНИЙ**

**Ермолаев Павел Альбертович, Полякова Ирина Николаевна**

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: ermolaev.p.a@yandex.ru, polyak@cs.msu.ru

За продолжительную историю существования судов накопился большой объем информации по судебным тяжбам: заявления сторон, ход рассмотрения дела,

решения суда, апелляции. Современные методы обработки больших объемов данных и компьютерная лингвистика позволяют извлечь, структурировать этот объем данных, а также применить полученную агрегированную информацию на благо людям.

Одной из задач, которую можно решить, обладая архивными данными по судебной практике, является задача поиска похожих судебных решений. Задача состоит в том, чтобы, имея текст решения суда или произвольный запрос по теме судебного решения, найти похожие судебные решения из некоторого множества уже имеющихся решений.

Поиск похожих судебных решений может использоваться при определении степени схожести судебных дел, при принятии решения о подаче апелляции и пр. Поиском пользуются юристы, адвокаты, судьи, простые граждане, не имеющие специального юридического образования.

Проведенные эксперименты показывают, что из-за специфичности предметной области для эффективного поиска требуется особая предварительная обработка исходных документов и запроса, например, в данной задаче становится критичным корректное определение и удаление некоторых именованных сущностей (названий организаций, ФИО, геолокаций). Также в этой задаче требуется использование нестандартных методов поиска. Например, примитивный полнотекстовый поиск, основанный на tf-idf взвешивании word2vec векторов слов [1,2], проигрывает поиску с выделением шаблонных частей в документах и последующему поиску в этих шаблонах. Так как структура судебных решений поддается шаблонизации, т.е. их структура в целом похожа и можно выделить общие важные фрагменты (например, обстоятельства дела, доказательства, вынесенное решение), то наиболее эффективным является выделение этих шаблонных фрагментов [3] и их последующее независимое использование при поиске нужных фрагментов. Именно поиск по этим фрагментам, а не по всему документу дает наилучший результат.

Таким образом, поиск по судебным решениям плохо сводится к стандартной задаче поиска и требует более серьезной и осмысленной предварительной обработки, а также методов, основанных в первую очередь на шаблонизации исходных данных, и поиска внутри найденных шаблонных структур.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Efficient estimation of word representations in vector space / T. Mikolov, K. Chen, G. Corrado, J. Dean, // In Proceedings of Workshop at ICLR. 2013. arXiv e-prints, 1301.3781.
- [2] Distributed representations of words and phrases and their compositionality. / T. Mikolov, I. Sutskever, K. Chen, G. Corrado, J. Dean // In Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS 2013), P. 3111–3119.

- [3] Nunez V., Hong B., Ong E. Automatically extracting templates from examples for NLP Tasks // Proceedings of the 22nd Pacific Asia Conference on Language, Information and Computation. 2008. P. 452–459.

## О СХОДИМОСТИ СЕТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ СИЛЬНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ершова Татьяна Яковлевна

Лаборатория разностных методов, e-mail: ersh@cs.msu.ru

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &\equiv \varepsilon u'''(x) + (r(x)u'(x))' - (q(x)u(x))' = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad \varepsilon \in (0, 1), \\ r(x) &\geq r > 0, \quad Q \geq q(x) \geq 0, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Решение этой сингулярно возмущенной задачи имеет сильный пограничный слой вблизи  $x = 0$ , а именно, производная решения в окрестности этой точки неограничена при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и структура слоя определяется функцией  $e^{-rx/\varepsilon}$ . Это вызывает трудности как при решении задачи, так и при получении оценок точности приближённого решения.

Для уравнения третьего порядка равномерные оценки сходимости сеточных решений исследовались только для задачи со слабым пограничным слоем, имеющим структуру  $\varepsilon e^{-rx/\varepsilon}$  (см. обзор работ в [1]). Такое решение задачи будет, например, в том случае, когда заданы условия:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$ . В работе [1] для решения задачи со слабым пограничным слоем на сетке Шишкина получена оценка  $\|u(x_i) - u_i\|_{h,\varepsilon} \leq c N^{-1} \ln N$ . Но использовать технику получения этой оценки для задачи, решение которой имеет сильный пограничный слой, не представляется возможным [1, замечание 6].

В предлагаемой работе для задачи с сильным пограничным слоем на сетке Шишкина получена равномерная по малому параметру оценка погрешности решения соответствующей разностной задачи:

$$\|u(x_i) - u_i\|_{W_{1,\infty,\varepsilon}^h} = \max_{0 \leq i \leq N} |(u(x_i) - u_i)| + \varepsilon \max_{1 \leq i \leq N} |(u(x_i) - u_i)_{\bar{x}}| \leq c N^{-1} \ln N.$$

Для доказательства этого утверждения исходное разностное уравнение путём суммирования преобразуется в разностное уравнение второго порядка, для которого справедлив аналог принципа максимума и известны оценки функции Грина [2]. При доказательстве исследована погрешность аппроксимации разностного уравнения и использована декомпозиция решения дифференциальной задачи.

Проведённое численное исследование подтверждает теоретически полученный результат.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Roos H.-G., Teofanov L., Uzelac Z. Uniformly convergent difference schemes for a singularly perturbed third order boundary value problem. //Appl. Numer. Math. 2015. V 96. P. 108 - 117.
- [2] Андреев В. Б. Функция Грина и априорные оценки решений монотонных трехточечных сингулярно возмущенных разностных схем. // Дифференц. уравн. 2001. Т. 37, № 7, С. 880 - 890.

## КОАЛИЦИОННАЯ РАВНОВЕСНОСТЬ И РИСК В КОНФЛИКТАХ С НЕТРАНСФОРМАБЕЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТЬЮ

**Жуковский Владислав Иосифович<sup>1</sup>, Жуковская Лидия Владиславовна<sup>2</sup>,  
Кудрявцев Константин Николаевич<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: zhkvlad@yandex.ru

<sup>2</sup> Центральный экономико-математический институт РАН, e-mail: Zhukovskaylv@mail.ru

<sup>3</sup> Южно-Уральский государственный университет, e-mail: kudrkn@gmail.com

Рассматриваем игру  $N$  лиц в нормальной форме с заданной коалиционной структурой и стратегической неопределенностью

$$\Gamma = \langle \mathcal{K}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_n\}$  — заданная коалиционная структура, коалицию  $K_j = \{k_{j_1}, \dots, k_{j_p}\}$  образуют игроки  $k_{j_1}, \dots, k_{j_p}$ , стратегия  $i$ -го игрока  $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ . Стратегия коалиции  $K_j$  есть

$$x_{K_j} = (x_{k_{j_1}}, \dots, x_{k_{j_p}}) \in X_{K_j} = X_{k_{j_1}} \times \dots \times X_{k_{j_p}}.$$

Игроки коалиции  $K_j$  совместно выбирают свою стратегию  $x_{K_j}$ , в результате образуется ситуация  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ , не зависимо от выбора

игроков реализуется стратегическая неопределенность  $y(x) : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$ . На полученных парах  $(x, y) \in X \times Y$  определены функции выигрыша  $f_i(x, y)$  всякого  $i$ -го игрока ( $i \in \mathbb{N}$ ).

Каждой функции  $f_i(x, y)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) ставим в соответствие функцию риска по Сэвиджу—Нихансу

$$\Phi_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y),$$

затем строим гарантию выигрыша

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y) \leq f_i(x, y) \quad \forall y \in Y$$

и гарантию риска

$$\Phi_i[x] = \max_{z \in Y} \Phi_i(x, z) \geq \Phi_i(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

Исходной игре  $\Gamma$  сопоставим коалиционную игру с гарантированными выигрышами и рисками

$$\Gamma_g = \langle \mathcal{K}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i[x] - \Phi_i[x]\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle.$$

В  $\Gamma_g$  коалиции между собой используют бескоалиционный вариант игры, где принцип равновесности по Нэшу заменяется на требование максимальности по Парето.

Получены достаточные условия существования гарантированных по выигрышам и рискам решений игры  $\Gamma$ , сводящиеся к построению максиминной стратегии в специальной гермейеровской свертке критериев игры  $\Gamma_g$ . Основа такого подхода заложена в публикациях [1, 2, 3].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zhukovskiy V. I., Kudryavtsev K. N. Pareto-optimal Nash equilibrium: Sufficient conditions and existence in mixed strategies // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. № 8. P. 1500–1510.
- [2] Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. Математические основы Золотого правила. I. Статический вариант // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, № 3. С. 16–47.
- [3] Salukvadze M. E., Zhukovskiy V. I. The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics. Cham: Springer Nature Switzerland, 2020. 272 p.

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ И НЕЙРОСЕТЕВЫХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ АУТЕНТИФИКАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАБОТЫ С КЛАВИАТУРОЙ КОМПЬЮТЕРА**

**Журавский Максим Игоревич, Петровский Михаил Игоревич,  
Машечкин Игорь Валерьевич, Казачук Мария Андреевна**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: paperlark@icloud.com,  
michael@cs.msu.su, mash@cs.msu.su, kazachuk@mlab.cs.msu.su

На сегодняшний день динамическая аутентификация пользователей на основе анализа работы с клавиатурой компьютера является одним из наиболее перспективных направлений исследований в области систем аутентификации [1]. Достоинствами данного подхода является высокая надежность за счет использования биометрических показателей, а также способность контролировать факт смены пользователя в течении сессии работы за компьютером.

В данной работе рассматриваются существующие метрические и нейросетевые подходы к решению рассматриваемой задачи, анализируются их достоинства и недостатки, а также предлагаются разработанные авторами метод аутентификации, основанный на метрике Чебышева, и подход, основанный на использовании полностью сверточной нейронной сети. Дополнительно, предлагаются архитектуры полносвязных и рекуррентных нейронных сетей, использование которых также позволило достичь высокого качества распознавания. Рассматривается возможность каскадного обучения. Во избежание переобучения используются нейронные сети с Dropout-слоями и L1-регуляризацией весов. Для повышения устойчивости к выбросам в обучающей выборке на этапе обучения предлагается использовать функцию потерь Log-Cosh. Проводится экспериментальное сравнение качества работы предложенных методов с существующими. Используется открытый набор данных, содержащий данные динамики 144 пользователей с клавиатурой компьютера. По результатам экспериментов предложенные методы, основанные на метрике Чебышева и полностью сверточном нейросетевом автокодировщике, превзошли по качеству все рассмотренные методы (качество распознавания составило порядка 0.95 и 0.92 ROC AUC соответственно).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Developing a keystroke biometric system for continual authentication of computer users / J. V. Monaco, N. Bakelman, S. H. Cha, C. C. Tappert // In: 2012 European Intelligence and Security Informatics Conference (EISIC) IEEE 2012, P. 210–216.

## **КОНЦЕПЦИЯ СИСТЕМЫ ПОВЕДЕНЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА КОРПОРАТИВНЫХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ**

**Закляков Роман Дмитриевич, Машечкин Игорь Валерьевич**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: zakliakov@mlab.cs.msu.su,  
mash@cs.msu.su

На сегодняшний день угрозы, исходящие от инсайдеров – людей, находящихся внутри организации, являются актуальной проблемой: по данным [1] за последние два года количество инцидентов выросло на 47%, а затраты на борьбу с данным типом угроз выросли на 31%. Чем дольше длится утечка, тем дороже она обходится организации: так, инциденты, длившиеся более 90 дней, обходились организациям в среднем в 13 миллионов долларов в год, тогда как инциденты, длившиеся 30 дней – около 7 миллионов. Таким образом, актуальной является прикладная задача раннего обнаружения аномальных действий корпоративных пользователей в электронных системах предприятия, причем, так как инсайдерские угрозы крайне разнообразны, на первый план выходит потребность в аналитическом инструментарии.

В работе сформулированы основные требования к программному комплексу сбора и анализа событий, возникающих при работе пользователей в корпоративных компьютерных системах, представлена концепция такой системы, включая общую архитектуру, описание источников собираемых фактов и технических аспектов их получения на устройствах под управлением операционных систем семейств Windows и Linux, а также описан аналитический инструментарий, использующий методы машинного обучения, доступный в текущей версии программной реализации системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] 2020 Cost of Insider Threats Global Report [Электронный ресурс]. URL: <https://www.observeit.com/cost-of-insider-threats/> (дата обр. 17.03.2020).

## **ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ АНАЛИЗА ПОМЕЧЕННЫХ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

**Игнатъев Валерий Николаевич, Корябкин Данил Александрович,  
Шимчик Никита Владимирович**

Кафедра системного программирования, ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова; ИСП РАН, e-mail: [valery.ignatyev@ispras.ru](mailto:valery.ignatyev@ispras.ru), [arboretum@ispras.ru](mailto:arboretum@ispras.ru), [shimnik@ispras.ru](mailto:shimnik@ispras.ru)

Метод статического анализа помеченных данных позволяет осуществлять поиск уязвимостей в программах, путём выявления зависимостей по данным между функциями-истоками и функциями-стоками.

В данной работе предложено развитие подхода, представленного в работах [1] и [2], в котором задача отслеживания сводится к задаче из класса IFDS [3], которые решаются как задачи достижимости на графе.

Области памяти, содержащие помеченные данные, в работе [1] моделируются путями доступа, то есть последовательностями операций разыменования указателя и смещения указателя на некоторое число байт. Для смещений, представленных в коде переменными величинами, используется специальная константа, считающаяся равной любой другой константе.

В данной работе были предложены и испытаны различные типы смещений, позволяющих более точно, нежели числовые константы, моделировать смещения в памяти на неопределенные величины: смещения-сегменты, смещения-области и символьные смещения. Символьные смещения задают расположение и размер помеченной области памяти в виде сумм констант и символов, над которыми реализована простая арифметика.

Испытания, проведённые на реальных проектах с открытым исходным кодом, показали, что разработанные виды смещений применимы на практике и позволяют снизить объём излишней помеченности данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кошелев В. К., Избышев А. О., Дудина И. А. Межпроцедурный анализ помеченных данных на базе инфраструктуры LLVM // Труды ИСП РАН. Т. 26, № 2. С. 97–118.
- [2] Шимчик Н. В., Игнатъев В. Н. Поиск уязвимостей при помощи статического анализа помеченных данных // Труды ИСП РАН. Т. 31, № 3. С. 177–190.
- [3] Reps T., Sagiv M., Horwitz S. Interprocedural dataflow analysis via graph reachability // Datalogisk Institut, Københavns Universitet, 1994.

## **ПРИМЕНЕНИЕ KERNEL-МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ АУТЕНТИФИКАЦИИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАБОТЫ С КЛАВИАТУРОЙ КОМПЬЮТЕРА**

**Казачук Мария Андреевна, Петровский Михаил Игоревич, Машечкин  
Игорь Валерьевич, Тюляева Вера Викторовна**

Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: kazachuk@mlab.cs.msu.su,  
michael@cs.msu.su, mash@cs.msu.su, tvervik@gmail.com

На сегодняшний день актуальной является проблема обеспечения конфиденциальности данных в информационных системах. При этом аутентификация является одним из основных инструментов обеспечения конфиденциальности. Данная работа посвящена динамической аутентификации пользователей на основе анализа работы с клавиатурой компьютера, которая относится к классу задач поиска аномалий в данных. Отметим, что признаковое пространство в рассматриваемой задаче формируется из длительностей нажатий (перескоков) для различных комбинаций клавиш – N-грамм [1], что обуславливает большую размерность пространства признаков. Дополнительно, многие признаки являются нерелевантными с точки зрения выделения целевого класса или взаимозависимыми. Поэтому перспективным является использование kernel-методов построения модели пользователя, которые в отличие от статистических и метрических методов поиска аномалий устойчивы к «проклятию размерности». Kernel-методы основаны на переходе в пространство признаков большей размерности с использованием потенциальной (kernel) функции и поиске зависимостей непосредственно в нем.

В данной работе проводится сравнение существующих kernel-методов поиска аномалий, анализируются их достоинства и недостатки, а также рассматривается предложенный авторами нечеткий kernel-метод выявления аномалий в данных на основе эллиптической кластеризации в пространстве признаков высокой размерности. Эксперименты проходят на четырех наборах тестовых



данных клавиатурного почерка пользователей. По результатам экспериментов наилучшее качество работы (порядка 0.96 ROC AUC) было достигнуто с использованием разработанного авторами метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Developing a keystroke biometric system for continual authentication of computer users / J. V. Monaco, N. Bakelman, S. H. Cha, C. C. Tappert // 2012 European Intelligence and Security Informatics Conference (EISIC) IEEE, 2012, P. 210–216.

## ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Капустин Николай Юрьевич

Кафедра функционального анализа и его применений, e-mail: kapustin@bk.ru

Рассмотрим на прямоугольнике  $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  задачу для уравнения теплопроводности с граничным условием также записанным с помощью оператора теплопроводности, только время и пространственная переменная в котором поменялись местами. Требуется найти функцию  $u(x, t)$  из класса  $C^{2,1}(\bar{D}) \cap C^2(\bar{D} \cap \{t > 0\})$ , удовлетворяющую уравнению

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

с начальным и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) &= 0, \quad du_{tt}(1, t) = u_x(1, t), \quad t \in (0, T), \quad d < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**Теорема.** Пусть функция  $f(x)$  принадлежит классу Гельдера  $C^{2,\alpha}[0, 1]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $f(0) = f''(0) = 0$ . Тогда существует единственное решение задачи (1)–(2), которое представимо в виде билинейного ряда по собственным функциям соответствующей задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии

**Замечание.** Задача (1)–(2) в классической постановке о нахождении функции из класса  $C^{1,0}(\bar{D}) \cap C^2(\bar{D} \cap \{t > 0\})$  имеет неединственное решение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Капустин Н. Ю. О равномерной сходимости в классе  $C^1$  ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравн. 2011. Т. 47, № 10. С. 1394–1399.

# МЕТОД ПЕРЕИСПОЛЬЗОВАНИЯ АБСТРАКЦИЙ В СТАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ДЛЯ ПОИСКА СОСТОЯНИЙ ГОНКИ

Карпов Максим Евгеньевич<sup>1</sup>, Андрианов Павел Сергеевич,  
Хорошилов Алексей Владимирович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: me@m-k.mx

<sup>2</sup> ИСП РАН имени В. П. Иванникова, e-mail: andrianov@ispras.ru, khoroshilov@ispras.ru

Контроль качества — важный этап жизненного цикла разработки ПО. Формальная верификация, как разновидность статического анализа, дает самые сильные гарантии корректности, но и требует больше всего ресурсов: как человеческих, так и вычислительных. В основе подходов проверки моделей лежит исследование множества достижимых состояний программы. Так как в реальных программах оно очень большое, применяются абстракции, делящие его на более простые классы эквивалентности, в которых отсутствуют несущественные для анализа детали.

Инструмент SPALockator [1], основанный на фреймворке статической верификации SPAChecker, реализует подход раздельного анализа потоков (англ. *thread-modular approach*). Он позволяет значительно увеличить скорость анализа многопоточных программ, в том числе, поиск состояний гонки. При этом он делает неприменимой существующую в SPAChecker оптимизацию переиспользования абстракций. Основная идея этой оптимизации состоит в отдельном анализе фрагментов кода с последующим кэшированием результатов. Для подхода с раздельным анализом потоков такая оптимизация стала неприменима, так как при отдельном рассмотрении одного потока недоступны побочные эффекты от других потоков. Эти побочные эффекты могут существенно влиять на процесс поиска достижимых состояний, и без них анализ теряет полноту.

В работе представлен альтернативный метод переиспользования абстракций, сохраняющий многопоточную семантику программы и позволяющий эффективно переиспользовать результаты анализа повторяющихся частей. Реализация была протестирована на многопоточных программах из набора SV-COMP и показала средний прирост скорости в 60%.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андрианов П. С. Анализ корректности синхронизации компонентов ядра операционных систем // Труды ИСП РАН. 2019. 31. № 5. С. 203–232.

## МИНИМАКСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ С ВЕКТОРНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Комаров Юрий Андреевич, Куржанский Александр Борисович

Кафедра системного анализа, e-mail: ykomarov94@gmail.com, kurzahans@mail.com

Данная работа продолжает исследование методов решения задач динамической оптимизации с векторным критерием. Подобные задачи требуют исследования динамики всей границы Парето множества значений рассматриваемого функционала. Ранее в работах [1,2] были получены векторные аналоги принципа оптимальности и системы уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана в форме эволюционного уравнения для указанной границы Парето.

Особый интерес представляет исследование динамических систем, содержащих ограниченную помеху в уравнении динамики. Для построения гарантированных оценок необходимо ввести понятия векторных минимакса и максимина и исследовать соотношения, их связывающие. Последнее предлагается в данной работе.

Понятия минимакса и максимина для векторного функционала  $F(u, v)$  вводятся с использованием определенных в [1,2] векторных минимума и максимума:

$$\text{MaxMin}F(u, v) = \text{Max} \{ \cup_{\bar{v}} \text{Min}F(u, \bar{v}) \},$$

$$\text{MinMax}F(u, v) = \text{Min} \{ \cup_{\bar{u}} \text{Max}F(\bar{u}, v) \}.$$

В работе продемонстрировано, что для векторных критериев минимаксное неравенство

$$\text{MaxMin}F(u, v) \leq \text{MinMax}F(u, v) \quad (1)$$

может нарушаться. В связи с этим были получены необходимые и достаточные условия его выполнения для функционалов с сепарируемыми переменными и билинейных функционалов.

Кроме того, было получено необходимое условие выполнения неравенства, обратного (1). Указанное соотношение позволяет определить границы применимости минимаксных оценок в задачах динамической оптимизации с векторным критерием.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00613а и № 16-29-04191 офи\_м).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Куржанский А. Б., Комаров Ю. А. Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием // Доклады АН. 2018. Т. 480. № 4. С. 408–412.
- [2] Куржанский А. Б., Комаров Ю. А. Гамильтонов формализм в задачах оптимизации управления движением с векторным критерием // Ломоносовские чтения 2018. М. : МАКС Пресс, 2018. С. 70–72.

# ТИПЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Коровина Мария Викторовна

Кафедра общей математики, e-mail: betelgeuser@yandex.ru

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с голоморфными коэффициентами

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots \\ & + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \dots + a_0(x) u(x) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь коэффициенты  $a_i(x)$  голоморфны в окрестности бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга  $|x| > a$ , что функции  $a_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды  $a_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j^i}{x^j}$ . Эта задача, путем замены  $x = \frac{1}{r}$  сводится к уравнению с вырождением типа клюва второго порядка, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u + b_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u + b_1 r^{m+1} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u + \\ & + b_2 r^{m+2} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + \dots + b_{k+1} r^{m+k} u + \\ & + \sum_{i=1}^m r^i \sum_{j=h_i}^{n-1} b_j^i \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^j u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a^i(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $i + h_i > m + k$ ,  $b_i, b_j^i$  — соответствующие числа,  $a^i(r)$  — голоморфные функции. Число  $h = m + k$  называется индексом сингулярности уравнения (1).

**Теорема.** Пусть  $h_i + i - h > (m - i) \frac{n-k-m}{m}$ , тогда асимптотика решения уравнения (1) в окрестности бесконечности имеет вид

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{\sigma_j} \sum_l A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

где  $\alpha_{n-k-m}^j$ ,  $j = 1, \dots, n-k$ , корни полинома  $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$ .

Пусть  $h_i + i - h < (m - i) \frac{n-k-m}{m}$ , тогда асимптотика решения имеет вид

$$\begin{aligned} & u(x) \approx \sum_{j=1}^{\nu} \exp\left(c_j x^{\frac{n-k-m-\beta_1}{n-k-m-\beta_1+i}}\right) x^{\sigma_j} \sum_{t=0}^{\infty} A_t^j x^{-\frac{t}{n-k-m-\beta_1+i}} + \\ & + \sum_{j=0}^l \exp\left(\sum_{i=1}^{\beta_1} \alpha_i^j x^{\frac{i}{m-i+\beta_1}}\right) x^{\sigma_j} \sum_{t=0}^{\infty} B_t^j x^{-\frac{t}{m-i+\beta_1}} + \\ & + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i} \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:  $v = n - k + i - m - \beta_1$ ,  $c_j = c^{\frac{1}{v}} e^{j \frac{2\pi i}{v}}$ ,  $j = 1, \dots, v$ , здесь  $c = b_1 \left(\frac{v}{v-i}\right)^v$ ,  $\alpha_{\beta_1}^j = C_2^{\frac{1}{l}} e^{j \frac{2\pi i}{l}}$ ,  $j = 1, \dots, l$ , где  $l = \left\lceil \frac{(m-i)(n-k-m)-\beta m}{n-k-m-\beta} \right\rceil$ ,  $C_2 = \frac{a_0}{b_1} \left(\frac{v}{v-i}\right)^{n-k} A_i^j, B_i^j, \sigma_i, \sigma^i, b_i^j, k_0$  — некоторые числа,  $\sum_{t=0}^{\infty} A_t^j x^t, \sum_{t=0}^{\infty} B_t^j x^t$  — асимптотические ряды.

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ГЕНЕРАЦИИ АККОМПАНЕМЕНТА МУЗЫКАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Корухова Юлия Станиславовна, Пташник Данила Игоревич

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: yulia@cs.msu.ru, dip0904@mail.ru

В современном мире компьютеры являются помощниками людей при решении самых разных задач. Разработка методов и алгоритмов работы с цифровыми данными является востребованной и в музыкальной области. В работе рассматривается подход к решению задачи генерации аккомпанемента музыкальных произведений в заданном стиле. В теории музыки сформулирован набор правил, которым в целом должен удовлетворять аккомпанемент, однако его составление является творческим процессом, для которого нет четкого алгоритма. В работе предложен подход, использующий методы машинного обучения. Нейронные сети позволяют имитировать процесс обучения человека, и это дает им возможность распознавать сложные закономерности, которые человек обычно видит интуитивно и от которых зависит природа творчества.

Существует множество работ по генерации музыки при помощи нейронных сетей и схожих методов [3,4]. В процессе изучения различных архитектур нейронных сетей и проведения экспериментов были выбраны и реализованы CNN-сеть и LSTM-сеть. Первая успешно была использована для подготовки данных и исправления ошибок в них, однако ее применение для генерации последовательных данных не привело к успеху. Тогда как LSTM-сеть, хорошо работающая с временными последовательностями, оказалось применима и для генерации музыки. Был подобран подходящий для удобной работы векторный формат машинного представления нот.

В качестве обучающего блока использован предоставляемый компанией Google корпус Bach dataset [1]. Данный корпус содержит более 21 миллиона размеченных музыкальных отрывков в стиле Баха. Каждый отрывок состоит из четырех одноголосных партий. Первая партия считается входной мелодией, остальные — аккомпанементом. Дополнительно была проведена аугментация данных, что позволило включить в корпус ноты с модификаторами, количество которых изначально было мало.

Обучение производилось на облачной платформе Google, предоставляющей возможность обучать сети на основе Tensorflow и Keras с аппаратным уско-

рением. Обучение сети проводилось с различными параметрами: подбирался оптимальный размер блоков, размерность векторов внутреннего представления, количество эпох обучения. Наилучшие результаты были получены при количестве эпох того же порядка, что и количество элементов в блоке.

Успешность сети оценивалась процентом нот аккомпанемента, которые она корректно предсказывала в существующих произведениях, не входящих в тренировочный блок. Для метрики с анализом частоты появления аккордов была получена точность 75–90%, что позволило не только сгенерировать аккомпанемент, но и лучше отличать обученные, но плохие сети от действительно подходящих.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bach dataset — обучающий корпус музыкальных фрагментов в стиле Баха. URL: <https://magenta.tensorflow.org/datasets/bach-doodle>
- [2] Проект и набор инструментов для применения машинного обучения для создания музыки. URL: <https://magenta.tensorflow.org>
- [3] Grove R. Automatic harmonization using a hidden Semi-Markov model // AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment. North America, 2013. URL: <https://www.aaai.org/ocs/index.php/AIIDE/AIIDE13/paper/view/7456>
- [4] Music generation with local connected convolutional neural network / Z. Ouyang, Y. Yin, K. Yan, J. Wu, X. Hu, S. Xia URL: <http://ouyangzhihao.com/wp-content/uploads/2018/12/MUSIC-GENERATION-WITH-LOCAL-CONNECTED-CONVOLUTIONAL-NEURAL-NETWORK.pdf>

## ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИВЕДЕНИИ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К ВИДУ С ГНОП

**Краев Андрей Владимирович, Роговский Александр Игоревич**

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: [akraev@cs.msu.ru](mailto:akraev@cs.msu.ru), [alexander.rogovskiy@gmail.com](mailto:alexander.rogovskiy@gmail.com)

В настоящей работе рассматриваются линейные стационарные многосвязные системы управления. Уравнения таких систем имеют следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор системы,  $u(t) \in \mathbb{R}^l$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  — вход и выход соответственно,  $A, B, C$  — постоянные матрицы подходящих размеров. Поскольку система (1) однозначно определяется матрицами  $A, B, C$ , далее иногда будем обозначать ее  $\{A, B, C\}$ .

Важным понятием для системы (1) является понятие относительного порядка, поскольку оно часто используется при решении различных задач теории управления (см. [1, 2, 3]).

**Определение 1.** Вектор  $r = (r_1, \dots, r_l)^T$ ,  $r_i \in \mathbb{N}$ , называется вектором относительного порядка для системы (1), если  $\forall i \in \{1, 2, \dots, l\}$  справедливо:

1.  $C_i A^{r_i-1} B \neq 0$ , и, если  $r_i > 1$ , то  $C_i A^{j-1} B = 0$ ,  $j = \overline{1, r_i - 1}$ .
2. Строки  $\{C_i A^{r_i-1} B\}_{i=1}^l$  линейно независимы.

Здесь  $C_i$  —  $i$ -я строка матрицы  $C$ . Условия относительного порядка не всегда совместны (см. [4]), поэтому в работе [5] вводится следующее обобщение относительного порядка:

**Определение 2.** Вектор  $r = (r_1, \dots, r_l)^T$ ,  $r_i \in \mathbb{N}$ , называется вектором главного неполного относительного порядка (ГНОП) для системы (1), если, его компоненты удовлетворяют следующим условиям:

1.  $C_i A^{r_i-1} B \neq 0$ , и, если  $r_i > 1$ , то  $C_i A^{j-1} B = 0$ ,  $j = \overline{1, r_i - 1}$ .
2. Для любого набора индексов  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, l\}$  :  $r_{i_1} = r_{i_2} = \dots = r_{i_k}$  строки  $\{C_{i_j} A^{r_{i_j}-1} B\}_{j=1}^k$  линейно независимы.

В работе [5] было показано, что любую управляемую систему (1) можно преобразовать к виду с ГНОП с помощью линейной стационарной замены выходов  $\tilde{y} = Ty$ ,  $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $|T| \neq 0$ , т. е. найдется такая матрица  $T$ , что система  $\{A, B, TC\}$  удовлетворяет условиям ГНОП. В настоящей работе показано, что для двух систем управления  $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$  и  $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$  найдется единая матрица  $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , что системы  $\{\tilde{A}, \tilde{B}, T\tilde{C}\}$  и  $\{\bar{A}, \bar{B}, T\bar{C}\}$  удовлетворяют условиям ГНОП. Также показано, что для трех систем такой результат не имеет места.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Isidori A. Nonlinear Control Systems. London : Springer-Verlag, 1995. 549 с.
- [2] Isidori A. The zero dynamics of a nonlinear system: From The Origin To the latest progresses of a long successful story // Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. 2011.07. P. 18–25.
- [3] Mueller M. Normal form for linear systems with respect to its vector relative degree // Linear Algebra and its Applications. 2009. Vol. 480, № 4. P. 1292–1312.
- [4] Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Методы робастного обращения динамических систем. М. : Физматлит, 2009. 219 с.
- [5] Краев А. В., Роговский А. И., Фомичев В. В. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1128–1132.

# КЛАССЫ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОБЩИХ ОПЕРАТОРОВ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА НА ПРЯМОЙ

Крицков Леонид Владимирович

Кафедра общей математики, e-mail: kritskov@cs.msu.ru

Пусть  $\mathcal{A}$  — самосопряженный оператор, порождаемый на всей прямой  $\mathbb{R}$  дифференциальной операцией

$$Au = (-1)^n D^{2n}u + \sum_{k=1}^{n-1} D^k \left( q_k(x) D^k u \right) + q_0(x)u, \quad (1)$$

в которой вещественные коэффициенты  $q_k(x)$  удовлетворяют условию равномерной локальной суммируемости

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|x-y| \leq 1} |q_k(y)| dy < \infty, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (2)$$

Условие (2) выделяет наиболее широкий класс дифференциальных операций (1) четного порядка, которым можно сопоставить полуограниченные самосопряженные операторы с помощью квадратичных форм.

Рассмотрим разложение единицы  $\{E_\lambda\}$  оператора  $\mathcal{A}$  и соответствующую ему спектральную функцию  $\theta(\lambda; x, y)$ , являющуюся интегральным ядром проектора  $E_\lambda$ . Отметим, что для оператора  $\mathcal{A}$  спектральная функция может быть записана через обобщенные собственные функции  $u_k(x, \lambda)$ ,  $k = \overline{1, \varkappa}$ , ( $\varkappa \leq 2n$  — спектральная кратность) и спектральную меру  $d\rho(\lambda)$ :

$$\theta(\lambda; x, y) = \int_{-\infty}^{\lambda} \sum_{k=1}^{\varkappa} u_k(x, \lambda) u_k(y, \lambda) d\rho(\lambda).$$

Для спектральной функции  $\theta(\lambda; x, y)$  установлены оценки, позволяющие исследовать сходимость спектрального разложения  $E_\lambda f(x)$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$  в метрике, равномерной на всей прямой  $\mathbb{R}$ .

**Лемма. 1.** *Равномерно по  $x \in \mathbb{R}$  и  $\mu \geq 0$  имеет место оценка спектральной функции на диагонали:*

$$\left| \theta\left((\mu+1)^{2n}; x, x\right) - \theta\left(\mu^{2n}; x, x\right) \right| = O(1), \quad (3)$$

или, в терминах обобщенных собственных функций,

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} \int_{\mu \leq \sqrt[2n]{\lambda} \leq \mu+1} |u_k(x, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) = O(1). \quad (4)$$



2. Равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \geq 0$  и для всех  $p = \overline{1, 2n - 1}$  имеет место оценка производных:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mu \leq \sqrt[2n]{\lambda} \leq \mu+1} \lambda^{-p/n} |u_k^{[p]}(x, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) = O(1), \quad (5)$$

где  $u_k^{[p]}$  — обычные производные при  $p \leq n$  и квазипроизводные при  $p \geq n + 1$ .

3. Равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  и для всех  $s \in [2, \infty]$  выполнена оценка

$$\|\theta(\lambda; x, \cdot) - \theta_0(\lambda; x, \cdot)\|_{L_s(\mathbb{R})} = O(1), \quad (6)$$

где  $\theta_0(\lambda; x, y) = \sin \sqrt[2n]{\lambda}(x - y) / (\pi(x - y))$  — спектральная функция оператора  $A_0$ , отвечающего операции (1) с нулевыми коэффициентами.

Следствиями оценок (3)–(6) леммы являются следующие утверждения.

**Теорема 1.** Если  $f(x)$  принадлежит области определения  $\mathcal{D}(A^\alpha)$  с  $\alpha > \frac{1}{4n}$ , то разложение  $E_\lambda f(x)$  сходится к  $f(x)$  равномерно, причем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |E_\lambda f(x) - f(x)| = o\left(\lambda^{\frac{1}{4n} - \alpha}\right).$$

Если же  $\alpha > 1/(4n) + p$  с некоторым  $p = 1, 2, \dots, 2n - 1$ , то разложение  $E_\lambda f(x)$  допускает почленное дифференцирование порядка  $p$  и при этом

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |E_\lambda^{[p]} f(x) - f^{[p]}(x)| = o\left(\lambda^{\frac{1}{4n} - \alpha + p}\right).$$

**Теорема 2.** Для любой функции  $f(x) \in L_s(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq s \leq 2$ , имеет место равномерная на  $\mathbb{R}$  равносходимость разложения  $E_\lambda f(x)$  с разложением  $f(x)$  в интеграл Фурье:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |E_\lambda f(x) - E_\lambda^0 f(x)| = 0,$$

где  $E_\lambda^0 f(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta_0(\lambda; x, y) f(y) dy$ .

Следствием теоремы 2 является тот факт, что разложение  $E_\lambda f(x)$  любой функции  $f(x)$  из класса Соболева—Лиувилля  $L_s^\beta(\mathbb{R})$ ,  $s \in (1, 2]$ ,  $\beta > 1/p$ , сходится равномерно на всей прямой  $\mathbb{R}$ .

Доказательство результатов работы развивает методику В. А. Ильина изучения сходимости спектральных разложений операторов второго порядка [1].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Избранные труды В. А. Ильина: В 2-х т. Том 2. М.: МАКС Пресс, 2008. 692 с.

## О ВЫБОРКАХ ИЗ ОБОБЩЕННОГО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Кудрявцев Алексей Андреевич, Цветков Егор Анатольевич

Кафедра математической статистики, e-mail: nubigena@mail.ru, egor.tsvetkov98@gmail.com

Зачастую для моделирования дискретных процессов и явлений выбирают так называемые пуассоновские смеси, или смешанные пуассоновские распределения. Подобные распределения нашли широкое применение в страховании, оценивании операционных рисков, метеорологии и многих других областях. Важным примером пуассоновской смеси со структурным гамма-распределением является отрицательное биномиальное распределение. В течение последних ста лет многие исследователи расширяли теоретическую базу применения структурных законов гамма-типа для получения адекватных моделей реальных явлений, основанных на обобщениях отрицательного биномиального распределения (см., например, [1]).

В докладе рассматривается смешанное пуассоновское распределение со структурным обобщенным гамма-распределением, или распределением Крицкого—Менкеля [2], имеющим плотность

$$f(x) = \frac{vx^{vq-1}e^{-(x/\theta)^v}}{\theta^{vq}\Gamma(q)}, \quad v > 0, \quad q > 0, \quad \theta > 0, \quad x > 0. \quad (1)$$

Для обобщенного отрицательного биномиального распределения со структурным распределением (1) демонстрируется программный пакет, позволяющий строить реализации выборок и исследовать их характеристики. Обсуждается вопрос оценивания параметров распределения по имеющимся модельным данным.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00655).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Korolev V. Yu., Zeifman A. I. Generalized negative binomial distributions as mixed geometric laws and related limit theorems // *Lithuanian Mathematical Journal*. 2019. Vol. 59. P. 366–388.
- [2] Крицкий С. Н., Менкель М. Ф. Выбор кривых распределения вероятностей для расчетов речного стока // *Известия АН СССР. Отд. техн. наук*. 1948. № 6. С. 15–21.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАВИСИМОСТИ ПО ДАННЫМ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ БЕССЕРВЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Кукушкин Денис Игоревич<sup>1</sup>, Антоненко Виталий Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: denis.cucu@yandex.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: anvial@lvk.cs.msu.su

Бессерверные вычисления позволяют структурировать и гибко масштабировать программу, разбивая ее на отдельные функции. Возможность исполнять эти функции на сторонней платформе с оплатой за время вычисления позволяет экономить на оборудовании и его поддержке. Однако задача объединения бессерверных функций в программу несет в себе некоторые трудности [1].

На текущий момент, средством передачи данных между вложенными бессерверными функциями является пользователь. Это приводит к лишним обменам и задержкам на их выполнение, так как скорость сети внутри вычислительного кластера и от кластера до пользователя разная. Помимо этого существует проблема излишней передачи данных при выполнении групповых обменов данными в параллельных бессерверных вычислениях [1–3]. К примеру шаблон «перетасовка» требует на  $K^2$  больше операций при использовании виртуальных функций по сравнению с виртуальными машинами. Однако можно сократить количество операций в несколько раз, разбив обмен данными на части [3]. Использование графа зависимостей по данным, позволит сократить число вызовов затратных функций взаимодействия, за счет выбора места их размещения.

Основываясь на изученных методах применения графа зависимостей, а также на примерах его использования в бессерверных вычислениях [4, 5], было принято решение использовать граф зависимостей как планировщик задач, чтобы оптимальным размещением бессерверных функций по вычислительным узлам сократить количество обменов. Чтобы убрать лишние обмены между пользователем и кластером планируется передавать граф зависимостей вместе с вложенной функцией. На основе этого графа принимается решение о распределении ресурсов, выполняются необходимые функции и результат вложенной функции возвращается пользователю.

В качестве платформы для внедрения был выбран OpenFaaS на основе системы управления контейнерами Kubernetes. OpenFaaS является популярной платформой для бессерверных вычислений с открытым исходным кодом. Kubernetes предоставляет гибкость в настройке распределения ресурсов благодаря наличию возможности использования пользовательских структур управления, тем самым позволяя внедрить граф зависимостей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-07-01245).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Serverless Computing: One Step Forward, Two Steps Back / Joseph M. Hellerstein, Jose Faleiro, Joseph E. Gonzalez, Johann Schleier-Smith, Vikram Sreekanti, Alexey Tumanov, Chenggang Wu // Proc. CIDR 2019
- [2] Adil Akhter, Marios Fragkoulis, Asterios Katsifodimos. Stateful Functions as a Service in Action // Proceedings of the VLDB Endowment, Vol. 12, No. 12
- [3] Cloud Programming Simplified: A Berkeley View on Serverless Computing / Eric Jonas, Johann Schleier-Smith, Vikram Sreekanti, Chia-Che Tsai, Anurag Khandelwal, Qifan Pu, Vaishaal Shankar, Joao Menezes Carreira, Karl Krauth, Neeraja Yadwadkar, Joseph Gonzalez, Raluca Ada Popa, Ion Stoica and David A. Patterson // EECS Department, University of California, Berkeley Technical Report No. UCB/EECS-2019-3
- [4] numpywren: serverless linear algebra / Vaishaal Shankar, Karl Krauth, Qifan Pu, Eric Jonas, Shivaram Venkataraman, Ion Stoica, Benjamin Recht, Jonathan Ragan-Kelley. // URL: <https://arxiv.org/pdf/1810.09679.pdf> (дата обращения: 21.03.2020)
- [5] MadLINQ: large-scale distributed matrix computation for the cloud / Zhengping Qian, Xiuwei Chen, Nanxi Kang, Mingcheng Chen, Yuan Yu, Thomas Moscibroda, and Zheng Zhang // Proceedings of the 7th ACM european conference on Computer Systems (EuroSys '12). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, P. 197–210.

## ТЕМНЫЕ СОСТОЯНИЯ АНСАМБЛЕЙ N-УРОВНЕВЫХ АТОМОВ: СТРУКТУРА, ОТБОР И ПРИМЕНЕНИЕ

Кулагин Алексей Владимирович, Ожигов Юрий Игоревич<sup>1</sup>,  
Викторова Надежда Борисовна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: alexfmsu@mail.ru, ozhigov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> РГГУ, ИИНТБ, ФИЗБ, кафедра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: nbvictrova@list.ru

**Введение. Роль темных состояний атомных ансамблей.** Темные состояния атомного ансамбля — это такие состояния, в которых ансамбль не может испустить ни одного фотона, хотя обладает большой энергией, равной половине

максимальной энергии возбуждения всех атомов ансамбля. Темные состояния являются естественным аккумулятором малых порций энергии, и могут быть использованы в этом качестве при создании нанороботов. Кроме того, теоретически отсутствующее взаимодействие со светом атомных ансамблей, находящихся в темных состояниях, может позволить их использование в квантовых вычислениях, где именно взаимодействие со светом является основным источником декогерентности. Темные состояния играют важную роль в поведении больших атомных ансамблей, например, их роль в бозе—эйнштейновских конденсатах выявлена в работе [1].

В модели Тависа—Каммингса для ансамблей двухуровневых атомов в оптической полости, с гамильтонианом

$$H_{ТС} = \hbar\omega(a^+a + \sum_j \sigma_j^+ \sigma_j) + (a^+ + a)(\bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}), \quad \bar{\sigma} = \sum_j g_j \sigma_j,$$

где  $a^+$ ,  $a$  — операторы поля,  $\sigma_j^+$ ,  $\sigma_j$  — операторы возбуждения атома  $j$ , верхний индекс  $+$  означает сопряжение, темные состояния существуют только в случае равенства сил взаимодействия с полем  $g_j$  всех атомов, и имеют вид линейной комбинации тензорных произведений синглетов вида  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  (см. [2]). Размерность темного подпространства  $D$  находится из его определения  $D = Ker(\bar{\sigma}) \cup Ker(\bar{\sigma}^+)$ .

Для многоуровневых атомов имеет место естественная модификация модели Тависа—Каммингса, в которой темными атомов оказываются состояния вида линейных комбинаций тензорных произведений многомерных синглетов, каждый из которых имеет вид

$$\sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\sigma(\pi)} |\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)\rangle$$

для  $n$ -атомного подмножества всего ансамбля, где суммирование распространяется на все перестановки  $n$  атомов. Однако доказать теорему, аналогичную результату [3] для многоуровневых атомов, начиная с 3 уровней, пока не удалось; эта гипотеза была лишь проверена численно для ансамблей из не более 100 атомов.

Тем не менее, удастся численно найти размерность темного подпространства даже для различных атомов; причем эта размерность отлична от нуля при условии равенства энергий переходов между уровнями в разных атомах.

Примером является набор из трех атомов с различной структурой переходов, показанный на рисунке 1, размерность темного подпространства для такого набора равна 7.

**Получение темных состояний с помощью оптического отбора.** Темные состояния можно получать разными способами, из которых самый простой — оптический отбор. Он основан на главном свойстве таких состояний — от-

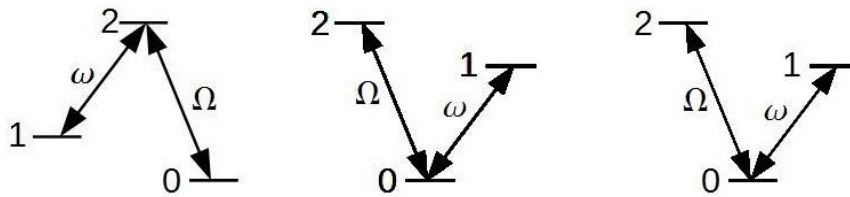


Рис. 1: Три атома со структурой спектров  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\nu$ .

существовании взаимодействия с электромагнитным полем. Схема такого отбора показана на рис. 2.

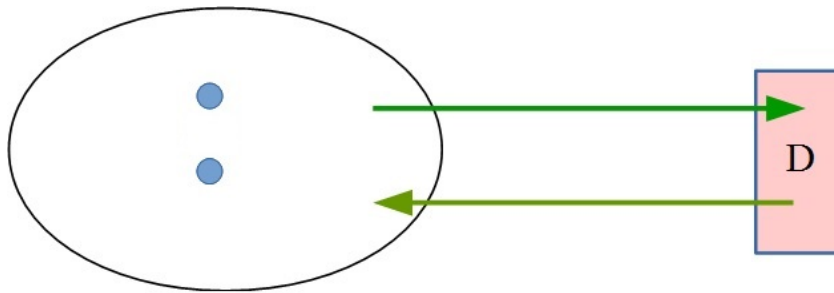


Рис. 2: Оптический отбор: фиксация времени вылета фотона из полости внешним детектором.

Мы размещаем в оптической полости двухатомный ансамбль в произвольном состоянии и наблюдаем за детектором, фиксирующим фотон частоты полости, вылетающий из нее. После того как в полости не осталось свободных фотонов, состояние атомов будет либо  $|t_0\rangle = |00\rangle$ , либо  $|s_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ , причем второе — темное, и нам надо определить, какое из этих двух состояний имеют атомы. Для этого мы запускаем в полость один фотон и ожидаем, когда фотон вылетит из нее. В случае состояния  $|t_0\rangle$  среднее время вылета будет немного больше, чем в случае  $|s_2\rangle$ , так как в первом состоянии фотон будет взаимодействовать с атомным ансамблем, а во втором — нет.

Повторяя этот процесс много раз, в силу центральной предельной теоремы мы сможем определить среднее время вылета фотона из полости с точностью, достаточной для различения этих двух вариантов атомного состояния, и тем самым выделить темное состояние атомов в полости. Результат численного моделирования процесса показан на рис. 3.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант а-18-01-00695.

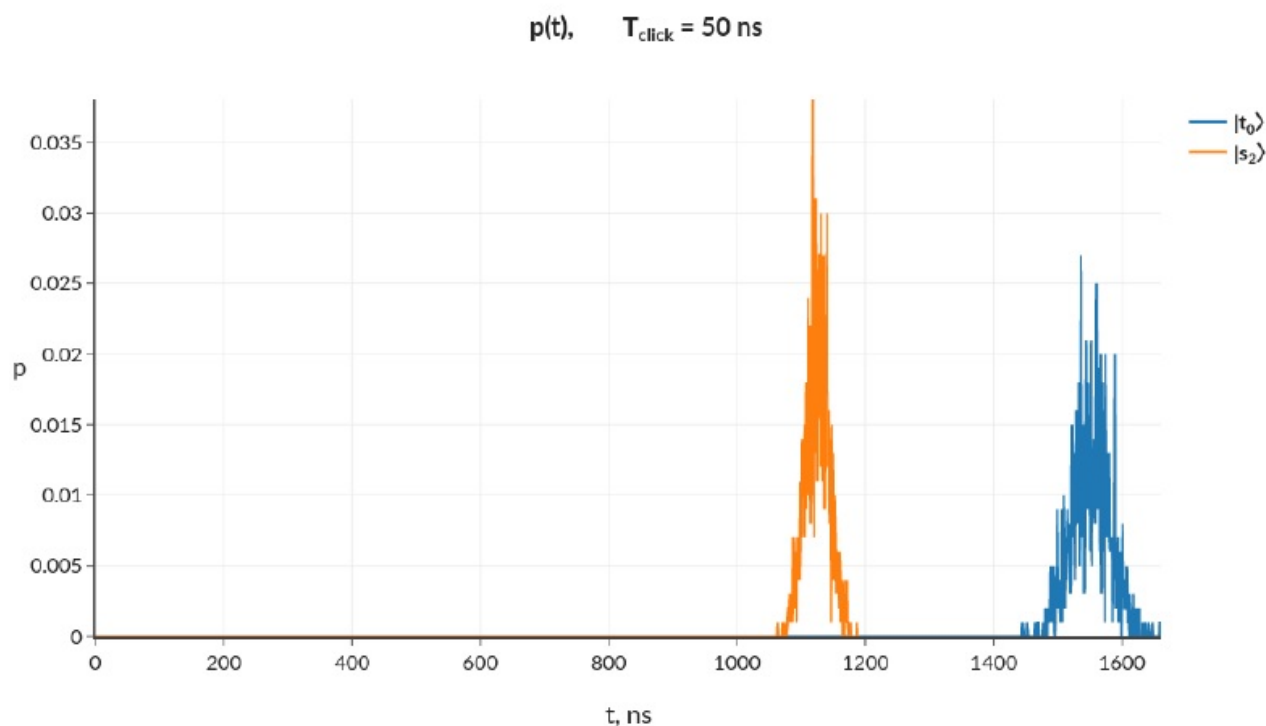


Рис. 3: Распределение времени детектирования вылетевшего из полости фотона в случае триплетного  $|t_0\rangle$  и синглетного  $|s_2\rangle$  состояний атомной системы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lee, E. S., Geckeler, C. , Heurich, J. , Gupta, A. , Cheong, Kit-Iu, Secret, S., and Meystre, P., Dark states of dressed Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. A 60, 4006, 1999.
- [2] Jaynes E.T., Cummings F.W., Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proc. IEEE 51 (1): 89–109, (1963). DOI: 10.1109/PROC.1963.1664.
- [3] Ozhigov, Y.I., Space of dark states in Tavis-Cummings model, Modern information technologies and IT education, vol. 15, N1, pp. 27-32, DOI: 10.2555915/SITITO.15.201901.13–26, URL: <https://arxiv.org/abs/1606.08483>.

# ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКОНТИРОВАННОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ В МОДЕЛИ СОЛОУ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ ВВОДЕ НОВЫХ ФОНДОВ

Лукьянова Лиля Николаевна

Лаборатория обратных задач, e-mail: lln@cs.msu.ru

Для процесса распределения капиталовложений с учетом запаздывания при вводе новых фондов [1], рассматривается модель в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная методом введения дополнительных фазовых переменных [2,3]. Задача оптимального управления для такой модели имеет вид:

$$-\int_0^T e^{-\delta t} (1 - u(t)) f(v_\ell(t)) dt \rightarrow \min_{u(t)},$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = u(t)f(v_\ell(t)) - \mu k(t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \quad k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) \geq k_T > 0;$$

$$\frac{\tau}{l} \dot{v}_1(t) = k(t) - v_1(t), \quad v_1(0) = v_0; \quad \frac{\tau}{l} \dot{v}_2(t) = v_1(t) - v_2(t), \quad v_2(0) = v_0;$$

$$\dots \quad \frac{\tau}{\ell} \dot{v}_\ell(t) = v_{\ell-1}(t) - v_\ell(t), \quad v_\ell(0) = v_0,$$

где  $\ell \geq 1$  - целое положительное число,  $f(k)$  - неоклассическая производственная функция. Для случаев  $l = 1, 2$  рассматриваемой управляемой системы исследуется задача максимизации усредненной величины дисконтированного потребления за заданный период управления. С помощью принципа максимума Понтрягина [4] аналитически устанавливаются свойства оптимального управления. Выделяются ситуации, когда такое управление является релейной функцией, а также ситуации, когда наряду с релейными участками оно может также содержать и участок с особым режимом. Полученные результаты подтверждаются соответствующими численными расчетами. Автор выражает благодарность профессору Никольскому М. С. за постановку задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колемаев В. А. Математическая экономика М. : ЮНИТИ, 2005. 399 с.
- [2] Марчук Г. И. Математические модели иммунологии. М. : Наука, 1985. 240 с.
- [3] Зуев С. М. Статстическое оценивание параметров математических моделей заболеваний. М. : Наука, 1988. 176 с.
- [4] Понтрягин Л.С. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Физматлит. 1961. 392 с.



## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИОННОЙ АДАПТАЦИИ В ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЕ КВАЗИВИДОВ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИДОВ**

**Маркин Дмитрий Валерьевич, Братусь Александр Сергеевич**

Кафедра системного анализа, e-mail: diman131193@yandex.ru, alexander.bratus@yandex.ru

В работе ставится задача об отыскании стратегии терапии в случае возникновения мутаций. Предполагается, что применяемое лекарственное средство направлено на преимущественное уничтожение видов клеток, генетически близких лишь к одному из видов («дикий» вид). Между видами с различными фенотипами существует конкурентное взаимодействие, причём «дикий» вид имеет конкурентное преимущество, так как при отсутствии лекарственного воздействия имеет минимальные показатели смертности. В качестве математической модели рассматривается модифицированная репликаторная модель Кроу-Кимуры, в которой учитываются смертности видов. Согласно основной теореме естественного отбора Р. Фишера [1], в системе происходят изменения с целью увеличения значения функции средней приспособленности (фитнеса). Математическая модель эволюции системы строится на предположении, что время изменения гораздо более медленное, чем время, которое описывает динамику системы. Поэтому для описания процесса адаптации системы можно использовать стационарное положение равновесия. При интенсивной терапии (уничтожении) «дикого» вида происходит уменьшение значения функции средней приспособленности (фитнеса). Согласно теореме Р. Фишера, в системе возникает ответная реакция с целью увеличения значения функции средней приспособленности (фитнеса), заключающаяся в изменении ландшафта приспособленности видов, который описывается мальтузианскими коэффициентами скоростей роста видов. То есть происходит мутация, в результате которой преимущество в динамике популяций получает вид, отличный от «дикого», поскольку этот вид не подвергается систематическому уничтожению. Поэтому применение лекарственного средства, которое нацелено на уничтожение «дикого» вида становится нецелесообразным. При отсутствии терапии происходит постепенное восстановление популяции «дикого» вида, который в силу своего конкурентного преимущества начинает тормозить рост всех остальных видов, в том числе и вида, который получил преимущество в результате мутации. Поэтому через определенный период ситуация возвращается к первоначальному положению доминирования «дикого» вида и возникает необходимость вернуться к интенсивному использованию лекарственного средства вплоть до исчерпания его предельного ресурса.

В работе проводится исследование зависимости функции средней приспособленности (фитнеса) модифицированной системы от изменения ландшафта

приспособленности, который описывается мальтузианскими коэффициентами скоростей роста видов. Представлены результаты численных экспериментов, на основе которых сделаны выводы о влиянии межвидовой конкуренции на рост значения функции фитнеса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fisher R. The genetical theory of natural selection //Oxford University Press. 1930.
- [2] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010.

## ПРОСТОЙ ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФАКТОРА ДЕБАЯ—ВАЛЛЕРА

Мельников Н. Б.<sup>1</sup>, Парадеженко Г. В.<sup>2</sup>, Резер Б. И.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра оптимального управления, e-mail: melnikov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Сколковский институт науки и технологий, Москва, e-mail: g.paradezhenko@skoltech.ru

<sup>3</sup> Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, e-mail: reser@imp.uran.ru

Основной вклад в магнетизм металлов дают спиновые магнитные моменты, поэтому большинство теорий рассматривают неподвижную решетку. Колебания атомов дают поправочный множитель в формуле для сечения рассеяния  $e^{-2W(\mathbf{q})}$  — фактор Дебая—Валлера (ФДВ). Здесь

$$W(\mathbf{q}) = \frac{1}{3}q^2\langle u^2 \rangle,$$

где  $\mathbf{q}$  — волновой вектор, а  $\langle u^2 \rangle$  — среднеквадратичное смещение атомов. С ростом температуры величина  $\langle u^2 \rangle$  увеличивается, а величина поправочного множителя  $e^{-2W(\mathbf{q})}$  убывает и может стать заметно меньше единицы.

В квантовой статистике выражение для ФДВ обычно получают при помощи трудоемкого вычисления  $\langle u^2 \rangle$ , которое годится и в гармоническом, и в ангармоническом приближениях [1]. Мы даем краткий и простой вывод выражения для среднеквадратичного смещения атомов и ФДВ в гармоническом приближении [2]. Поправочный множитель определяется коррелятором  $\langle e^{-i\mathbf{q}u_j} e^{i\mathbf{q}u_{j'}} \rangle$ . Операторы смещения в показателях экспонент не коммутируют. При помощи формулы Кэмпбелла—Хаусдорфа доказывается, что среднее произведения экспонент равно произведению средних:

$$\langle e^{-i\mathbf{q}u_j} e^{i\mathbf{q}u_{j'}} \rangle = \langle e^{-i\mathbf{q}u_j} \rangle \langle e^{i\mathbf{q}u_{j'}} \rangle.$$

Среднее экспоненты оператора смещения вычисляется по формуле работы [3]. ФДВ используется нами для сравнения расчетов в оптимальном гауссовом приближении динамической теории спиновых флуктуаций с экспериментом.

Работа выполнена в рамках государственного задания МИНОБРНАУКИ России (тема «Квант», № АААА-А18-118020190095-4).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Squires G.L. Introduction to the theory of thermal neutron scattering. New York: Dover, 1996.
- [2] Парадеженко Г. В., Мельников Н. Б., Резер Б. И. Фактор Дебая—Валлера в рассеянии нейтронов ферромагнитными металлами // Теор. мат. физ. 2018. Т. 195, № 1. С. 91–104.
- [3] Mermin N.D. A short simple evaluation of expressions of the Debye-Waller form // J. Math. Phys. 1966. Vol. 7. P. 1038.

## ОЦЕНКА СТОИМОСТИ АМЕРИКАНСКОГО ОПЦИОНА С ПОМОЩЬЮ БЕРМУДСКОГО ОПЦИОНА

Морозов Владимир Викторович, Мартынов Сергей Игоревич

Кафедра исследования операций, e-mail: vmorosov@mail.ru, ru1701@mail.ru

Рассмотрим модель финансового рынка Блэка—Шоулса. Стоимость акции  $S(t)$  является процессом геометрического броуновского движения, задаваемого уравнением  $dS(t) = S(t)(\alpha dt + \sigma dz(t))$ , где  $\alpha$  — средняя доходность акции,  $\sigma > 0$  — волатильность, а  $z(t)$  — стандартный винеровский процесс. По акции выплачивается дивиденды с интенсивностью  $\delta > 0$ . Предполагается, что на рынке выполнено условие риск-нейтральности  $r = \alpha + \delta$ , где  $r > 0$  — банковская процентная ставка. Бермудский опцион представляет собой ценную бумагу, которая может быть предъявлена в любой из моментов времени  $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ , где  $T_1 > 0$ . Обозначим через  $C(S, T_1, \dots, T_n)$  — стоимость бермудского колл-опциона в момент  $t = 0$  с платежом  $(S(T_i) - K)^+$  в момент исполнения  $T_i$ , где  $K$  — цена исполнения, а  $S = S(0)$ .

Классический американский колл-опцион может быть предъявлен в любой момент времени  $t \in [0, T]$ . Поэтому его стоимость в начальный момент  $F(S, 0)$  можно оценить снизу величиной  $C(S, T_1, \dots, T_n)$ . Формула для  $C(S, T_1, \dots, T_n)$  указана в [1]. В следующей таблице нижние оценки, полученные с помощью бермудского опциона (столбец Ber), сравниваются с оценками Броуди—Детемпла (столбец BD [2]) и Чан-Хан-Вана (столбец CHW [3]). Последний столбец содержит истинные значения стоимости опциона  $F(S, 0)$ . При этом  $T = 3$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.03$ ,  $\delta = 0.07$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $n = 24$ .

$S$	BD	Ber	CHW	$F(S, 0)$
90	15.6088	15.6783	15.7023	15.7220
100	20.6562	20.7032	20.7698	20.7933
110	26.3366	26.3835	26.4678	26.4944

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Морозов В.В. Оценка стоимости бермудского опциона. Тезисы докладов конференции «Тихоновские чтения» (28 октября – 1 ноября 2019 г). М.: Макс-Пресс, 2019. С. 68.
- [2] Broadie M., Detemple J. American option valuation: new bounds, approximations and comparison with existing methods // Review of Financial Studies. 1996. V. 9, № 4. P. 1211–1250.
- [3] Chung S.L., Hung M.W., Wang Jr. Y. Tight bounds of American option prices // Journal of Banking & Finance. 2010. V. 34, № 1. P. 77–89.

## **АНАЛИЗ МАТРИЦ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ**

**Намиот Дмитрий Евгеньевич<sup>1</sup>, Пучкина Ирина Андреевна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Лаборатория открытых информационных технологий, e-mail: [dnamiot@gmail.com](mailto:dnamiot@gmail.com)

<sup>2</sup> Кафедра информационной безопасности, e-mail: [irina.puchkina15@yandex.ru](mailto:irina.puchkina15@yandex.ru)

В работе анализируются матрицы корреспонденций, описывающие передвижение пассажиров московского метрополитена. Данные содержат в себе точку входа и выхода пассажиров, что позволяет анализировать не только динамику отправок со станции, но и динамику прибытия [1].

В ходе работы были проверены гипотезы о различиях пассажиропотока в рабочие и выходные дни, а так же были проверены гипотезы о классификации станций и типов пассажиропотока в зависимости от их расположения и расположения крупных объектов рядом - бизнес-центров, спальных районов, транспортных узлов [2, 3]. С помощью метода k-mean получилось выделить также кластеры, которые объединяют станции, находящиеся на окраинах города и служащие точками подвоза пассажиров (например, имеющие рядом автовокзалы) [4].

Кроме классификации, был задан вопрос о нахождении резкого увеличения или уменьшения пассажиропотока и причин их возникновения. В качестве примера рассмотрены данные о перемещении пассажиров на станции Проспект Мира за июнь 2016 года. Рядом с станцией находится стадион Олимпийский, используемый в качестве концертной площадки. Найденные выбросы - следствия концертов Deep Purple, Iron Maiden, Muse.

В работе так же рассматривался поиск таких отклонений и их прогнозирование на основе данных об изменениях входящего и исходящего трафика станций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hora J. et al. Estimation of Origin-Destination matrices under Automatic Fare Collection: the case study of Porto transportation system //Transportation Research Procedia. – 2017. – Т. 27. – С. 664-671.

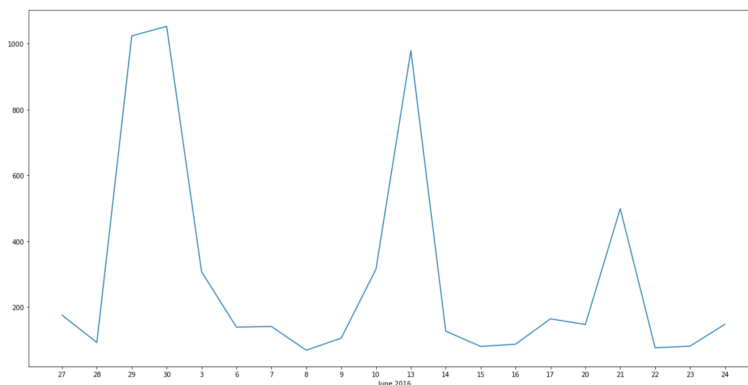


Рис. 1: Среднеквадратичное отклонение количества пассажиров от медианного значения на станции Проспект Мира за июнь 2016г.

- [2] Zhong C. et al. Variability in regularity: Mining temporal mobility patterns in London, Singapore and Beijing using smart-card data //PloS one. – 2016. – Т. 11. – №. 2. – С. e0149222.
- [3] Ceara I., Smith C., Capra L. Avoiding the crowds: understanding tube station congestion patterns from trip data //Proceedings of the ACM SIGKDD international workshop on urban computing. – 2012. – С. 134-141.
- [4] Agard B., Morency C., Trépanier M. Mining public transport user behaviour from smart card data. – 2007.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ СЕНСОРНЫХ СЕТЕЙ

Никольский Илья Михайлович

Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: oliv\_mail@mail.ru

Беспроводная сенсорная сеть (БСС) [1] представляет собой совокупность устройств, состоящих из микроконтроллера, датчика, трансивера и элемента питания. Каждое такое устройство способно замерять одну или несколько физических величин (температуру, давление, освещённость и т.д.) и пересылать её по радиоканалу. Основное применение таких сетей - мониторинг в таких сферах как сельское хозяйство, нефтегазодобыча и т.д.

Одной из главных проблем БСС является ненадёжность радиоканала, потеря сообщений. Таким образом, часть данных, полученной сенсорами может быть потеряна. Один из подходов уменьшения потери информации - дублирование сообщений.

В данной работе предложен протокол сбора информации с сенсоров, предусматривающий предварительное определение доли потерянных сообщений. Рассмотрен вариант сети, состоящей из двух узлов - сенсора, измеряющего некоторую физическую величину, и стока - узла, принимающего информацию с сенсора. Данный протокол предусматривает предварительную посылку тестовых сообщений от сенсора на сток. Количество сообщений в этом потоке

достаточно для достаточно точной оценки доли потерянных сообщений [2]. После окончания тестового потока сток сообщает статистику потерянных сообщений сенсору, который по этим данным определяет необходимое количество повторов сообщений с измеренными данными. Далее начинается периодическая посылка данных об изучаемой физической величине с дублированием каждого сообщения.

Протокол опробован на стендовой модели сенсорной сети. Узлы данной тестовой сети включают микроконтроллер Arduino Nano и радиопередатчик NRF24L01. Проведённые эксперименты показали, что предложенный протокол действительно позволяет эффективно снижать потери данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W.Dargie, C.Poellabauer Fundamentals of Wireless Sensor Networks: Theory and Practice Wireless Communications and Mobile Computing John Wiley & Sons, 2010, 336 p.
- [2] J.L. Devore, K. N. Berk Modern Mathematical Statistics with Applications Thomson Brooks/Cole, 2007, 838 p.

# О ЛИНЕЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССАХ

**Никольский Михаил Сергеевич**

Кафедра оптимального управления, ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова; МИАН РАН, e-mail: mni@mi-ras.ru

В докладе рассматриваются линейные многошаговые управляемые процессы. Теория управляемых многошаговых процессов является важным разделом современной теории оптимального управления (см., например, [1,2]). Такие процессы возникают, например, при дискретизации непрерывных управляемых процессов, а также при рассмотрении динамических дискретных процессов в математической экономике с квантованием текущего времени на периоды (день, неделя и так далее). Отметим, что для линейных управляемых многошаговых процессов имеет место аналог формулы Коши. Это обстоятельство упрощает исследование таких процессов и позволяет использовать выпуклый анализ, например, при изучении соответствующих множеств достижимости. В докладе рассматриваются в качестве показателя качества функционалы аддитивного типа, что позволяет использовать Динамическое программирование. Получены теоремы существования оптимального управления, найдены условия, обеспечивающие непрерывность и липшицевость соответствующих функций Беллмана.

Также обсуждается вопрос о приближенном вычислении оптимального значения терминального функционала. Здесь разработан приближенный метод вычисления и обоснована его сходимость.

Рассмотрены примеры, иллюстрирующие применение Динамического программирования к рассматриваемым задачам оптимального управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Кн. I. М. : МЦНМО, 2011. 620 с.  
 [2] Жуковский В. И., Салуквадзе М. Е. Оценки риска и многошаговые позиционные конфликты. М. : Юрайт, 2018. 304 с.

## СМЕШАННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДВУХ ТИПОВ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Новикова Наталья Михайловна<sup>1</sup>, Поспелова Ирина Игоревна,  
Некрасова Мария Геннадьевна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФИЦ ИУ РАН, e-mail: n\_novikova@umail.ru

<sup>2</sup> Кафедра исследования операций, e-mail: ipospelova05@yandex.ru, ne\_95@bk.ru

Исследована игра  $\Gamma$  с нулевой суммой и вектор-функцией выигрышей

$$\begin{pmatrix} (1, 0) & (0.5, 0) \\ (0, 0.5) & (0, 1) \end{pmatrix} \quad (1)$$

для 1-го и 2-го частных критериев, заданных матрицами  $A_1, A_2$ , элементы  $(a_{ij}^1, a_{ij}^2)$  которых образуют (1). Оба критерия максимизирует игрок 1 (выбирающий строку  $i$ ) и минимизирует игрок 2 (выбирающий столбец  $j$ ) на базе своих смешанных стратегий  $p$  и  $q$ . В предположении, что игроки пользуются обратной логической сверткой (ОЛС) [1], рассмотрены два типа смешанного расширения  $\Gamma$ : стандартное  $\bar{\Gamma}$  с вектор-функцией выигрыша/проигрыша  $(pA_1q, pA_2q)$  и предложенный в [2] вариант  $\bar{\Gamma}_G$ , сводящийся к параметрическому семейству скалярных игр  $\bar{\Gamma}[\mu, \nu] = \langle S \times S, \bar{G}_1(p, q)[\mu], -\bar{G}_2(p, q)[\nu] \rangle$  с  $\mu, \nu \in S = \{s \geq 0 | s_1 + s_2 = 1\}$ . Здесь  $\bar{G}_1(p, q)[\mu] = q_1G_1(p, 1)[\mu] + q_2G_1(p, 2)[\mu]$ ,  $\bar{G}_2(p, q)[\nu] = p_1G_2(1, q)[\nu] + p_2G_2(2, q)[\nu]$  — средние по смешанной стратегии противника значения ОЛС игроков 1 и 2 соответственно:

$$G_1(p, j)[\mu] = \min_{k \in I(\mu)} \sum_{i=1,2} p_i a_{ij}^k / \mu_k, \quad G_2(i, q)[\nu] = \max_{l \in I(\nu)} \sum_{j=1,2} q_j a_{ij}^l / \nu_l. \quad (2)$$

В (2) ОЛС применяется к частным критериям, осредненным по собственной стратегии игрока,  $\mu$  и  $\nu \in S$  — параметры ОЛС, а  $I(\mu) = \{k = 1, 2 | \mu_k > 0\}$ .

Для указанных вариантов смешанного расширения найдены множества  $R$  и  $R_G$  равновесных исходов и даны множества равновесных средних значений  $Z$  в игре  $\bar{\Gamma}$ , а также выигрышей  $Z_1$  и проигрышей  $Z_2$  в игре  $\bar{\Gamma}_G$ . Получены соотношения между ними. Построены множества компромиссных для игроков результатов игры  $\Gamma$  с каждым из двух типов ее смешанного расширения как оценок, которые не хуже наилучших гарантированных результатов обоих

игроков. Обсуждаются возможные определения множеств переговорных оценок выигрыша/проигрыша. Проведено сравнение со случаем использования игроками линейной скаляризации [3].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смирнов М. М. О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36, № 3. С. 62–74.
- [2] Новикова Н. М., Поспелова И. И. Смешанные стратегии в векторной оптимизации и свертка Гермейера // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 4. С. 106–120.
- [3] Shapley L. S. Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Research Logistics Quaterly. 1959. V. 6, № 1. P. 57–61.

## КВАНТОВАЯ ОПЕРАЦИОННАЯ СИСТЕМА

Ожигов Юрий Игоревич

Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: ozhigov@cs.msu.ru

**Введение.** Константа квантовой размерности  $Q$ . Ключевая задача проекта «Квантовый компьютер» (о первоначальной идее см. [1]) — создание квантовой операционной системы — программы на классическом суперкомпьютере, которая должна управлять динамикой состояний квантовой части, приближенно моделируя ее состояния в режиме реального времени. Именно такая структура математического моделирования позволяет управлять реальными сложными системами (химия, биология) на квантовом уровне — см. рис. 1.

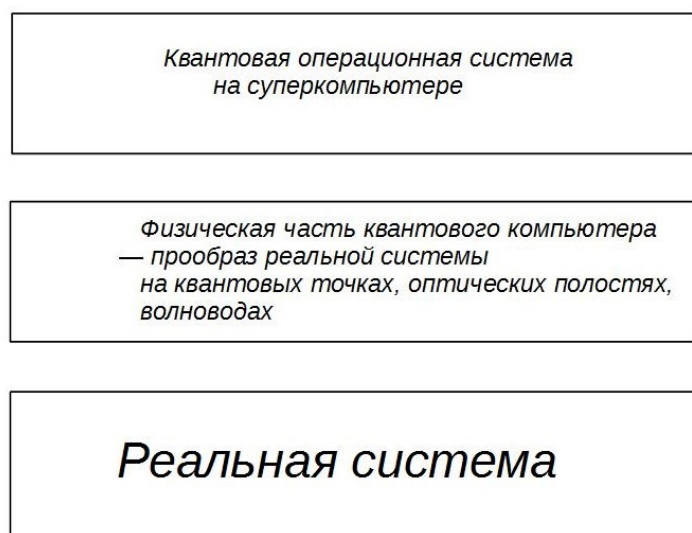


Рис. 1: Моделирование реальной системы с помощью квантового компьютера

Эксперименты, проводимые по квантовому компьютеру с конца 20 века, показывают необходимость ограничения размерности пространства состояний



квантовой системы некоторой константой  $Q$ , определение которой и является их фактической целью. Ограничение размерности эквивалентно введению зерна разрешения для амплитуды вида  $\epsilon = Q^{-1/2}$ . Самый простой путь нахождения этих констант - реализация алгоритма Гровера GSA ([2]) поиска решения  $x_t$  уравнения  $f(x) = 1$  для булевой функции  $f$  от  $n$  переменных при условии его единственности. Шаг  $s$  вычисления для GSA дает квантовое состояние  $n$ -кубитной системы вида

$$|\Psi_s\rangle = \cos(2s/\sqrt{N})|\tilde{0}\rangle + \sin(2s/\sqrt{N})|x_t\rangle, \quad (1)$$

где  $|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle$ . Этот характерный вид, когда амплитуда одного единственного состояния превосходит амплитуду всех иных состояний, у которых она одинакова, сохранится при любом каноническом преобразовании — перестановке базисных векторов  $\tau$ ; поэтому состояние (1) является нередуцируемым по сложности и если GSA работает для  $n$  кубитов, то константа  $Q$  должна удовлетворять неравенству  $Q > 2^n$ . Одновременно, нахождение граничного значения числа кубитов, на которых можно реализовать GSA означает нахождение и константы  $Q$ , так как в состоянии (1) амплитуда оказывается распределенной равномерно по  $2^n$  состояниям, так что для размерности  $Q$  зерно разрешения оказывается равным  $Q^{-1/2}$ .

**Оценка константы  $Q$ .** Безразмерная константа  $Q$  ограничивает сверху мощность множества  $J$  базисных состояний в нередуцируемом каноническими преобразованиями разложения  $|\Psi\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j |j\rangle$  квантового состояния по базисным  $|j\rangle$ , имеющим физическую размерность, так что амплитуды  $\lambda_j$  безразмерны.

Для оценки константы  $Q$  с помощью алгоритма Гровера GSA привлечем электродинамику и ядерную физику. Рассмотрим два процесса: переход состояний электрона в атоме  $Rb^{85}$  и распад нестабильного ядра  $He^6$ . Первый процесс описывается квантовой электродинамикой довольно точно, полное квантовое описание второго пока отсутствует.

Мы будем исходить из критерия точной прорисовки волновой функции, когда каждый шаг его компьютерного описания требует одного нового базисного состояния. Это вытекает из скорости квантового блуждания, при котором фронт волны распространяется с линейной скоростью (в отличие от классического блуждания, при котором скорость пропорциональна квадратному корню из времени). Пусть  $t$  — общее время процесса,  $dt$  — шаг компьютерного описания этого процесса во времени, тогда число базисных состояний, необходимых для «точной прорисовки» процесса составит  $N = t/dt$ . Значения  $t$  определяются экспериментально, а  $dt$  находится из соотношения неопределенностей «энергия-время».

Для рабиевской осцилляции атома рубидия, происходящей с испусканием фотона с длиной волны примерно  $1.4 \text{ cm}$  мы имеем:  $\omega \approx 10^{10} \text{ sek}^{-1}$ ,

$E_{QED} = \hbar\omega \approx 10^{-17}$ ,  $dt \approx \hbar/E_{QED} = 10^{-10}$ . Учитывая время рабиевской осцилляции  $t \approx 10^{-6}$  *сек*, мы получаем  $N = t/dt \approx 10^4$ . Тогда  $Q \geq 10^4 < 2^{14}$  и для хорошего отображения данного процесса на основании квантовой теории достаточно работы GSA на 14 кубитах, что представляется реальным.

Теперь рассмотрим распад ядра изотопа гелия:  $He^6 \rightarrow He^5 + n \rightarrow He^4 + 2n$  (в данном грубом приближении учитываем только нуклоны). Характерное значение энергии будет около  $10 \text{ Mev} \approx 10^{-5} \text{ erg}$ , и соотношение неопределенности «энергия-время» даст  $dt \approx 10^{-22} \text{ sec}$ . Весь процесс занимает около  $1.6 \text{ sec}$ , откуда  $N = t/dt \approx 10^{22} \approx 2^{73}$ , и если квантовую механику можно продолжить до ядерных процессов типа распада изотопа гелия-6 до стабильного изотопа 4, GSA должен хорошо работать уже на 73 кубитах.

Понятие кванта амплитуды  $\epsilon$  позволяет ввести на квантовых состояниях также и некоторый вид детерминизма, приписав каждому кванту определенную траекторию во времени, которая нигде не разветвляется; этот нетривиальный факт позволяет доказать теорему о структуре темного состояния системы  $k$  двух-уровневых атомов в оптической полости (см. [3]). Измерение состояния также можно переформулировать в виде проекции этого состояния на подпространство, содержащее базисные векторы с амплитудами, превосходящими  $\epsilon$ .

**Заключение.** Мы рассмотрели наиболее естественное ограничение гильбертова формализма пространств квантовых состояний, лежащего в основе копенгагенской квантовой теории простых систем: введение зерна амплитуды, или ограничение размерности гильбертова пространства величиной  $Q$ . Определение данной константы является главной целью экспериментов по квантовому компьютеру, ведущихся во многих лабораториях. Приведены оценки этой константы, из которых вытекает, что наиболее вероятное ее значение имеет порядок  $10^r$  где  $3 < r < 25$ . Дальнейшее уточнение требует отладки квантовых гейтов и реализации алгоритма Гровера GSA на возможно большем числе кубитов. Определение данной константы позволит уточнить вид ядра квантовой операционной системы и драйверов квантовых устройств для моделирования и управления реальными процессами, которые в принципе описываются электродинамикой. Ядерные процессы требуют, по всей вероятности, существенного пересмотра основ копенгагенской механики, если только GSA не удастся реализовать на более чем 70 кубитов, что представляется маловероятным.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант а-18-01-00695.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Feynman, R. P., Simulating Physics with Computers // International Journal of Theoretical Physics, vol. 21, N. 6/7, 1982, pp. 467-488.

- [2] Grover, L.,K., A fast quantum mechanical algorithm for database search, // Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC), May 1996, pages 212-219.
- [3] Ozhigov, Y.,I., Dark states of atomic ensembles: properties and preparation, // Proc. SPIE 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016, 102242Y (December 30, 2016); doi:10.1117/12.2264516.

## СОПОСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИИ О ФАЗЕ

**Павельева Елена Александровна, Проценко Мария Александровна**

Кафедра математической физики, e-mail: pavelyeva@cs.msu.ru, ma.protsenko@mail.ru

В работе разработан метод сопоставления изображений радужных оболочек глаз на основе информации о фазе. Сопоставление осуществляется с помощью сравнения дескрипторов ключевых точек, построенных с использованием фазы вейвлет-преобразования исходного сигнала. Вейвлет-преобразование вычисляется на основе логарифмической функции Габора [1]. Ключевые точки на изображениях выделяются с помощью функций преобразования Эрмита [2]. Для каждой ключевой точки строится дескриптор, состоящий из значений фазы вейвлет-преобразования в точках, находящихся на концентрических окружностях вокруг нее. При сопоставлении ключевых точек вычисляется евклидово расстояние между дескрипторами ключевых точек.

Пример работы алгоритма сопоставления ключевых точек нормализованных изображений радужных оболочек глаз приведен на рис. 1. Линиями соединены соответствующие друг другу ключевые точки.

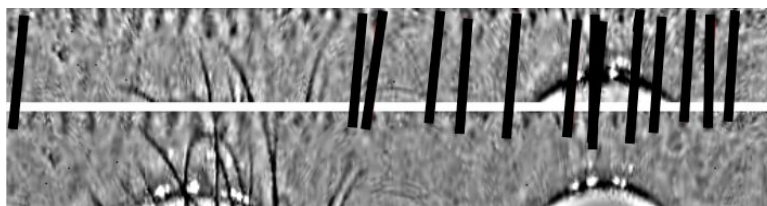


Рис. 1: Пример работы алгоритма сопоставления ключевых точек.

Результаты тестирования показали, что разработанный алгоритм достаточно устойчив к изменению размера изображений, повороту и условиям освещенности. Тестирование проводилось на изображениях базы данных CASIA-IrisV4-Interval [3].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Field D. J. Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells //Josa a. – 1987. – Vol. 4. – №. 12. – pp. 2379-2394.

- [2] Павельева Е. А. Поиск соответствий между ключевыми точками изображений радужных оболочек глаз с помощью метода проекционной фазовой корреляции // Системы и средства информатики. – 2013. – Т. 23. – №. 2. – С. 74-88.
- [3] CASIA Iris Image Database Version 4.0 URL: <http://biometrics.idest.org/dbDetailForUser.do?id=4>

## СИЛЬНО ЦИКЛИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Панфёров Антон Александрович

Кафедра алгоритмических языков, e-mail: [ast.a\\_s@mail.ru](mailto:ast.a_s@mail.ru)

Степенные ряды находят широкое применение в задачах, решаемых с использованием компьютерной алгебры. В частности, они могут выступать в роли коэффициентов дифференциальных уравнений и систем ([1]). Поскольку ряды представляют собой потенциально бесконечные объекты, данное обстоятельство приводит к ряду сложней при обработке с использованием компьютера (например, форма представления — как задавать такие коэффициенты?), а часть задач оказывается алгоритмически неразрешимой (например, проверка равенства нулю). Один из подходов в преодолении описанных сложностей заключается в работе с усечениями рядов: начальными конечными отрезками рядов, которые представляют собой многочлены.

Пусть  $K$  — поле характеристики нуль. Будем использовать стандартные обозначения  $K[x]$  и  $K[[x]]$  для кольца многочленов и кольца формальных степенных рядов независимой переменной  $x$  соответственно:  $a(x) \in K[[x]] \Leftrightarrow a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $a_i \in K$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Пусть  $l \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ , тогда  $l$ -усечение  $a^{(l)}(x)$  ряда  $a(x) \in K[[x]]$  получается из  $a(x)$  занулением всех коэффициентов при степенях  $x$ , больших  $l$ :  $a^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^l a_n x^n$  (если  $l = -\infty$ , то  $a^{(l)}(x) = 0$ ). Таким образом,  $l$ -усечение  $a^{(l)}(x)$  является многочленом, степень которого  $\deg a^{(l)}(x) \leq l$ .

Рассмотрим нормальную дифференциальную систему

$$y' = Ay, \tag{1}$$

где  $A$  — матрица коэффициентов систем — квадратная матрица размером  $m \times m$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)^T$  — вектор неизвестных. Существует множество алгоритмов построения решений систем вида (1) различного вида. Часть алгоритмов основана на сведении задачи построения решений дифференциальной системы к задаче построения решений скалярного дифференциального уравнения. Один из способов такого сведения основан на таком понятии как *циклический вектор* ([2], [3, sec. 2.3]).

**Определение 1.** Пусть  $v = (v_1, \dots, v_m)^T$  — вектор-столбец из  $m$  элементов, пусть  $\Delta_A$  — дифференцирование в силу системы (1), определённое следующим образом:  $\forall v = (v_1, \dots, v_m)^T \Delta_A v = v' + A^T v$ , где  $v'$  означает покомпонентное дифференцирование. Тогда вектор  $v$  называется циклическим для системы (1), если и только если  $v, \Delta_A v, \Delta_A^2 v, \dots, \Delta_A^{m-1} v$  линейно независимы.

В дальнейшем будет удобно обозначить матрицу  $m \times m$ , столбцами которой являются  $v, \Delta_A v, \Delta_A^2 v, \dots, \Delta_A^{m-1} v$ , через  $[\Delta_A v]$ . Тогда  $v$  будет циклическим вектором для системы (1) только в том случае, если  $\det[\Delta_A v] \neq 0$ .

Пусть матрица  $A$  системы (1) является полиномиальной матрицей, полученной в результате усечения элементов некоторой матрицы  $B \in K[[x]]^{m \times m}$ , т. е.  $A = B^{(l)}$  для некоторого целого  $l \geq 0$ . Пусть вектор  $v$  является циклическим для (1). Возникает вопрос: сохранит ли  $v$  свойство быть циклическим, если в качестве матрицы системы будет взято другое усечение  $B$ :  $\tilde{A} = B^{(\tilde{l})}$ ,  $\tilde{l} > l$ . Циклические векторы, обладающие этим свойством, будем называть *сильно циклическими*. Мы представляем эвристический алгоритм, который по заданной полиномиальной матрице  $A$  и циклическому вектору  $v$  в ряде случаев (не всегда) позволяет получить ответ на вопрос, является ли  $v$  сильно циклическим. Представленный алгоритм основан на операции *продолжения элемента матрицы*, т. е. на переходе от исходной матрицы  $A = (a_{ij})$  к матрице  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ , в которой один из элементов  $\tilde{a}_{ij}$  заменяется на  $a_{ij} + c \cdot x^d$ , где

$$d = \begin{cases} 1 + \deg a_{ij}, & \text{если } a_{ij} \neq 0 \\ 0, & \text{если } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

а  $c$  — символьный коэффициент.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Выбрать один из элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$  (как выбирать элемент будет описано ниже).
2. Построить  $\tilde{A}$ , получающуюся в результате продолжения  $a_{ij}$  с символьным коэффициентом:  $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + c \cdot x^d$ .
3. Вычислить  $D$  — определитель матрицы  $[\Delta_{\tilde{A}} v]$ .  $D$  при этом является многочленом. Если трейлинговый коэффициент  $D$  (ненулевой коэффициент при наименьшей степени  $x$ ) равен  $c$  или не зависит от  $c$ , то возврат к шагу 1 и выбор другого элемента  $a_{ij}$ . Если все элементы приводят к  $D$ , трейлинговый коэффициент которого равен  $c$  или не зависит от  $c$ , то закончить работу с выдачей результата « $v$  является сильно циклическим».
4. Вычислить значение  $c$ , отличное от 0 и зануляющее трейлинговый коэффициент  $D$ , и подставить его в  $\tilde{A}$ .
5. Если  $\det[\Delta_{\tilde{A}} v] = 0$ , то закончить работу с выдачей сообщения « $v$  не является сильно циклическим», иначе  $A := \tilde{A}$  и возврат к шагу 1.

В качестве эвристик используются следующие: 1) для продолжения на шаге 1 выбирается элемент, минимизирующий величину  $\deg D - \text{val } D$ , где  $D = \det[\Delta_{\tilde{A}}v]$ ,  $\text{val } D$  – валуация  $D$  (минимальная степень мономов  $D$ ); 2) если алгоритм не остановился через определённое (достаточно большое) число шагов, то его выполнение прекращается с результатом «неизвестно».

**Утверждение.** Пусть  $v$  является циклическим вектором для системы (1). Если продолжение каждого элемента  $A$  с символьным коэффициентом  $s$  приводит к  $\det[\Delta_{\tilde{A}}v]$ , трилинговый коэффициент которого не зависит от  $s$ , то  $v$  является сильно циклическим для системы (1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Abramov S. A., Barkatou M.A. Computable Infinite Power Series in the Role of Coefficients of Linear Differential Systems // Proc. of CASC'2014, 2014. P. 1–12.
- [2] Churchill R. C., Kovacic J. Cyclic vectors // Differential algebra and related topics, 2002. P. 191–218.
- [3] van der Put M., Singer M. F. Galois Theory of Linear Differential Equations. Heidelberg : Springer, 2003. 328 p.

## МЕТОД ВЫБОРА КОНФИГУРАЦИИ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПЛАТФОРМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОГРАММНО-КОНФИГУРИРУЕМЫХ СЕТЕЙ

Пашков Василий Николаевич

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: pashkov@lvk.cs.msu.su

В программно-конфигурируемых сетях (ПКС) контроллер, осуществляющий постоянный мониторинг состояния сети и логически централизованное управление сетевыми устройствами (коммутаторами) и потоками данных, одновременно является единой точкой отказа [1,2]. Сбои сервера, перебои с питанием, программные ошибки контроллера и его приложений, уязвимости в системе безопасности или несанкционированный доступ к контроллеру могут привести к отказу ПКС контроллера и недоступности контроллера для коммутаторов сети. Это может стать причиной частичной или полной потери управления сетью, отказу сети и недоступности сетевых сервисов для конечных пользователей.

Одним из основных способов обеспечения отказоустойчивости управления в ПКС сети является организация распределенной платформы управления из множества взаимодействующих друг с другом контроллеров и резервирование ресурсов в контуре управления [3]. Таким образом, актуальной является задача организации и выбора конфигурации отказоустойчивой распределенной

платформы управления для дальнейшего практического внедрения технологий ПКС в реальных сетях.

В работе приводится архитектура, принципы организации и метод выбора конфигурации отказоустойчивой распределенной платформы управления на основе резервирования контроллеров, резервирования активных управляющих соединений между коммутаторами и контроллерами, резервирования вычислительных ресурсов контроллеров и алгоритмов обнаружения угроз и восстановления управления сетью.

Метод выбора конфигурации распределенной платформы управления включает в себя следующие аспекты: выбор размещения контроллеров в узлах ПКС сети, определение оптимального количества контроллеров для сети, выбор основного и резервных контроллеров для каждого коммутатора сети. В качестве основного критерия оптимизации размещения контроллеров и организации управления коммутаторами является средняя задержка и задержка в худшем случае на передачу управляющих сообщений между коммутатором и основным контроллером. Восстановление управления сетью в случае единичного отказа контроллера платформы управления обеспечивается за счет перераспределения управления коммутаторами между заранее выбранными данным методом исправными контроллерами распределенной платформы управления.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, номер соглашения 05.613.21.0088, уникальный идентификатор RFMEFI61318X0088.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смелянский Р. Л. Программно конфигурируемые сети. // Открытые системы. СУБД. 2012. №9. С. 15–26.
- [2] Pashkov V., Shalimov A., Smeliansky R. Controller Failover for Enterprise SDN. // MoNeTec 2014, 28-29 октября 2014, Moscow, Russia. Proceedings of the Modern Networking Technologies, IEEE, pp. 27-32.
- [3] Pashkov V., Smeliansky R. On high-availability distributed control plane for software-defined networks // Международная конференция Modern Network Technologies, MoNeTec-2018:. — Москва, 2018. — P. 67–76.

## **О МЕТОДЕ КЭШИРОВАНИЯ ВИДЕО ДЛЯ СЕТЕЙ ДОСТАВКИ КОНТЕНТА С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ**

**Пашков Василий Николаевич<sup>1</sup>, Курдюкова Анна Андреевна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: pashkov@lvk.cs.msu.su

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: annakurdyukova@lvk.cs.msu.ru

Для повышения скорости доступа и загрузки видео контента для конечных пользователей в сети Интернет контент-провайдеры используют специальные

сети доставки контента (Content Delivery Networks, CDN)[1]. CDN включает в себя географически распределенную сетевую инфраструктуру и множество серверов, образующих логически одноуровневый или чаще всего иерархический организованный кэш CDN. В кэш CDN размещаются копии наиболее часто запрашиваемого контента. Использование контент-провайдерами сетей CDN позволяет существенно сократить путь между источником контента и конечным пользователем, уменьшить задержку передачи контента за счет перенаправления запроса пользователя на ближайший к нему сервер CDN с копией контента.

Поскольку кэш CDN имеет ограниченный размер, то крайне актуальной является задача организации и управления содержимым кэш-серверов сети CDN, включающая в себя стратегии выбора контента для добавления в кэш и удаления из него, оптимального размещения видео контента по серверам CDN.

В данной работе предлагается метод кэширования видео для CDN сетей с иерархической структурой. Метод основан на стратегии добавления контента в соответствующий уровень кэш CDN по прогнозу его популярности на день вперед: чем выше вероятность востребованности видео контента, тем с большей вероятностью он должен быть добавлен в кэш CDN.

Для прогнозирования популярности видео контента используется модель ARMA [2] применительно к истории запросов пользователей и на основе профилей для различных категорий видео (по длительности, жанрам, авторам и др.).

Исследование разработанного метода проводится на реальных данных о запросах пользователей видео сервиса YouTube [3]

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Buaya R., Pathan M., Vakali A. Content Delivery Networks // Springer Science and Business Media. Vol. 9, 2008.
- [2] Hassine N.B., Marinca D., Minet P., Barth D. Expert-Based On-Line Learning and Prediction in Content Delivery Networks.// IEEE International Wireless Communications and Mobile Computing Conference (IWCMC). September, 2016. Pp. 182–187.
- [3] YouTube Data API. URL: <https://developers.google.com/youtube/v3>



## ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Петрова Людмила Ивановна

Кафедра вычислительных методов, e-mail: ptr@cs.msu.ru

Показано, что интегрируемость дифференциальных уравнений зависит от согласованности производных по разным направлениям и от согласованности уравнений в системе дифференциальных уравнений.

Возьмем уравнение в частных производных первого порядка

$$F(x^i, u, p_i) = 0, \quad p_i = \partial u / \partial x^i \quad (1)$$

Уравнение является интегрируемым, если производные, удовлетворяющие уравнению, могут образовывать дифференциал.

Рассмотрим функциональное соотношение

$$du = \Theta \quad (2)$$

где  $\Theta = p_i dx^i$  есть кососимметричная форма, образованная производными дифференциального уравнения. Эта форма может быть дифференциалом, если она является замкнутой внешней формой, то-есть, если выполняются условия замкнутости формы  $\Theta = p_i dx^i$  и дуальной формы (функционал  $F$  в данном случае играет роль дуальной формы для формы  $\Theta$ ):

$$\begin{cases} dF(x^i, u, p_i) = 0 \\ d(p_i dx^i) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Если раскрыть дифференциалы, то получится система однородных уравнений относительно  $dx^i, dp_i$  (в пространстве размерности  $2n$  – исходном и касательном). Условия разрешимости такой системы (равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при  $dx^i, dp_i$ ) имеют вид

$$\frac{dx^i}{\partial F / \partial p_i} = \frac{-dp_i}{\partial F / \partial x^i + p_i \partial F / \partial u} \quad (4)$$

Это есть условия интегрируемости дифференциального уравнения.

Интегрируемость системы уравнений зависит от согласованности уравнений, образующих эту систему. Из анализа согласованности уравнений получается эволюционное соотношение. Из этого соотношения при дополнительных условиях может получиться замкнутая внешняя форма, что будет соответствовать реализации локальной интегрируемости системы уравнений.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКИ

Попов Александр Михайлович<sup>1</sup>, Шаги́ров Николай Эльдарович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: professorpopov@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: nikkey.shagirov@yandex.ru

Работа посвящена использованию диффузионного метода Монте-Карло и метода Parallel Tempering для изучения частотного спектра квантовых точек [1]. Большое значение имеет вычисление не только основного, но и возбужденных состояний, а также отделение их друг от друга. Именно такое разделение приводит к увеличению точности диагностики, которую дает квантовая точка.

Метод основан на решении уравнения Шредингера в мнимом времени через функцию источника и представлении ее в виде интеграла Фейнмана по траектории:

$$G(x, t|x_0, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{m}{2\pi\hbar\tau} \right)^{\frac{N}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{m}{2\hbar\tau} (x_j - x_{j-1})^2 + \frac{V(x_j) - E_R}{\hbar} \tau \right] \right\} dx_1 \dots dx_{N-1}$$

Волновая функция может быть записана в виде:

$$\Psi(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{j=0}^{N-1} dx_j \right) \prod_{n=1}^N W(x_n) \cdot P(x_n, x_{n-1}) \cdot \Psi(x_0, 0)$$

Функцию  $P(x_n, x_{n-1})$  можно рассматривать как гауссовскую плотность вероятности для случайной переменной  $x_n$  со средним равным  $x_{n-1}$  и дисперсией  $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}$ . С учетом сдвига спектра  $E_R$ ,

$$W(x_n) = \exp \left[ - \frac{[V(x_n) - E_R] \tau}{\hbar} \right]$$

Для многомерных квантовых задач метод Parallel Tempering является основным универсальным методом, позволяющим находить возбужденные состояния, которые могут быть использованы для изучения пространственной структуры протеинов в задачах молекулярной биологии.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Попов А. М. Численное исследование спектра квантовой точки на основе метода Монте-Карло // Computational nanotechnology. 2019. Т. 6, № 3. С. 74–79.

# АНАЛИЗ МЕТОДОВ НАСТРОЙКИ ГИПЕРПАРАМЕТРОВ ГЛУБОКИХ НЕЙРОСЕТЕЙ НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ НА БАЗЕ ПРОЦЕССОРОВ POWER8

Попова Н. Н., Хамитов К. Г., Коньков Ю. А., Кастильо М. Т.

Кафедра суперкомпьютеров и квантовой информатики, e-mail: popova@cs.msu.ru, berserq0123@gmail.com, konkov96@mail.ru, cmtony4@gmail.com

Глубокие нейронные сети (Deep Neural Nets, DNN) все активнее становятся лидирующим подходом к решению сложных задач компьютерного зрения, обработки сигналов, обработки естественных языков. Возрастающие возможности систем глубокого обучения связаны с увеличивающейся сложностью архитектур нейросетевых моделей, методов их обучения, что, в свою очередь, обуславливает рост числа гиперпараметров, сложность процедур их настройки. Реализация нейросетевых моделей, как правило, проводится на вычислительных системах, построенных с активным использованием графических ускорителей. Статья посвящена исследованию методов настройки гиперпараметров глубоких нейросетей на кластерных системах. Предметом рассмотрения статьи являются гиперпараметры структурного типа и эволюционные методы их настройки. Экспериментальные исследования выполнены на вычислительном кластере Polus факультета ВМК МГУ, построенном на базе процессоров Power8. В статье представлены эволюционные методы настройки гиперпараметров Tree-Parzen [1] и Naive Evolution [2], входящих в состав пакетов NNI [3] и CoDeepNEAT [4]

**Описание эксперимента.** Архитектура базовой сети, на которой были проведены эксперименты, состоит из двух модулей: детектора, состоящего из блока ConvGRU и других сверточных слоев, и аппроксиматора, состоящего из слоев, меняющих размерность, и MLP.

С целью повышения эффективности использования ресурсов кластера были предложены следующие модификации, направленные на распараллеливание вычислений в рассматриваемых методах:

- распределенные запуски, с использованием доступных на Polus пакетов `torch.distributed` и `multigpu NVLink`;
- распределенные примитивы `Gather` для обратного распространения усредненных значений потерь (`loss`) в обе популяции — как модулей, так и шаблонов.

Распараллеливание метода реализовано с помощью параллельного вычисления функций на узлах кластера с использованием `torch distributed`. При объединении результатов использовано распространение `loss` по узлам для оценки потерь в обеих популяциях по модели взвешенного среднего.

Unmodified net Loss	Naive Evolution	TPE	CoDeepNEAT
-48.25	-53.88	-51.17	-50.46

Таблица 1: Полученный общий loss на тестовой выборке

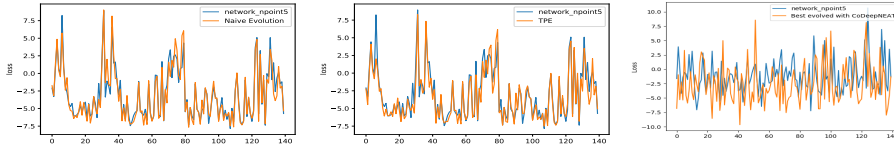


Рис. 1: Сравнение значений функции потерь для лучших сетей, полученных с помощью Naive Evolution и TPE, CoDeepNEAT и немодифицированной сетью (10 точек на субъект)

**Выводы.** С использования методов Naive Evolution, TPE и CoDeepNEAT были проведены эксперименты по параллельной оптимизации гиперпараметров сверточно-рекуррентной сети с большим количеством гиперпараметров(5M) на вычислительном кластере Polus. С помощью методов Naive Evolution и TPE было получено улучшение loss на 11% и 6% на тестовой выборке. Значения представлены в табл. 1. На рисунке 1 приведены графики поведения функции потерь для лучших сетей, полученных с помощью Naive Evolution и TPE, CoDeepNEAT и немодифицированной сети (10 точек на субъект). Заметим, что с помощью метода CoDeepNEAT не получилось существенно снизить loss, что объясняется необходимостью более тонкой настройки метапараметров метода. Выходная сеть, полученная с использованием CoDeepNEAT, получается с меньшими размерностями некоторых блоков, что уменьшает время прямого хода и снижает требования к вычислительным ресурсам.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-07-01053).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Algorithms for hyper-parameter optimization. URL: <https://dl.acm.org/citation.cfm?id=2986743>
- [2] Real, Esteban, Sherry Moore, Andrew Selle, Saurabh Saxena, Yutaka Leon Suematsu, Jie Tan, Quoc V. Le, and Alexey Kurakin. Large-scale evolution of image classifiers // Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning-Volume 70, JMLR. org, 2017. P. 2902–2911.
- [3] Neural Network Intelligence. URL: <https://github.com/microsoft/nni>
- [4] Miikkulainen R., Liang J., Meyerson E., et al. Evolving deep neural networks // Artificial Intelligence in the Age of Neural Networks and Brain Computing. Elsevier 2019. P. 293–312. DOI: 10.1016/B978-0-12-815480-9.00015-3.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА ШУМА В АЛГОРИТМЕ ERGG ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВАРИАБЕЛЬНОСТИ ГРАФОВ

Портной Александр Михайлович, Турдаков Денис Юрьевич<sup>1</sup>,  
Дробышевский Михаил Дмитриевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного программирования, e-mail: alexndr.portnoy@gmail.com, turdakov@ispras.ru

<sup>2</sup> ИСП РАН им. В.П. Иванникова, e-mail: drobyshevsky@ispras.ru

На данный момент многие данные имеют графовую структуру. Для тестирования алгоритмов на графах необходимы графовые данные, но при этом нельзя выкладывать в публичный доступ реальные графы, из-за возможности их деанонимизировать. В связи с чем появляется задача генерации искусственных графов, которые по структуре схожи с исходным графом, но не являются точной его копией.

Существуют различные генераторы графов, похожих на данный [1, 2, 3], которые позволяют изменять размер графа, а также достаточно точно воспроизводить как числовые метрики графа, так и его распределения.

В работе рассмотрен генератор графов, похожих на данный, ERGG [4], который позволяет сохранять свойства графа, немного изменяя структуру данных графа, при этом предоставляя возможность масштабировать граф.

На первом этапе работы в генераторе графов ERGG обучается модель представления графа с помощью метода вложения. Представление вершин векторами строится таким образом, чтобы важные свойства графа кодировались в полученных векторах. Второй шаг заключается в выборе необходимого количества новых вершин из полученного множества вершин исходного графа с добавлением гауссовского шума.

В генераторе графов ERGG используется гауссовский шум с постоянной амплитудой, которая не зависит от исходного графа.

В ходе работы был предложен способ подбора параметров гауссовского шума, исходя из распределения векторов представления исходного графа. Новый способ учитывает алгоритм формирования представления вершин и позволяет генератору графов более точно воспроизводить свойства графов. Данная доработка в том числе позволила оптимизировать процесс генерации ребер, который являлся наиболее вычислительно сложным этапом в работе генератора графов ERGG.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Leskovec J. et al. Kronecker graphs: An approach to modeling networks //Journal of Machine Learning Research. – 2010. – Т. 11. – №. Feb. – С. 985-1042.
- [2] Zhang J. W., Tay Y. C. GSCALER: Synthetically Scaling A Given Graph //EDBT. – 2016. – Т. 16. – С. 53-64.

- [3] Park H., Kim M. S. EvoGraph: an effective and efficient graph upscaling method for preserving graph properties //Proceedings of the 24th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining. – 2018. – С. 2051-2059.
- [4] Drobyshevskiy M., Korshunov A., Turdakov D. Learning and scaling directed networks via graph embedding //Joint European Conference on Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. – Springer, Cham, 2017. – С. 634-650.

## **РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ РЕЗКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕРЦАЮЩЕЙ ФЛУОРЕСЦЕНТНОЙ МИКРОСКОПИИ**

**Пчелинцев Яков Антонович, Насонов Андрей Владимирович,  
Крылов Андрей Серджевич**

Кафедра математической физики, e-mail: kry1@cs.msu.ru

Флуоресцентная микроскопия обладает рядом достоинств, среди которых высокая контрастность изображений и возможность маркировки разных структур разными красителями. Однако из-за дифракции света разрешающая способность изображений флуоресцентной микроскопии недостаточна для ряда современных задач.

Использование стохастически мигающих флуорофоров и длинной временной серии снимков позволяет получить дополнительную информацию для разделения сигналов от близко расположенных молекул флуорофора. Такой подход не требует специального оборудования, поэтому в настоящее время получил широкое распространение и продолжает активно развиваться [1].

В рамках этого подхода существует множество алгоритмов построения резкого изображения (см. [2]), рассматривающих интенсивности пикселей резкого изображения как независимые случайные величины, а серию резких изображений — как результат серии их наблюдений. Влияние дифракции представлено свёрткой резкого изображения с ядром размытия.

Можно выделить подкласс методов решения данной задачи, которые на основе ковариационной матрицы  $\Sigma$  входящей последовательности кадров и матрицы свёртки  $A$  строят резкое изображение  $\mathbf{x}$  путём минимизации функционала  $\|\Sigma - A \text{diag}(\mathbf{x}) A^T\|_F^2 + \lambda R(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \geq 0$ , где регуляризатор  $R(\mathbf{x})$  может иметь самый разный вид, например,  $\ell_1$ -нормы или «нормы»  $\ell_0$  [3].

В данной работе в качестве регуляризирующего алгоритма был использован метод RED (regularization by denoising) [4], основанный на алгоритмах подавления шума и показывающий хорошие результаты для ряда задач повышения качества изображений. В рассматриваемой задаче он позволил достичь качества повышения резкости изображений и времени работы, сопоставимых с

существующими регуляризирующими алгоритмами [3], в то же время уменьшив артефакты обработки. Отметим также, что метод позволяет использовать широкий спектр современных алгоритмов подавления шума, основанных на характеристиках естественных изображений, что обеспечивает большую гибкость в достижении желаемого результата для различных аппаратных конфигураций.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мишин А. С., Лукьянов К. А. Флуоресцентная микроскопия сверхвысокого разрешения живых клеток // Успехи биологической химии. 2019. Т. 59. С. 39–66.
- [2] Enhancement Algorithms for Blinking Fluorescence Imaging / Y. Pchelintsev, A. Nasonov, A. Krylov, S. Enoki, Y. Okada // Proceedings of the 2019 4th International Conference on Biomedical Imaging, Signal Processing. ACM, 2019. С. 72–77.
- [3] SPARCOM: Sparsity based super-resolution correlation microscopy / O. Solomon, Y. C. Eldar, M. Mutzafi, M. Segev // SIAM Journal on Imaging Sciences. 2019. Т. 12, №. 1. С. 392–419.
- [4] Romano Y., Elad M., Milanfar P. The little engine that could: Regularization by denoising (RED) // SIAM Journal on Imaging Sciences. 2017. Т. 10, №. 4. С. 1804–1844.

## **АВТОМАТИЧЕСКОЕ СОСТАВЛЕНИЕ ЛЕДОВЫХ ВОЗРАСТНЫХ КАРТ ПО СПУТНИКОВЫМ СНИМКАМ НЕЙРОСЕТЕВЫМИ МЕТОДАМИ СЕГМЕНТАЦИИ**

**Руденко Дмитрий Андреевич, Корчагин Александр Юрьевич,  
Королев Виктор Юрьевич**

Кафедра математической статистики, e-mail: dimitriy\_rudenko@mail.ru,  
sasha.korchagin@gmail.com, vkorolev@cmc.msk.su

Классификация ледовых покровов по временным стадиям и формам отвечает на вопросы о текущем состоянии ледовых покровов, их возрасте и физико-химических характеристиках. Одной из наиболее интересных задач является определение возраста, и как следствие, физических характеристик определенных участков. Эти параметры играют важную роль для определения и фиксации изменения климата, моделирования погоды и разработки воздушных и водных маршрутов.

Составление ледовых карт по спутниковым снимкам в визуальном и радиодиапазоне является продолжительным и трудоемким процессом, требующим привлечение высококвалифицированных специалистов. В то же время состояние гляциосферы быстро меняется и уже составленные карты быстро устаревают. Основной целью ставится создание автоматического алгоритма составления

Алгоритм	Метод квантизации снимка	Pixel accuracy
Random Forest	Квантизация квадратами (50м)	0.85415
UNet[2]	Попиксельная квантизация	0.89877
UNet (ordinal)	Попиксельная квантизация	0.91737

Таблица 2: Результаты сегментации.

возрастных ледовых карт из входного неразмеченного набора данных. Для удобства сравнения с предшественниками и проведения экспериментов выбран набор данных Гренландского моря и Датского пролива со спутника Sentinel-1 за зиму 2018 года для обучения и зима 2019 года для тестирования. Набор данных представляет собой размеченную векторную карту возраста льда, спутниковые снимки заданных точек в микроволновом и визуальном диапазоне. На одном снимке могут находиться различные по возрасту участки льда и воды, но отсутствуют неразмеченные участки. Таким образом получаем возможность свести задачу мультисегментации изображения в нескольких спектрах. Природа задачи позволяет свести задачу так же к задаче упорядоченного множественного выбора, что и позволяет добиться высоких результатов.

Протестированы сегментационные подходы, основанные на случайных лесах и нейронных сетях предшествующих работ[1] и представлено решение, превосходящее их. Использование целевой метрики, учитывающей временное отношение между различными классами и логарифмическое сглаживание SAR данных, позволяет получить алгоритм, превосходящий по метрике pixel accuracy протестированные подходы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Karvonen J. A. Baltic Sea ice SAR segmentation and classification using modified pulse-coupled neural networks // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing vol. 42 no. 7 p. 1566-1574 2004.
- [2] Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI) Springer LNCS vol.9351 p. 234–241 2015

## **ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ОБОБЩЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ**

**Саблин Марк Николаевич**

Лаборатория разностных методов, e-mail: msam1434@gmail.com

Если однородная консервативная разностная схема для классической постановки краевой задачи математической физики применима и в случаях, когда



гладкости коэффициентов исходной задачи для существования классического решения недостаточно, доказательство ее корректности тесно связано с вопросом существования обобщенного решения исходной задачи в слабой постановке. Исследование данного вопроса значительно упрощается, если при построении разностной схемы дифференциальные уравнения исходной задачи рассматривать как уравнения для регулярных обобщенных функций в пространстве  $D' = D'(\mathbb{R}^n)$ , в которых обобщенным функциям соответствуют обычные функции, являющиеся стандартными конечно-элементными интерполянтами. Описание основных положений такого конечно-разностного подхода и его базового отличия от конечно-элементного подхода, в котором используются такие же интерполяции, будет проведено на примере первой и третьей краевых задач для одномерного уравнения Пуассона в виде

$$-\tilde{u}'' = \tilde{f}, \tag{1}$$

где  $\tilde{u}''$  и  $\tilde{f}$  - регулярные обобщенные функции из  $D' = D'(\mathbb{R})$  с носителем  $[0, 1]$ , которым соответствуют обычные функции  $u'', f \in L_2(0, 1)$ , равные нулю вне  $[0, 1]$ . После применения формулы производной регулярной обобщенной функции, которой соответствует обычная функция  $u'$ , это уравнение записывается в эквивалентном виде через отношения двойственности

$$\left\langle -(\tilde{u}')', \eta \right\rangle - \langle u'(1) \delta(x-1) - u'(0) \delta(x), \eta \rangle = \langle \tilde{f}, \eta \rangle \quad \forall \eta \in D. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 u' \eta' dx - u'(1) \eta(1) + u'(0) \eta(0) = \int_0^1 f \eta dx \quad \forall \eta \in H^1(0, 1). \tag{3}$$

Определим на отрезке  $[0, 1]$  узловую сетку  $\omega_x$  и сетку  $\bar{\omega} = \omega_\gamma \cup \omega_\Delta$  из концов отрезка  $[0, 1]$  и центров отрезков, на которые разбивают этот отрезок узлы  $\omega_x$ . Через  $y^x$  и  $\bar{\eta}$  обозначим сеточные функции из наборов значений, привязанных к узлам  $\omega_x$  и  $\bar{\omega}$  соответственно, а через  $\Pi y^x, \Pi \bar{\eta} \in H^1(0, 1)$  — кусочно-линейные непрерывные интерполяции этих сеточных функций. Необходимые для построения сеточного аналога (1) формулы скалярных произведений и сеточные аналоги операторов дифференцирования получаются из формулы интегрирования по частям, записанной для  $\Pi y^x$  и  $\Pi \bar{\eta}$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\Pi y^x)' (\Pi \bar{\eta}) dx = \\ & = - \int_0^1 (\Pi y^x) (\Pi \bar{\eta})' dx + (\Pi y^x)(1) (\Pi \bar{\eta})(1) - (\Pi y^x)(0) (\Pi \bar{\eta})(0) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [\partial_{\bar{x}} y^x, \eta^\Delta]_\Delta = [y^x, (-\partial_{\bar{x}} + \Phi_\gamma) \bar{\eta}]_x (= [y^x, \partial_{\bar{x}}^* \eta^\Delta]_x) \quad (4)$$

Здесь  $\partial_{\bar{x}} y^x$  и  $\partial_{\bar{x}} \bar{\eta}$  - сеточные функции, из наборов значений производных  $(\Pi y^x)'$  и  $(\Pi \bar{\eta})'$  в узлах  $\omega_x$  и  $\bar{\omega}$  соответственно.

Рассматриваемый конечно-разностный подход к применению кусочно-полиномиальных интерполяций, в отличие от конечно-элементного подхода к применению тех же интерполяций, позволяет преобразовать сеточный аналог тождества (3) в сеточный аналог тождества (2). После этого, для построения разностной схемы остается включить в него сеточный аналог краевых условий.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АНОДНОГО ЭФФЕКТА В ЭЛЕКТРОЛИЗНОЙ ВАННЕ

Савенкова Надежда Петровна, Мокин Андрей Юрьевич,  
Удовиченко Нелля Сергеевна

Кафедра вычислительных методов, e-mail: nudovichenko@mail.ru

Получение первичного алюминия является экологически «грязным» процессом, поэтому в задачу производства необходимо включать выполнение стандартов по экологии. Но такие исследования во время работы электролизера являются затруднительными из-за высокой температуры, превышающей 900 °С, химически агрессивной среды, большой силы тока, подаваемого на ванну. Разработанная математическая модель процесса промышленного электролиза алюминия учитывает во взаимосвязи гидродинамические, электромагнитные, химические и тепловые процессы трех основных сред: алюминия, газа и электролита [1]. Такая модель позволяет прогнозировать развитие анодного эффекта и связанного с ним выброса парникового газа.

В работе исследуется процесс развития анодного эффекта для многоанодного электролизера, где число обожженных анодов составляет 22. В результате численных экспериментов моделирование анодного эффекта условно разбивается на три этапа.

**Начальный МГД-стабильный этап.** Конфигурация жидких фаз и начальное распределение скоростей в смеси считаются известными [2]. В начальный момент времени распределение магнитного поля и плотности электрического тока практически симметричны относительно центра ванны в горизонтальной плоскости.

**Этап развития МГД-нестабильности.** В основном, химическая реакция с образованием газа происходит на подошвах анодов. Газ, образуя зону обратного окисления металла, начинает распространяться в электролите и в области между анодами [3]. Поскольку газ распространяется неравномерно, при этом образуя непосредственно под анодами домены, магнитное поле и плотность электрического тока соответствующим образом перераспределяются.

Сила Лоренца с образованием областей с большей интенсивностью также распределяется неравномерно. Такая конфигурация электромагнитных полей способствует возникновению колебаний на поверхности жидкого металла, приводящих в некоторых случаях к развитию МГД-нестабильности. Напряжённость магнитного поля и температура достигают максимума в области шестой и седьмой пары анодов.

**Конечный этап МГД-нестабильности.** При полном покрытии подошв анодов, включая межанодное пространство, газовыми доменами, происходит прекращение процесса электролиза. Вертикальный перенос электролита препятствует быстрому поднятию газов к анодам, соответственно, зона обратного окисления сохраняет свою форму долгое время. Увеличившееся сопротивление среды уменьшает плотность протекающего тока, что сигнализирует о наступлении анодного эффекта. Третий этап характеризуется резким возрастанием напряжения до 36 В.

**Заключение.** Таким образом, с помощью моделирования динамики развития анодного эффекта было выяснено, что для минимизирования потерь выхода первичного алюминия технологические работы по устранению анодного эффекта нужно начинать в начале второго этапа, предотвращая развитие МГД-нестабильности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М. : Наука, 1978. 336 с.
- [2] Калмыков А. В., Кулешов А. А., Савенкова Н. П. Моделирование анодного эффекта в многоанодном алюминиевом электролизере // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2016. № 131. 22 с.
- [3] Kiss L. I., Poncsak S. Effect of the bubble growth mechanism on the spectrum of voltage Fluctuations in the reduction cell // Light Metals. 2013. P. 402–407.

## БАЗИСНОСТЬ РИССА ИЗ ПОДПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Садовничая Инна Викторовна, Савчук Артем Маркович

МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: ivsad@yandex.ru, artem\_savchuk@mail.ru

Изучается оператор Дирака  $L_P$ , порожденный в пространстве  $H = (L_2[0, \pi])^2$  дифференциальным выражением  $\ell_P(y) = By' + Py$ , где  $y \in H$ ,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , предполагаются суммируемыми на отрезке  $[0, \pi]$  и комплекснозначными. Краевые условия  $U$  предполагаются регулярными по Биркгофу.

**Теорема 1.** *Если оператор  $L_{P,U}$  сильно регулярен, то система его собственных и присоединенных функций образует базис Рисса в  $H$ .*

Пусть оператор  $L_{P,U}$  регулярен, но не сильно регулярен. Пусть  $H_n$ ,  $|n| \geq N_0$ , — корневые подпространства этого оператора. Определим дополнительно подпространство  $H_0 = \text{Rn} S_{N_0}$ , где  $S_{N_0} := 1/(2\pi i) \int_{\gamma} (L - \lambda I)^{-1} d\lambda$ , а замкнутый кусочно-гладкий жорданов контур  $\gamma$  охватывает все собственные значения  $\lambda_n$  оператора  $L_{P,U}$  с номерами  $n : |n| < 2N_0$ , и только их.

**Теорема 2.** *Система  $\{H_0, H_n\}_{|n| \geq N_0}$  образует базис Рисса из подпространств в пространстве  $H$ .*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19–01–00240).

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Самсонов Сергей Петрович

Кафедра оптимального управления, e-mail: samsonov@cs.msu.su

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (см. [1]). Работа посвящена рассмотрению численных методов решения линейных задач оптимального управления с терминальным и интегральным функционалами качества. Использование линейности управляемой системы позволяет построить эффективно работающие численные алгоритмы. Разработке численных методов для линейных задач оптимального управления посвящен целый ряд работ. В большинстве опубликованных работ исследуется только сходимость методов и задается какой-то критерий останова вычислений, который обеспечивает «близость» вычисляемых величин искомым, но не гарантирует заданной точности. Обычно используемые численные алгоритмы требуют численного решения некоторых задач из теории дифференциальных уравнений, линейной алгебры и т.д. Однако вычислительные погрешности решения этих вспомогательных задач могут оказаться весьма значительными, поэтому большой интерес представляют такие численные методы, для которых удается получить оценку точности вычислений с учетом вычислительных погрешностей. Данный доклад как раз и посвящен численным методам, решающим линейные задачи оптимального управления с интегральным функционалом качества с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самсонов С.П. Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Проблемы динамического управления, 2009, вып. 4, стр.156–158.

## ПРОВЕРКА МУЛЬТИАФФИННОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Селезнева Светлана Николаевна

Кафедра математической кибернетики, e-mail: selezn@cs.msu.ru

В общем случае задача решения систем полиномиальных уравнений над конечным полем является  $NP$ -трудной. Однако в некоторых частных случаях такие системы можно решать полиномиальными алгоритмами. Например, если каждое уравнение системы над полем из двух элементов определяется мультиаффинным многочленом, то такую систему уравнений можно решить с полиномиальной сложностью. В [1] предложен полиномиальный алгоритм проверки мультиаффинности многочлена  $f(x_1, \dots, x_n)$  над полем из двух элементов. В настоящей работе рассмотрено обобщение понятия мультиаффинности многочлена на конечные поля из большего числа элементов и найдены свойства таких многочленов.

Если  $F$  — конечное поле, то многочлен  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  назовем мультиаффинными, если для некоторого  $b \in F$  множество решений уравнения  $f(x_1, \dots, x_n) = b$  совпадает с множеством решений какой-то системы линейных уравнений над этим полем  $F$ . При этом элемент  $b$  назовем правой частью. В работе получены свойства мультиаффинных многочленов над конечными полями. Предложен полиномиальный алгоритм, который для заданных многочлена  $f \in F[x_1, \dots, x_n]$  и элемента поля  $b \in F$  проверяет, является ли  $f$  мультиаффинным многочленом с правой частью  $b$  и при положительном ответе находит одну из соответствующих ему систем линейных уравнений над полем  $F$ . Показано, как в отдельных случаях можно применять полученные свойства мультиаффинных многочленов при решении систем полиномиальных уравнений.

Работа поддержана РФФИ (проект № 19-01-00200-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горшков С.П. О сложности распознавания мультиаффинности, биюнктивности, слабой положительности и слабой отрицательности // Обзор промышленной и прикладной математики. Серия: Дискретная математика. 1997. Т. 4. Вып. 2. С. 216–237.

## **РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ КАНАЛА УТЕЧКИ ИНФОРМАЦИИ ПО ФОТОГРАФИИ ДОКУМЕНТА, СДЕЛАННОЙ С ЭКРАНА КОМПЬЮТЕРА**

**Семенихин Дмитрий Алексеевич<sup>1</sup>, Писковский Виктор Олегович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: semenikhind@yahoo.com

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: vpiskovski@lvk.cs.msu.su

С одной стороны, практическая деятельность сотрудников различных организаций, работников государственных учреждений обычно требует предоставления возможности одновременной работы как с внутренними информационными ресурсами организации, так и доступа в сеть Интернет. Необходимость решения этой задачи обуславливает использование соответствующих методов защиты информации, в основе которых лежит идея изоляции доменов. Программный комплекс «Абонентский облачный терминал» (АОТ) является одним из возможных решений описанной задачи и совмещает на одной аппаратной единице несколько одновременно работающих изолированных друг от друга АРМ, каждое из которых работает в своём домене.

С другой стороны, организациям приходится не допускать утечек конфиденциальной информации. С этой целью применяются различные организационно-технические методы. В сложившейся ситуации, одним из немногих популярных каналов утечек информации является фотографирование документов с экрана компьютера. В этом случае, идентификация терминала АРМ, с которого сделана фотография, помогла бы, если не устранить канал утечки, то хотя бы установить источник.

В данной работе рассмотрены методы идентификации канала утечки [1, 2] с рабочих мест, оборудованных АОТ, реализованы и протестированы два алгоритма идентификации АРМ методом внесения цифрового водяного знака в изображение экрана монитора: изменении яркости отдельных пикселей и их дублирование. Результаты численного эксперимента представлены в работе.

В заключение предложены варианты развития рассмотренных методов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, номер соглашения 05.613.21.0088, уникальный идентификатор RFMEFI61318X0088.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] David Gugelmann, Vincent Lenders, Laurent Vanbever, David Sommer and Markus Happe 2018. Screen Watermarking for Data Theft Investigation and Attribution
- [2] Jana Dittmann. Combining digital Watermarks and collusion secure Fingerprints for customer copy monitoring

## О НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ АНТЕННОГО ПОРТА НА ОСНОВЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сетуха Алексей Викторович<sup>1</sup>, Степанищева Виктория Сергеевна<sup>2</sup>,  
Ненашев Анатолий Сергеевич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: setuhaav@rambler.ru

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: stepanischeva.vika@gmail.com

<sup>3</sup> АНО ВО Университет Сириус, e-mail: nenashev\_as@mail.ru

Строится модель излучения монохроматического электромагнитного поля от линейного источника, расположенного вблизи двух идеально проводящих поверхностей (рефлекторов) и опирающегося концами на эти поверхности.

Обозначим суммарную поверхность идеально-проводящих рефлекторов как  $\Sigma$ . Задача состоит в нахождении электрической и магнитной напряженностей вторичного поля в области  $\Omega$  вне суммарной поверхности  $\Sigma$  и линейного источника, которые ищутся в виде

$$\vec{E}_{total}(x) e^{-i\omega t}, \quad \vec{H}_{total}(x) e^{-i\omega t}, \quad x \in \Omega.$$

Эти поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла в области  $\Omega$ . На поверхности  $\Sigma$  должно выполняться условие равенства нулю касательной компоненты суммарного электрического поля  $\vec{E}_{total}$ :

$$\vec{E}_{total} \times \vec{n} = 0 \quad (1)$$

Полное электрическое поле ищется в виде

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_0(x) + \vec{E}'(x) + \vec{E}(x),$$

где  $\vec{E}_0(x)$  – поле от линейного источника,  $\vec{E}'(x) + \vec{E}(x)$  – вторичное поле, которое разбито на сумму двух слагаемых:  $\vec{E}'(x)$  – поле, индуцируемое поверхностными токами на поверхности рефлекторов, которые находятся аналитически так, чтобы сократить главную особенность в выражении поля  $\vec{E}_0$ , создаваемого линейным источником,  $\vec{E}(x)$  – неизвестная составляющая электрического поля, обеспечивающая выполнение условия (1).

Численное решение поставленной задачи ищется с помощью метода граничных интегральных уравнений с учетом выделенных главных составляющих поверхностных токов. При этом как первичное поле рассматривается уже сумма полей  $\vec{E}_0(x) + \vec{E}'(x)$ . Для нахождения неизвестного вторичного поля  $\vec{E}$  применяется метод решения задач дифракции волн на идеально-проводящих телах, разработанный ранее (см. работы [1-3]).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Захаров Е. В., Рыжаков Г. В., Сетуха А. В. Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 9. С. 1253–1263.

- [2] Setukha A., Fetisov S. The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects // *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 373. P. 631–647.
- [3] Aparinov A. A., Setukha A. V., Stavtsev S. L. Low rank methods of approximation in an electromagnetic problem // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40, № 11. P. 1771–1780.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ ПАЦИЕНТА С ИМПЛАНТИРОВАННЫМ АППАРАТОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО КРОВООБРАЩЕНИЯ**

**Симаков Сергей Сергеевич<sup>1</sup>, Тимофеев Александр Евгеньевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> МФТИ, Сеченовский Университет, e-mail: simakovss@ya.ru

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: richardstallman42@gmail.com

Имплантируемый аппарат вспомогательного кровообращения позволяет восстановить уровень кровоснабжения организма у пациента с тяжелой степенью сердечной недостаточности. Однако такое устройство оказывает существенное влияние на работу сердца и меняет характер потока крови в аорте.

В данной работе рассматривается взаимодействие насоса крови Спутник [1] с кровеносной системой. В основе подхода заложена классическая одномерная модель гемодинамики и нульмерная модель левого сердца на основе [2], дополняемая моделью насоса. Численное решение системы уравнений одномерной модели гемодинамики получено с помощью явной двухшаговой сеточно-характеристической схемы. Представлены результаты вычислений на графе сосудов ADAN56 [3] при заданной функции потока через аортальный клапан, при нормальной и пониженной сократительной способности левого желудочка, а также при установленном насосе.

В рамках следующего этапа исследований поставлена задача управления насосом в соответствии с требованием поддержки пульсирующего тока крови, открытия аортального клапана, синхронизации с сердечным циклом и выброса крови в соответствии с физической нагрузкой [4].

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Telyshev D. et al. The Progress in the Novel Pediatric Rotary Blood Pump Sputnik Development // *Artificial organs*. 2018. T. 42, № 4. С. 432–443.
- [2] Simakov S. S. Lumped parameter heart model with valve dynamics // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2019. T. 34, № 5. С. 289–300.
- [3] Boileau E. et al. A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // *International journal for numerical methods in biomedical engineering*. 2015. T. 31, № 10. С. e02732.



- [4] Daners M. S. et al. Left ventricular assist devices: challenges toward sustaining long-term patient care // *Annals of biomedical engineering*. 2017. Т. 45, № 8. С. 1836–1851.

## **ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБЕСПЕЧЕНИЮ КАЧЕСТВА СЕРВИСА В ВИРТУАЛЬНЫХ ПЛАСТАХ**

**Синякова Марина Алексеевна<sup>1</sup>, Степанов Евгений Павлович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: msiniakova@lvk.cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: estepanov@lvk.cs.msu.ru

В настоящей работе рассматривается подход к управлению качеством сервиса (QoS) транспортных соединений виртуальных пластов в программно-конфигурируемой сети (ПКС). Предполагается, что ПКС состоит из программных коммутаторов, поддерживающих работу по протоколу OpenFlow версии не ниже 1.3. Виртуальный пласт — это виртуальная сеть, которая предназначена для передачи данных определенной группы потоков с одинаковым качеством сервиса. Под качеством сервиса понимается пропускная способность каналов и максимальная сквозная задержка в виртуальной сети.

Наиболее распространенными подходами управления качеством сервиса в протоколе OpenFlow являются: использование Meter-таблиц [1] и использование очередей на портах программных коммутаторов [2]. Meter-таблицы поддерживают счетчик пакетов для потока, который определяется match разделом соответствующего правила протокола OpenFlow. Если количество прибывших пакетов или байт за фиксированный интервал времени превышает ограничение, установленное в Meter-таблице, то избыточные пакеты сбрасываются. Недостатком данного подхода является, то что Meter-таблицы ограничивают скорость потоков только на входе в коммутатор. Если правило протокола OpenFlow дублирует каждый входящий пакет, то используемая пропускная способность каналов может превышать заданное качество сервиса виртуального пласта. Вторым недостатком заключен в том, что многие версии программных коммутаторов не поддерживают Meter-таблицы, так как они не являются обязательными для реализации в спецификации протокола OpenFlow [3]. Поэтому в настоящей работе для управления QoS в виртуальных пластах используется подход с очередями.

Очереди позволяют устанавливать ограничения на выходные порты коммутатора, что предотвращает нарушение требований к пропускной способности канала в случае размножения пакета. Стоит отметить, что установка нескольких очередей на порту позволит управлять задержкой сквозных соединений при помощи введения приоритетов для очередей, что нельзя сделать в Meter-таблицах. Также преимуществом очередей перед Meter-таблицами является поддержка использования очередей последними версиями программных OpenFlow комму-

таторов, однако конфигурация очередей должна осуществляться отличными от OpenFlow средствами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-01112-А).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Krishna H., van Adrichem N.L.M., Kuipers F.A. Providing bandwidth guarantees with OpenFlow // 2016 Symposium on Communications and Vehicular Technologies (SCVT). – IEEE, 2016. – С. 1–6.
- [2] The queuerpusher: Enabling queue management in openflow / D. Palma, J. Gonçalves, B. Sousa, L. Cordeiro, P. Simoes, S. Sharma, D. Staessens // 2014 third European workshop on software defined networks. – 2014. – С. 125–126.
- [3] OpenFlow Switch Specification–1.3 Version / B. Pfaff, B. Lantz, B. Heller, C. Barker, D. Cohn, M. Casado // Open Networking Foundation: Menlo Park, CA, USA. – 2012.

## **ГИБРИДНЫЙ ПАРАЛЛЕЛИЗМ В АЛГОРИТМАХ, ОСНОВАННЫХ НА МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ**

**Смирнов Александр Павлович, Загидуллин Ришат Раилевич<sup>1</sup>, Матвеев  
Сергей Александрович, Рыкованов Сергей Георгиевич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: zagidullinrishat@gmail.com, sap@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Сколковский Институт Науки и Технологий, Москва, Россия, e-mail: S.Matveev@skoltech.ru, S.Rykovanov@skoltech.ru

В данной работе мы анализируем особенности параллелизма вычислительных алгоритмов на основе метода конечных объемов. Мы используем три разные задачи и распараллеливаем их решение. Они служат примерами и иллюстрацией наших результатов. Наборы задач связаны с решением уравнения адвекции-коагуляции, уравнения завихренности и уравнений Максвелла. Тесты проводятся на суперкомпьютере Жорес, расположенном в Сколковском Институте Науки и Технологий. Аппаратное обеспечение, которое используется для запуска параллельных алгоритмов, включает графические процессоры Nvidia Tesla V100 и процессоры Intel Xeon. Мы находим, что дискретизация методом конечных объемов хорошо параллелится на графических процессорах. Однако выполнение всех вычислений на графических процессорах суперкомпьютера очень ресурсоемко, если размер проблемы исключительно велик. Следовательно, нужно использовать все вычислительные мощности, которые может предложить суперкомпьютер, включая ЦПУ. Мы предлагаем способы распараллеливания указанных наборов проблем гибридным способом.

Основываясь на конфигурации суперкомпьютера, мы придерживаемся следующей стратегии при решении наших наборов задач для достижения оптимального использования ресурсов кластера:

размер задачи (количество треугольников)	обычная реализация	с оптимизацией доступа к памяти
33928	0.63	0.43
14784	0.35	0.27
8636	0.25	0.2
3760	0.18	0.15

Таблица 3: Время вычислений (в секундах) версии графического анализатора уравнений Максвелла на одном графическом устройстве. 100 временных шагов

Вариант распараллеливания	Время вычислений, с
один ЦПУ	8.73
MPI (32 процесса)	1.53
GPU (одно устройство)	1.07
GPU + MPI	1.23
GPU + MPI+ multithreading	1.15

Таблица 4: Время вычислений различных вариантов решателей уравнений Максвелла на одном узле. Задача размером 33928 треугольников по 250 временных шагов.

- Использовать каждый ресурс в узле. Как только каждое ядро ЦПУ и все графические процессоры используются для выполнения вычислений, использовать следующий узел.
- Распределять работу между процессами таким образом, чтобы наиболее интенсивный обмен данными приходился на процессы, расположенные в одном узле (если это возможно).

Время расчетов показано в Табл. 3 для уравнений Максвелла. Можно видеть, что использование общей памяти, а также сохранение alignment и coalescing глобальной памяти дает разумное увеличение скорости вычислений для схем с конечным объемом. Табл. 4 показывают скорость вычислений различных параллельных реализаций для заданных наборов задач. Можно сделать вывод, что для уравнения Максвелла одно устройство с графическим процессором должно занимать примерно половину всех данных. Если остальная часть данных разделена между процессами 32 mpi на процессорах, получается оптимальное распределение данных. Поскольку передача данных между графическими процессорами происходит быстрее благодаря NVLink, для размера задачи, указанного в Табл. 4, более оптимальным является выполнение вычислений на графических процессорах одного и того же узла, а не гибридная версия. Однако по мере увеличения размера входных данных гибридная реализация должна давать наилучшие результаты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Papaioannou, G. A numerical study of vortex method schemes for two-dimensional incompressible flows. 2001.
- [2] Fumeaux, C., Baumann, D., Almpanis, G., Li, E., Vahldieck, R. Finite-volume time-domain method for electromagnetic modelling: Strengths, limitations and challenges. 2008.
- [3] Vegh, V., Turner, I.W., Zhao, H. Effective cell-centred time-domain Maxwell's equations numerical solvers // Applied Mathematical Modelling. 2005. Vol. 29, pp. 411–438.

## СВОЙСТВА ПОТОКОВОГО АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ СТАТИКО-ДИНАМИЧЕСКИХ РАСПИСАНИЙ.

Смирнов Александр Сергеевич<sup>1</sup>, Костенко Валерий Алексеевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем и вычислительных комплексов, e-mail: alsmirnovser@gmail.com

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем и вычислительных комплексов, e-mail: kost@cs.msu.su

Алгоритмы, основанные на нахождении максимального потока в транспортной сети, используются для решения P-трудных задач построения расписаний с прерываниями выполнения работ и являются точными. Методика использования алгоритмов нахождения максимального потока в сети для построения расписаний с прерываниями, была предложена в работах [1,2] и включает три этапа: построение транспортной сети в соответствии с решаемой задачей построения расписания, нахождение потока в транспортной сети и восстановление расписания из полученного потока. Однако, большинство задач построения расписаний без прерывания выполнения работ являются NP-трудными. Также, не все задачи построения расписаний с прерываниями работ являются P-трудными. В частности задача построения статико-динамических расписаний выполнения программ для систем реального времени с архитектурой интегрированной модульной авионики [3]. Для каждой программы задаются: принадлежность к разделу, директивные сроки и время выполнения. Расписание построено, если определены: привязка разделов к ядрам вычислителя, для каждого раздела определен набор окон и для каждого окна определено время его открытия и время закрытия. Программы раздела могут выполняться только в своих окнах.

Для решения этой задачи предложен эвристический алгоритм, основанный на нахождении максимального потока в транспортной сети. В этом алгоритме модифицирован алгоритм нахождения потока с целью учета ограничений на корректность расписания. В соответствии с этими ограничениями сформулированы условия допустимости потока. При построении потока проверяется выполнимость этих условий. Детальное описание алгоритма приведено в работе [3]. Несмотря на то, что для общей задачи алгоритм не является точным,

для ряда частных задач он будет точным. Доказано утверждение, если: все программы принадлежат одному и тому же разделу или директивные сроки программ различных разделов не пересекаются, то алгоритм будет строить оптимальное расписание.

То есть в отличие от жадных алгоритмов и алгоритмов, основанных на ограниченном переборе, предложенный алгоритм для P-трудных частных задач общей NP-трудной задачи будет гарантировано находить оптимальное решение и при этом сложность алгоритма остается полиномиальной.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-07-00614).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gonzales T., Sanhi S. Preemptive Scheduling of Uniform Processor Systems // Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 25, No. 1, January 1978.
- [2] Federgruen A., Groenevelt H. Preemptive Scheduling of Uniform Machines by Ordinary Network Flow Technique // Management Science. Vol. 32, No. 3, March 1986.
- [3] Костенко В. А., Смирнов А. С. Поточковые алгоритмы планирования вычислений в интегрированной модульной авионике // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 3.

## **О МНОГОШАГОВОМ МЕТОДЕ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ В КЛИМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ**

**Смирнов Илья Николаевич**

Кафедра общей математики, e-mail: ismirnov@cs.msu.ru

Задача коррекции численного решения системы уравнений динамики океана и атмосферы данными измерений (задача усвоения данных) заключается в том, чтобы с одной стороны, сохранить баланс физических параметров, априори задаваемый уравнениями модели, а с другой - приблизить решение этих уравнений к наблюдаемым значениям параметров. Решение таких задач невозможно без использования технологий распределенных вычислений в силу огромного объема получаемой и обрабатываемой информации. Количество ресурсов, необходимых для выполнения оперативных расчетов моделями высокого пространственного разрешения, исчисляется сегодня  $10^2$  -  $10^3$  вычислительных ядер для краткосрочных прогнозов и  $10^4$  -  $10^5$  - для средне- и долгосрочных. Особенно критичен вопрос времени усвоения данных в случае, когда численная модель и подсистема усвоения данных функционируют в оперативном режиме для построения среднесрочных и краткосрочных прогнозов. Данные со спутников становятся доступными спустя 2-3 часа, высокое пространственное разрешение моделей позволяет вычислять и прогнозировать динамику вихревых структур,

при этом усвоение спутниковых данных наблюдений способствует их своевременному выявлению. Как следствие, это позволяет предсказывать такие опасные природные явления, как штормы и тайфуны. Так, в настоящее время работает система «Меркатор», разработанная в Метеорологической службе Франции [1].

Существует несколько алгоритмов усвоения данных, которые применяются в задачах прогноза погоды и в оперативной океанологии. Используемые подходы можно разделить на вариационные (3d-Var, 4d-Var) [2] и динамико-стохастические, преимущественно ансамблевые фильтры Калмана (Ensemble Kalman Filter (EnKF)) [3-5]. В последнее время были предложены гибридные схемы усвоения, основанные на синтезе 3-D Var и EnKF [6-9]. Методы, основанные на EnKF, не требуют построения сопряженного оператора модели и решения обратной задачи, что для модели с большим числом параметров весьма затруднительно.

Цель данной работы заключается в параллельной реализации на многопроцессорных компьютерах алгоритма типа EnKF, использующего  $p$  предыдущих состояний модели для одновременного усвоения в модели данных наблюдений нескольких параметров, которые могут быть получены из различных источников, а также в анализе результатов проведенных численных экспериментов. Ранее был успешно реализован одношаговый метод EnKF.[10] Метод GKF - является обобщением метода EnKF. Его основные уравнения для общего случая  $p$  шагов следующие

$$Xa_{n+1} = Xb_{n+1} + K_{n+1}(y_{n+1} - HXb_{n+1})$$

$$K_{n+1} = K(Xb_{n+1}, Xa_n, Xb_n, \dots, Xa_{n-p+1}, Xb_{n-p+1})$$

$Xa$ ,  $Xb$  - векторы рассчитываемого в численной модели параметра после и до усвоения, соответственно,  $Y_{n+1}$  - вектор наблюдений Таким образом в уравнении для коррекции участвуют данные модели на  $n+1$  и  $n$  шагах, а матрица весового фильтра  $K_{n+1}$  рассчитывается по  $p$  состояниям

$$Xb_{n+1}, Xa_n, Xb_n, \dots, Xa_{n-p+1}, Xb_{n-p+1}$$

расчетной модели до и после усвоения данных на предыдущих шагах. Подробная реализация и обоснование этого метода для  $p = 2$  описана в работах [11],[12].

Автор выражает благодарность профессору Беляеву К. П. за постановку задачи и обсуждение полученных результатов..

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Valdivieso M., Haines K., Balmaseda M. et al. An assessment of air-sea heat fluxes from ocean and coupled reanalyses // *Climate Dynamics*. 2015. № 10. P. 1-26.

- [2] Агошков В. И., Ипатова В. М., Залесный В. Б. и др. Задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. 46. № 6. С. 734–770.
- [3] Кауркин М. Н., Ибраев Р. А., Беляев К. П. Усвоение данных наблюдений в модели динамики океана высокого пространственного разрешения с применением методов параллельного программирования // Метеорология и гидрология. 2016. № 7. С. 47–57.
- [4] Кныш В. В., Коротаев Г. К., Мизюк А. И., Саркисян А. С. Усвоение гидрологических полей Мирового океана // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 37–46.
- [5] Evensen G. Data Assimilation, The Ensemble Kalman Filter, 2nd ed. Springer, 2009.
- [6] Беляев К. П., Танажура К. А. С., Тучкова Н. П. Сравнительный анализ экспериментов с усвоением данных дрейфтеров АРГО // Океанология. 2012. Т. 52. № 5. С. 643–653.
- [7] Tanajura C. A. S. and Belyaev K. A sequential data assimilation method based on the properties of a diffusion-type process // Appl. Math. Model. 2009. Т. 33. № 5. P. 2165–2174.
- [8] Kalnay E., Li H., Miyoshi T., et al. 4-D-Var or ensemble Kalman filter. // Tellus A. 2007. Т. 59. № 5. P. 758–773.
- [9] Kalnay E. Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [10] Беляев К. П., Кулешов А. А., Смирнов И. Н., Танажура К. А. Параллельное усвоение данных наблюдений в гидродинамической модели циркуляции океана // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2017. № 2. С. 9–14.
- [11] Belyaev K, Kuleshov A., Smirnov I, and Tanajura C. The general data assimilation method, its comparison with the standard scheme, and its application to dynamical simulation in the atlantic. MATEC Web of Conferences. 2018. Т. 210(04025).P. 1–5.
- [12] Беляев К. П., Кулешов А. А., Смирнов И. Н. Анализ результатов моделирования динамики океана с применением различных методов усвоения данных наблюдений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 37. С. 1–17.

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА—АЙЗЕКСА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Смирнов Сергей Николаевич<sup>1</sup>, Андреев Николай Анатольевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра системного анализа, e-mail: s.n.smirnov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту, НИУ ВШЭ, e-mail: nandreev@hse.ru

Доклад посвящен численному решению уравнения Беллмана—Айзекса в рамках гарантированного подхода к управлению финансовым портфелем, предложенного в [1, 2]. Подход является альтернативным классической постановке задачи, предложенной в основополагающих работах Мертона [3] и Самуэльсона [4], и использует «грубую» модель финансового рынка с неопределенной эволюцией цен и дискретным временем, когда известными считаются такие характеристики рынка, как ожидаемое значение цен и диапазон их возможных значений. Гарантированный подход приводит к модели, которую можно интерпретировать как динамическую антагонистическую игру (с нулевой суммой) участника рынка (инвестора или хеджера) против рынка. Участник рынка определяет оптимальную стратегию управления исходя из наиболее неблагоприятного сценария поведения рынка. Стратегия определяется из уравнения Беллмана—Айзекса, решение которого может быть получено путем нахождения вогнутой оболочки функции цены на компактном множестве. В настоящем исследовании было рассмотрено два метода нахождения вогнутой оболочки: детерминированный метод интерполяции на сетке и метод Монте-Карло. Показана сходимость методов и произведен сравнительный анализ эффективности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана—Айзекса // МТИП. 2018. Т. 10, № 4. С. 59–99.
- [2] Smirnov S. A Guaranteed Deterministic Approach to Superhedging – The Case of Convex Payoff Functions on Options // Mathematics. 2019. Т. 7, № 12. С. 1246.
- [3] Merton R. C. Lifetime portfolio selection under uncertainty : The continuous-time case // The review of Economics and Statistics. 1969. Т. 51, № 3. С. 247–257.
- [4] Samuelson P. A. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming // The review of Economics and Statistics. 1969. Т. 51, № 3. С. 239–246.



## ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДИКАТА ПУТИ КАК ЗАДАЧА АБСТРАКТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ БИНАРНОГО КОДА

Соловьев Михаил Александрович, Манушин Дмитрий Валерьевич,  
Папазьян Евгений Юрьевич, Макаров Сергей Сергеевич

Кафедра системного программирования, e-mail: icee@ispras.ru, dman95@ispras.ru,  
swordelf@ispras.ru, smakarov@ispras.ru

Идея абстрактной интерпретации программ впервые была описана для программ в исходных текстах в работе [1]. В системе Glassfrog [2, 3], основанной на промежуточном представлении Pivot 2, эта идея реализована для анализа бинарного кода следующим образом: каждому ребру графа потока управления фрагмента программы, а также каждому конкретному оператору ставится в соответствие передаточная функция вида  $States \mapsto States$ , где  $States$  — выбранное для данной интерпретации множество абстрактных состояний.

В данной работе рассматривается возможность построения предиката пути при символьном выполнении [4] как решения задачи абстрактной интерпретации. Для этого необходимо задать множество абстрактных состояний  $States$  и описать саму интерпретацию, т. е. передаточные функции для всех операторов и ребер графа потока управления программы.

Абстрактное состояние в задаче построения предиката пути будет содержать текущий предикат пути в виде набора SMT-ограничений, значения (символьные или конкретные) переменных, а также по символьному массиву на каждое из адресных пространств ([3], стр. 57–58). Передаточные функции операторов программы будут представлять соответствующие преобразования над символьными значениями, хранящимися в абстрактном состоянии. Передаточные функции ребер должны осуществить проверку выполнимости условия перехода по ребру при текущем предикате пути, и в случае успеха — выполнить соответствующее этому ребру копирование переменных, а также добавить условие перехода к предикату пути, возможно упростив полученное выражение. В случае если проверка выполнимости не пройдена, функция должна возвращать специальное состояние, которое указывает на то, что переход по данному ребру невозможен при данном входном состоянии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-07-01256-а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cousot P., Cousot R. Abstract interpretation: a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints // Proceedings of the 4th ACM SIGACT-SIGPLAN symposium on Principles of programming languages. 1977. С. 238–252.
- [2] Декодирование машинных команд в задаче абстрактной интерпретации бинарного кода / М. А. Соловьев, М. Г. Бакулин, С. С. Макаров, Д. В. Ма-

нушин, В. А. Падарян // Труды Института системного программирования РАН. 2019. Т. 31, № 6. С. 65–88.

- [3] О новом поколении промежуточных представлений, применяемых для анализа бинарного кода / М. А. Соловьев, М. Г. Бакулин, М. С. Горбачев, Д. В. Манушин, В. А. Падарян, С. С. Панасенко // Труды Института системного программирования РАН. 2018. Т. 30, № 6. С. 39–68.
- [4] King J. C. Symbolic execution and program testing // Communications of the ACM. 1976. Т. 19. № 7. С. 385–394.

## КЛАССИФИКАЦИЯ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ БЕЗ РАЗМЕТКИ

Сорока Андрей Геннадьевич<sup>1</sup>, Мещеряков Александр Валерьевич<sup>2</sup>,  
Герасимов Сергей Валерьевич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: soroka\_irk@mail.ru

<sup>2</sup> Институт космических исследований РАН, e-mail: mesch@cosmos.ru

<sup>3</sup> Кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: gerasimov@mlab.cs.msu.su

В астрономических исследованиях часто возникают задачи классификации сложных объектов на изображениях, к примеру морфологическая классификация галактик [1]. Дерево морфологической классификации Galaxy Zoo состоит из набора вопросов, на которые должны последовательно ответить волонтеры, глядя на изображение галактики. Вопрос «Является галактика округлой или имеет четко выраженную структуру?» — наиболее важный и напрямую касается физических процессов, протекающих в них [2]. При классификации астрономических изображений методами машинного обучения необходимо предварительно выполнить разметку большого объема данных, что может потребовать существенных ресурсов и значительно замедлить анализ научных исследований. В данной работе, мы впервые исследуем подходы, позволяющие выполнять морфологическую классификацию галактик на неразмеченной выборке изображений. Для проведения экспериментов выбран набор данных Kaggle Galaxy Zoo, стандартный набор для задачи классификации астрономических изображений.

Мы рассмотрели 2 модели содержащие глубокую нейросеть в паре с алгоритмом кластеризации KMeans. Во-первых, рассматривалась предобученная на ImageNet модель Resnet50 [4]. На полученном из изображения векторе признаков, алгоритм KMeans обучался выделять 2 кластера. Вторая модель ААЕ+Kmeans — генеративная модель соревновательного автокодировщика (ААЕ) с латентным слоем разбитым на дискретную и непрерывную часть [3]. На признаках непрерывной части ААЕ мы обучали KMeans на 2 кластера.

Результат модели Resnet+Kmeans: в первом кластере волонтеры либо уверенно видят структуру на изображениях, либо напротив уверены в ее отсутствии,

Признаковое пространство	Алгоритм кластеризации	Точность	F1 score
Resnet50	КMeans 2 кластера	51,9%	0.4079
Дискретный слой ААЕ	Дискретный слой ААЕ	52,89%	0.4883
Непрерывный слой ААЕ	КMeans 2 кластера	73,7%	0.7729

Таблица 5: Результаты классификации без использования разметки.

во втором волонтеры разделились примерно поровну. Обученный ААЕ в своем дискретном слое также разделяет галактики на кластеры подобные описанным выше. В рамках тестирования следующей модели, мы обучили алгоритм кластеризации КMeans над непрерывным латентным слоем автокодировщика. Полученные моделью ААЕ+Кmeans кластеры оказались тесно связаны с искомой морфологической классификацией галактик: в первом кластере преобладали спиральные галактики обладающие структурой, во второй кластер попали в основном эллиптические галактики округлой формы. Метрики качества классификации на тестовой выборке представлены в таблице 5.

Мы делаем вывод: представление данных, выученное моделью соревновательного автокодировщика, позволяет провести четкое разделение галактик с различной морфологией. В дальнейшем мы планируем рассмотреть поведение данной модели при использовании как неразмеченных, так и размеченных данных в процессе обучения, а также применить данную модель для широкого класса задач классификации астрономических изображений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Masters K.L. Twelve Years of Galaxy Zoo // arXiv e-prints. 2019. arXiv:1910.08177
- [2] Dickinson H. Galaxy Zoo: Morphological Classification of Galaxy Images from the Illustris Simulation // The Astrophysical Journal. 2018. Vol. 853, P. 10.
- [3] Adversarial Autoencoders / Makhzani A., Shlens J., Jaitly N., Goodfellow I., Frey B. // arXiv e-prints. 2015. arXiv:1511.05644
- [4] Deep Residual Learning for Image Recognition / He K., Zhang X., Ren S. // Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2016. P. 770–778

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕМУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ

Степанов Евгений Павлович

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: estepanov@lvk.cs.msu.ru

В настоящее время одним из активно развивающихся подходов к повышению скорости транспортного потока является подход с демультимплексированием одного потока на несколько подпотоков. Так, в последней на настоящий

момент версии 5.6 Linux ядра добавлена поддержка протокола демультиплексирования МРТСП [1]. Однако исследование в статье [2] показало, что массовое применение статического варианта демультиплексирования МРТСП (когда количество подпотоков predetermined заранее и не меняется в течение жизни потока) может привести к деградации пропускной способности сети. Решением может стать динамический подход FDMP [3], в котором поддерживается такое количество подпотоков, которое будет необходимо для удовлетворения требований качества сервиса по скорости потока. Для определения более подходящего подхода при массовом использовании необходимо провести сравнительный анализ FDMP и МРТСП.

Однако метод оценки эффективности статического демультиплексирования из статьи [2] не применим к FDMP, так как скорость потоков была ограничена только сетью. В случае FDMP каждое приложение обладает определенными требованиями к качеству сервиса (например, скорость получения кадров видео в зависимости от разрешения) и не может передать данные с большей, чем заявленная, скоростью. Поэтому методика исследования эффективности динамического демультиплексирования была изменена:

1. Основным критерием для оценки эффективности теперь станет количество потоков, для которых требование к качеству сервиса было удовлетворено;
2. Все потоки будут разделены на несколько классов по требуемому качеству сервиса. Оценка требований каждого класса и количество потоков в каждом классе можно взять аналогично статистике по видео потокам с разным качеством [4].
3. Маршруты для подпотоков будут выбираться в динамике на основании требований приложений и остаточной пропускной способности в сети.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-07-01255-А).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] How Hard Can It Be? Designing and Implementing a Deployable Multipath TCP / C. Raiciu, C. Paasch, S. Barre, A. Ford, M. Honda, F. Duchene, O. Bonaventure, M. Handley // 9th USENIX Symposium on Networked Systems Design and Implementation (NSDI 12). - 2012. - P. 399–412.
- [2] Stepanov E., Smeliansky R. On analysis of traffic flow demultiplexing effectiveness // Международная конференция Modern Network Technologies, MoNeTec-2018:.. — Москва, 2018. — P. 112–122.
- [3] Chemeritskiy E.V., Stepanov E.P., Smeliansky R.L. Managing network resources with flow (de) multiplexing protocol // MATHEMATICAL and COMPUTATIONAL METHODS in ELECTRICAL ENGINEERING. - V.53. - 2015. - P. 35–43.

- [4] Khokhar M.J., Ehlinger T., Barakat C. From Network Traffic Measurements to QoE for Internet Video // 2019 IFIP Networking Conference (IFIP Networking). - 2019. - P. 1–9.

## АНАЛИЗ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ОНЛАЙН-ИГР

Строев Вячеслав Игоревич, Турдаков Денис Юрьевич

Кафедра системного программирования, e-mail: stroev.vyacheslav@gmail.com,  
turdakov@ispras.ru

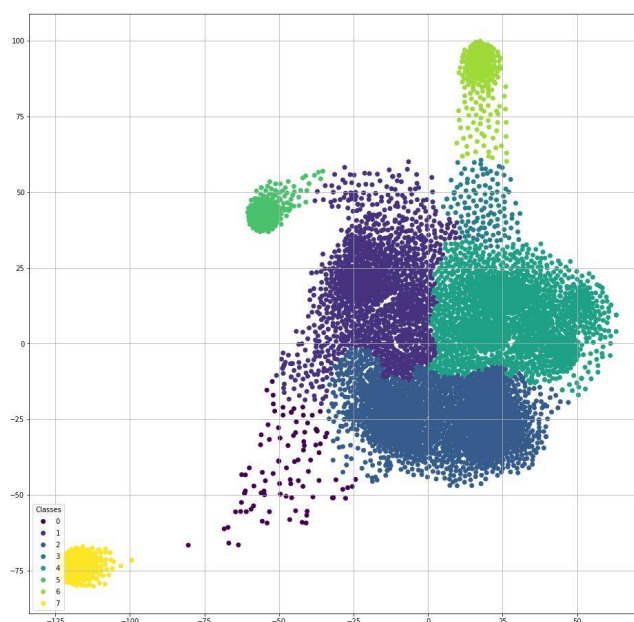


Рис. 1: Отображение векторных представлений пользователей после кластеризации.

В сфере многопользовательских игр возникает множество задач, связанных с анализом аудитории. К таким задачам относятся, например, предсказание утечки пользователей, определение уровня навыков игроков для выбора соперников, поиск аномального поведения. Правильное исследование потребностей и особенностей пользователей позволяет делать игры более привлекательными для игроков, а также решать задачи бизнеса.

В этой сфере уже используются методы машинного обучения [1], [2], однако в большинстве случаев они представляют собой простые подходы с подготовленными вручную признаками. При этом в остальных областях наблюдается тенденция на использование векторных описаний объектов, благодаря которым можно более качественно решать различные по своей сути задачи. В рамках представленной работы были собраны данные с социального онлайн покера: `alpharoker`. В них содержится полная информация о действиях 7740 игроков.

Были рассмотрены две сильно отличающиеся задачи: предсказание утечки пользователей и исхода игры, предложен метод получения векторных описаний игроков и проведено их исследование. В результате показано, что векторы полученные при решении одной задачи, могут быть полезны для другой, которая сильно отличается. При кластеризации отображения векторных описаний на плоскость (рис. 1) полученного с помощью t-SNE [3] были выделены группы пользователей, различные по своим характеристикам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lee, Sang-Kwang, et al. "Predicting churn in mobile free-to-play games." 2016 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC). IEEE, 2016.
- [2] Milošević, Miloš, Nenad Živić, and Igor Andjelković. "Early churn prediction with personalized targeting in mobile social games." *Expert Systems with Applications* 83 (2017): 326-332.
- [3] Maaten, Laurens van der, and Geoffrey Hinton. "Visualizing data using t-SNE." *Journal of machine learning research* 9.Nov (2008): 2579-2605.

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Терновский Владимир Владимирович

Кафедра вычислительных методов, e-mail: vladimir@chatroulette.com

В настоящее время наблюдается интенсивное развитие робототехники, в частности, создание новых беспилотных автомобилей и летательных аппаратов. Математическое обеспечение таких устройств содержит алгоритмы построения траекторий движения с учетом ограничений на переменные состояния и управляющие воздействия. В условиях ограниченности ресурсов (аккумулятора, топлива) такие алгоритмы должны быть оптимальны. Трудность состоит в том, что возникающие математические задачи являются обратными и неустойчивыми. Поэтому применяются специфические методы решения некорректных задач [1]. Для задач быстрогодействия предлагается двухэтапный вариационный метод. Сначала находится минимальное время процесса, затем по этому времени находится управление методом минимизации разрешающего функционала [2]. Так как время является функционалом управления и состояния, то возникает задача с ограничениями типа равенств и неравенств. Прямой метод минимизации приводит к оптимальному решению. Заметим, что методы высокого порядка не применяются, так как искомые функции — разрывные или фиксированной гладкости. Регуляризация задачи по Тихонову обеспечивает корректность результата.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1979. 283 с.
- [2] Терновский В. В., Хапаев М. М., Хапаева Т. М. Применение вариационного метода для решения обратных задач оптимального управления // Доклады Академии наук 2018. Т. 483, № 4. С. 1–23.

## ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО

Тимохин Иван Владиславович, Тыртышников Евгений Евгеньевич

Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: m@ivan.timokhin.name,  
eugene.tyrtysnikov@gmail.com

Рассматривается следующая усечённая система уравнений типа Смолуховского с источником частиц:

$$\frac{dn_k}{dt} = J_k + \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} C_{ij} n_i n_j - n_k \sum_{j=1}^N C_{jk} n_j, \quad k = \overline{1, N} \quad (1)$$

где  $n_i \geq 0$ ,  $C_{ij} = C_{ji} \geq 0$ .

Для этой системы с ядром  $C_{ij} = i^a j^{-a} + i^{-a} j^a$  в [1] было продемонстрировано существование циклических решения при  $a > 0.5$ .

Цикличность решения подразумевает возможность описания всего решения решением на некотором начальном отрезке времени  $[0, T]$ . В частности, если некоторый достаточно большой начальный сегмент решения лежит в подпространстве небольшой размерности, то и всё решение будет лежать в нём же. Обнаружение такого пространства, в свою очередь, открывает возможность для построения численных методов непосредственно в нём, и снятия зависимости от  $N$ .

В данной работе мы рассматриваем алгоритм построения такого подпространства (характеризуемого своим базисом) на основе известного в литературе метода «снимков» [2]. В предлагаемом алгоритме базис строится путём последовательного приближения решения на небольших «окнах», на которые разбивается весь рассматриваемый временной интервал. При этом искомый момент времени  $T$  не закладывается в алгоритм изначально, а обнаруживается самим алгоритмом на основе наблюдаемой точности аппроксимации.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 14-11-00806).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Steady oscillations in aggregation-fragmentation processes. Brilliantov N. V., Otieno W., Matveev S. A., Smirnov A. P., Tyrtysnikov E. E., Krapivsky P. L. Physical Review E. 2018. Т. 98, № 1.

- [2] Pinnau. R. Model Reduction via Proper Orthogonal Decomposition. В Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications под редакцией Schilders W. H. A., van der Vorst H. A., и Rommes J. Серия Mathematics in Industry, T. 13. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

## О ПОСТРОЕНИИ КУСОЧНО-АФФИННОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Точилин Павел Александрович

Кафедра системного анализа, e-mail: tochilin@cs.msu.ru

Работа посвящена приближенному решению задачи оптимального управления нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u, \quad x = x(t) \in \Omega, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x}$  является дважды непрерывно дифференцируемой по переменной  $x \in \Omega$  функцией,  $\mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  — непрерывно дифференцируема по  $x \in \Omega$ ,  $u = u(x) \in \mathbb{R}^{n_u}$  — позиционное управление, на возможные значения которого наложены “жесткие” поточечные ограничения:  $u(x) \in \mathcal{P}$ . Множество  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$  является выпуклым компактом.

Зафиксируем некоторое компактное множество  $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$ , содержащее целевые состояния системы. Также рассмотрим функционал

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{\tau^*} \left( \tilde{\mathbf{f}}(x(\tau, t_0, x_0)|_u) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau, t_0, x_0)|_u))^T u(x(\tau, t_0, x_0)|_u) \right) d\tau + \\ + \varphi(x(\tau^*, t_0, x_0)|_u), \quad (2)$$

определённый на некоторой траектории  $x(t, t_0, x_0)|_u$ , при некотором однозначном допустимом позиционном управлении  $u(\cdot)$ . Здесь  $\tau^* \geq t_0$  — момент первого попадания траектории системы в целевое множество  $\mathcal{X}_1$ , функция  $\tilde{\mathbf{f}}(x) \in \mathbb{R}^{n_x}$  является дважды, а  $\tilde{\mathbf{g}}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  единожды непрерывно дифференцируемой по  $x \in \Omega$ .

В работе решается задача оптимального управления системой (1) на бесконечном интервале времени, с интегральным функционалом вида (2). Для этого использована техника кусочной линеаризации (“гибридизации”) исходной нелинейной системы, с последующим анализом получившейся системы с переключениями. Далее применен аппарат кусочно-аффинных функций цены и управления в совокупности с методом динамического программирования и принципом сравнения. Сформулированы и доказаны теоремы о достаточных условиях разрешимости поставленной задачи, дающие также верхние оценки минимизируемого функционала. Удалось получить простые с точки зрения вычислений алгоритмы построения оценок функции цены для указанной задачи, а также соответствующего управления в форме обратной связи. Действие разработанного алгоритма продемонстрировано на модельном примере.



Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00613-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kurzhanski A. V., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Birkhäuser, 2014. 445 p.
- [2] Точилин П. А. О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейной системы // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.
- [3] Mayantsev K. S., Tochilin P. A. The feedback control problem for switched system with uncertainties // IFAC Proceedings Volumes, 2017, V. 50, I. 1, p. 2187–2192.
- [4] Habets L. C. G. J. M., Collins P. J., van Schuppen J. H. Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices // IEEE Trans Automatic Control, 2006, V. 51, I. 6, p. 938–948.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Третьякова Руфина Максимовна<sup>1</sup>, Сетуха Алексей Викторович<sup>2</sup>,  
Бочаров Геннадий Алексеевич<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: r.tretyakova@inm.ras.ru

<sup>2</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: setuhaav@rambler.ru

<sup>3</sup> Кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: g.bocharov@inm.ras.ru

Метод граничных интегральных уравнений является одним из эффективных методов решения задач фильтрации идеальной жидкости [1,2]. В данной работе осуществлено приложение этого метода к случаю, когда учитывается вязкость жидкости.

Рассматривается стационарная трехмерная задача фильтрации вязкой жидкости в кусочно-однородной среде: область фильтрации ограничена снаружи замкнутой гладкой поверхностью, внутри области имеются включения, имеющие различные гидравлические проводимости.

Предполагается, что фильтрация жидкости в каждой из областей описывается законом Дарси-Бринкмана [3] для неизвестных полей  $v$  – скорости фильтрации жидкости и  $p$  – давления жидкости

$$v(x) = -\frac{\kappa_m}{\mu} \nabla p(x) + \kappa_m \Delta v(x), \quad x \in \Omega_m, \quad (1)$$

$\kappa_m$  – гидравлическая проводимость среды в области  $\Omega_m$ ,  $\mu$  – вязкость жидкости. Также во всех областях должно быть выполнено уравнение неразрывности  $\nabla \cdot v = 0$

На внешней границе области фильтрации ставятся граничные условия на поток жидкости и условие непротекания, обусловленное наличием вязкости. На границах разделов сред выполняются условия непрерывности скорости и давления.

Такая задача была сведена к системе граничных интегральных уравнений с применением скалярных и векторных потенциалов (см. работу авторов [4]).

Далее был построен численный метод решения задачи, основанный на дискретизации данных интегральных уравнений и применении к ним методов кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Проведено тестирование разработанного численного метода на модельных задачах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пивень В. Ф. Математические модели фильтрации жидкости. Орел : Орловский гос. ун-т : Картуш, 2015. 406 с.
- [2] Lifanov I.K., Piven V.F., Stavtsev S.L. Mathematical modelling of the three-dimensional boundary value problem of the discharge of the well system in a homogeneous layer // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2002. Т. 17, № 1. P. 99–112.
- [3] Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Flow, Turbulence and Combustion. 1949. V. 1, № 1. P. 27–34.
- [4] Сетуха А.В., Третьякова Р.М., Бочаров Г.А. Методы теории потенциала в задаче фильтрации вязкой жидкости // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1226–1241.

## О КЛАССЕ 2-ПЛАТОВИДНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Фёдоров Сергей Николаевич

Институт проблем информационной безопасности МГУ, e-mail: s.n.feodorov@yandex.ru

Предлагается рассмотреть функции с особыми ограничениями на спектр Уолша–Адамара (УА) (необходимые определения и обозначения см. в [1]).

**Определение.** Булеву функцию  $f: V_n \rightarrow \{0, 1\}$  от  $n$  переменных будем называть 2-платовидной, если модули её коэффициентов УА принимают ровно два (ненулевых) значения следующего вида:

$$|W_f(u)| = \begin{cases} 2^{r_2} - 2^{r_1} & \text{при } u \in S_1, \\ 2^{r_2} + 2^{r_1} & \text{при } u \in S_2 \end{cases}$$

для некоторых различных целых чисел  $r_1, r_2$  и множеств  $S_1 \sqcup S_2 = V_n$ .

Удаляя условие  $r_1 \neq r_2$ , мы получим, в частности, известный класс платовидных функций, обладающих спектром УА вида  $\{0, \pm 2^r\}$ . Если в дополнение

к этому положить  $S_1 = \emptyset$ , то при чётных  $n$  мы придём к понятию *бент-функций*: у них  $W_f(u) = \pm 2^{n/2}$  для всех  $u \in V_n$ . Бент-функции являются собой единственный пример максимально нелинейных функций при чётных  $n$ . В случае же нечётных  $n$  вопрос о максимально нелинейных функциях остаётся нерешённым: этот класс пока не охарактеризован. В то же время данное свойство имеет большое значение для криптографических приложений: чем больше нелинейность функции, тем, грубо говоря, надёжнее криптографические конструкции, использующие её. Обращение к 2-платовидным функциям мотивировано тем, что такие функции могут иметь нелинейность, большую, чем у известных примеров. Отметим с другой стороны, что в литературе ранее уже строились функции с *пятью* значениями в спектре УА [2].

Из известных свойств спектра УА нетрудно вывести ограничения на характеристики 2-платовидных функций:  $0 < r_1 < r_2 < n$ ,  $S_1 \neq \emptyset$ ,  $S_2 \neq \emptyset$ ,  $\min_{u \in V_n} |W_f(u)| < 2^{n/2} < \max_{u \in V_n} |W_f(u)| = A_f$ . Параметр  $A_f$  — максимум значений спектра УА — очень важен в криптографии, так как он характеризует нелинейность функции:  $nl f = 2^{n-1} - \frac{1}{2}A_f$ .

Несколько более сложные рассуждения приводят к следующим оценкам.

**Утверждение.** Пусть  $f$  — 2-платовидная функция от  $n$  переменных. Если  $n$  чётно, то  $r_2 = \frac{n}{2}$  и  $A_f < 2^{n/2}\sqrt{3}$ . Если  $n$  нечётно, то  $\frac{n-1}{2} \leq r_2 \leq \frac{n+1}{2}$ ,  $r_1 = r_2 - 1$  и  $A_f < 2^{n/2}\sqrt{5}$ .

При чётных  $n$ , несмотря на жёсткие ограничения, 2-платовидные функции заведомо существуют: изменяя в таблице значений любой бент-функции один элемент, мы получим функцию  $g$  с  $|W_g(u)| = 2^{n/2} \pm 2$  для всех  $u \in V_n$ .

Гипотеза состоит в предположении о существовании 2-платовидных функций для нечётных  $n$ . Если удастся построить такую функцию с  $r_2 = \frac{n-1}{2}$ , то её нелинейность будет выше той планки ( $2^{n-1} - 2^{\frac{n-1}{2}}$ ), которую на сегодняшний день преодолело лишь некоторое количество примеров для небольших  $n$  (см. [3]). В частности, гипотетический пример 2-платовидной функции  $f$  с  $|W_f(u)| \in \{2^{\frac{n-3}{2}}, 3 \cdot 2^{\frac{n-3}{2}}\}$ ,  $|S_1| = 2^{n-3}$ , имеет  $nl f = 2^{n-1} - \frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Булевы функции в теории кодирования и криптологии / О. А. Логачёв, А. А. Сальников, С. В. Смышляев, В. В. Яценко. М.: Ленанд, 2015. 576 с.
- [2] Mesnager S., Zhang F. On constructions of bent, semi-bent and five valued spectrum functions from old bent functions // Advances in Mathematics of Communications. 2017. Vol. 11, Iss. 2. P. 339–345.
- [3] Kavut S. Boolean functions with excellent cryptographic properties in autocorrelation and Walsh spectra : Ph. D. thesis / Kavut, Selçuk. Ankara, 2008. 78 p.

## САМОЗАХВАТ ВОЛН ПРИ ТРЕХВОЛНОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В СРЕДЕ С КОМБИНИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Федотов Михаил Валентинович, Харитонов Дмитрий Михайлович

Кафедра математической физики, e-mail: fedotov@cs.msu.ru, dmitrykharitonov@yandex.ru

С момента появления лазеров преобразование частоты постоянно привлекает внимание исследователей [1]. С ростом максимальной интенсивности импульса необходимо одновременно учитывать действие квадратичной и кубической нелинейностей [2–5]. В данном докладе рассматривается проблема взаимодействия трёх световых импульсов (с частотами  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ ) в среде с комбинированной нелинейностью. Данный процесс описывается системой трёх нелинейных уравнений Шрёдингера относительно комплексных амплитуд  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , взаимодействующих волн с учётом дисперсии групповых скоростей (ДГС).

Решение данной системы ищется в виде

$$A_1(t) = a_1(t), A_2(t) = a_2(t) \exp(il\pi), A_3(t) = a_3(t) \exp(im\pi), \quad (1)$$

где  $m$  и  $l$  — целые, а  $a_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , являются вещественными функциями. В приближение длинных импульсов, когда влияние дисперсионных эффектов пренебрежимо мало, импульсы, описываемые (1), распространяются без изменения интенсивности и без перекачки энергии между волнами, при этом фаза каждой из волн описывается линейным по пространственной координате и нелинейным по времени законом. В случае существенного влияния ДГС изменение фазы может привести к развалу импульсов. Чтобы его устранить, должно быть справедливо следующее достаточное условие:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} \Big|_{t=0.5L_t} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , — фазы взаимодействующих волн. Оно означает отсутствие линейного чирпа вблизи центров импульсов.

Теоретический анализ подтвержден результатами компьютерного моделирования. Показано, что при распространении волн в среде с комбинированной нелинейностью формы импульсов практически не изменяются: длительность импульсов остаётся постоянной при слабом изменении их максимальной интенсивности и незначительной перекачке энергии, если выполняются условия (2) на трассе распространения в нескольких дисперсионных длинах, т. е. можно говорить о явлении самозахвата трех импульсов.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант № 19-11-00113).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Interactions between light waves in a nonlinear dielectric / Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. // Physical review. 1962. V. 127. № 6. P. 1918.
- [2] Телегин Л. С., Чиркин А. С. Об обратном воздействии при удвоении частоты ультракороткого лазерного импульса // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 10. С. 2086–2088.
- [3] Komissarova M. V., Sukhorukov A. P., Trofimov V. A. Self-compression of the fundamental and second-harmonic pulses in media with quadratic and cubic nonlinearities // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. Supplement Physics of Vibrations. 1993. V. 1. N 4. P. 189–192.
- [4] Effects of cubic nonlinearity on frequency doubling of high-power laser pulses / Ditmire T., Rubenchik A. M., Eimerl D., Perry M. D. // JOSA B. 1996. V. 13. N 4. P. 649–655.
- [5] Trofimov V. A., Kharitonov D. M., Fedotov M. V. Theory of SHG in a medium with combined nonlinear response // JOSA B. 2018. V. 35. N 12. P. 3069–3087.

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КАСКАДНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Фомичёв Василий Владимирович, Высоцкий Алексей Олегович

Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: fomichev@cs.msu.ru, vysotskiial@gmail.com

**Постановка задачи.** В той или иной постановке задача построения фазовых наблюдателей для систем в условиях неопределенности рассматривалась многими авторами. Для линейных стационарных систем наиболее успешно задача решается для гипервыходных систем или для квадратных систем с минимальным относительным порядком. Если же система имеет произвольный относительный порядок, то задача существенно усложняется. Для ее решения может использоваться, например, глубокая обратная связь.

Рассмотрим более точную постановку задачи. Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B'\xi, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – неизвестный фазовый вектор,  $u \in \mathbb{R}$  – известный вход (управление),  $\xi \in \mathbb{R}$  – неизвестный вход (возмущение),  $y \in \mathbb{R}$  – измеряемый выход системы, стационарные матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $B'$  и  $C$  – известные. Требуется по известной информации об управлении  $u(t)$ , выходе  $y(t)$  и параметрах системы построить асимптотическую (при  $t \rightarrow +\infty$ ) оценку фазового вектора.

Относительно системы (1) делаются следующие предположения.

- Относительный порядок системы  $r > 1$ . Под относительным порядком понимается число  $r$ , такое что

$$CB' = 0, CAB' = 0, \dots, CA^{r-2}B' = 0, CA^{r-1}B' \neq 0,$$

т. е. рассматривается относительный порядок от неизвестного входа  $\xi(t)$  к измеряемому выходу  $y(t)$ .

- Инвариантные нули системы устойчивы (т.е.  $Re(s^*) < 0$ , где  $s^*$  — инвариантный ноль системы). Под инвариантными нулями понимаются значения  $s \in \mathbb{C}$ , для которых понижается ранг матрицы Розенброка:

$$rank R(s) = rank \left[ \begin{array}{c|c} sI - A & -B' \\ \hline C & 0 \end{array} \right] < n + 1,$$

т. е. рассматриваются инвариантные нули передаточной функции от  $\xi(t)$  к  $y(t)$ :

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B' = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \beta(s) = det R(s).$$

- Неизвестный вход (помеха) кусочно-непрерывен и равномерно ограничен, причем известна его мажоранта, т.е.  $|\xi(t)| \leq \xi_0$ .

**Полученные результаты.** Были получены следующие основные результаты [1].

- Предложен новый вид каскадного наблюдателя для системы (1).
- Было сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие асимптотической точности оценки для базового случая второго относительного порядка.
- Для общего случая доказано достаточное условие асимптотической точности оценки и предложен алгоритм построения наблюдателя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фомичев В. В., Высоцкий А. О. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференц. уравн. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.

## О СУЩЕСТВОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

Фурсов Андрей Серафимович<sup>1</sup>, Крылов Павел Александрович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: fursov@cs.msu.ru

<sup>2</sup> Кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: pavel@leftsystem.ru

Рассматривается упрощенная математическая модель термомеханической установки [1] в виде управляемой нелинейной системы

$$\begin{cases} m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = \frac{\alpha E(T(t))}{l}(\Delta - y(t)) - mg \\ \frac{\alpha}{\gamma}\dot{T}(t) + T(t) = u, \quad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0, T(0) = T_0, t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Отметим, что в термомеханической установке, описанной в работе [1], осуществляется преобразование тепловой энергии в механическую на основе эффекта памяти формы [2], что выражается в смещении или вибрации деформируемого материала с памятью формы вследствие изменения его температуры.

В рассматриваемой системе (1) используются следующие обозначения:  $y$  — выходная переменная, характеризующая величину механической деформации материала с памятью формы [2], при этом предполагается, что  $0 < y_0 < \Delta$ ;  $T$  — температура деформируемого материала, причем  $0 \leq T_1^* \leq T_0 \leq T_2^*$ ;  $m, \beta, k, \alpha, l, \Delta, \gamma$  — положительные величины, характеризующие параметры термомеханической установки;  $E$  — модуль Юнга деформируемого материала (нелинейная характеристика с гистерезисом и насыщением);  $u$  — управление в форме обратной связи по переменной  $y$  ( $u = u(y)$ ).

Модуль Юнга  $E$  материала с памятью формы, используемого в термомеханической установке, зависит от температуры  $T$  и описывается [2] нелинейным звеном с гистерезисом и насыщением. Для математического описания этого звена можно использовать подход, предложенный в [3]. Для этого зададим две кусочно-линейные характеристики с насыщением  $E_{12}(T)$  и  $E_{21}(T)$ , где

$$E_{12}(T) = \begin{cases} E_1, & \text{если } T \leq A_1; \\ \frac{T-A_1}{A_2-A_1}(E_2 - E_1) + E_1, & \text{если } T \in (A_1, A_2]; \\ E_2, & \text{если } T > A_2, \end{cases}$$

$$E_{21}(T) = \begin{cases} E_1, & \text{если } T \leq M_1; \\ \frac{T-M_1}{M_2-M_1}(E_2 - E_1) + E_1, & \text{если } T \in (M_1, M_2]; \\ E_2, & \text{если } T > M_2. \end{cases}$$

Здесь  $A_1, A_2, M_1, M_2, E_1, E_2$  — положительные константы, определяемые физическими свойствами материала с памятью формы и связанные следующими

неравенствами

$$0 < A_1 < A_2, 0 < M_1 < M_2, M_1 < A_1, M_2 < A_2, 0 < E_1 < E_2.$$

Тогда, в соответствии с [3], отображение  $E(T)$  можно определить как детерминированный статический преобразователь (гистерон), преобразующий непрерывный вход в непрерывный выход, с оператором  $G$

$$E(T(t)) = G(t_0, E(T(t_0)))T(t),$$

который для монотонных входов  $T(t)$  определяется равенством

$$G(t_0, E(T(t_0)))T(t) = \begin{cases} \max\{E(T(t_0)), E_{12}(T(t))\}, & \text{если } T(t) \text{ не убывает;} \\ \min\{E(T(t_0)), E_{21}(T(t))\}, & \text{если } T(t) \text{ не возрастает.} \end{cases}$$

Здесь  $t_0$  — начальный момент времени,  $E(T(t_0)) \in \Gamma$  — начальное состояние гистерона,  $\Gamma = [E_1; E_2]$  — множество возможных состояний гистерона. Для произвольных непрерывных входов  $T(t)$  выходное значение  $E(T(t))$  можно определить при помощи специальной предельной конструкции, описанной в [3].

В самой общей формулировке, задача построения работоспособной термомеханической установки, в терминах модели (1), заключается в выборе таких параметров  $m, \beta, k, \alpha, l, \Delta, \gamma$  и алгоритма управления  $u$  изменением температуры деформируемого материала, чтобы обеспечивалось колебательное движение переменной  $y$ , изменяющейся в некотором ограниченном промежутке  $(\varkappa; \Delta)$  ( $\varkappa \leq 0$ ). При этом еще могут накладываться дополнительные условия, определяющие качество построенной установки (на амплитуду и частоту колебательного режима, на параметры, отвечающие за размеры установки и т.д.).

Управление (в силу конструктивных особенностей установки) будем выбирать в форме двухпозиционного реле с гистерезисом [3], т.е.

$$u = u_r(y(t)) = R(t_0, u(t_0), y_1, y_2)y(t), \quad (2)$$

где  $R$  — оператор, определяющий работу реле;  $y_1, y_2$  — пороговые значения реле, удовлетворяющие условию  $0 < y_1 < y_2 < \Delta$ ;  $t_0$  — начальный момент времени,  $u(t_0) \in \Omega$  — начальное условие для реле;  $\Omega = \{\underline{u}, \bar{u}\}$  — множество возможных состояний реле, при этом  $\underline{u} < \bar{u}$ . Работу реле можно описать



следующим образом

$$R(t_0, u(t_0), y_1, y_2)y(t) = \begin{cases} \bar{u}, & \text{если } y(t) \leq y_1, \\ \underline{u}, & \text{если } y(t) \geq y_2, \\ u(t_0), & \text{если } y(\tau) \in (y_1, y_2) \forall \tau \in [t_0, t]; \\ \bar{u}, & \text{если } y(t) \in (y_1, y_2) \text{ и } \exists s \in [t_0; t) : \\ & y(s) = y_1 \text{ и } y(\tau) \in (y_1, y_2) \forall \tau \in (s, t]; \\ \underline{u}, & \text{если } y(t) \in (y_1, y_2) \text{ и } \exists s \in [t_0; t) : \\ & y(s) = y_2 \text{ и } y(\tau) \in (y_1, y_2) \forall \tau \in (s, t]. \end{cases} \quad (3)$$

В настоящей работе получены конструктивные условия на коэффициенты и начальные значения переменных состояния системы (1) и на параметры регулятора (2), (3), обеспечивающие возникновение колебательных движений в соответствующей замкнутой системе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-57-18006 Болг а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Todorov T., Nikolov N., Todorov G., Ralev Y. Modelling and investigation of a hybrid thermal energy harvester // MATEC Web of Conferences, Vol. 148, p. 12002, 2018.
- [2] Pai A. A phenomenological model of shape memory alloys including time-varying stress // Master's thesis of Applied Science Waterloo, Ontario, Canada. 2007.
- [3] Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом.—М.: Наука, 1983.

## **ОЦЕНКИ ВКЛАДА ОТДЕЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ В ОБЩИЙ РИСК ПОРТФЕЛЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ТЯЖЕЛЫМ ХВОСТОМ**

**Хохлов Юрий Степанович, Грачева Анастасия Сергеевна**

Кафедра математической статистики, e-mail: yskhokhlov@yandex.ru, grachovacmc@gmail.com

В нашем докладе рассматривается задача об оценке вклада в общий риск отдельной компоненты портфеля ценных бумаг в случае, когда совместное распределение всех компонент имеет многомерное распределение с тяжелым хвостом. Более точно мы исследуем ситуацию, когда хвост такого распределения правильно меняется, а компоненты вектора зависимы. Задачи такого типа сейчас очень популярны в финансовой математике.

Начнем с описания класса многомерных распределений, с которым мы будем работать. Случайный вектор  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$  состоит из рисков ценных

бумаг, входящих в рассматриваемый портфель. Обозначим  $S = X_1 + \dots + X_d$ . Наша основная задача состоит в оценке величины  $E(X_k | S > x)$  при больших положительных значениях  $x$ . Ранее эта задача была решена в работе Панджера для случая многомерного гауссовского распределения. Нам удалось обобщить его результат на случай многомерного эллиптически контурированного устойчивого распределения. В нашем докладе рассматривается ситуация, когда случайный вектор  $\vec{X}$  имеет многомерное распределение Линника, характеристическая функция которого может быть записана в виде:  $\varphi_{\vec{X}}(t) = 1/(1 + (\Sigma t, t)^{\alpha/2})$ , где  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\Sigma$  – положительно определенная матрица. Можно показать, что такой случайный вектор допускает представление в следующем виде:  $\vec{X} = \sqrt{Z} \cdot \vec{W}$ , где  $Z$  имеет распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\alpha/2$ ,  $\vec{W}$  имеет многомерное нормальное распределение со средним ноль и матрицей ковариаций  $\Sigma$ , причем  $Z$  и  $\vec{W}$  независимы между собой. Известно, что хвост распределения с.в.  $Z$  правильно меняется с показателем  $\alpha/2$ . Основным результатом нашего доклада является следующая

**Теорема 1.** *В рамках описанной выше модели для  $\alpha > 1$*

$$E(X_k | S > x) \sim \frac{\sigma_{S,k}}{\sigma_S^2} \cdot \frac{\alpha x}{\alpha - 1}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где  $\sigma_{S,k} = \sum_j \sigma_{jk}$ ,  $\sigma_S^2 = \sum_{i,j} \sigma_{ij}$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-11-00155).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Panjer, H. H. Measurement of Risk, Solvency Requirements, and Allocation of Capital within Financial Conglomerates. Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo Research Report 01-15. (2002)
- [2] Landsman Z. and Valdes E. A. Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions. University of Haifa. Technical Report N 02-04, October 2002
- [3] Furman E. and Landsman Z. Economic Capital Allocation for Non-negative Portfolios of Dependent Risks. ASTIN Bulletin 38 (2), P. 601–619.
- [4] Asimit A. V., Furman E., Tang Q. and Vernic R. Asymptotics for risk capital allocations based on Conditional Tail Expectation. Insurance: Mathematics and Economics 49 (2011), P. 310–324.

## АТАКА НА ПОСТКВАНТОВУЮ КРИПТОСИСТЕМУ МАК—ЭЛИСА—СИДЕЛЬНИКОВА, ПОСТРОЕННУЮ НА КОМБИНИРОВАНИИ КОДОВ РИДА—МАЛЛЕРА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОДАМИ

**Чижов Иван Владимирович, Попова Елизавета Александровна**

Кафедра информационной безопасности, e-mail: ichizhov@cs.msu.ru, lady-lizochka@yandex.ru

Изучение постквантовых криптосистем с открытым ключом является одним из актуальных вопросов современной криптографии. Примером такой криптосистемы является криптосистема Мак—Элиса.

Основываясь на статье [1], была рассмотрена модификация этой криптосистемы, открытый и секретный ключи которой имеют вид:  $K_{pub} = S(RM|Rand)P$ ,  $K_{sec} = (M, P)$ , где  $RM = RM(m, r)$  — порождающая матрица кода Рида—Маллера порядка  $r$  и размерности  $m$ ,  $Rand$  — порождающая матрица случайного  $[n, k]$ -кода,  $S$  — невырожденная, а  $P$  — перестановочная матрицы.

Для исследования была взята модель, в которой противнику кроме открытого ключа известна порождающая матрица случайного кода  $Rand$ , и целью является восстановление перестановочной матрицы  $P$ . С использованием сигнатурного метода [2] была разработана атака, восстанавливающая  $P$  в описанной выше модели.

Сложность предложенной атаки  $\leq n \cdot 2^{S_1} + \binom{n}{2} \cdot 2^{S_2} + L!$ , где  $S_1, S_2$  — размерности оболочек выколотых и дважды выколотых кодов [2] соответственно,  $L$  — количество неразличимых столбцов. На основе [3] было доказано, что с наибольшей вероятностью  $S_1 = 1$  и  $S_2 = 1$ .

Результаты применения предложенной атаки к ключам разного размера представлены в таблице ниже. Для значений  $22 \times 128$  экспериментальные данные получены на 1000 матриц, для больших размеров - на 10 матрицах. По результатам применения атаки подсчитана стойкость рассмотренного варианта криптосистемы.

Размер $K_{pub}$ ( $k \times n$ )	Размер $K_{pub}$ в КБайт	$S_1$	$S_2$	$L$	Стойкость криптосистемы	Сложность атаки
(22 × 128)	5.6	1	1	7	$2^{81}$	$2^{18}$
(93 × 512)	95.2	1	1	10	$2^{350}$	$2^{25}$
(130 × 1024)	266.2	1	1	25	$2^{560}$	$2^{36}$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kabatiansky G., Tavernier C. A new code-based cryptosystem via pseudorepetition of codes // In Proceedings of Sixteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Svetlogorsk, Russia, 2018, P. 189-191
- [2] Sendrier N. The Supporting Splitting Algorithm // IEEE Transactions on Information Theory, 2000, V. 46, P. 1193-1203
- [3] Sendrier N. On the Dimension of the Hull // SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1997, P. 282-293.

## **СХЕМА РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОНФИГУРАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СТЕНДАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ УРОВНЯМИ ЗАЩИТЫ**

**Чистолинов Максим Владимирович**

Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: mike@cs.msu.ru

Системы конфигурационного управления программными проектами (англ. software configuration management, SCM) и средства контроля версий исходных текстов находят всё большее применение в отечественной индустрии разработки ПО, в том числе для критически важных областей. В промышленности можно встретить использование таких инструментов, как ClearCase / ClearQuest, Redmine, Bazaar, Mercurial, Subversion, Git и различных надстроек над ними. Задача усложняется, если в разработке участвуют несколько географически удалённых организаций с ненадёжным каналом связи между ними в дополнение с требованиями по защите информации от несанкционированного доступа для отдельных артефактов разработки.

Сотрудники кафедры АСВК факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова много лет принимают участие в развитии технологии создания стендов и ПО для комплексирования, испытаний и полунатурного моделирования подсистем авиационного бортового оборудования [1]. В рамках этих работ автором предложена архитектура распределенного конфигурационного управления для разработки функциональных тестов бортовых систем при наличии защищаемого объекта информатизации с различными уровнями защиты. Отдельное внимание уделено дифференциации по правам доступа и компетенциям различных групп разработчиков. Построение системы предполагает использование ПО с открытым исходным кодом. В качестве основного варианта бэкенда рассматривается использование системы Git.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стенд полунатурного моделирования для разработки встроенных вычислительных систем реального времени / В.В. Балашов, А.Г. Бахмуров,

Д. Ю. Волканов, Р. Л. Смелянский, М. В. Чистолинов, Н. В. Ющенко // В сборнике Труды Четвертой всероссийской научно-практической конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2009). 2009. Санкт-Петербург. ОАО «ЦТСС». С. 215–220.

## **МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ РЕКОНФИГУРАЦИИ ПКС ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ КОНКУРИРУЮЩИХ ЗАПРОСОВ ПОСТРОЕНИЯ МАРШРУТОВ**

**Шапошников Владимир Александрович<sup>1</sup>, Писковский Виктор Олегович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: volodimirich@arccn.ru

<sup>2</sup> Кафедра автоматизации систем вычислительных комплексов, e-mail: vpiskovski@lvk.cs.msu.su

В данный момент технология Программно-Конфигурируемых сетей активно развивается, и проблема безопасности таких сетей стоит особенно остро [1]. При изменении правил маршрутизации на сетевых устройствах могут возникать конфликты, вызванные конкурирующими запросами маршрутизации потоков через объекты конфигурации. В отличие от «ручной» конфигурации традиционных сетей, в ПКС контроллер на основе пользовательских запросов в соответствии с принятыми политиками безопасности автоматически вносит изменения в конфигурацию сети. Ответственность за корректную работу сети возлагается на соответствующие приложения контроллера и реализованные в них методы и алгоритмы. Таким образом, наряду с культурой производства и внедрения приложений, управляющих сетью, большое значение приобретает теоретическое обоснование методов и алгоритмов, по которым работают названные приложения.

В работе проанализированы существующие методы решения проблемы реконфигурации сети, а также рассмотрены теория временной упорядоченности правил и улучшенная концепция временных меток, математический аппарат которых хорошо зарекомендовал себя в работе реляционных баз данных [2]. Для проведения численного эксперимента и моделирования выбран эмулятор компьютерной сети mininet [3].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, номер соглашения 05.613.21.0088, уникальный идентификатор RFMEFI61318X0088.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Грушо А. А., Терёхина И. Ю. Анализ непротиворечивости реконфигурации программно-конфигурируемой сети // Системы и средства информ. 2017. Т. 27. № 3. С. 12–22.
- [2] Eswaran P., Gray J., Lorie R., Traiger I. The notions of consistency and predicate locks in a database system // Commun. ACM. 1976. Vol. 19. N 11. P. 624–633.

[3] URL: <https://ivirt-it.ru/mininet/>

## ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Шевцова Ирина Геннадьевна, Целищев Михаил Андреевич

Кафедра математической статистики, e-mail: ishevtsova@cs.msu.ru, m.tselishchev@cs.msu.ru

С использованием *обобщённого равновесного преобразования*

$$F^e(x) := \frac{1}{a} \left( x^+ - \int_{-\infty}^x F(y) dy \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

произвольной ф.р.  $F$  с первым моментом  $a \neq 0$ , в работе выводятся оценки точности аппроксимации показательным распределением геометрических случайных сумм независимых квадратично-интегрируемых случайных величин с одинаковыми ненулевыми средними. Если с.в.  $X$  имеет ф.р.  $F$ , то под  $\mathfrak{L}(X)$  понимается распределение с.в.  $X$ , а под  $\mathfrak{L}^e(X)$  — борелевская мера с ф.р.  $F^e$ .

Для борелевских мер  $\mu$  и  $\nu$  с ф.р.  $F_\mu$  и  $F_\nu$ , конечными первыми моментами и  $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R})$  используется обозначение

$$\zeta_1(\mu, \nu) := \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} h d\mu - \int_{\mathbb{R}} h d\nu \right| : h \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}) \right\} = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(x) - F_\nu(x)| dx,$$

для метрики Канторовича между  $\mu$  и  $\nu$ , которая совпадает с  $\zeta$ -метрикой Золотарёва первого порядка в случае, когда  $\mu$  и  $\nu$  являются вероятностными мерами.

Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — последовательность квадратично-интегрируемых с.в. с одинаковыми средними  $\mathbf{E}X_n = a \neq 0$ ,  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$  для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_0 := 0$ . Пусть  $\mathcal{E} \sim \text{Exp}(1)$ ,  $p \in (0, 1)$ ,  $N \sim \text{Geom}(p)$  независима от  $\{X_n\}$ ,  $N_0 := N - 1$ , и  $W := \frac{S_N}{\mathbf{E}S_N} = \frac{pS_N}{a}$ ,  $W_0 := \frac{S_{N_0}}{\mathbf{E}S_{N_0}} = \frac{pS_{N_0}}{a(1-p)}$  суть нормированные геометрические суммы. Используя технику, аналогичную [3], а именно, введённое обобщение равновесного распределения и метод Стейна, мы доказываем верхние оценки для  $\zeta_1(W, \mathcal{E}) := \zeta_1(\mathfrak{L}(W), \text{Exp}(1))$  и  $\zeta_1(W_0, \mathcal{E}) := \zeta_1(\mathfrak{L}(W_0), \text{Exp}(1))$ , которые обобщают результаты [3] на случай знакопеременных  $\{X_n\}$ .

**Теорема 1.** *В сделанных выше предположениях*

$$\zeta_1(W, \mathcal{E}) \leq \frac{2p}{|a|} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(N=n) \zeta_1(\mathfrak{L}(X_n), \mathfrak{L}^e(X_n)) \leq p \left( \frac{\mathbf{E}X_N^2}{a^2} - 2\mathbf{P}(X_N \leq 0) \right),$$

$$\zeta_1(W_0, \mathcal{E}) \leq \frac{p}{1-p} \cdot \frac{\mathbf{E}X_N^2}{a^2},$$

причем равенство во втором неравенстве для оценки  $\zeta_1(W, \mathcal{E})$  достигается, например, на одинаково распределённых двухточечных  $\{X_n\}$ .

В завершение мы рассматриваем асимптотически наилучшую константу для метрики Канторовича в теореме Реньи для геометрических случайных сумм независимых одинаково распределённых с.в.:

$$C_{AB} := \sup_{\{X_n\} \sim \text{i.i.d.}: \mathbf{E}X_1 \neq 0, \mathbf{E}X_1^2 < \infty} \lim_{p \rightarrow +0} \zeta_1(W, \mathcal{E}) \frac{(\mathbf{E}X_1)^2}{p \mathbf{E}X_1^2},$$

и доказываем, что  $C_{AB} \geq 1/4$ . Эта же нижняя оценка остается справедливой и для аналогичным образом определённой асимптотически наилучшей константы для  $W_0$ . Таким образом, константы  $C$  и  $C_0$  в неравенствах вида

$$\zeta_1(W, \mathcal{E}) \leq Cp \mathbf{E}X_N^2/a^2, \quad \zeta_1(W_0, \mathcal{E}) \leq C_0p \mathbf{E}X_N^2/a^2,$$

для которых теорема 1 влечет верхние оценки  $C, C_0 \leq 1$ , не могут быть меньше  $1/4$ , даже если ограничиться случаем малых значений  $p$  и фиксированного (не зависящего от  $p$ ) распределения слагаемых  $\{X_n\}$ , исключающего схему серий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 20-31-70054, 19-07-01220, и гранта Президента МД–189.2019.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Peköz E.A., Röllin A. New rates for exponential approximation and the theorems of Rényi and Yaglom // Ann. Probab. 2011. Vol. 39. P. 587–608.

## Пороговая обработка вейвлет-коэффициентов сигнала в модели со случайной сеткой

Шестаков Олег Владимирович

Кафедра математической статистики, e-mail: oshestakov@cs.msu.ru

Методы пороговой обработки широко используются для подавления шума и компрессии данных в задачах анализа и обработки сигналов. При этом сначала осуществляется вейвлет-разложение функции сигнала, приводящее к ее экономному (разреженному) представлению, а затем обнуляется часть коэффициентов разложения, которые считаются шумом. Наиболее распространены методы жесткой и мягкой пороговой обработки. Для модели отсчетов сигнала, заданных на равномерной сетке и содержащих белый гауссовский шум, эти методы хорошо изучены [1]. Также изучены статистические свойства оценки среднеквадратичного риска. Показано, что при определенных условиях она оказывается сильно состоятельной и асимптотически нормальной [2].

В некоторых экспериментах нет возможности регистрировать отсчеты сигнала через равные промежутки времени, а иногда природа сигнала такова, что регистрация его отсчетов производится в случайные моменты. Например, моменты регистрации отсчетов могут образовывать пуассоновский процесс. Такие модели возникают в астрономии при анализе излучения звезд. В работе

[3] показано, что если моменты регистрации отсчетов образуют вариационный ряд, построенный по выборке из равномерного распределения на отрезке регистрации сигнала, то использование обычной пороговой обработки вейвлет-коэффициентов оказывается адекватным, и верхняя оценка среднеквадратичного риска остается такой же, как в модели с фиксированной равномерной сеткой. В докладе проводится анализ оценки среднеквадратичного риска пороговой обработки и показывается, что статистические свойства этой оценки также не меняются при переходе от фиксированной равномерной сетки отсчетов к случайной [4].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00155).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Donoho D., Johnstone I. M. Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage // *Biometrika*. 1994. Vol. 81. N 3. P. 425–455.
- [2] Шестаков О. В. Вероятностно-статистические методы анализа и обработки сигналов на основе вейвлет-алгоритмов. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016. 200 с.
- [3] Cai T., Brown L. Wavelet Estimation for Samples with Random Uniform Design // *Stat. Prob. Lett.* 1999. Vol. 42. P. 313–321.
- [4] Шестаков О. В. Свойства вейвлет-оценок сигналов, регистрируемых в случайные моменты времени // *Информатика и ее применения*. 2019. Т. 13. № 2. С. 30–35.

## **ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВНЕШНЕГО ОБТЕКАНИЯ**

### **ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА**

**Широков Иван Анатольевич**

Кафедра вычислительных методов, e-mail: [ivanshirokov@inbox.ru](mailto:ivanshirokov@inbox.ru)

Качество численного моделирования обтекания реальных летательных аппаратов, помимо характеристик разностного алгоритма, в большой мере определяется качеством используемой пространственной сетки. Таким образом, задача построения «хороших» пространственных сеток приобретает первостепенное значение. В данной работе предлагается алгоритм построения расчетной сетки на поверхности модели в форме треугольного крыла. Геометрия модели описана в [1, 2]. Модель имеет форму пластины в форме равнобедренного треугольника (рис. 1).

Общая идея алгоритма основана на покрытии поверхности модели многоугольниками (в большинстве четырехугольниками), по форме близких к



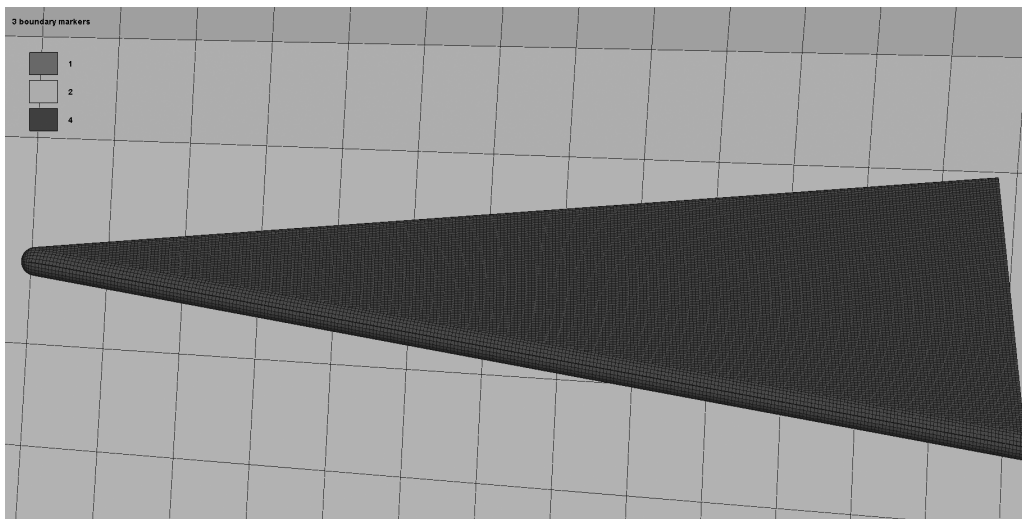


Рис. 1: Общий вид модели.

квадратам. Многоугольники, которые находятся близко друг другу, имеют приблизительно равный размер.

Разделим поверхность модели на несколько областей: носовое закругление, верхняя и нижняя поверхности, боковые закругления и хвостовая поверхность. Боковые закругления составим из полуэллипсов на равном расстоянии друг от друга. Эти полуэллипсы должны образовывать нужный радиус закругления и плавно сопрягаться с полусферической носовой частью и хвостовой поверхностью. На каждом полуэллипсе равномерно располагаются точки сетки.

После построения поверхностной сетки расчетная сетка в пространстве вокруг модели строится с помощью библиотеки TetGen. Расчёты проводились на основе квазигазодинамического алгоритма [3, 4].

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 19-11-00169).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров С. В., Ваганов А. В., Шалаев В. И. Физические механизмы образования продольных вихрей, появления зон высоких тепловых потоков и раннего перехода в гиперзвуковом течении около треугольного крыла с затупленными передними кромками // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 45. С. 9–31.
- [2] Сильвестров П. В., Крюков И. А., Обносов Б. В. Численное моделирование гиперзвукового обтекания треугольного крыла // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2018 Т. 19 (1). URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-1/articles/733/>
- [3] Елизарова Т. Г., Широков И. А. Коэффициенты искусственной диссипации в регуляризованных уравнениях сверхзвуковой аэродинамики // Доклады АН. 2018. Т. 483. № 3. С. 260–264.

- [4] Елизарова Т. Г., Широков И. А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М. : МАКС Пресс, 2017. 136 с.

## **АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ ЕМКОСТНОГО ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ГАЗОВОГО РАЗРЯДА**

**Шишкин Алексей Геннадиевич**

Кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: shishkin@cs.msu.ru

Для травления полупроводниковых структур в микроэлектронике, а также для обработки материалов различного рода широко применяются плазменные установки на основе емкостного ВЧ газового разряда. Однако типичные устройства такого рода обладают большим недостатком, заключающимся в невозможности одновременного контроля за потоком частиц и их энергией. Для функционального разделения этих процессов в последнее время стали использовать «комбинированные разряды», возбужденные двумя источниками переменного напряжения с разной частотой или одним источником переменного напряжения и одновременно одним источником постоянного [1–4]. Добавление источника постоянного напряжения увеличивает разность потенциалов в слое, а также среднюю энергию вторичных электронов, что ведет к их более высокой ионизационной способности. При достаточно высоком давлении это становится доминирующим процессом и увеличивает поток ионов, попадающих на электрод, а, следовательно, и эффективность разряда.

Для численного исследования процессов, происходящих в комбинированном ВЧ разряде использована двумерная математическая модель, основанная на совместном решении уравнений непрерывности и передачи импульса для положительно и отрицательно заряженных ионов и электронов, а также уравнения электронного баланса энергии и уравнения Пуассона для потенциала электрического поля. Электронные кинетические коэффициенты, которые являются функцией только средней энергии электронов, получаются из локальной функции распределения электронов, найденной с помощью стационарного решения уравнения Больцмана в двучленном приближении.

На основе разработанной математической модели был выполнен сравнительный анализ влияния источников постоянного и ВЧ напряжения на плотность ионов в комбинированном радиочастотном разряде. При помощи сравнения полученных результатов для профилей плотностей электронов и ионов, а также ширины приэлектродных слоев показано, что варьирование параметров одного из источников позволяет управлять такими плазменными параметрами, как плотность и энергия ионов, попадающих на электроды.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований позволяют сделать вывод о том, что использование дополнительного источника постоянно-

го напряжения при соответствующим образом выбранных значениях давления и входной мощности позволяет получить требуемые характеристики обрабатываемых изделий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hybrid simulation of a dc-enhanced radio-frequency capacitive discharge in hydrogen / P. Diomede, S. Longo, D. J. Economu, M. Capitelli // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2012. Vol. 45. P. 17520–17540.
- [2] Electron information in single and dual-frequency capacitive discharges at atmospheric pressure / S. Park, W. Choe, S. Y. Moon, J. J. Shi // *Scientific Reports*. 2018. Vol. 8. P. 7516–7525.
- [3] Лисовский В. А., Харченко Н. Д. Режимы горения продольного комбинированного разряда в азоте низкого давления // *Вестник Харьковского университета*. 2007. № 763. С. 63–68.
- [4] Kawamura E., Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. Secondary electrons in rf and dc/rf capacitive discharges // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2008. Vol. 17. P. 045002.

## **КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ А-С, ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДЯЩИХ СВОЙСТВ А-С.**

**Шумкин Георгий Николаевич**

Кафедра автоматизации научных исследований, докторант, e-mail: georgiy-sh@yandex.ru

Аморфный углерод представляет собой перспективный материал для памяти на фазовых переходах [1]. Для понимания свойств переключения важно объяснить температурную зависимость коэффициента теплопроводности, исследовать зависимость коэффициента теплопроводности от молекулярной структуры. Частично известна экспериментальная зависимость для коэффициента теплопроводности [2,3], но не в полном температурном диапазоне 600–2200 К, как сделано в этой работе, кроме того, неясна взаимосвязь молекулярной структуры аморфного углерода и его коэффициента теплопроводности.

**Квантовомеханический расчет.** В работе представлены результаты квантовомеханических расчетов молекулярной динамики для вычисления коэффициента теплопроводности в диапазоне 600–2200 К согласно методике из [4]. Проведено исследование влияния ангармонических эффектов на теплопроводящие свойства аморфного углерода, а также выполнено сравнение с экспериментальными данными [2,3].

**Построение эмпирического потенциала.** В работе обсуждается вопрос построения эмпирического потенциала для корректного описания теплопроводящих свойств аморфного углерода. Рассматривается возможность построения эмпирического потенциала для аморфного углерода на основе гармонического и стохастического потенциалов.

Автор выражает благодарность профессору А.М. Попову за ценные советы. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-31-00253-мол-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sebastian A., Eleftheriou E., et. al. Resistance switching at the nanometre scale in amorphous carbon // *New Journal of Physics*. 2011. Vol. 13. P. 425–455.
- [2] Balandin A. A., Thermal properties of graphene and nanostructured carbon materials // *Nature Mater*. 2011. Vol. 10. P. 569–581.
- [3] Gurlo A., Ionescu E., et. al., The thermal conductivity of polymer-derived amorphous Si–O–C compounds and nano-composites // 2016. *J. Am. Ceram. Soc.* Vol. 99. Iss. 1. P. 281–285.
- [4] Carbogno C., Ramprasad R., Scheffler M., Ab initio Green-Kubo approach for the thermal conductivity of solids // *Phys. Rev. Lett.* 2017. Vol. 18.

# Авторский указатель

- Beuter A., 41  
Doicu A., 22  
Efremenko D. S., 22  
Elistratov S. A., 20  
Eremin Yu. A., 15  
Gavrilov S.V., 16  
Golubtsov P. V., 17  
Grachev D. A., 20  
Lopushenko I. V., 19  
Mikhailov E.A., 20  
Nikitin S. Y., 21  
Tsybrov E. G., 21  
Ustinov V. D., 21  
Vasilyeva A. A., 22  
Yurkin M. A., 23, 24  
Аввакумов С. Н., 25  
Аксенова Е. Л., 27  
Анашин В. С., 28  
Андреев Н. А., 138  
Андрианов П. С., 84  
Антипина Е. А., 31  
Антоненко В. А., 93  
Афанасьев Н. А., 52  
Баев А. В., 30  
Балашов В. В., 31  
Белеванцев А. А., 59  
Белолипецкий А. А., 32  
Белянкина Т. В., 33  
Богомолов С. В., 34  
Большакова Е. И., 36  
Бордаченкова Е. А., 37  
Борисенко О. Д., 27  
Борисов А. В., 38  
Бородин А. Е., 59  
Бочаров Г. А., 147  
Братусь А. С., 40, 99  
Бубнов А. С., 66, 67  
Будзинский С. С., 41  
Васин А. А., 42, 43  
Викторова Н. Б., 94  
Владимирова Ю. С., 45  
Волканов Д. Ю., 46  
Вольперт В. А., 41  
Воронцов М. О., 47  
Вылиток А. А., 48  
Высоцкий А. О., 151  
Галков А. В., 49  
Генералова Т. В., 48  
Герасимов С. В., 140  
Гетьман А. И., 51  
Глоница А. Б., 58  
Голембиовский Д. Ю., 70  
Головизнин В. М., 52–54  
Головина С. Г., 55  
Гомзин А. Г., 56  
Гонопольский М. Г., 58  
Горбачев Д. Ю., 53  
Горемыкин А. В., 59  
Горохов О. Е., 61  
Горшенин А. К., 62

- Горьков В. П., 63  
Грачева А. С., 155  
Григоренко Н. Л., 63, 64  
Гринько П. С., 68  
Груздев А. П., 65  
Гуляев А. В., 66  
Гуляев Д. А., 67
- Давидсон М. Р., 68  
Данилишин А. Р., 70  
Денисов В. Н., 71  
Дробышевский М. Д., 119  
Дряженков А. А., 72
- Егоренков В. А., 73  
Еленин Г. Г., 75  
Еленина Т. Г., 75  
Ермолаев П. А., 75  
Ершова Т. Я., 77
- Жуков К. А., 67  
Жуковская Л. В., 78  
Жуковский В. И., 78  
Журавский М. И., 79
- Загидуллин Р. Р., 132  
Закляков Р. Д., 80  
Захаров Е. В., 55
- Игнатъев В. Н., 81  
Иконникова М. К., 51
- Казачук М. А., 79, 82  
Капустин Н. Ю., 83  
Карпов М. Е., 84  
Кастильо М. Т., 117  
Киселёв Ю. Н., 25  
Клименкова А. Д., 64  
Комаров Ю. А., 85  
Коньков Ю. А., 117  
Коровина М. В., 86  
Королев В. Ю., 62, 121  
Корухова Л. С., 27  
Корухова Ю. С., 87
- Корчагин А. Ю., 121  
Корябкин Д. А., 81  
Костенко В. А., 134  
Краев А. В., 88  
Крицков Л. В., 90  
Крылов А. С., 120  
Крылов П. А., 153  
Кувшинников А. Е., 34  
Кудрявцев А. А., 47, 92  
Кудрявцев К. Н., 78  
Кукушкин Д. И., 93  
Кулагин А. В., 94  
Курдюкова А. А., 113  
Курдюкова С. А., 46  
Куржанский А. Б., 85
- Лихтарова А. Д., 37  
Логинова М. М., 73  
Лукьянова Л. Н., 98
- Майоров Павел А., 54  
Майоров Петр А., 54  
Макаров С. С., 139  
Манушин Д. В., 139  
Маркин Д. В., 99  
Мартынов С. И., 101  
Матвеев С. А., 132  
Машечкин И. В., 61, 79, 80, 82  
Машечкин И. И., 49  
Мельников Н. Б., 65, 100  
Мещеряков А. В., 140  
Мокин А. Ю., 124  
Морозов В. В., 101
- Намиот Д. Е., 102  
Насонов А. В., 120  
Недоливко Ю. Н., 47  
Некрасова М. Г., 105  
Ненашев А. С., 129  
Никольский И. М., 103  
Никольский М. С., 104  
Новикова Н. М., 105

- Огнева М. С., 42  
Ожигов Ю. И., 94, 106  
Орлов М. В., 25  
Орлов С. М., 25
- Павельева Е. А., 109  
Павлов И. В., 34  
Панфёров А. А., 110  
Папазьян Е. Ю., 139  
Парадеженко Г. В., 100  
Пашков В. Н., 112, 113  
Петрова Л. И., 115  
Петровский М. И., 61, 79, 82  
Писковский В. О., 128, 159  
Полякова И. Н., 75  
Попов А. М., 116  
Попов И. С., 49  
Попова Е. А., 157  
Попова Н. Н., 117  
Портной А. М., 119  
Поспелова И. И., 105  
Потапов М. М., 72  
Проценко М. А., 109  
Пташник Д. И., 87  
Пучкина И. А., 102  
Пчелинцев Я. А., 120
- Раевский Е. Н., 66, 67  
Резер Б. И., 100  
Роговский А. И., 88  
Руденко Д. А., 121  
Рыкованов С. Г., 132
- Саблин М. Н., 122  
Савенкова Н. П., 124  
Савчук А. М., 125  
Садовничая И. В., 125  
Самсонов С. П., 126  
Сапин А. С., 36  
Селезнева С. Н., 127  
Семенихин Д. А., 128  
Семенов К. О., 32  
Сетуха А. В., 129, 147
- Симаков С. С., 130  
Синякова М. А., 131  
Смирнов А. П., 132  
Смирнов А. С., 134  
Смирнов И. Н., 135  
Смирнов С. Н., 138  
Соловьев М. А., 139  
Сорока А. Г., 140  
Степанищева В. С., 129  
Степанов Е. П., 131, 141  
Строев В. И., 143
- Терновский В. В., 144  
Тимофеев А. Е., 130  
Тимохин И. В., 145  
Тихомиров В. В., 40  
Точилин П. А., 146  
Третьякова Р. М., 147  
Турдаков Д. Ю., 119, 143  
Тыртышников Е. Е., 145  
Тюляева В. В., 82
- Удовиченко Н. С., 124
- Федотов М. В., 150  
Фёдоров С. Н., 148  
Фомичёв В. В., 151  
Фурсов А. С., 153
- Хайлов Е. Н., 64  
Хамитов К. Г., 117  
Харитонов Д. М., 150  
Хорошилов А. В., 84  
Хохлов Ю. С., 155
- Цветков Е. А., 92  
Целищев М. А., 160  
Цыбров Е. Г., 55  
Цыганов Н. И., 43
- Чижов И. В., 157  
Чистолинов М. В., 158
- Шагиров Н. Э., 116

Шапошников В. А., 159

Шевцова И. Г., 160

Шестаков О. В., 161

Шимчик Н. В., 81

Широков И. А., 162

Шишкин А. Г., 164

Шумкин Г. Н., 165