АЛГЕБРА

1. Построить эскизы графиков следующих функций:

$$y = 2^{(x+2)/(3-2x)}; \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{(4-x)/(x+1)}; \quad y = 5^{(|x|)/(|x|-1)}; \quad y = 3^{x^2-5|x|+2}; \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{||2x|-1|};$$

$$y = \frac{1}{x^2-x-2}; \quad y = \frac{1}{x^2-3|x|+2}; \quad y = |||x-1|-2|-4|; \quad y = |x^2+3|x|-10|; \quad y = \frac{2|x|-1}{|x|+1};$$

$$y = \arcsin(\sin x); \quad y = \sin(\arcsin x); \quad y = \cos(\arccos x); \quad y = \arccos(\cos x).$$

2. Изобразить на плоскости множества всех точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$|x+1| + |y-2| = 1; \quad |x| - |2y-1| = 3; \quad ||x| - |y-1|| = 2; \quad |y^2-1| = |x+y|;$$

$$|x-y| + |x+2y| \le 3; \quad (x^2+y^2-x)(x-y^2) \ge 0; |y| \le \frac{2x+1}{x-3}.$$

3. Решить неравенства:

$$\sqrt{24-10x+x^2} > x-4; \quad \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \le \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}; \quad \sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{2-x} < 0;$$

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}+3x+13}{x+5} > 1; \quad \sqrt{x+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x-\frac{1}{x^2}} > \frac{2}{x}; \quad \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \le x; \quad \sqrt{4-x} - 2 \le x|x+5|.$$

4. Доказать, что для всех значений x, y выполнено неравенство

$$x^2 - 4xy + 6y^2 - 2x + 8y \ge -2.$$

Выяснить, существуют ли такие значения x, y, при которых данное неравенство становится точным равенством.

5. Доказать, что для всех значений x, y выполнено неравенство

$$x^2 - 3 \cdot 2^{y+1}x + 11 \cdot 4^y + 2x - 2^{y+3} \ge -3/2.$$

Выяснить, существуют ли такие значения x, y, при которых данное неравенство становится точным равенством.

6. Решить неравенства:

$$\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1; \quad \log_x(20x+3x^2-x^3) \ge 3; \quad \log_{x+1}(2-x) \cdot \log_{3x}(2x-1) \ge 0;$$

$$\log_x(\log_2(4^x-12)) \le 1; \quad \log_{|x-3|}|x^2-5x+6| < 2; \quad \log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2-3x+1) \ge 0.$$

7. Решить уравнения:

$$(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4; \quad (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4^x; \quad 3^x + 4^x = 5^x.$$

8. Доказать равенства:

$$\text{а) } \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x\colon |x| \le 1; \qquad \text{б) } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in R.$$

9. Вычислить:

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right); \quad \cos(\operatorname{arcctg}(-2)), \quad 2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{7}{23}; \quad \arcsin(\sin 14);$$

$$\arcsin(\sin 10), \quad \arccos(\cos 10); \quad \arccos(\sin 2); \quad \arcsin(\cos 4); \quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3}\right).$$

10. Вывести формулу, выражающую $\operatorname{tg}(3\alpha)$ через $\operatorname{tg}\alpha$. Укажите, при каких значениях α эта формула применима.

11. Вывести формулу, выражающую $\operatorname{ctg}(3\alpha)$ через $\operatorname{ctg}\alpha$. Укажите, при каких значениях α эта формула применима.

12. Решить неравенства:

$$\cos 2x - 7\cos x + 4 \le 0; \quad \sin x + \cos 2x \le 0;$$

$$\left(\cos 2x + 2\cos x - 3\right)\left(3\sin^2 x + 8\cos x\right) \ge 0; \quad \left(4\sin x + \cos 2x + 5\right)\left(5\sin x - 3\cos^2 x + 1\right) \ge 0.$$

13. Найти все значениях a, при которых корни x_1, x_2 уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ таковы, что $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 < \frac{5}{2}$.

14. Найти все значения a, при которых уравнения $(1-a)x^2 + 2x - 4a = 0$ и $ax^2 - 4x + 4a = 0$ равносильны.

15. Найти все значения a, при которых существует такое b, что неравенство $\frac{a}{\sin x} + b > 0$ выполнено хотя бы для одного значения x.

16. Найти все значения a, при которых существует такое b, что неравенство $\frac{a}{\sin x} + b > 0$ выполнено при всех $x \ne \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

17. Найти все значения b, при которых существует такое a, что неравенство $\frac{a}{\sin x} + b > 0$ выполнено при всех $x \ne \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

18. Найти все значения a, при которых оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ лежат на интервале $(0, 3)$.

19. Найти все значения a, при которых область значений функции $y = ax^2 + x + 1$ содержит отрезок $[-1, 1]$.

20. Найти все значения a, при которых неравенство $(a-1)x^2 + (2a-3)x + (a-3) > 0$ выполнено хотя бы при одном $x < 1$.

21. Найти все значения a, при которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a > 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

22. Известно, что значения a таковы, что неравенства $|x + a| \le 1$ и $|x - 2| \le a$ имеют решения. Найти все значения a, при которых: а) эти неравенства равносильны; б) второе неравенство является следствием первого; в) первое неравенство является следствием второго.

23. При каждом значении a рассматриваются два неравенства

$$x^2 - 2ax - 3a^2 \ge 0 \qquad \text{и} \qquad |x - a| \ge 2.$$

Найти все значения a, при которых: а) эти неравенства равносильны; б) второе неравенство является следствием первого; в) первое неравенство является следствием второго.

24. При каждом значении a рассматриваются два неравенства

$$|x-2| \geq a \qquad \text{и} \qquad |x+a| < 2.$$

Найти все значения a, при которых: а) эти неравенства равносильны; б) второе неравенство является следствием первого; в) первое неравенство является следствием второго.

25. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $2x^2 + 8x + |2x^2 - 3x - 2| = 2a$ имеет единственное решение.

26. Найти все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

27. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $2x+2|x-a|+|x-1| > 3$ выполняется для всех x.

28. Найти все значения a, при каждом из двойного неравенства $0 \leq x \leq 1$ следует неравенство

$$(a^2+a-2)x^2 - (a+5)x - 2 \leq 0.$$

29. Найти все пары (a, b), при каждой из которых максимум функции $y = x^2 - ax - b$ на отрезке $[-1; 1]$ минимален.

30. Найти все пары (p, q), для каждой из которых неравенство $|x^2 + px + q| > 2$ не имеет решений на отрезке $[1; 5]$.

31. Найти все значения a, при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} 2x + by - az^2 - z = 0, \\ bx + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет решение $(x; y; z)$.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Сформулировать и доказать теорему синусов.
2. Сформулировать и доказать теорему косинусов.
3. Написать и обосновать формулу Герона.
4. Написать и обосновать тождество параллелограмма.
5. Доказать, что если в треугольнике две медианы равны, то этот треугольник равнобедренный. Верно ли, что если все медианы одинаковы, то треугольник является равносторонним?
6. Доказать, что две высоты в треугольнике равны тогда и только тогда, когда этот треугольник равнобедренный.
7. Доказать, что в выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.
8. Доказать, что около выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\angle A + \angle C = 180°$.
9. Доказать, что треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда одна из его сторон вдвое больше медианы, к ней проведенной.

10. Доказать, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали делят его на четыре равновеликих треугольника.

11. Две биссектрисы в треугольнике ABC таковы, что каждая из них делится точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от соответствующей вершины треугольника. Найти углы треугольника ABC.

12. На плоскости заданы две точки A и B, расстояние между которыми равно 3. Найти геометрическое место точек плоскости, расположенных от одной из этих точек в два раза дальше, чем от другой. Изменится ли ответ, если ищется геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих этому свойству.

13. Доказать, что в любом треугольнике две медианы делятся точкой своего пересечения в отношении $2:1$, считая от вершин. Показать, что верно и обратное: если в треугольнике ABC отрезки AN и BM, соединяющие вершины A и B с соответствующими точками на противоположных сторонах, пересекаются в точке O, причем $AO:ON = BO:OM = 2$, то AN и BM – медианы этого треугольника.

14. Доказать, что в любом треугольнике ABC биссектриса AN делит сторону BC в отношении $BN:NC = BA:AC$. Показать, что аналогичное утверждение верно и для биссектрисы внешнего угла треугольника. А именно, пусть в треугольнике ABC: $AB > AC$; тогда прямая, делящая внешний угол при вершине A пополам, пересекает продолжение стороны BC за вершину C в такой точке N, что $BN:NC = BA:AC$.

15. На плоскости заданы две точки A и B, расстояние между которыми равно 3. Найдите геометрическое место точек M плоскости, расположенных так, что отрезки MA и M_1B равны, где M_1 – середина отрезка MA. Каким будет это геометрическое место точек, если задача рассматривается в пространстве?

16. Даны отрезки a, b и c. С помощью циркуля и линейки построить отрезки длины: а) $x = \sqrt{ab}$; б) $x = \dfrac{ab}{c}$; в) $x\colon\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$; г) $x\colon\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$; д) $x = a\sqrt{N}$, где N – заданное натуральное число; е) $x\colon\ \sqrt{x} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

17. С помощью циркуля и линейки построить треугольник: а) по трем медианам; б) по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне; в) по стороне и двум медианам, проведенным к другим сторонам; г) по стороне и двум высотам, проведенным к другим сторонам; д) по высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной вершины; е) по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне; ж) по стороне, противолежащему к ней углу и сумме двух других сторон; з) по стороне, противолежащему к ней углу и разности двух других сторон; и) по стороне, прготиволежащему к ней углу и проведенной к ней биссектрисе.

18. С помощью циркуля и линейки построить прямоугольный треугольник, зная: а) его катет b и сумму d его гипотенузы с другим катетом; б) его катет b и разность d между его гипотенузой и другим катетом; в) его гипотенузу и радиус вписанной окружности.

19. Стороны треугольника равны a, b и c. В каком отношении центр вписанной окружности этого треугольника делит биссектрису, проведенную к стороне a ?

20. Углы треугольника равны α, β и γ. В каком отношении ортоцентр этого треугольника делит высоту, проведенную из вершины угла α ?

21. Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

22. На окружности взята точка A, на ее диаметре BC – точки D и E, а на продолжении этого диаметра на точку B – точка F. Найти BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAF$, $BD = 2$, $BE = 5$, $BF = 4$.

23. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC – диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

24. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D касается прямой BC. Найти AD, если $AC = 9$, $BC = 12$, $CD = 6$.

25. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

26.Точки K, N и M – основания биссектрис внутренних углов треугольника, в котором один из углов равен $120°$. Найти площадь треугольника KMN, если две его стороны равны: а) 4 и 5; б) 3 и 4.

27. В треугольнике ABC: $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$. Точка M лежит на стороне AB, точка N – на стороне AC. Найти $\angle NMC$, если $\angle MCB = 40°$, $\angle NBC = 50°$.

28. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L, причем $AL = 10$. Найти BL, если $AK : BK = 2 : 5$.

29. Две окружности касаются внешним образом друг друга в точке A, а третьей окружности – в точках B и C. Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D, продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E, а продолжение хорд BE и CD третью окружность в точках F и G соответственно. Найти BG, если $BC = 5$ и $BF = 12$.

30. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD – в точках A и D соответственно. Найти $AK^2 + DL^2$.

31. Среди всех прямоугольников с заданным периметром найти тот, площадь которого максимальна.

32. Среди всех прямоугольников с заданной площадью найти тот, периметр которого минимален.

33. Среди всех треугольников с заданным периметром найти тот, площадь которого максимальна.

34. Шары А и Б лежат на столе бильярда. В каком направлении нужно послать шар А так, чтобы, отразившись от одного борта бильярдного стола, он попал в шар Б ?

35. Шары А и Б лежат на столе бильярда. В каком направлении нужно послать шар А так, чтобы, отразившись от двух соседних бортов бильярдного стола, он попал в шар Б ?

36. Найти максимум и точки максимума функции: а) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+9} + \sqrt{(x-7)^2+4}$; б) $f(x,y) = \sqrt{(y-3)^2+1} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-7)^2+4}$.

37. Пункты А и Б расположены по разные стороны реки с параллельными берегами. В каком месте нужно построить мост, так чтобы мост был перпендикулярен берегам реки и при этом длина пути из пункта А в пункт Б через этот мост была минимальной.

38. Среди всех треугольников, вписанных в заданный остроугольный треугольник, найти тот, периметр которого минимален. Чему равен периметр этого треугольника?

39. Доказать, что медиана, проведенная к большей стороне, меньше, чем медиана, проведенная к меньшей стороне.

40. Доказать, что сумма квадратов двух сторон треугольника не меньше половины квадрата третьей стороны. Сформулируйте необходимые и достаточные условия равенства в этом неравенстве.

41. Доказать, что сумма квадратов медиан, проведенных к двум сторонам треугольника, не меньше $\frac{9}{8}$ квадрата третьей стороны. Сформулируйте необходимые и достаточные условия равенства в этом неравенстве.

42. Доказать, что среднее арифметическое трех высот треугольника не меньше утроенного радиуса вписанной в него окружности.

43. Доказать, что сумма трех медиан треугольника меньше его периметра, но больше $\frac{3}{4}$ этого периметра.

44. Доказать, что сумма косинусов всех углов треугольника принадлежит полуинтервалу $\left(1; \frac{3}{2}\right]$.

45. Доказать, что сумма квадратов косинусов всех углов треугольника не меньше $\frac{3}{4}$, причем в тупоугольном треугольнике она больше 1.

46. Доказать, что треугольник остроугольный тогда и только тогда, когда квадрат его радиуса описанной окружности меньше суммы квадратов его сторон, деленной на 8.

47. Найти угол и расстояние между непересекающимися диагоналями соседних граней куба с ребром длины a.

48. Найти угол и расстояние между непересекающимися медианами соседних граней правильного тетраэдра с ребром длины a.

49. Найти длину ребра правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром длины a, а две другие – на диагонали грани, непересекающей эту диагональ куба.

50. Найти отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$, вершины B и B_1, C и C_1, D и D_1 которых лежат на соответствующих ребрах заданного трехгранного угла с вершиной A.

51. Найти радиусы шаров, которые касаются плоскости в вершинах треугольника со сторонами a, b, c и при этом попарно касаются друг друга.

52. Доказать, что биссекторная плоскость, проходящая через общее ребро двух граней тетраэдра, делит противоположное его ребро в отношении, равном отношению площадей этих граней.

53. Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершин.

54. Доказать, что сумма квадратов длин всех ребер тетраэдра в четыре раза больше, чем сумма квадратов расстояний между серединами его скрещивающихся ребер.