



НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Тихоновские чтения

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

*Посвящается памяти академика
Андрея Николаевича Тихонова*

28 октября – 1 ноября 2019 года

МОСКВА
2019

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И КИБЕРНЕТИКИ

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Тихоновские чтения

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

*Посвящается памяти академика
Андрея Николаевича Тихонова*

28 октября – 1 ноября 2019 года



МОСКВА – 2019

УДК 517
ББК 22.16
Т46

*Заседания конференции проходят на факультете ВМК
во втором учебном корпусе МГУ имени М. В. Ломоносова*

«Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова: 28 октября–1 ноября 2019 г. – Москва: МАКС Пресс, 2018. – 104 с.

ISBN 978-5-317-06250-7

<https://doi.org/10.29003/m800.TRC-2019>

В брошюре публикуются тезисы докладов, которые будут прочитаны на конференции «Тихоновские чтения», посвященные исследованиям в области прикладной математики и информатики.

УДК 517
ББК 22.16

КОНФЕРЕНЦИЯ «ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2019»

28 октября

Секция: «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление»

Председатель профессор **Фомичев В.В.**

14:30 факультет ВМК ауд. 780

1. **Фомичев В.В., Каменщиков М.А.** О функциональных наблюдателях для линейных систем со стохастическими возмущениями 9
2. **Фурсов А.С., Крылов П.А.** Стабилизация неопределенных динамических объектов на основе метода прогнозирующих моделей 10
3. **Магницкий Н.А.** Бегущие волны и пространственно-временной хаос в нелинейных динамических системах 11
4. **Гончаров О.И., Злобин Д.В., Роговский А.И.** Применение метода гармонической линеаризации для исследования динамики термозлектромеханической системы..... 12
5. **Атамась Е.И., Мальцева А.В.** Одновременные наблюдатели в задаче определения жестких неисправностей 13

Секция: «Системный анализ»

Председатель академик РАН **Куржанский А.Б.**

14:30 факультет ВМК ауд. 780

1. **Андреев Н.А.** Управление портфелем финансовых инструментов с учетом модельной ошибки и ликвидности рынка 14
2. **Егоров Л.В.** Автомодельная редукция дифференциально-разностного аналога уравнения Кортевега-де-Фриза-Бюргерса для изучения асимптотики его решения..... 15
3. **Комаров Ю.А., Куржанский А.Б.** Минимаксные-максиминные неравенства для задач с векторным критерием 16
4. **Точилин П.А., Чистяков И.А.** О задаче управления нелинейной системой дифференциальных уравнений за счет ее кусочной линеаризации 17
5. **Трусов Н.В.** Численное решение задачи «среднего поля» при наличии магистрального эффекта 18

Секция: «Вычислительные технологии и моделирование»

Председатель академик РАН **Тыртышников Е.Е.**

15:00 факультет ВМК ауд. 505

1. **Балыбердин Г.А., Агошков В.И.** Ассимиляция данных наклонных траекторий в задаче об ионосфере 19
2. **Мастинен В.А., Лезина Н.Р., Агошков В.И.** Параллельный алгоритм для задачи вариационной ассимиляции данных в открытой акватории 20
3. **Агошков В.И., Шелопут Т.О., Сорокин А.С.** Восстановление граничного источника пассивной примеси в открытой акватории..... 21
4. **Горбатова А.С.** Информационно-теоретический анализ моделей экспериментальной вирусной инфекции 22

5. Донец Д.О., Бочаров Г.А. Математическое моделирование системы интерферона	23
6. Гребенников Д.С. Стохастическое моделирование процессов инфицирования клеток при ВИЧ-инфекции	24
7. Третьякова Р.М., Бочаров Г.А. Численная реализация алгоритмов решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом	25
8. Желтков Д.А. Уменьшение количества вычислений оптимизируемого функционала в методе глобальной оптимизации на основе ТТ.....	26

Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

Председатель академик РАН Моисеев Е.И.

16:20 факультет ВМК ауд. 685

1. Денисов В.Н. О двусторонних оценках скорости равностабилизации средних Рисса и решения задачи Коши.....	27
2. Коровина М.В. Построение асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами и их типы	28
3. Крицков Л.В. Равномерная сходимост спектральных разложений, отвечающих общим операторам четного порядка.....	29
4. Савчук А.М., Садовнича Я.В. Точные оценки решения нестационарного уравнения Дирака.....	30
5. Сарсенби А.М. Принцип Лере-Шаудера в применении к исследованию одного нелинейного интегрального уравнения. Безусловная базисность систем корневых функций краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией.....	31
6. Хорошилова Е.В. О методе решения задачи терминального управления с дискретными фазовыми ограничениями.....	32

Секция:«Системное программирование и информационные технологии»

Председатель чл.-корр. РАН Воеводин В.В.

16:30 факультет ВМК ауд. 238

1. Полякова И.Н., Филимонова Е.А. Метод словообразования в задаче выявления хронологического порядка возникновения слов: программный компонент	33
2. Глоница А.Б. Масштабирование результатов верификации моделей компонентов модульных вычислительных систем	34
3. Казачук М.А. Динамическая аутентификация пользователей на основе анализа работы с клавиатурой компьютера	35

29 октября

Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

Председатели академик РАН Четверушкин Б.Н., профессор Попов А.М.

10:30 факультет ВМК ауд. 685

1. Попов А.М. Математическое моделирование фолдинга белка с помощью генетического алгоритма.....	36
--	----

2. Ершов Н.М. Методы автоматической генерации параллельных кодов для семейства популяционных алгоритмов оптимизации	37
3. Лукашевич Д.А., Смирнов А.П. Численное моделирование процесса порообразования в склере глаза	38
4. Ечкина Е.Ю., Гузминова Н.Ю. Математическое моделирование ускорения протонов и ионов углерода лазерным импульсом в применении к задачам адронной терапии	39
5. Жилкин А.С., Сычуглов Д.Ю. Математическое моделирование нагрева тонкой первой стенки реактора-токамака со встроенным охлаждением	40
6. Зотов И.В. Исследование поведения магнитных островов внутри тороидальной плазмы на основе электромагнитных измерений	41
7. Шумкин Г.Н. Матричные материалы для молекулярных систем доставки лекарств	42
8. Киселев Д.О. Моделирование процессов взаимодействия групп населения в городской среде	43

Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром»

Председатели профессор Нефедов Н.Н., профессор Бутузов В.Ф.

17.15 Физический факультет ауд. 4-46

1. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О. О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубичного типа	44
2. Коцюбинский К.А., Мельникова А.А. Вопрос гладкости решения с внутренним переходным слоем в системе уравнений с разрывной неоднородностью	45
3. Полежаева Е.В., Левашова Н.Т. Стационарирование решения вида фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция	46
4. Нестеров А.В. Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малой нелинейной взаимной диффузией	47
5. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И. Существование и асимптотическая устойчивость периодических решений с пограничным слоем уравнения реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями 3 рода	48
6. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г. Семейство стабилизирующих регуляторов на основе асимптотических разложений для нелинейных систем управления в SDC форме	49

30 октября

Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

Председатели академик РАН Четверушкин Б.Н., профессор Попов А.М.

13:30 факультет ВМК ауд. 621

1. Трофимов В.А., Федотов М.В., Харитонов Д.М. Теория генерации третьей оптической гармоники на основе каскадной генерации второй оптической гармоники в квадратично нелинейной среде	50
2. Егоренков В.А., Логинова М.М., Трофимов В.А. Особенности применения прямых и итерационных методов решения разностных уравнений для 3D нестационарных задач эволюции лазеро-индуцированной плазмы полупроводника	51

3. Кубышкин В.А., Мухин С.И., Хруленко А.Б., Рубина А.Ф., Жалеев Т.Р. Математическое моделирование кровотока в системе сосудов печени	52
4. Моисеев Т.Е. Неклассические задачи математической физики и методы их решения	53
5. Петрова Л. И. О согласованности уравнений законов сохранения.....	54
6. Майоров Павел А., Головизнин В.М. Валидация численного алгоритма для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ	55
7. Терновский В.В., Хапаев М.М., Хапаева Т. М. Вариационный метод на основе разрешающего функционала для оптимального управления	56
8. Горбачев Д.Ю., Головизнин В.М. Балансно-характеристический численный метод на треугольных сетках	57
9. Савенкова Н.П., Лапонин В.С., Мокин А.Ю., Артемьева Л.А., Дряженков А.А. Применение аппарата математического моделирования в промышленном производстве с целью реализации программы импортозамещения	58

Секция: «Математическая физика и обратные задачи»

Председатели профессор Денисов А.М., профессор Разгулин А.В.

14.30 факультет ВМК ауд. 609

1. Баев А.В. Об одной обратной задаче для уравнения Кортевега-де Вриза с переменной глубиной.....	59
2. Денисов А.М., Ефимов А.А. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения и метод её решения	60
3. Королёв Г.М., Тихонов И.В. Восстановление решений уравнения теплопроводности по специальным нелокальным условиям	61
4. Ильинский А.С., Галишников Т.Н. Вычисление функций Грина в задачах дифракции волн в волноводах и на решётках	62
5. Романенко Т.Е., Будзинский С.С. Спиральные волны в запаздывающем уравнении диффузии в тонком кольце с граничными условиями на наклонную производную	63
6. Будзинский С.С. Об усреднении оптических передаточных функций при наличии астигматизма.....	64
7. Устинов В.Д. Обратное двумерное преобразование Меллина для решения уравнений Фредгольма первого рода	65
8. Куркина Е.С., Дмитриев В.И. Обратная задача определения параметров экономической модели.....	66

Секция: «Исследование операций»

Председатель академик РАН Евтушенко Ю.Г.

15:00 факультет ВМК ауд. 526а

1. Белянкина Т.В. Эффективность дискретных наблюдений с памятью в задаче интерполяции стохастических процессов	67
2. Морозов В.В. Оценка стоимости бермудского опциона.....	68
3. Цыганов Н.И. Оптимизация транспортной сети для энергетического рынка типа “звезда”	69
4. Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Яночкин И.Е. Обобщенные функции целераспределения: свойства и вычислительные аспекты.....	70

5. Белолипецкий А.А. Оценка скорости деградации торцов цилиндрической лазерной мишени	71
6. Саливон К.Я. Байесовская модель торга двух лиц с равномерным распределением резервных цен	72
7. Денисов Д.В., Скоробогатов М.О. Об одной задаче планирования производства	73
8. Язовская Н.А. Исследование моделей оптимизации принятия решений в системе обслуживания	74
9. Коломейцев Ю.В. Решение задачи портфельной инвестиции онлайн с использованием машинного обучения, в частности, обучения с подкреплением	75
10. Шурыгин А.А. Биннинг данных в кредитном скоринге	76

31 октября

Секция: «Обратные задачи управления»

Председатель академик РАН Осипов Ю.С.

12:15 факультет ВМК ауд. 728

1. Никольский М.С. О задаче гарантированного оценивания для многошаговых конфликтно управляемых процессов	77
2. Асеев С.М. Задачи оптимального управления при наличии факторов риска.....	78
3. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Санкции и контрсанкции в одной дифференциальной игре	79
4. Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. Исследование особых режимов в экономических моделях	80
5. Асеев А.С., Самсонов С.П. Построение множества достижимости для нелинейной управляемой модели экономической динамики	81
6. Сурков П.Г. О применении методов теории некорректных задач для отслеживания траектории динамической системы дробного порядка	82
7. Макасимов В.И. О реконструкции входных воздействий при измерении части фазовых координат.....	83
8. Артемьева Л.А., Дряженков А.А. Алгоритм численного решения задачи подвижного управления для волнового уравнения с однородными граничными условиями первого рода.....	84
9. Григоренко Н.Л., Горьков В.П. Об одном классе задач преследования несколькими разнотипными объектами	85
10. Лукьянова Л.Н. Построение дифференциального анализатора для модели конкуренции Лотки-Вольтерры при ограниченном управлении	86

30 октября

Секция: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Председатель профессор Королев В.Ю.

16:20 факультет ВМК ауд. 510

1. Фисак А.А., Захарова Т.В. Оптимизация расположения станций обслуживания по различным критериям	87
2. Шестаков О.В. Оценка риска пороговой обработки в задачах непараметрической регрессии со случайной сеткой	88
3. Хохлов Ю.С., Сидорова О.И. Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях телетрафика II	89

1 ноября

Секция: «Математическая кибернетика»

Председатель профессор **Ложкин С.А.**

16:30 факультет ВМК ауд. **612**

1. Бухман А.В. О применении SAT-решателей для проверки периодичности булевых функций.....	90
2. Гнатенко А.Р., Захаров В.А. О сложности верификации конечных автоматов-преобразователей над свободными полугруппами	91
3. Жайлауова Ш.Р. О проблеме эквивалентности недетерминированных автоматов-преобразователей над однобуквенным выходным алфавитом	92
4. Винарский Е.М. О свойствах временных автоматов.....	93
5. Захаров В.А. О проверке эквивалентности детерминированных биавтоматов.....	94
6. Захаров В.А., Шокуров А.В. О свойствах одной простой модели блокчейна	95
7. Казбекова Д.О. Алгоритмы анализа и преобразования конечных автоматов на основе BDD	96
8. Селезнева С.Н., Лю Ю. Сложность расшифровки монотонных функций с искажениями	97
9. Алексеев В.Б., Назаров А.А. Нижняя оценка билинейной сложности умножения матриц размеров 2×2 и $2 \times m$ над конечным полем.....	98
10. Ложкин С.А., Хзмалян Д.Э. О сложности реализации стандартных мультиплексорных функций в некоторых классах контактных схем	99
11. Жуков В.В. Асимптотически наилучшие методы синтеза булевых рефлексивно-рекурсивных схем	100
12. Александрова Н.Е., Романов Д.С. О проверяющих тестах относительно вставок функционального элемента в схему	101
13. Куцак Н.Ю., Подымов В.В. Алгебра троичных цифровых сигналов	102

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЯХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Фомичев В.В.¹, Каменщиков М.А.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: fomichev@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: mkamenshchikov@cs.msu.ru

Рассматривается задача построения функциональных наблюдателей для линейных стационарных систем с шумами, которые описываются соотношениями вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \quad y(t) = Cx(t) + v(t). \quad (1)$$

Фазовый вектор $x(t)$ имеет размерность n . Его начальное значение $x(t_0)$ есть случайный вектор с известными математическим ожиданием и матрицей ковариации. Заданное входное воздействие $u(t)$ имеет размерность r , размерность измеряемого вектора $y(t)$ равна l . A , B и C - постоянные матрицы соответствующих размеров. Входные возмущения $w(t)$ размерности n и ошибки измерений $v(t)$ размерности l представляют собой векторные белые случайные процессы с заданными матрицами ковариации: $E[w(t)w^T(\tau)] = Q\delta(t - \tau)$, $E[v(t)v^T(\tau)] = R\delta(t - \tau)$. Матрица Q - постоянная симметричная неотрицательно определенная матрица, матрица R - постоянная симметричная положительно определенная матрица, $\delta(t - \tau)$ - дельта-функция Дирака. Начальное положение, входные возмущения и ошибки измерений взаимно не коррелированы.

Искомой является построенная на основе результатов измерений, несмещенная оценка вектора $z(t) = Fx(t)$ размерности r . Эта оценка обозначается через $\tilde{z}(t)$. Матрица F - постоянная матрица соответствующих размеров. Ошибка оценивания определяется формулой: $e(t) = z(t) - \tilde{z}(t)$. Оценка должна быть оптимальной в том смысле, что компоненты ошибки оценивания должны иметь минимальную установившуюся дисперсию.

Ранее задача оценки вектор-функционала для линейных детерминированных систем рассматривалась в работе [1], в которой предложены методы синтеза функциональных наблюдателей для таких систем. В работе [2] предложен критерий существования оптимального функционального фильтра и метод его вычисления для линейных стохастических систем. В работе [3] было предложено обобщение условия несмещенности фильтрации для задачи диагностики замкнутых линейных систем.

Литература

1. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
2. Darouach M. On the optimal unbiased functional filtering //IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – V. 45. – №. 7. – P. 1374-1379.
3. Капалин И.В., Каменщиков М.А. Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2018. — № 4. — С. 19–26.

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПРОГНОЗИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ

Фурсов А.С.¹, Крылов П.А.²

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: fursov@cs.msu.ru

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: pavel@leftsystem.ru

В настоящей работе предлагается алгоритм решения задачи робастной стабилизации неопределённой нестационарной динамической системы второго порядка

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \quad (1)$$

где $\forall t \ A(t) \in \Omega^t \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$, Ω^t – компакт, $a_{ij} \in C(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$

Пусть задана некоторая неограниченная последовательность $t_0, t_1, t_2, \dots$, такая что для любого номера i известна опорная функция компакта Ω^{t_i} , и непрерывная функция $r_i(t')$, ограничивающая скорость изменения компакта Ω^t во времени таким образом, что $\forall t' \geq 0 \ \Omega^{t_i+t'} \subset \text{conv } \Omega^{t_i} + S_{r_i(t')}$, где знаком $+$ для двух компактов обозначена сумма Минковского.

Предлагается алгоритм решения задачи на основе метода прогнозирующих моделей [1] и метода сверхстабилизации [2, 3].

1. Построение прогнозирующей модели для текущего момента времени t_i .

$$\dot{\bar{x}} = A'(t)\bar{x} + bu \quad (2)$$

где $A'(t) \in \text{conv } \Omega^{t_i}$

2. Решение задачи стабилизации для прогнозирующей модели методом сверхстабилизации
3. Прогнозирование поведения исходной системы
4. Применение найденной обратной связи к исходной системе на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$
5. Вернуться к шагу 1 для момента t_{i+1}

Прогнозирующая модель также является неопределённой нестационарной системой, однако на каждом шаге задающий неопределённость компакт $\text{conv } \Omega^{t_i}$ фиксирован и не зависит от времени.

Основным результатом работы является теорема о достаточных условиях разрешимости поставленной задачи. Помимо этого, были получены явные выражения для максимальной степени сверхустойчивости при замыкании стационарной системы второго порядка линейной обратной связью. Так же был сформулирован и доказан ряд утверждений о робастной сверхустойчивости и сверхстабилизации.

Литература

1. Richards A. G. Robust constrained model predictive control // Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Aeronautics and Astronautics., Massachusetts – 2005
2. Б. Т. Поляк и П. С. Щербаков. Робастная устойчивость и управление // М.: Наука – 2002
3. Б. Т. Поляк. Обобщенная сверхустойчивость в теории управления // Автоматика и Телемеханика, №4 – 2004

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ХАОС В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Магницкий Н.А.

*Федеральный научный центр «Информатика и управление» РАН, МГУ им.
М.В.Ломоносова, кафедра НДСиПУ, e-mail: nikmagn@gmail.com*

Рассмотрены модели некоторых физических, химических и биологических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными, такими как уравнения Гинзбурга-Ландау, Курамото-Сивашинского, Шредингера, Фитц-Хью-Нагумо, и имеющих физические, химические или биологические режимы турбулентности. Показано, что все такие системы уравнений с частными производными могут иметь бесконечное число различных устойчивых волновых решений, движущихся по пространственной оси с произвольными скоростями, а также бесконечное количество различных состояний пространственно-временного хаоса. Эти хаотические (турбулентные) решения порождаются в соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ) каскадами бифуркаций циклов или торов и сингулярных аттракторов в трехмерных или четырехмерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым системы уравнений с частными производными могут быть сведены путем автомоделной замены переменных. Рассмотрены примеры применения теории к описанию процессов физической, химической и биологической турбулентности.

Литература

1. Magnitskii N.A. and Sidorov S.V. New Methods for Chaotic Dynamics, edited by L.Chua //Singapore: World Scientific – 2006, 363 p.
2. Магницкий Н.А. Теория динамического хаоса //М.: URRS – 2011, 320 с.
3. Magnitskii N.A. Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations, in “Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Appl.”, Chapter 6, edited by Jan Awrejcewicz, P. Hagedorn // Rijeka: Intech – 2012, p.133-174.
4. Karamysheva T.V., Magnitskii N.A. Traveling waves, impulses and diffusion chaos in excitable media //Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul.(2014),19, p.1742–1745.
5. Zaitseva M.F., Magnitskii N.A. and Poburinnaya N.B. Control of Space-Time Chaos in a System of Equations of the FitzHugh–Nagumo Type //Differential Equations (2016), 52, №12, p.1585–1593.
6. N.A. Magnitskii Bifurcation Theory of Dynamical Chaos, in “Chaos Theory”, Chapter 11, Rijeka, InTech - 2018, p.197-215.
7. Магницкий Н.А. Бегущие волны и пространственно-временной хаос в уравнении Курамото-Сивашинского //Дифференц. Уравнения (2018), 54, № 9, с. 1292–1296.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТЕРМОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Гончаров О.И.¹, Злобин Д.В.², Роговский А.И.³

- 1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,
e-mail: goncharovoi@yandex.ru
- 2) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,
e-mail: dimz94@mail.ru
- 3) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,
e-mail: alexander.rogovskiy@gmail.com

Рассматривается термоэлектромеханическая система, включающая элемент, выполненный из материала с эффектом памяти формы, и пьезоэлектрика. Такие устройства [1], [2] способны утилизировать тепловую энергию, преобразовывая ее в электрический ток, что позволяет использовать их в качестве источников питания для низкопотребляющих устройств, например, автономных датчиков в составе распределенных сенсорных сетей. Необходимым условием функционирования такого источника энергии является возникновение в нем устойчивых колебаний.

Согласно [3] широкий класс таких систем описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y &= F(y, T), \\ b_1\dot{T} + T &= T_0 + ky, \end{aligned} \quad (1)$$

где y – удлинение элемента из материала с памятью формы, T – его температура, а $F(y, T)$ – его механическое напряжение. В общем случае зависимость $F(y, T)$ весьма сложна [4]. Она должна описывать внутреннее состояние сплава, включая соотношение между фазами мартенсита и аустенита, пластическую деформацию мартенсита и свойство сверхупругости аустенита. Однако при рассмотрении малых деформаций, не вовлекающих эффект сверхупругости, она упрощается:

$$F(y, T) = yE(T), \quad (2)$$

где $E(T)$ – нелинейное звено, обладающее кусочно-линейной характеристикой с насыщением и гистерезисом (люфт).

Для исследования системы (1), (2) был применен метод гармонической линеаризации. Использование разложения до второй гармоники позволило получить аналитические соотношения, характеризующие параметры возможных колебаний. Для подтверждения полученных результатов было проведено моделирование в MATLAB.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-57-18006-болг_а).

Литература

1. Kahn H., Huff M.A., Heuer A.H. The TiNi shape memory alloy and its applications for MEMS. // J. Micromech Microeng (1998) **8**, pp. 213–221.
2. Namli O.C. Taya M. Design of piezo-SMA composite for thermal energy harvester under fluctuating temperature // J. Appl. Mech (2011) **78**, № 8.
3. Todorov T., Nikolov N., Todorov G., Ralev Ya. Modelling and Investigation of a Hybrid Thermal Energy Harvester // MATEC Web Conf. (2018), **148**, 12002.
4. Cissé C., Zaki W., Ben Zineb T. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // International Journal of Plasticity (2016), **76**, pp. 244–284.

ОДНОВРЕМЕННЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЖЕСТКИХ НЕИСПРАВНОСТЕЙ

Атамась Е.И.¹, Мальцева А.В.²

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,
e-mail: eatamas@cs.msu.ru

2) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ,
e-mail: amaltseva@cs.msu.ru

Рассматривается линейная стационарная управляемая система, допускающая «жесткие» неисправности, то есть скачкообразное изменение параметров системы. Рассматриваемая система описывается с помощью линейной переключаемой системы с двумя состояниями: (1) штатное функционирование и (2) «жесткая» ошибка, возможен переход из первого состояния во второе, момент перехода считается неизвестным.

$$\Sigma_i = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases}$$

Предполагается, что обе системы являются квадратными и обнаруживаемыми, а переключение оказывает влияние на наблюдаемую подсистему.

Задача состоит в обнаружении «жесткой» неисправности, т.е. переключения в системе. Поскольку существующие подходы к обнаружению переключений весьма сложны (например, [3]), была высказана идея использовать для решения поставленной задачи одновременный наблюдатель.

Утверждение 1. Пусть для систем Σ_i существует одновременный наблюдатель. Тогда при выполнении указанных условий, задачу обнаружения неисправности можно решить за конечное время.

При этом остается открытым вопрос об условиях существования одновременного наблюдателя. Оказывается, что эта задача сводится к задаче одновременного наблюдения и обращения для специальной системы (задача наблюдения при неизвестных входах) [1] и использует специальные канонические формы для многосвязных систем [2].

В докладе обсуждаются полученные результаты, эффективность предложенного подхода и возможные направления дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-37-00106).

Литература

1. J. A. Moreno. Simultaneous Observation of Linear Systems: A State–Space Interpretation // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2005. – Vol. 50, No. 7. – P. 1021-1027.
2. P. Sannuti, A. Saberi. Special coordinate basis for multivariable linear systems—finite and infinite zero structure, squaring down and decoupling // International Journal of Control. – 1987. – Vol. 45, No.5. – P. 1655-1704.
3. W. Chen, M. Sarif. Observer Design for Linear Switched Control Systems // Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts June 30 - July 2, 2004, P. 5796-5801.

Секция: «Системный анализ»

Председатель академик РАН Куржанский А.Б.

УПРАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕМ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ С УЧЕТОМ МОДЕЛЬНОЙ ОШИБКИ И ЛИКВИДНОСТИ РЫНКА

Андреев Н.А.

*НИУ ВШЭ, лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту,
e-mail: nandreev@hse.ru*

Доклад посвящен приложению гарантированного подхода, предложенного Смирновым С.Н. [1],[2], к задаче управления портфелем финансовых инструментов на низколиквидном рынке с учетом модельной ошибки. Рассматривается игровая постановка в дискретном времени на конечном горизонте, в рамках которой инвестор максимизирует ожидаемое вознаграждение от портфеля (робастный эквивалент Сэвиджа) в конце стратегии. Оптимальная стратегия находится в неявном виде как решение соответствующего уравнения Беллмана-Айзекса, при этом допускается зависимость от всей предыстории системы, наличие влияния на цену и транзакционных издержек общего вида. При выполнении ряда аксиоматических свойств рынка, доказано, что функция транзакционных издержек должна быть выпукла, также получены достаточные условия строгой и сильной выпуклости.

Численное решение уравнения Беллмана-Айзекса является достаточно ресурсоемкой задачей, поскольку на каждом шаге требует решения дополнительной задачи поиска инфимума по множеству вероятностных мер с общим носителем. Получены достаточные условия, позволяющие существенно упростить численное решение дополнительной задачи, сведя ее к задаче минимизации на множестве угловых точек носителя.

Предлагаемый подход может быть применен для сравнения инвестиционных стратегий и оценки ликвидационной стоимости портфеля на низколиквидном рынке в условиях неопределенности, например в период финансового кризиса. Также подход может быть использован при принятии решений в случае ребалансировки портфеля большого объема за короткий период времени.

Литература

1. Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана-Айзекса // Математическая Теория Игр и ее Приложения (2018) 10, №4, с. 59-99.
2. Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения (2019) 11, №2, с. 68-95.
3. Iyengar G.N. Robust Dynamic Programming // Mathematics of Operations Research. – 2005. – 30. – pp. 257–280.

АВТОМОДЕЛЬНАЯ РЕДУКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ФРИЗА-БЮРГЕРСА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ АСИМПТОТИКИ ЕГО РЕШЕНИЯ

Егоров Л.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, СА, e-mail: lev_yegorov@mail.ru

В работе [1] остается открытым вопрос асимптотики решения задачи Коши (1), (2) для дифференциально-разностного аналога уравнения Кортевега-де-Фриза-Бюргерса, используемого для описания эволюции распределения производителей по уровням технологической эффективности в рамках концепции шумпетеровской инновационной динамики создания (инновации) и заимствования (имитации) технологий ($\alpha, \beta, h > 0$).

$$\partial f(x, t)/\partial t = -\alpha(f(x, t) - f(x - h, t)) - \beta(f(x + h, t) - f(x - h, t))f(x, t) \quad (1)$$

$$f(x, 0) = f_0(x) \quad (2)$$

Считая шаг h малым, раскладывая $f(x \pm h, t)$ в окрестности точки x до второго порядка малости, получаем непрерывный аналог уравнения (1)

$$f_t + \alpha h f_x + 2\beta h f f_x = \frac{1}{2} \alpha h^2 f_{xx} \quad (3)$$

который после соответствующих преобразований сводится к вязкостному уравнению Бюргерса

$$u_t + uu_y = \alpha/8\beta^2 u_{yy} \quad (4)$$

Для уравнения (4) начальное условие (2) перейдет в (5) (с моментом M)

$$u(y, 0) = u_0(y) = f_0(2\beta hy), \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) dy = M \quad (5)$$

У решения задачи Коши (4), (5) известна точная асимптотика [2]. В терминах задачи Коши (3), (2) она имеет следующий вид

$$f(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha}{8\beta^2(t+1)}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha ht)^2}{2\alpha h^2(t+1)}\right) / \left(\frac{\sqrt{\pi}}{e^{\frac{4\beta^2 M}{\alpha}} - 1} + \int_{\frac{x-\alpha ht}{h\sqrt{2\alpha(t+1)}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right) \quad (6)$$

и обладает моментом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 2\beta h M \quad (7)$$

Численный эксперимент позволяет увидеть, насколько хорошо асимптотика (6) решения задачи Коши (3), (2) описывает асимптотику решения задачи Коши (1), (2) на больших временах.

Литература

1. Хенкин Г.М., Шананин А.А. Математическое моделирование шумпетеровской инновационной динамики //Математическое моделирование (2014) **26**, №8, с.3-19.
2. Kim Y.-J., Tzavaras A.E. Diffusive N-waves and metastability in the Burgers equation //SIAM J. Math. Analysis (2001) Vol.33, No.3, pp.607-633.

МИНИМАКСНЫЕ-МАКСИМИННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЗАДАЧ С ВЕКТОРНЫМ КРИТЕРИЕМ

Комаров Ю.А.¹, Куржанский А.Б.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Системного анализа,
e-mail: ykomarov94@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Системного анализа,
e-mail: kurzhans@mail.ru

Доклад посвящен методам решения задач динамической оптимизации движения с векторным критерием в условиях наличия ограниченной помехи в уравнении динамики. Сообщаемые результаты являются развитием материалов, изложенных в [1], [2].

В первой части доклада вводятся понятия векторных минимакса и максимина для отображений вида

$$\vec{F}: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

принимающих значения в упорядоченных конечномерных пространствах. Вводится определение основного минимаксного неравенства для указанных операторов, проводится сравнение со скалярным случаем. На примере квадратичного векторного функционала показано, что, всегда справедливое в скалярном случае, основное неравенство может не выполняться при повышении размерности значений критерия.

Во второй части доклада рассматриваются частные случаи векторных функционалов и некоторые условия выполнения или нарушения основного минимаксного неравенства. В качестве примеров взяты функционал с сепарируемыми переменными вида

$$\vec{S}(u, v) = \vec{\Phi}(u) + \vec{\Psi}(v)$$

и функционал, компоненты которого представлены скалярными произведениями компонент управления и помехи:

$$\vec{G}(u, v) = \begin{bmatrix} \langle u, A_1 v \rangle \\ \dots \\ \langle u, A_r v \rangle \end{bmatrix}.$$

В заключительной части доклада на примере квадратичного векторного функционала продемонстрирована невозможность построения оценки минимаксной и максиминной границ с использованием подхода, аналогичного гарантированному точечному оцениванию, предложенному в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-29-04191 офи_м).

Литература

1. Комаров Ю.А., Куржанский А.Б. О задачах минимаксного типа с векторным критерием //Материалы Международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019), посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, с.180-184
2. Куржанский А.Б., Комаров Ю.А. Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием //Доклады Академии наук (2018) **480**, №4, с.408-412.

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗА СЧЁТ ЕЁ КУСОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Точилин П.А.¹, Чистяков И.А.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной Математики и Кибернетики,
кафедра Системного Анализа, e-mail: tochilin@cs.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной Математики и Кибернетики,
кафедра Системного Анализа, e-mail: chistyakov.ivan@yahoo.com

Внутри области $\Omega = [\zeta_0, \zeta_1] \times \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается нелинейная система ОДУ:

$$\dot{x} = A(t)x + \hat{A}(t)g(x_1) + B(t)u + f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор состояния, заданные функции $A(t)$, $\hat{A}(t)$, $B(t)$, $f(t)$ непрерывны по времени, а $g_j(x_1): [\zeta_0, \zeta_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, r}$, — произвольные функции из $C^2([\zeta_0, \zeta_1])$. Вектор $u \in \mathcal{P}(t) \subseteq \mathbb{R}^m$ является управляющим параметром. Пусть $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$ — компактное множество, $x_0 = x(t_0)$ — фиксированное начальное состояние системы (1). Требуется построить такую управляющую стратегию $u = u(t, x) \in \mathcal{P}(t)$, чтобы выполнялось включение $x(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)) \in \mathcal{X}_1 + B_\mu(0)$, где $B_\mu(0)$ — шар радиуса μ с центром в нуле, а значение $\mu \geq 0$ необходимо минимизировать.

Для решения задачи предлагается аппроксимировать функции $g_j(x_1)$, $j = \overline{1, r}$, непрерывными ломаными, что позволяет перейти к кусочно-линейной системе

$$\dot{x} = A^{(i)}(t)x + B(t)u + C(t)v + f^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где при любом $t \in [t_0, t_1]$ активной является только одна подсистема, а вектор $v \in \mathbb{R}^n$ имеет смысл ошибки аппроксимации. На основе системы (2) предлагается способ построения внутренней оценки множества разрешимости системы (1) с помощью методов динамического программирования и, в частности, принципа сравнения [1]. Для этого сперва рассматривается разрывная кусочно-квадратичная оценка функции цены, а затем происходит сглаживание полученной функции. Это позволяет в явном виде построить непрерывное позиционное управление и избежать аналитического решения уравнений, необходимого в [2]. Для повышения точности оценок предлагается аналогичным образом строить внешние аппроксимации множества разрешимости.

Основными результатами работы являются численный метод для нахождения параметров указанной кусочно-квадратичной функции, если множества $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{X}_1$ являются эллипсоидами, а также оценки погрешности полученной аппроксимации множества разрешимости. Результаты подтверждены численными расчётами.

Литература

1. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления //Труды института математики и механики УрО РАН – 2006, Т. 12, №1, с. 173–183.
2. Маянцев К.С., Точилин П.А. Об одном методе построения кусочно-квадратичных функций цены для задачи управления системой с переключениями. //Дифференциальные уравнения – 2018, Т. 54, № 11, с. 1497–1507.
3. Чистяков И.А., Точилин П.А. Приближённое решение задачи целевого управления в случае нелинейности по одной переменной //Дифференциальные уравнения – 2019, Т. 55, № 11, 1560–1571.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ «СРЕДНЕГО ПОЛЯ» ПРИ НАЛИЧИИ МАГИСТРАЛЬНОГО ЭФФЕКТА

Трусов Н.В.¹

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра системного анализа; МФТИ, кафедра анализа систем и решений e-mail: trunick.10.96@gmail.com

Рассматривается задача «среднего поля», описывающая поведение агентов, число которых $N \rightarrow \infty$. Вклад одного агента незначителен, однако суммарный вклад всех агентов может быть рассмотрен с точки зрения «среднего поля». Задача представляется в виде системы УЧП, состоящей из уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, эволюционирующего в обратном времени, и уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка, эволюционирующего в прямом времени:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \lambda (x - \tilde{a})^2 = -V(m), u(T, x) = -\theta(x - a)^2; \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} m \right) = 0, m(0, x) = m_0(x); \end{cases} \quad (1)$$

где $m(t, x)$ - плотность распределения агентов, $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, $k > 0$, $\lambda > 0$, $\sigma > 0$, $\theta > 0$, $\tilde{a} \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$; $\alpha = \frac{1}{2k} \frac{\partial u}{\partial x}$ - связующее уравнение системы (1).

Численное решение системы (1) затруднительно из-за наличия магистрального эффекта (агенты стремятся к позиции $x = \tilde{a}$ при $t \in (0, T)$), а также из-за наличия краевых условий в начальный и конечный моменты времени. Основываясь на методе, представленном в [1], рассмотрим следующую экстремальную задачу с ограничением типа равенства, выраженным уравнением Колмогорова-Фоккера-Планка:

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(-k\alpha^2 - \lambda(x - \tilde{a})^2 \right) m + G(m) dx dt - \int_{\mathbb{R}} \theta(x - a)^2 dx \rightarrow \max_{\alpha \in \mathbb{R}}; \\ \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha m) = 0, m(0, x) = m_0(x); \end{cases} \quad (2)$$

где $V = \frac{\partial G}{\partial m}$. Необходимые условия экстремума задачи (2) совпадают с системой (1). Чтобы построить максимизирующую последовательность задачи (2), необходимо требовать выпуклости G по m . Численный метод задачи (2) основан на построении монотонных разностных схем и использовании разностной схемы Годунова 1 порядка для управления α . При специальных условиях вида $V(m) = \ln m$, $m_0(x) \sim N(\mu_0, \delta_0)$ имеет место редукция системы (1) к ОДУ Риккати [2]. Данная редукция используется в работе как тестовый пример эффективности численного метода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 17-07-00507).

Литература

1. Lachapelle A., Salomon J. and Turinici G. Computation of Mean Field Equilibria in Economics // Math. Models and Methods in Applied Sciences (2010) **20**, p.567-588.
2. Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C. and Zirilli F. A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control // Applied Math. (2014) **5**, p.3091-3116.

Секция: «Вычислительные технологии и моделирование»

Председатель: академик РАН Тыртышников Е.Е.

АССИМИЛЯЦИЯ ДАННЫХ НАКЛОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ ИОНОСФЕРЕ

Балыбердин Г.А.¹, Агошков В.И.²

1) МГУ им. М. В. Ломоносова, ВМК, ВТМ, e-mail: balyberdin_grigoriy@mail.ru

2) ИВМ РАН, МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: agoshkov@inm.ras.ru

В настоящей работе рассматривается математическая модель, описывающая поведение концентрации ионов в ионосфере [1] и усвоение данных наклонных траекторий. В качестве основного уравнения модели было взято уравнение неразрывности для ионов. В данной работе был введен класс обратных задач на основе [2] и разработан алгоритм вариационного усвоения данных на основе методологии [3]. Для реализации модели была введена схема с равномерной сеткой, вторым порядком аппроксимации по пространству и первым порядком аппроксимации по времени. Для реализации итерационного процесса использовался метод простой итерации.

Целью работы является изучение поведения и эффективности алгоритма вариационного усвоения в зависимости от различных наклонов интегральных траекторий и расположения их в пространстве.

В результате был написан алгоритм ассимиляции данных наблюдений интегралов наклонных траекторий для одномерной задачи в двумерном пространстве. Проведены численные эксперименты с различными траекториями, исследована сходимость итерационного процесса в зависимости от параметров.

Работа проведена при поддержке гранта РНФ № 17-17-01305 «Динамические и динамико-стохастические модели термосферы и ионосферы и системы усвоения данных» (рук. академик РАН В. П. Дымников).

Литература

1. Ostanin A. P., Kulyamin D. V., Dymnikov V. P. Numerical modelling of the earth's ionosphere f region – IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, 2017, –Vol. 96, No. 1. C. 012011(1)–012011(11).
2. Agoshkov V.I. The formulation and study of some variational assimilation problems and inverse problems in ionosphere – Russ. J. Numer. Analysis and Math. Modelling, 2018, Vol.33, No.2, pp. 67-83.
3. В.И. Агошков. Избранные труды, том I. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. – Москва, ИВМ РАН, 2016.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОЙ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ В ОТКРЫТОЙ АКВАТОРИИ

Мастинен В.А.¹, Лезина Н.Р.², Агошков В.И.³

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, ВТМ; ЦХАБД МГУ, e-mail: mas.valyok@yandex.ru

2) ИВМ РАН; ЦХАБД МГУ, e-mail: lezina@phystech.edu

3) МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, ВТМ; ИВМ РАН; ЦХАБД МГУ, e-mail: agoshkov@inm.ras.ru

Коррекция результатов расчетов по модели с помощью данных наблюдений представляет собой одну из наиболее актуальных задач в математическом моделировании геофизических процессов. В частности, для такой коррекции может использоваться вариационная ассимиляция данных наблюдений [1]. Исследование и решение задач вариационной ассимиляции данных затрудняется не только сложностью математических моделей и геометрии моделируемых областей (например, реальной конфигурацией океанов и морей), но и большим объемом данных, необходимых для обеспечения реализуемости рассматриваемых алгоритмов на практике. Это влечёт за собой необходимость создания, развития и использования параллельных алгоритмов ассимиляции данных для эффективного численного моделирования.

В настоящей работе рассматривается параллельный алгоритм для процедуры четырехмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре на «жидкой» границе [2] в задаче о распространении тепла. Проведены численные эксперименты с использованием данного алгоритма и представлены их результаты, а также реализована параллельная версия алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-31-00096 мол а (в рамках которого предложен алгоритм и проведены численные эксперименты). Настоящая работа содержит результаты проекта "Интеллектуальный анализ больших данных в задачах экологии и охраны окружающей среды", выполняемого в рамках реализации Программы Центра компетенций Национальной технологической инициативы «Центр хранения и анализа больших данных», поддерживаемого Министерством науки и высшего образования Российской Федерации по Договору МГУ им. М.В.Ломоносова с Фондом поддержки проектов Национальной технологической инициативы от 11.12.2018 № 13/1251/2018 (в рамках которого реализована параллельная версия алгоритма для решения задач с большим объемом данных).

Литература

1. Agoshkov V. I., Parmuzin E. I., Zalesny V. B., Shutyaev V. P., Zakharova N. B., Gusev A. V. Variational assimilation of observation data in the mathematical model of the Baltic Sea dynamics //Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2015. – Т. 30. – №. 4. – С. 203-212.
2. Agoshkov V. I., Shelopt T. O. The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with 'liquid' boundaries //Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2017. – Т. 32. – №. 3. – С. 147-164.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНОГО ИСТОЧНИКА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ОТКРЫТОЙ АКВАТОРИИ

Агошков В.И.¹, Шелопут Т.О.², Сорокин А.С.³

1) *ВТМ ВМК МГУ, ИВМ РАН, ЦХАБД МГУ, e-mail: agoshkov@inm.ras.ru*

2) *ИВМ РАН, ЦХАБД МГУ, e-mail: sheloput@phystech.edu*

3) *ВТМ ВМК МГУ, ЦХАБД МГУ, e-mail: sorokinaleksandr96@gmail.com*

Загрязнение акваторий Мирового океана — одна из самых серьезных экологических проблем современности. Выявление источников загрязняющих примесей и тех способов, которыми загрязнения распространяются в природной среде, является основной целью большинства исследований природоохранного характера. В подобных задачах распространения загрязняющих веществ по водной поверхности удобно рассматривать данные вещества как пассивную примесь.

В настоящей работе рассматривается задача обнаружения и локализации граничных источников пассивной примеси в открытой акватории. В качестве математической модели распространения загрязнения по поверхности моря была использована модель, основанная на системе линейных нестационарных уравнений конвекции-диффузии-реакции. Сформулирована обратная задача о восстановлении граничного источника примеси по данным наблюдений с поверхности моря.

При решении задачи был использован метод, основанный на теории сопряженных уравнений и оптимального управления [1]. Был предложен итерационный алгоритм решения поставленной задачи и приведены результаты численного эксперимента по использованию предложенного алгоритма для модельной задачи о восстановлении источников примеси в акватории Черного моря.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 19-71-20035, в рамках которого задача была сформулирована и исследована), а также содержит результаты проекта "Интеллектуальный анализ больших данных в задачах экологии и охраны окружающей среды", выполняемого в рамках реализации Программы Центра компетенций Национальной технологической инициативы «Центр хранения и анализа больших данных», поддерживаемого Министерством науки и высшего образования Российской Федерации по Договору МГУ им. М.В.Ломоносова с Фондом поддержки проектов Национальной технологической инициативы от 11.12.2018 № 13/1251/2018.

Литература

1. Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М.: ИВМ РАН, 2016. — 244 с.

ИНФОРМАЦИОННО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ВИРУСНОЙ ИНФЕКЦИИ

Горбатова А.С.¹

ВМК МГУ, кафедра ВТМ, e-mail: gorbatova105@gmail.com

Математическое моделирование в системной иммунологии решает важнейшую задачу описания совокупности протекающих в организме иммунных процессов.

В данной работе рассматриваются две модели, описывающие реакцию иммунного ответа на вирус лимфоцитарного хореоменингита (ВЛХМ). ВЛХМ — это вирусная инфекция, хорошо поддающаяся наблюдению в лабораторных условиях, что позволяет получить достаточное количество экспериментальных данных и строить с их помощью математические модели заболевания.

Целью работы является сравнение математических моделей, представляющих собой системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, и выбор наилучшей из них. Первая модель описывается как система из 4 уравнений [1]:

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = \beta V(t) \left(1 - \frac{V(t)}{\theta_V}\right) - \gamma_{VE} E(t) V(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = \alpha_P (P_0 - P(t)) + \frac{b_P V(t-\tau) P(t-\tau)}{(1+W(t)/\theta_P)^2} - \alpha_{AP} V(t - \tau_A) V(t) P(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = -\alpha_E E(t) + \frac{b_E V(t-\tau) P(t-\tau)}{(1+W(t)/\theta_E)^2} - \alpha_{AE} V(t - \tau_A) V(t) E(t) \\ \frac{dW(t)}{dt} = b_W V(t) - \alpha_W W(t) \end{cases}$$

Вторая модель является ее расширением, описывающим, кроме клеток иммунной системы, вирусных частиц и вирусной нагрузки, также динамику клеток-мишеней.

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = \frac{\beta C(t-\tau_V)}{1+V(t)/\theta_V} - \sigma V(t) (C_0 - C(t)) - \alpha_V V(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = \sigma V(t) (C_0 - C(t)) - \gamma_{CE} C(t) E(t) - \alpha_C C(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = \alpha_P (P_0 - P(t)) + \frac{b_P V(t-\tau) P(t-\tau)}{(1+W(t)/\theta_P)^2} - \alpha_{AP} V(t - \tau_A) V(t) P(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = -\alpha_E E(t) + \frac{b_E V(t-\tau) P(t-\tau)}{(1+W(t)/\theta_E)^2} - \alpha_{AE} V(t - \tau_A) V(t) E(t) \\ \frac{dW(t)}{dt} = b_W V(t) - \alpha_W W(t) \end{cases}$$

В ходе работы был использован информационный критерий Акаике[2], а также проведен анализ доверительных интервалов методами Бустрапа и профилирования функции правдоподобия.

По результатам работы было выявлено, что модель из 4 уравнений информационно лучше модели из 5 уравнений, также более качественно приближает экспериментальные данные.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-01-00636).

Литература

1. G. Bocharov. Modelling the Dynamics of LCMV Infection in Mice: Conventional and Exhaustive CTL Responses // J. theoretical Biology, 1998, Т 192, с. 283-308.
2. Akaike H. A new look at the statistical model identification // IEEE Transactions on Automatic Control. December 1974. 19, 6. 716–723.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕРФЕРОНА

Донец Д.О.¹, Бочаров Г.А.²

1) МФТИ (ФПМИ, ВГТБМ) e-mail: darya.donets@phystech.edu

2) ИВМ РАН, e-mail: bocharov@m.inm.ras.ru

Цель данной работы — построение и калибровка математической модели внутриклеточной регуляции интерферона. В ходе исследования была разработана математическая модель, которая описывает динамику сразу нескольких биологических элементов (переменных модели): частицы вируса и интерферона, белков IRF3/7 и STAT, а также генов ISGs и RIG-I.¹ Модель включает в себя 18 параметров: константы скорости рождения/гибели частиц, синтеза/разрушения белков, активации/деактивации генов. Получаем систему ОДУ, состоящую из 9 уравнений. Модель построена в двух версиях: детерминистической (реализована с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка) и стохастической (реализована с помощью алгоритма Гиллеспи). Проведен анализ чувствительности. Численная реализация и исследование выполнены с использованием программного обеспечения JuliaDifferentialEquations. Источник: <http://JuliaBox.com>.

Данная модель может быть расширена путем рассмотрения диффузии интерферона, что позволяет провести численные расчеты для простой модели лимфатического узла. Решается уравнение реакции-диффузии:

$$-\nabla D \cdot \text{grad}(I(x;t)) + d_I \cdot I(x;t) = F(x)$$

где D - тензор диффузии, d_I - скорость деградации интерферона, и рассматриваются то-

чечные источники $F(x) = \sum_{k=1}^K \rho \cdot (x - x_k)$ (x_k - набор случайных точек). Для построения геометрической модели лимфоузла использовался OpenCascade и Ani3D/aniAFT для построения тетраэдральной сетки. Используемые методы: алгоритм продвигаемого фронта и алгоритмы, основанные на тетраэдризации Делоне. Геометрическая модель включает в себя оболочку лимфоузла (толщина 0.1 мм), трабекулярные синусы (цилиндры длиной 0.5 мм и диаметром 0.05 мм) и кондуиты (шары диаметром 0.0005 мм). Код написан на языке Си с использованием программного обеспечения OpenCascade и Ani3D. Автор кода - А.А. Данилов². Вторая часть включает себя написание кода для решения уравнения реакции-диффузии. Реализация модели выполнена на языке Fortran с использованием пакета Ani3D. В ходе написания программы были реализованы следующие шаги: подключение файла с адаптивной сеткой, составление СЛАУ с помощью метода конечных элементов, формирование граничных условий и решение СЛАУ с помощью метода бисопряженных уравнений.

Исследования проводились при поддержке гранта РФФИ №17-01-00636 "Математическое моделирование структуры и функционирования иммунной системы".

Литература

1. Melanie Rinas, Data-driven modeling of the dynamic competition between virus infection and the antiviral interferon response, the University of Heidelberg (Germany)
2. Bocharov G., Danilov A., Vassilevski Yu., Marchuk G.I., Chereshev V.A., Ludewig B. (2011) Reaction-Diffusion Modelling of Interferon Distribution in Secondary Lymphoid Organs. Math. Model. Nat. Phenom., 6(7): 13-26.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИНФИЦИРОВАНИЯ КЛЕТОК ПРИ ВИЧ-ИНФЕКЦИИ

Гребенников Д.С.

*Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука
Российской академии наук, e-mail: dmitry.ew@gmail.com*

Распространение вируса иммунодефицита человека-1 (ВИЧ) в лимфоидных тканях организма осуществляется посредством двух механизмов: 1) передача вирусного генома от инфицированных клеток неинфицированным $CD4^+$ Т-клеткам при контакте с образованием вирусного синапса, 2) инфицирование $CD4^+$ Т-клеток свободными вирусными частицами, которые были секретированы инфицированными клетками во внеклеточное пространство после завершения всех стадий цикла внутриклеточной репликации. Оба механизма учитываются в разработанной стохастической модели инфицирования клеток. Скорости событий интеграции вирусной ДНК в хромосому клетки-мишени в результате реализации одного из механизмов пропорциональны числу контактирующих с клеткой-мишенью инфицированных клеток или свободных вирусных частиц, находящихся на поверхности мембраны клетки-мишени, соответственно. С момента начала инфицирования клетки скорости инфицирования снижаются экспоненциально за счет снижения экспрессии молекул CD4 на поверхности клетки. В результате, интервалы между событиями интеграции новых провирусов в результате инфицирования моделируются следующим экспоненциальным распределением:

$$P(\tau \mid t^s) = \exp\left(-\int_{t^s}^{t^s+\tau} (k_{free} V(t) + k_{cell} N_{neigh}(t)) e^{-(t-t_{inf})} dt\right) \quad (1)$$

где τ — интервал между временем предыдущего t^s и следующего $t^s+\tau$ события интеграции провируса, $V(t)$ — число свободных инфицирующих вирусных частиц, $N_{neigh}(t)$ — число контактирующих инфицированных клеток, t_{inf} — время начала инфицирования клетки-мишени, t_d — характерное время снижения экспрессии молекул CD4 с момента начала инфицирования. Численные реализации модели получены с помощью адаптации алгоритма Гиллеспи для неоднородных по времени скоростей процессов. Полученные распределения количества интегрированных провирусов в инфицированной клетке при разных условиях внеклеточной среды $V(t)$, $N_{neigh}(t)$ калибруются по литературным данным. Разработанная стохастическая модель инфицирования клеток интегрируется в многомасштабную модель распространения ВИЧ в лимфоидных тканях, в которой описывается пространственно-временная динамика движения клеток, внеклеточного поля свободных вирусных частиц и молекул интерферона, внутриклеточная динамика репликации ВИЧ и противовирусного ответа системы интерферонов I типа. Приводятся численные решения многомасштабного моделирования распространения локального очага ВИЧ-инфекции в течение 48 часов. Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ №18-11-00171 (постановка задачи, разработка многомасштабной модели), РФФИ №18-31-00356 (калибровка стохастической модели инфицирования клеток).

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Третьякова Р.М.¹, Бочаров Г.А.²

1) МГУ, ВМК, кафедра ВТМ, e-mail: rufina3kova@gmail.com

2) МГУ, ВМК, кафедра ВТМ, e-mail: gbocharov@gmail.com

Системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (далее ДУЗА) используются в современном математическом моделировании в таких областях как физика, биология, экология, иммунология. По сравнению с моделями на основе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), модели основанные на ДУЗА позволяют описать более широкий класс процессов, а также демонстрируют лучшую согласованность с экспериментальными данными.

Для решения задачи Коши для системы ДУЗА создано достаточно численных методов, однако количество программных реализаций существенно меньше чем для систем ОДУ. Также, существующие программные комплексы для решения ДУЗА не предназначены для решения жестких задач.

Программный комплекс DIFSUBDEL, разработанный Г.А. Бочаровым и А.А. Романюхой в 1986 году, предназначен решения задачи Коши для системы жестких ДУЗА. В программе реализованы два различных метода численного решения ДУЗА на основе линейных многошаговых методов: метод Адамса-Бэшворта-Мултона и метод Гира. Теоретические аспекты данных методов описаны в [1], а детали исходной реализации комплекса в [2].

Целью нашей работы была переработка комплекса DIFSUBDEL с использованием современных технологий программирования. Основные принципы переработки:

1. Были исключены операторы условного и безусловного перехода (GOTO). Вместо них использовались базовые управляющие последовательности (ветвление, цикл).
2. COMMON-блоки были заменены структурами, в результате чего программа стала потокобезопасной.
3. Статическая аллокация памяти была заменена динамической.
4. В программном комплексе была введена явная типизация.

Проведенная работа существенно улучшила читаемость кода, упростила его модификацию, а также обеспечила возможность использовать комплекс в качестве блока в системах, использующих технологии параллельного программирования.

Было проведено тестирование обновленного программного комплекса DIFSUBDEL на девяти различных системах ДУЗА, среди которых присутствовали жесткие. Результаты тестирования позволяют заключить, что переработка не отразилась на точности решения систем ДУЗА.

Работа поддержана грантами РФФИ № 18-31-00356, РНФ № 18-11-00171.

Литература

1. Бочаров Г.А., Романюха А.А. Численное решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе линейных многошаговых методов. Аппроксимация, устойчивость и сходимость. // АН СССР (1986), Препринт №116.
2. Бочаров Г.А., Романюха А.А. Численное решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе линейных многошаговых методов. Алгоритм и программа. // АН СССР (1986), Препринт №117.

УМЕНЬШЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ ОПТИМИЗИРУЕМОГО ФУНКЦИОНАЛА В МЕТОДЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ТТ

Желтков Д.А.¹

1)ИВМ РАН им Г. И Марчука, e-mail: dmitry.zheltkov@gmail.com

Метод глобальной оптимизации на основе тензорных поездов (Tensor Train, ТТ) [1], успешно применяется к задаче докинга белок-лиганд [1,2], задаче определения параметров моделей [3] и ряду других задач. Для ряда задач сложность метода близка к линейной по размерности, что позволяет решать задачи больших размерностей [4,5].

Метод использует стратегии поиска аналогичные методу ТТ-крестовой аппроксимации [6], при этом приближение тензора явно не строится, хотя данных, получаемых в процессе работы метода, достаточно для построения некоторой, возможно достаточно грубой, аппроксимации тензора в ТТ формате. При этом, для тензора в ТТ-формате возможен быстрый поиск больших по модулю элементов [7].

Таким образом, явно построив приближение в процессе работы метода глобальной оптимизации на основе ТТ, можно найти максимальные по модулю элементы этого приближения и использовать полученные позиции для поиска оптимального элемента исходного функционала. Это позволит снизить для ряда задач число итераций или ранги метода, снизив общее число вычислений значений оптимизируемого функционала.

В докладе будут представлены этот и другие подходы, позволяющие снизить сложность определения параметров модели ВИЧ-инфекции с помощью метода глобальной оптимизации на основе ТТ-разложения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No18-31-00356.

Литература

1. Желтков Д. А. и др., TTDock: метод докинга на основе тензорных поездов //Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – №. 3. – С. 279-291.
2. Oferkin I. V. et al., Evaluation of the docking algorithm based on tensor train global pttimization //Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8. – №. 4.
3. Zheltkova V. V. et al., Tensor based approach to the numerical treatment of the parameter estimation problems in mathematical immunology //Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2018. – Т. 26. – №. 1. – С. 51-66.
4. Sulimov A. V. et al., Evaluation of the novel algorithm of flexible ligand docking with moveable target-protein atoms //Computational and structural biotechnology journal. – 2017. – Т. 15. – С. 275-285.
5. Sulimov A. et al., Supercomputer docking with a large number of degrees of freedom //SAR and QSAR in Environmental Research. – 2019. – С. 1-17.
6. Oseledets I., Tyrtshnikov E. TT-cross approximation for multidimensional arrays //Linear Algebra and its Applications. – 2010. – Т. 432. – №. 1. – С. 70-88.
7. Lebedeva O. S., Tensor conjugate-gradient-type method for Rayleigh quotient minimization in block QTT-format //Russian journal of numerical analysis and mathematical modeling. – 2011. – Т. 26. – №. 5. – С. 465-489.

Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

Председатель: академик РАН **Моисеев Е.И.**

О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ РАВНОСТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ РИССА И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Денисов В.Н.¹

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра ОМ
e-mail: vdenisov2008@yandex.ru

Пусть $u(x, t)$ - решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x), \quad x \in E^N, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in E^N, \quad (2)$$

где $f(x) \in C(E^N)$ и удовлетворяет локальному условию Гельдера (см. [1], с. 37), и пусть

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^m, \quad m > 0. \quad (3)$$

Пусть $S_R^\alpha f(x)$ обозначает средние Рисса порядка $\alpha > 1$ от $f(x)$

$$S_R^\alpha f(x) = \frac{C}{R^N} \int_0^R \rho^{N-1} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^\alpha \left[\frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \sigma M(x, f, \sigma) d\sigma\right] d\rho,$$

где $M(x, f, \sigma)$ – среднее по поверхности сферы радиуса σ с центром в точке x .

Теорема. Пусть $d(x, t) = u(x, t)/t$, где $u(x, t)$ решение (1), (2), $f(x)$ удовлетворяет условию (3), и $\alpha = \alpha(t) > 0$ - монотонно возрастающая функция, такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\alpha(t)}} = 0$. Для того, чтобы существовал предел $\lim_{t \rightarrow \infty} d(x, t) = A(x)$, равномерно по x на каждом компакте K в E^N , необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim_{t \rightarrow \infty} S_{2\sqrt{\alpha(t)}\sqrt{t}}^{\alpha(t)} f(x) = A(x)$, равномерно по x на каждом компакте K в E^N . При этом имеет место оценка $\frac{C_2}{\alpha(t)} \leq \sup_K \frac{|d(x, t) - S_{2\sqrt{\alpha(t)}\sqrt{t}}^{\alpha(t)} f(x)|}{(1 + |x|)^m} \leq \frac{C_1}{\alpha(t)}, \quad t \geq t_0 > 0, C_1 > 0, C_2 > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

Литература

1. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа // М., Мир.-1968.
2. Денисов В.Н. О стабилизации средних по времени от разности решений задачи Коши для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения (1987) т.23, №1, с.47-62.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ИХ ТИПЫ

Коровина М.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМиК, кафедра общей математики,
e-mail: betelgeuser1@yandex.ru

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с коэффициентами голоморфными в некоторой окрестности бесконечности

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right) u(x) + \dots + a_0(x)u(x) = 0 \quad (1)$$

Здесь коэффициенты $a_i(x)$ регулярны на бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, что функции $a_i(x), i = 0, 1, \dots, n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$. Задача заключается в построении асимптотик решений уравнения (1) в окрестности бесконечно удаленной особой точки. Заметим, что бесконечность является иррегулярной особой точкой уравнения. Задача построения асимптотик уравнения (1) рассматривалась в работе Пуанкаре [1], затем в работе Стернберга и многих других авторов.

Уравнение (1) путем замены $x = \frac{1}{r}$ сводится к уравнению с вырождением типа клова второго порядка в нуле.

$$H\left(r, -r^2 \frac{d}{dr}\right) u = 0 \quad (2)$$

где

$$H\left(r, -r^2 \frac{d}{dr}\right) = \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i$$

Основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$ равен $H_0(p) = H(0, p)$.

Теорема. Асимптотика решения уравнения (2) будет представима в виде суммы конормальной асимптотики и асимптотики вида

$$\sum_{j=1}^n \exp\left(\frac{p_j}{r} + \sum_{i=1}^{n-h} \frac{\alpha_i^j}{r^m}\right) \sum_l b_l^j r^l$$

Здесь через p_j обозначены корни основного символа, h – индекс сингулярности уравнения (2), α_i^j и m соответствующие числа.

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires // Acta math. 1886, v. 8, p. 295-344

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ОБЩИМ ОПЕРАТОРАМ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Крицков Л.В.¹

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра общей математики, e-mail: kritskov@cs.msu.ru

Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор, порождаемый дифференциальной операцией ($D = d/dx$)

$$A = (-1)^n D^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} D^k q_k(x) D^k + q_0(x) \quad (1)$$

на всей прямой $\mathbb{R}$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющими условию равномерной локальной суммируемости

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|x-y| \leq 1} |q_k(y)| dy < \infty. \quad (2)$$

Рассмотрим семейство $\{E_\lambda\}$ спектральных проекторов (разложение единицы) оператора $\mathcal{A}$ и соответствующую ему спектральную функцию $\theta(\lambda; x, y)$, определяемую равенством $E_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(\lambda; x, y) f(y) dy$.

Для оператора $\mathcal{A}$ установлена равномерная по $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \geq 0$ оценка приращения спектральной функции $\theta(\lambda; x, y)$ на диагонали вида

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\theta((\mu+1)^{2n}; x, x) - \theta(\mu^{2n}; x, x)| = O(1), \quad (3)$$

на основании которой доказана теорема о равномерной на $\mathbb{R}$ сходимости спектральных разложений $E_\lambda f(x)$.

Теорема. Если $f(x)$ принадлежит области определения оператора $\mathcal{A}^\alpha$ с показателем $\alpha > \frac{1}{4n}$, то $E_\lambda f(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$ и справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |E_\lambda f(x) - f(x)| = o\left(\lambda^{-\alpha + \frac{1}{4n}}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Результаты обобщают хорошо известные локальные результаты о равномерной сходимости спектральных разложений [1], а также равномерные на всей прямой оценки спектральной функции (3) работы [2] для оператора второго порядка и работы [3] для двучленных операторов любого четного порядка.

Литература

1. Костюченко А.Г. Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка $2m$ // Докл. АН СССР (1966) **168**, №2, с.276–279.
2. Ильин В.А., Крицков Л.В. Равномерная на всей прямой оценка обобщенных собственных функций одномерного оператора Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифф. уравнения (1995) **31**, №8, с.1323–1329.
3. Крицков Л.В. Оценки обобщенных собственных функций двучленного дифференциального оператора четного порядка // Дифф. уравнения (2000) **36**, №10, с.1307–1314.

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Савчук А.М.¹, Садовничая И.В.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра ТФФА,
e-mail: artem_savchuk@mail.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ОМ,
e-mail: ivsad@yandex.ru

Изучается одномерный оператор Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом. Рассматривается вопрос о возможности построения операторной группы, порожденной этим оператором, в различных пространствах. Доказаны оценки на рост построенной группы.

Пусть $L_{p,U}$ – оператор Дирака, порожденный в пространстве $H = L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi]$ дифференциальным выражением $l_p(y) = By' + Py$, где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix},$$

и регулярными краевыми условиями $U(y) = 0$. Потенциал предполагается суммируемым и комплекснозначным.

Теорема 1. Пусть $L_{p,U}$ – регулярный оператор Дирака. Тогда оператор $iL_{p,U}$ является генератором сильно непрерывной группы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов в H .

Теорема 2. Пусть $L_{p,U}$ – регулярный оператор Дирака с суммируемым внедиагональным потенциалом и периодическими краевыми условиями, действующий в $(L_1[0, \pi])^2$. Тогда оператор $iL_{p,U}$ является генератором сильно непрерывной группы $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, операторов в пространстве $(L_1[0, \pi])^2$. При этом операторная группа допускает оценку

$$\|T(t)\|_H \leq M(1 + |t|^p)e^{\beta|t|}, \quad (1)$$

где p – длина максимальной цепочки присоединенных функций, отвечающих собственным значениям с мнимой частью $|\operatorname{Im} \lambda| = \beta$.

Теорема 3. Пусть $L_{p,U}$ – регулярный оператор Дирака с суммируемым внедиагональным потенциалом и периодическими краевыми условиями, действующий в пространстве H . Тогда операторная группа, порожденная оператором $iL_{p,U}$, продолжается до сильно непрерывной группы в пространстве $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in [1, 2]$. Ограничение группы на пространство $(L_\mu[0, \pi])^2$, $\mu \in (2, \infty]$ также является сильно непрерывной операторной группой в этом пространстве. В любом случае имеет место оценка (1).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-11-01215.

ПРИНЦИП ЛЕРЕ-ШАУДЕРА В ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. БЕЗУСЛОВНАЯ БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ.

Сарсенби А.М.¹

1) Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, научный центр
теоретической и прикладной математики, e-mail: abzhahan@mail.ru

Изучается краевая задача

$$-y''(x) + \alpha y''(-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), -1 < x < 1, y'(-1) = y'(1) = 0, \quad (1)$$

для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, который является полуограниченным при $-1 < \alpha < 1$. В случае краевых условий Дирихле задача изучена в работе [1]. Построена функция Грина $G(x, t, \lambda)$ краевой задачи

$$-y''(x) + \alpha y''(-x) = \lambda y(x), -1 < x < 1, y'(-1) = y'(1) = 0, \quad (2)$$

система собственных функций которой образует полную ортонормированную систему в $L_2(-1, 1)$. Спектральная задача (2) имеет две серии однократных собственных значений. Методом Тамаркина–Биркгофа установлены следующие две теоремы.

Теорема 1. Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным, то разложения по собственным функциям задач (1) и (2) для любой функции $f(x) \in L_1(-1, 1)$ равномерно на заданном замкнутом интервале.

Из этой теоремы немедленно следует

Теорема 2. Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным, то система собственных функций спектральной задачи (1) образует базис пространства $L_2(-1, 1)$.

В связи с утверждением теоремы 2 естественным образом возникает вопрос о безусловной базисности или базисности Рисса указанного базиса. Ответом на этот вопрос служит следующая

Теорема 3. Если число $\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ не является четным, то всякий базис из собственных функций спектральной задачи (1) образует безусловный базис пространства $L_2(-1, 1)$.

Теорема 3 устанавливается с помощью теории базисности В.А. Ильина, развитой на случай дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией в работе [2]. Работа выполнена в рамках грантового проекта АР 05131225.

Литература

1. Sarsenbi A.A. Unconditional Basicity of eigenfunctions' system of Sturm-Liouville operator with an involution perturbation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. - Karaganda 2018. - № 3(91)/2018. – P. 117-127.
2. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution // Differential Equations. – 2017. – T. 53. – №1. – С. 33-46.

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМИ ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Хорошилова Е.В.¹

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра общей математики,
e-mail: khorelena@gmail.com

В работе рассматривается новый подход к решению задач терминального управления с фазовыми ограничениями, основанный на достаточных условиях оптимальности [1]–[3]. Основу подхода составляют лагранжев формализм и теория двойственности. Исследуется линейная управляемая динамика при наличии фазовых ограничений. Сечение фазовых ограничений в определенные моменты времени (на дискретной сетке) приводит к появлению новых промежуточных задач оптимального управления без фазовых ограничений. Эти задачи порождают промежуточные решения в промежуточных пространствах. Объединение всех промежуточных задач, в свою очередь, приводит к исходной задаче на всем отрезке времени.

Постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), & t_{i-1} \leq t \leq t_i, & i = \overline{1, S}, \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_i) = x_i^*, x(\cdot) \in AC^n[t_0, t_S], & u(\cdot) \in U, \\ x_i^* \in \operatorname{Argmin}\{\langle \varphi_i, x(t_i) \rangle \mid G_i x(t_i) \leq g_i, \quad x(t_i) \in R^n\}. \end{cases}$$

В каждом промежуточном пространстве мы имеем многогранное множество, полученное в результате сечения фазовых ограничений. На основе этого множества формируется задача линейного программирования. Таким образом, на каждом маленьком отрезке между двумя точками сечения формируется полноценная промежуточная задача оптимального управления с фиксированным левым концом и подвижным правым концом фазовой траектории. Правый конец порождает множество достижимости и одновременно является решением для промежуточной краевой задачи линейного программирования. Полученное решение является начальным условием для следующей промежуточной задачи оптимального управления.

Для решения промежуточных задач оптимального управления предлагается седловой метод экстраградиентного типа. Доказывается сходимость метода к решению по всем переменным задачи оптимального управления. Сходимость гарантирует получение решения задачи с заданной точностью.

Литература

1. Khoroshilova E.V. On application of Lagrange approach in a terminal control problem with intermediate state constraints // XVIII International Conference "Mathematical Optimization Theory and Operations Research" (MOTOR–2019). July 8–12, 2019, Ekaterinburg, Russia. Abstracts. P. 86–87.
2. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // Optim. Lett. **13**(3), 451–473 (2019)
3. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Saddle-Point Method for Solving Terminal Control Problem with State Constraints // IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018–Germeyer100). Moscow, October 22–27. Proceedings. In 2 vol. Vol.2, 110–113 (2018).

Секция: «Системное программирование и информационные технологии»

Председатель чл.-корр. РАН Воеводин В.В.

МЕТОД СЛОВООБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ВЫЯВЛЕНИЯ ХРОНОЛОГИЧЕСКОГО ПОРЯДКА ВОЗНИКНОВЕНИЯ СЛОВ: ПРОГРАММНЫЙ КОМПОНЕНТ

Полякова И.Н.¹, Филимонова Е.А.²

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, каф. Алгоритмических языков
e-mail : 1) polyakova@cs.msu.ru, 2) filkate0903@rambler.ru*

Для реализации задачи поиска хронологического порядка возникновения слов требуются методы, позволяющие по двум заданным словам определять последовательность появления их друг относительно друга. Выделено три основных метода – метод словообразования, метод этимологических словарей, метод гипонимов и гиперонимов.

Первый метод основан на сравнении морфемного строения заданных слов. По способу словообразования соответствующий метод можно разделить на несколько способов применительно к поставленной задаче: приставочный способ, суффиксальный способ, приставочно-суффиксальный способ, бессуффиксный способ и способ слияния.

Программный инструмент реализован таким образом, что для двух слов на входе можно узнать, каким методом одно слово образовано от другого. При поиске конкретного способа словообразования в реализации программы применяется идея о поиске различий в разборе слов. Лучшие результаты система показывает для бессуффиксного способа словообразования слов.

Таким образом, предложено три метода, позволяющих решить задачу ранжирования слов по времени их появления и выявления хронологического или псевдохронологического порядка возникновения слов. Один из методов - метод словообразования – реализован на практике и показывает хороший результат на собранной тестовой выборке.

Литература

1. Земская Е.А. Современный русский язык. Словообразование: учеб. пособие – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Флинта:Наука, 2011. – 328 с.
2. Кобозева И.М. Лингвистическая семантика. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 352 с.

МАСШТАБИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ КОМПОНЕНТОВ МОДУЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Глонина А.Б.¹

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АСВК,
e-mail: alevtina@lvk.cs.msu.ru

В работе [1] рассматривается задача моделирования модульных вычислительных систем (МВС) с целью проверки выполнения ограничений реального времени для таких систем. Параметризованная модель МВС представляет собой сеть временных автоматов с остановом таймеров [2]. Каждый тип компонента МВС (планировщик, виртуальный канал и т. п.) моделируется параметризованным автоматом. Поскольку на этапе проектирования МВС отсутствует возможность экспериментального сравнения поведения модели с поведением целевой МВС, корректность модели должна быть обоснована формально. Для каждого типа компонента МВС выделены требования корректности, которым должен удовлетворять соответствующий параметризованный автомат-модель. Для проверки выполнения этих требований используется подход автоматов-наблюдателей. Каждому требованию соответствует автомат-наблюдатель; выполнению требования – недостижимость специальной «плохой» локации в автомате-наблюдателе, функционирующем совместно с автоматом-моделью.

Параметризованные автоматы должны удовлетворять соответствующим требованиям корректности при всех значениях параметров. На практике диапазоны возможных значений параметров слишком велики для того, чтобы при верификации перебирать все значения. Автором были сформулированы дополнительные ограничения, накладываемые на автоматы-модели и автоматы-наблюдатели, и было доказано, что если автомат-модель и автомат-наблюдатель удовлетворяют соответствующим ограничениям, то для проверки выполнения требования на всех допустимых значениях параметров достаточно проверить выполнение этого требования на некотором подмножестве множества допустимых значений параметров. Например, было доказано, что если параметризованный автомат имеет один не останавливаемый таймер, k параметров, использующихся в сравнениях с этим таймером, и запрещено использование в сравнениях с таймером констант, отличных от 0, то для любой локации автомата верно, что если она не достижима при любых значениях параметров, не превышающих k , то она также не достижима и при любых других значениях параметров. Аналогичные утверждения были сформулированы и доказаны для параметризованных автоматов, имеющих таймеры с возможностью останова, а также параметры, задающие размеры массивов. Все разработанные автором модели компонентов МВС удовлетворяют введенным ограничениям, что позволило выполнить их верификацию за приемлемое время. Этих моделей достаточно для построения параметризованной модели бортовой вычислительной системы с архитектурой ИМА, что подтверждает применимость предложенного подхода на практике.

Литература

1. Glonina A.B., Bahmurov A.G. Stopwatch automata-based model for efficient schedulability analysis of modular computer systems // International Conference on Parallel Computing Technologies, Cham : Springer – 2017. – P.289–300.
2. Cassez F., Larsen K. The Impressive Power of Stopwatches // CONCUR 2000 – Concurrency Theory, Berlin, Heidelberg : Springer – 2000. – P.138–152.

ДИНАМИЧЕСКАЯ АУТЕНТИФИКАЦИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАБОТЫ С КЛАВИАТУРОЙ КОМПЬЮТЕРА

Казачук М.А.¹

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: kazachuk@mlab.cs.msu.su

Динамическая аутентификация пользователей по клавиатурному почерку является достаточно перспективным направлением исследований и широко применяется для обеспечения безопасности как домашних компьютеров пользователей, так и компьютеров крупнейших корпораций, а также для предотвращения несанкционированного доступа злоумышленников к web-сайтам [1]. Существующие в данной области решения имеют ряд существенных недостатков. В частности, они показывают недостаточно высокое качество работы (точность порядка 85–90%, ROC AUC ниже 0.90), не способны выделять стабильные по времени признаковые характеристики и не предлагают способ агрегационной оценки степени аномальности поведения пользователя за продолжительный период его работы за компьютером.

В рамках данной работы, предложен подход к подготовке данных, описывающих клавиатурный почерк пользователя, включающий в себя способ построения признакового пространства и подход к дальнейшей обработке признаков на основе дискретизации их по квантилям. Сокращение размерности признакового пространства производится путем отбора наиболее значимых признаков с использованием критерия Колмогорова-Смирнова. Данный подход позволил построить пространство стабильных по времени признаковых характеристик.

Дополнительно, разработан нечеткий метод выявления аномалий в данных на основе эллиптической кластеризации (ESFC) в RKHS, строящий в пространстве высокой размерности эллиптические области с оптимальным центром для выявления аномалий. Подбор оптимальных значений метапараметров данного алгоритма осуществляется собственно разработанным методом, строящим стабильные к смене тестового набора данных одноклассовые модели без использования информации о данных нелегитимного класса. Оценка аномальности поведения пользователя производится как за короткий, так и за продолжительный период работы – с использованием разработанного метода оценки аномальности поведения пользователей на основе анализа целых сессий работы за компьютером с использованием t-статистики Уэлша. По результатам экспериментов, метод ESFC превзошел качество распознавания существующих алгоритмов при классификации как отдельных векторов признаков, так и целых сессий работы пользователей за компьютером;

Также разработана архитектура и реализован экспериментальный образец мультягентного программного комплекса, использующий предложенный комплекс алгоритмов для обнаружения аномального поведения пользователей по особенностям работы с клавиатурой компьютера.

Литература

1. Kazachuk M., Petrovskiy M., Mashechkin I., Gorokhov O. Novelty Detection Using Elliptical Fuzzy Clustering in a Reproducing Kernel Hilbert Space // International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning. Springer, Cham, – 2018. – P.221–232.

Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

Председатели академик РАН **Четверушкин Б.Н.**, профессор **Попов А.М.**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОЛДИНГА БЕЛКА С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Попов А.М.¹

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: professorpopov@gmail.com

Работа посвящена развитию математических методов для решения задач современной молекулярной биологии. Целью работы является изучение эволюционного способа образования трехмерной структуры белка – фолдинга протеина [1,2]. Математическая задача фолдинга протеина сводится к задаче минимизации потенциальной энергии многоатомной молекулы. Требуется найти координаты атомов, приводящие к трехмерной структуре с минимальной энергией [3,4,5]. В работе предлагается проводить минимизацию многомерного функционала на основе стохастического Генетического алгоритма. Информация о жестких связях атомов в молекуле учитывается алгоритмом Shake как в методе молекулярной динамики со связями. Исследована сходимость алгоритма и получены оптимальные параметры трех основных операторов Генетического алгоритма.

Интересные результаты получены на основе идеи о разных временах сворачивания разных частей белка. Эти процессы наблюдаются экспериментально, что является одной из гипотез быстрой сворачиваемости белка по сравнению с численными оценками количества операций при прямой численной оптимизации.

Показано, что ускорение сворачиваемости действительно может происходить таким образом. Вначале собираются определенные части белка, а затем эти части как макромолекулы, обладающие жесткими связями, участвуют в полной сборке протеина.

Исследование влияния метода сборки проведено на примере молекулы аланина.

Литература

1. Попов А.М. Вычислительные нанотехнологии, М. КноРус, 2014.
2. Малютина Э.Э. Построение адаптивных сеток с использованием генетических алгоритмов // Математическое моделирование. 2001. - Т. 13, №9.
3. Goldberg D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Reading: Addison Wesley, New York, 1989 - 412p.
4. P.Y.Tabakov and V.B.Bajic. Genetic Algorithms and extraction of rules for detection of short DNA motifs. International journal of solids and structures, Vol. 40, No. 3, 2003.
5. Goldberg D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Reading: Addison Wesley, New York, 1989 - 412p.

МЕТОДЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КОДОВ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ПОПУЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Ершов Н.М.¹

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра АНИ, e-mail: ershov@cs.msu.ru

Актуальным подходом к решению многомерных задач непрерывной оптимизации является применение популяционных методов оптимизации [1], к которым относятся эволюционные алгоритмы (генетические, метод дифференциальной эволюции) и роевые (метод роя частиц, алгоритм бактериального поиска и т.д.). Алгоритмы данного класса устроены по одной общей схеме: имеется популяция фиксированного размера отдельных особей, представляющих возможные решения оптимизационной задачи, которые выполняют коллективный поиск искомого глобального экстремума. Ключевым моментом такого поиска оказывается взаимодействие особей популяции, при этом разные алгоритмы реализуют разные схемы взаимодействия, эмулируя тот или иной аспект коллективного поведения соответствующего биологического или физического прототипа. Несмотря на существующее разнообразие алгоритмов указанного класса, при организации взаимодействия внутри популяции все они оперируют ограниченным числом паттернов взаимодействий.

Отличительной особенностью популяционных алгоритмов является их высокая вычислительная сложность, которая во многих важных приложениях усугубляется сложностью вычисления целевой функции [2]. С другой стороны, эти же алгоритмы в силу своей природы обладают высокой степенью встроенного параллелизма, т.к. большая часть операций в них выполняется параллельно или над отдельными особями (оператор мутации), или над парами особей (оператор скрещивания). Перечисленные факты делают популяционные методы оптимизации перспективным объектом для параллельной реализации [3]. Ограниченный список паттернов взаимодействия делает возможным выполнение автоматического распараллеливания заданного популяционного алгоритма под заданную модель параллельного выполнения. Целями данной работы являются: 1) выделение, классификация и формализация паттернов взаимодействия между особями популяции на основе анализа наиболее популярных популяционных алгоритмов на примере решения задачи непрерывной оптимизации; 2) разработка средств высокоуровневого описания популяционных алгоритмов для решения данного класса задач; 3) программная реализация разработанного подхода, позволяющая полностью автоматически генерировать для заданного алгоритма оптимизации программу на языке C++ с учетом указанной пользователем модели выполнения; 4) разработка прокси-приложений, эмулирующих работу популяционных алгоритмов с целью исследование эффективности их распараллеливания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-07-01562 А).

Литература

1. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
2. Полуян С.В., Ершов Н.М. Применение параллельных эволюционных алгоритмов оптимизации в задачах структурной биоинформатики // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 4.
3. Ершов Н.М., Попова Н.Н. Естественные модели параллельных вычислений. М.: Изд-во МАКС Пресс, 2016.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОРООБРАЗОВАНИЯ В СКЛЕРЕ ГЛАЗА

Лукашевич Д.А.¹, Смирнов А.П.¹

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, АНИ, e-mail: dmitri.luc@gmail.com, sap@cs.msu.ru

Настоящая работа представляет моделирование процесса порообразования в склере глаза под воздействием лазерного нагрева. Локализованное лазерное воздействие лежит в основе нового способа лечения глаукомы, и моделирование процессов, связанных с ним, представляет естественный интерес. Поры в склере образуются вследствие нестационарного нагрева, вызывающего деформацию ткани, которая в свою очередь влияет на вероятность разрушения межмолекулярных связей и влечет за собой образование пор.

Цель работы – построение двумерной математической модели, в отличие от предыдущих работ [1], описывающей данный процесс, выбор численных методов для решения входящих в нее задач, и написание программы, реализующей модель.

В модели склера глаза рассматривается с макроскопической точки зрения, то есть как сплошная среда. Для уравнений, описывающих разрушение межмолекулярных связей, вводятся их непрерывные дифференциальные аналоги. В отличие от предыдущих работ, в модели не предполагаются «малые деформации», что существенно расширяет область ее применимости.

Помимо построения и реализации модели были найдены наиболее подходящие для медицинского использования лазерные режимы и мощности, что служит хорошим материалом как для дальнейших исследований [2], так и для реального применения.

Литература

1. A.I. Shnirelman et al., “A new mechanism for stress relaxation in cartilaginous tissue upon laser heating,” *Laser Phys.* 14, 404–408 (2004).
2. XVI Всероссийский молодежный Самарский конкурс-конференция научных работ по оптике и лазерной физике Самара 2017 г. Д.А. Лукашевич «Моделирование образования пор в биополимере при стационарном лазерном нагреве» <http://laser-optics.ru>

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСКОРЕНИЯ ПРОТОНОВ И ИОНОВ УГЛЕРОДА ЛАЗЕРНЫМ ИМПУЛЬСОМ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ АДРОННОЙ ТЕРАПИИ

Ечкина Е.Ю.¹, Гузминова Н.Ю.²

1)Московский государственный университет им. М.В. Ломоносов , ВМК , автоматизации научных исследований e-mail: ejane@cs.msu.ru

2) медицинский консультант, Лондон, Великобритания e-mail: nguzminova@gmail.com

Онкологические заболевания были и, к сожалению, остаются одной из основных причин смертности в мире. Использование адронной терапии для лечения данной категории больных является одним из перспективных направлений в медицине. Основным преимуществом использования пучков протонов и углеродных частиц является то, что доза излучения увеличивается очень медленно с увеличением глубины проникновения и достигает резкого максимума в точке (цели), в которой пучок останавливается, минимизируя повреждение близлежащих органов и тканей.

В настоящее время пучки ионов протона/¹²C используются для лечения различных видов опухолей. Однако, чтобы реализовать потенциальные преимущества адронной терапии, диапазон лучей протонных/углеродных частиц должен быть максимально точным в процессе лечения и доставки [1,2].

В работе приведен сравнительный анализ параметров лазерного импульса при математическом моделировании взаимодействия лазерного импульса с протонами и тяжелыми ионами карбона, приведены спектральные характеристики полученных энергий.

Литература

1. Буланов С.В. и др. Лазерное ускорение ионов для адронной терапии. //Успехи физических наук. – 2014. – т.184
2. Bulanov S.S. et al. Helium – 3 and helium – 4 acceleration by high power laser pulses for hadron therapy //Physical review special topics - accelerators beams (2015) **18**, 061302.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА ТОНКОЙ ПЕРВОЙ СТЕНКИ РЕАКТОРА-ТОКАМАКА СО ВСТРОЕННЫМ ОХЛАЖДЕНИЕМ

Жилкин А.С.¹, Сычугов Д.Ю.²

1) МГУ, ВМК, кафедра АНИИ, аспирант, e-mail: alkszh@yandex.ru

2) МГУ, ВМК, кафедра АНИИ, доцент, e-mail: sychugov@cs.msu.ru

В настоящее время в ряде стран ведется проработка проектов следующего после ITER поколения установок типа токамак – нейтронных источников [1] и демонстрационных реакторов [2]. По мере работы над проектами таких установок проясняются новые технические и научные проблемы, которые связаны с мощными потоками энергии и частиц при реакции термоядерного синтеза. Одной из таких проблем является защита чувствительных элементов конструкции реактора. Важным элементом защиты является первая стенка. Предварительные оценки показывают, что для длительного функционирования первой стенке реактора необходимо иметь собственную систему охлаждения.

В данной работе проводится численный анализ принятого на сегодняшний день варианта конструкции первой стенки проектируемого реактора ТИН (Термоядерный Источник Нейтронов) [2]. Рассматриваемая стенка имеет неоднородную структуру и состоит из трех типов элементов – буферов тепла, выполненных из тугоплавкого и теплоёмкого материала, двух типов трубок – носителей охлаждающего агента и элементов крепления.

Авторами разработана двумерная усредненная модель баланса тепла, позволяющая учитывать особенности конструкции стенки. Внутренняя сторона стенки принимает на себя идущие из плазмы тепловые потоки, а внешняя сторона изолирована вакуумной прослойкой от blankets. Модель включает в себя уравнения переноса тепла для двух типов трубок охлаждающей жидкости, текущей в противоположных направлениях, и уравнения теплопроводности для буферного материала. На внутренней границе стенки ставится граничное условие второго рода (заданный постоянный тепловой поток, идущий от плазмы), на внешней границе стенки ставится условие излучения.

Приводится ряд расчетов теплообмена для различных вариантов системы трубок и теплоносителей. Делаются выводы относительно параметров конструкции, способных обеспечить теплозащиту.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 17-07-00544 и 17-07-00883.

Литература

1. G.M. Voss, S. Davis, A. Dnestrovskij, A. Kirk, P.J. Knight, M. Loughlin, M.H. O'Brien, D. Sychugov, A. Tabasso, H.R. Wilson. Conceptual design of a component test facility based on the spherical tokamak. //Fusion Engineering and Design, v. 83, 2008, pp. 1648-1653
2. B.V. Kuteev, E.A. Azizov, P.N. Alexeev, V.V. Ignatiev, S.A. Subbotin and V.F. Tsibulskiy. Development of DEMO-FNS tokamak for fusion and hybrid technologies. //2015, Nucl. Fusion 55 073035

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ МАГНИТНЫХ ОСТРОВОВ ВНУТРИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ НА ОСНОВЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Зотов И.В.¹

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: iv-zotov@cs.msu.ru

Работа современных установок управляемого термоядерного синтеза токамак требует эффективного контроля структуры магнитных островов, возникающих в процессе временного развития винтовой неустойчивости плазмы. Появление таких островов приводит к дополнительному значительному переносу тепла из центра плазмы на периферию и сокращению времени разряда. Так, например, в эксперименте на установке DIII-D были получены циклические выбросы тепла, которые интерпретировались как переход от островной структуры с высокой теплоотдачей к структуре с низкой теплоотдачей [1]. Определение такой бифуркации островов требует знания распределения коэффициента запаса устойчивости q в процессе разряда в плазме. В частности, нахождение положения поверхности $q=2$, отвечающей за положение острова $m/n=2$, представляет существенный интерес в связи со значительными размерами острова, а также возможностями системы магнитных измерений. Кроме того, получение разрядов с высоким минимальным значением коэффициента запаса q в центре шнура позволяет переходить к разрядам с более высокими характеристиками (переход в так называемый H-режим) [2]. Основной целью данной работы является разработка математической модели для контроля магнитных островов в тороидальной плазме.

Для реконструкции равновесия и анализа островной структуры в режиме реального времени применяется параллельная версия диагностического кода RPB, использующая графические процессоры [3]. Дополнительно к электромагнитным измерениям используются данные об электронной температуре и плотности, полученные по другим (немагнитным) диагностикам. В модель включена конечная проводимость плазмы в классическом варианте (спитцеровская модель). Обсуждается возможность восстановления распределения коэффициента запаса устойчивости q из решения обратной задачи квазистационарного состояния плазмы с конечной проводимостью. Изучается зависимость решения задачи от точности исходных данных.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 17-07-00544, 17-07-00883.

Литература

1. Ida K., Kobayashi T., Yoshinuma M. et al Bifurcation physics of magnetic islands and stochasticity explored by heat pulse propagation studies in toroidal plasmas // Nuclear Fusion, **56** (2016), 092001.
2. Schuster E., Wehner W.P., Barton J.E. et al Enhanced reproducibility of L-mode plasma discharges via physics-model-based q-profile feedback control in DIII-D // Nuclear Fusion, **57** (2017), 116026.
3. Zotov I.V., Vysotsky L.I. High performance version of RPB code for determination of the plasma boundary in tokamak based on graphic processors // Journal of Physics: Conf. Series, XLVI Zvenigorod

МАТРИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ДОСТАВКИ ЛЕКАРСТВ

Шумкин Г.Н.¹

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИ, докторант
e-mail: georgiy-sh@yandex.ru

Проблема доставки лекарств является актуальной, т.к. многие современные разрабатываемые лекарственные, в том числе для лечения онкологических заболеваний, имеют плохую растворимость. Это ограничивает возможности их применения в медицинской практике, как из-за удорожания лечения, так и усиления нежелательных побочных эффектов.

Одним из известных решений является использование аэрогелей. Микрочастицы аэрогеля (100-1000 микрон) представляют собой нанопористый материал, в котором 90% объема занимают нанопоры. Большая часть нанопор имеет размер в 10-30 нм. Известны как неорганические аэрогели на основе диоксида кремния, так и органические аэрогели на основе полимеров, построенных на основе сахароз (альгинат натрия, крахмал), которые хорошо растворяются в воде. Процесс загрузки лекарственных молекул внутрь аэрогелей осуществляется в среде сверхкритического диоксида углерода при давлении выше 100 атм. и при температурах от 40 до 80 градусов Цельсия. За счет диффузии нанокластеров [3] лекарственных молекул внутри сверхкритического CO₂ образуются нанокристаллы внутри аэрогеля. Большая площадь поверхности нанокристаллов лекарств внутри аэрогеля позволяет в разы увеличить скорость растворимости лекарства, загруженного внутрь аэрогеля [1-2].

Однако использование аэрогелей имеет недостаток из-за их дороговизны, а также хрупкости аэрогелевого материала. В докладе предлагаются пути решения указанной проблемы для создания новых матричных материалов доставки лекарств. Обсуждаются многомасштабные модели, основанные на квантовомеханических расчетах, моделях порядка-беспорядка, крупномасштабных молекулярных расчетах. Предлагаются экспериментальные подходы для синтеза новых матричных материалов. Рассматривается роль суперкомпьютерного моделирования в разработке данных технологий.

Литература

1. Lovskaya D.D., Lebedev A.E., Menshutina N.V. Aerogels as drug delivery systems: In vitro and in vivo evaluations // Journal of Supercritical Fluids (2015), **106**, pp. 115–121
2. Smirnova Ir., Suttiruangwong S., Arlt W. Feasibility study of hydrophilic and hydrophobic silica aerogels as drug delivery systems // J. of Non-Crystall. Solids (2004), **350**, pp. 54-60

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГРУПП НАСЕЛЕНИЯ В ГОРОДСКОЙ СРЕДЕ

Киселёв Д.О.¹

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра АНИ, аспирант
e-mail: dmi3iii@yandex.ru

Доклад посвящен актуальной на сегодняшний день проблеме развития и динамики населения в городском образовании с точки зрения пространственно-динамического приближения. Население подразделяется на различные группы в соответствии с их экономическими и индивидуальными характеристиками. Например, население можно классифицировать по генетическим и фенотипическим признакам, по уровню дохода или образования. Вопрос мирного и эффективного взаимодействия групп между собой представляет одну из самых важных задач в рамках любого образования урбанистического типа. Математическая модель описывает задачу взаимодействия двух групп на качественном уровне с помощью системы из двух нелинейных стохастических дифференциальных уравнений. С учетом полученной численной модели автор проводит серию вычислительных экспериментов относительно данных для основных форм взаимодействия между группами населения. Отдельное внимание уделяется анализу полученных результатов для режимов сегрегации, ассимиляции и гетерогенного смешивания. Автор показывает возможности применения нового подхода в рамках современных задач урбанистики и перспективы для его дальнейшего развития.

Литература

1. Leiqiu Hu, Olga V. Wilhelmi, Christopher Uejio. Assessment of heat exposure in cities: Combining the dynamics of temperature and population. // Science of The Total Environment, Volume 655, 2019, Pages 1-12, ISSN 0048-9697.
2. Roberto Basile, María Durbán, Román Mínguez, Jose María Montero, Jesús Mur. Modeling regional economic dynamics: Spatial dependence, spatial heterogeneity and nonlinearities. // Journal of Economic Dynamics and Control, Volume 48, 2014, Pages 229-245, ISSN 0165-1889.

Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром»

Председатели профессор Нефедов Н.Н., профессор Бутузов В.Ф.

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВНУТРЕННЕМ СЛОЕ В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФфузия С ИСТОЧНИКОМ МОДУЛЬНО-КУБИЧНОГО ТИПА

Нефедов Н.Н.¹, Никулин Е.И.², Орлов А.О.³

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

3) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

Исследована сингулярно возмущенная периодическая задача для параболического уравнения реакция-диффузия в случае разрывного при некотором значении искомой функции источника – нелинейности f , описывающей реакцию (взаимодействие):

$$N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t, \varepsilon),$$

$$(x, y, t) \in D_t := \{(x, y, t) \in R^3 : x = (x, y) \in D \subset R^2, t \in R\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) = 0, (x, y) \in \Gamma, t \in R, u(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y, t + T, \varepsilon), (x, y) \in \bar{D}, t \in R,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, производная $\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}$ берется по внутренней нормали к гладкой границе Γ заданной двумерной области D ,

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon), & u > 0 \\ f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon), & u \leq 0, \end{cases}$$

где $f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon), f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon)$ – достаточно гладкие функции в рассматриваемой области определения, $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Рассмотрен случай существования внутреннего переходного слоя в условиях несбалансированной и сбалансированной реакции. Построено асимптотическое приближение и исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову периодических решений в каждом из рассмотренных случаев. Для этого используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Приведен пример и проведены численные расчеты, иллюстрирующие теоретический результат.

Литература

1. Nefedov N. N, Nikulin E. I. Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction–diffusion equations in the case of a rapid reaction. //Russian Journal of Mathematical Physics (2018) **25**, №1, с. 88–101.
2. Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Орлов А. О. Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // Журнал вычислительной математики и математической физики (2019) **59**, № 4, с. 611–620.

ВОПРОС ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ С ВНУТРЕННИМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Коцюбинский К.А.¹, Мельникова А.А.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики, e-mail: kkoitsubinsky@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики, e-mail: aa-melnikova@yandex.ru

В работе рассматривается вопрос существования гладкого решения задачи:

$$\begin{aligned}\varepsilon^4 u_{xx} &= f(u, v, x), & \varepsilon^2 v_{xx} &= g(u, v, x), & x &\in (0, L), \\ u_x(0) &= u_x(L) = 0, & v_x(0) &= v_x(L) = 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь функция $f(u, v, x)$ имеет разрыв первого рода в точке $x = a \in (0, L)$, ε – малый параметр. В работе [1] асимптотическими методами обосновано существование непрерывного решения вида контрастной структуры типа ступеньки задачи (1). В работах [2,3] доказана теорема существования гладкого решения системы уравнений при условии принадлежности неоднородности пространству Гёльдера. Задача данной работы – доказать непрерывное сшивание производных асимптотического приближения решения в точке разрыва.

На данный момент нами предложен следующий путь доказательства. Определим итерационный процесс:

$$\begin{aligned}-\varepsilon^4 u_{xx}^{(k)} + C_1 u^{(k)} &= C_1 u^{(k-1)} - f(u^{(k-1)}, v^{(k-1)}, x), \\ -\varepsilon^2 v_{xx}^{(k)} + C_2 v^{(k)} &= C_2 v^{(k-1)} - g(u^{(k-1)}, v^{(k-1)}, x), \\ u_x^{(k)}(0) &= u_x^{(k)}(L) = 0, & v_x^{(k)}(0) &= v_x^{(k)}(L) = 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные. Выбирая в качестве начального приближения (при $k = 0$) верхнее решение задачи (1), получим монотонно убывающую последовательность верхних решений. Выбирая в качестве начального приближения нижнее решение задачи (1), получим монотонно возрастающую последовательность нижних решений. Решения задач (2) для любого $k = 1, 2, \dots$ принадлежат классу $C^{(1)}[0, L]$. Далее следует обосновать, что данные последовательности сходятся равномерно вместе со своими производными к решению задачи (1), из чего будет следовать гладкость решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (номер проекта: 18-31-00204).

Литература

1. Коцюбинский К.А., Мельникова А.А. “Существование решения вида контрастной структуры в системе уравнений типа ФитцХью-Нагумо при наличии разрывной функции неоднородности”. Материал науч. конф. «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», 26-29 ноября 2018, Москва, РУДН. С.57-58.
2. C.V. Pao “Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations” // Plenum Press, New York. 1992.
3. Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // ЖВМ и МФ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983-2003.

СТАЦИОНИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВИДА ФРОНТА В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФFUЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

Полежаева Е.В.¹, Левашова Н.Т.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: pel789@yandex.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: natasha@npanalytica.ru

Рассматривается вопрос о стабилизации решения $v_\varepsilon(x, t)$ вида фронта начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} &= A(v, x) \frac{\partial v}{\partial x} + B(v, x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ v(x, 0) &= v_{ini}(x), \quad v(0, t) = u^0, \quad v(1, t) = u^1 \end{aligned} \quad (1)$$

на бесконечно большом временном промежутке к решению $u_\varepsilon(x)$ соответствующей стационарной задачи. Считается, что функции $A(v, x)$ и $B(v, x)$ – достаточно гладкие, а ε – малый параметр.

Теорема о стабилизации решения доказывается с использованием понятий верхнего и нижнего решений и следствий из теорем сравнения.

Верхнее и нижнее решения каждой из задач строятся как модификации асимптотических приближений второго порядка по ε решений этих задач.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема. При любой непрерывной начальной функции $u_{ini}(x)$, в начальный момент времени лежащей между верхним решением $\beta(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) и нижним решением $\alpha(x, \varepsilon)$ соответствующей стационарной задачи, выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v_\varepsilon(x, t) - u_\varepsilon(x)| = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 19-01-00327).

Литература

1. Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (2014) **54**, №10, с. 1594-1607.
2. Васильева А.Б. Контрастные структуры типа ступеньки для сингулярно возмущенного квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (1995) **35**, №4, с.520–531..
3. Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Ягремцев А.В. Существование решения в виде движущегося фронта у задачи типа реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной адвекции // Изв. РАН. Сер. матем. (2018) **82**, выпуск 5, с.131-152.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Нестеров А.В.

*МГПУ, кафедра прикладной информатики,
РЭУ им. Г.В. Плеханова, кафедра информатики, e-mail: andrenesterov@yandex.ru*

Строится асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малыми нелинейностью и диффузией

$$\varepsilon^2 (U_t + DU_x) = AU + \varepsilon F(U) + \varepsilon^3 B(U)U_{xx}, |x| < \infty, t > 0, U(x, 0) = H\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Здесь U – решение, ε – малый положительный параметр, D – диагональная матрица, $F(U)$, $B(U)$ достаточно гладкие, гладкая функция $\omega(x)$ быстро убывает вместе со всеми производными. Матрица A имеет однократное нулевое собственное значение, которому отвечает собственный вектор h_0 , вектор h^*_0 – собственный вектор матрицы A^T , отвечающий нулевому собственному значению, на ненулевые собственные значения матрицы A накладывается условие $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Дополнительно требуется, чтобы $(F(Z), h^*_0) = 0$, $B^T(Z) h^*_0 = 0 \forall Z$. Настоящая работа является продолжением работ [1],[2]. Основная цель настоящей работы – получение уравнения для главного члена асимптотики решения.

Асимптотика решения строится методом пограничных функций [3] и имеет вид

$$U(x, t) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\zeta, t) + \Pi_i(\xi, \tau)) + R_N = U_N + R_N,$$

$$\zeta = (x - Vt) / \varepsilon, \xi = x / \varepsilon, \tau = t / \varepsilon^2, V = (Dh_0, h_0^*) / (h_0, h_0^*).$$

Для всех членов асимптотики выписаны уравнения и получены начальные условия. Главный член асимптотики имеет вид $s_0 = \varphi_0(\zeta, t) h_0$, где φ_0 есть решение уравнения $\varphi_{0,t} + M \varphi_{0,\zeta\zeta} + (F_{\text{eff}}(\varphi_0))_{\zeta} + (B_{\text{eff}}(\varphi_0) \varphi_{0,\zeta\zeta})_{\zeta} = 0$.

Константа M и функции $F_{\text{eff}}(z)$, $B_{\text{eff}}(z)$ выражаются через данные исходной задачи. В частности, при квадратичной функции $F(U)$ и постоянной матрице $B(U)$ уравнение является уравнением Бюргерса-Кортевега-де Фриза

$$\varphi_{0,t} + M \varphi_{0,\zeta\zeta} + k \varphi_0 \varphi_{0,\zeta} + b \varphi_{0,\zeta\zeta\zeta} = 0.$$

Литература

1. Нестеров А.В., Шулико О.В. Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных с малой нелинейностью в критическом случае // ЖВМиМФ (2007), **47**, №3, с. 438-444.
2. Нестеров А.В., Шулико О.В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае // ЖВМиМФ (2010), **50**, №2, с. 268-275.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях // М.: Изд-во МГУ – 1978.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ С СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ 3 РОДА

Нефедов Н.Н.¹, Никулин Е.И.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nefedov@phys.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Рассматривается уравнение реакция-диффузия с сингулярно возмущенным краевым условием второго рода, естественно возникающее в математических моделях с быстрым потоком через границу:

$$N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, t, \varepsilon),$$

$$(x, t) \in D_t := \{(x, t) \in R^3 : x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, t \in R\},$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, t, \varepsilon) = u_\Gamma, x \in \Gamma, t \in R, u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), x \in \bar{D}, t \in R,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, производная $\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}$ берется по внутренней нормали к гладкой границе Γ заданной двумерной области D , $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

В работе показано существование периодических по времени решений погранслоного типа для двумерной задачи типа реакция-диффузия в случае сингулярно возмущенных краевых условий второго рода. Доказаны существование локальная единственность и асимптотическая устойчивость по Ляпунову таких решений. Показано, что решение может быть не единственным. Получены условия устойчивости по Ляпунову таких решений. Для доказательства использовались известные результаты ([1,2]), основанные на применении асимптотического принципа дифференциальных неравенств.

Работа поддержана проектом РФФИ 19-01-00327.

Литература

1. Valentin F Butuzov, Nikolay N Nefedov, Lutz Recke, and Klaus R Schneider. Periodic solutions with a boundary layer of reaction–diffusion equations with singularly perturbed neumann boundary conditions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(08):1440019, 2014.
2. N. N. Nefedov and E. I. Nikulin. Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction–diffusion equations in the case of a rapid reaction. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 25(1):88–101, Jan 2018

СЕМЕЙСТВО СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В SDC ФОРМЕ

Даник Ю.Э.¹, Дмитриев М.Г.²

1) ФИЦ ИУ РАН, e-mail: danik@isa.ru

2) ФИЦ ИУ РАН, e-mail: mdmitriev@mail.ru

Приводится подход к построению регуляторов состояния для квазилинейных систем управления, где коэффициенты зависят от состояния, и где присутствует параметр, который может принимать как малые, так и большие значения. Для этого класса систем строится параметрическое семейство регуляторов на основе аппроксимаций Падэ решения матричного алгебраического уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния [1].

В качестве примера рассмотрен класс нелинейных аффинных систем управления, где параметр, стоящий при управлении определяет или слабоуправляемую систему или систему с большим коэффициентом усиления. Матрица коэффициентов усиления $K(x, \varepsilon)$ в обоих случаях выбирается как положительно определенное решение матричного алгебраического уравнения Риккати, где все матрицы зависят от состояния x .

Регулятор представляется в форме

$$u(x, \varepsilon) = -\varepsilon R^{-1} B^T(x) K(x, \varepsilon) x. \quad (1)$$

где $K(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} (P A_{[2/2]}(x, \varepsilon) + P A_{[2/2]}^T(x, \varepsilon))$ есть положительно определенная матрица для всех $x \in X$, $\varepsilon > 0$, а $P A_{[2/2]}(x, \varepsilon)$ – двухточечная матричная Падэ аппроксимация порядка $[2/2]$ решения уравнения Риккати, которая содержит матричные полиномы второго порядка и строится на основе двух асимптотических приближений по малому и большому значениям параметра.

В случае линейной стационарной системы подобное семейство регуляторов обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы управления, т.е. система в этом случае стабилизируема регуляторов (1) при любом $\varepsilon > 0$. Для нелинейного случая проведены различные численные эксперименты, показывающие, что (1) – стабилизирующие регуляторы при больших интервалах изменения параметра ε , чем каждая из асимптотик.

Литература

1. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution //IFAC-PapersOnLine . Volume 51, Issue 32, 2018, Pp. 815-820.

**ТЕОРИЯ ГЕНЕРАЦИИ ТРЕТЬЕЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГАРМОНИКИ НА
ОСНОВЕ КАСКАДНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ОПТИЧЕСКОЙ
ГАРМОНИКИ В КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ**

Трофимов В.А.¹, Федотов М.В.², Харитонов Д.М.³

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ВМ, vatro@cs.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, fedotov@cs.msu.ru

3) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, dmitrykharitonov@yandex.ru

Преобразования частоты оптического излучения привлекают внимание учёных с момента создания лазеров. В данной работе предложен новый метод генерации третьей оптической гармоники (ГТГ), основанный на каскадной генерации второй гармоники (ГВГ) в среде с квадратичной нелинейностью. Как известно, при каскадной ГВГ в квадратичной среде индуцируется эффективная само-модуляция импульса на основной частоте, предсказанная в [1], которая позволяет формировать квадратичные солитоны.

В литературе ГТГ достигается либо в среде, обладающей кубичной нелинейностью, либо в среде с квадратичной нелинейностью сначала генерируется вторая оптическая гармоника, а затем имеет место генерация суммарной частоты, которая является также третьей оптической гармоникой. Нами показано, что появляющийся в среде эффективная кубическая нелинейность может быть использована для эффективной ГТГ.

Данный процесс описывается системой трёх безразмерных нелинейных уравнений Шрёдингера относительно комплексных амплитуд взаимодействующих волн. Из нее на основе метода многих масштабов выведена модифицированная система уравнений, которая содержит индуцированный кубичной нелинейный отклик среды, пропорциональный третьей степени от напряженности электрического поля, т.е. третьей степени комплексной амплитуды, а не только само-модуляцию импульса на основной частоте. Это слагаемое отвечает за процесс ГТГ.

В приближении длинных импульсов построено точное решение модифицированной системы уравнений. Показано, что процесс ГТГ может достигать 80% эффективности. Для подтверждения полученных результатов проводилось компьютерное моделирование исходной и модифицированной систем. В обоих случаях использовались консервативные разностные схемы, сохраняющие разностные аналоги законов сохранения дифференциальной задачи. Было показано, что на дистанциях, соответствующих длинам реальных физических кристаллов, решение модифицированной системы уравнений аппроксимирует с высокой точностью решение исходной системы.

Предложенный метод может быть использован и для задачи генерации пятой (и более высокой) гармоники в кубично нелинейной среде.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант 19-11-00113).

1. Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П. Нелинейные взаимодействия дифрагирующих световых пучков в квадратичной нелинейности. // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20, вып. 11, с. 339-343.

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЯМЫХ И ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ 3D НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЭВОЛЮЦИИ ЛАЗЕРО-ИНДУЦИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ПОЛУПРОВОДНИКА

Егоренков В.А.¹, Логинова М.М.¹, Трофимов В.А.¹

*1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов
e-mail: vatro@cs.msu.ru*

В настоящей работе рассматриваются подходы к численному решению задачи взаимодействия фемтосекундного лазерного импульса с полупроводником. 3D математическая модель процесса описывается системой нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений, состоящей из уравнений относительно концентраций заряженных частиц в зоне проводимости полупроводника, интенсивности лазерного излучения и уравнения Пуассона, записанного относительно потенциала светоиндуцированного электрического поля. Задача решается в прямоугольной области, граничные условия второго рода соответствуют отсутствию тока через поверхность полупроводника, который может быть помещен во внешнее электрическое поле.

Особое внимание уделено решению задачи Неймана для уравнения Пуассона, включенного в систему нестационарных дифференциальных уравнений. Для решения отдельного уравнения Пуассона на практике чаще всего используются прямые методы, например метод быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ). Однако, в рассматриваемом случае, правая часть уравнения Пуассона зависит от значений функций, полученных при численном решении других уравнений, входящих в систему. Таким образом, вычислительная погрешность и ошибки округления могут накапливаться и существенно искажать правую часть уравнения Пуассона. Это, в свою очередь, приводит к нарушению хорошо известного условия разрешимости задачи Неймана [1-2], связывающего граничные условия и правую часть уравнения Пуассона. Таким образом, для решения уравнения Пуассона с граничными условиями второго рода метод расщепления, реализованный с помощью итерационного процесса, оказывается более эффективным, чем прямой метод (БДПФ), что подтверждается результатами компьютерного моделирования. Важно также отметить, что для рассматриваемой задачи условие разрешимости задачи Неймана соответствует закону сохранения заряда. Следовательно, свойство консервативности разностной схемы является критически важным.

Для численного решения задачи построена консервативная симметричная конечно-разностная схема, которая реализуется с помощью оригинального трехэтапного итерационного процесса.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант №19-11-00113).

Литература

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. // Наука, 1976.
2. Atkinson K, Chien D, Hansen O. A spectral method for an elliptic equation with a non-linear Neumann boundary condition // Numerical Algorithms (2019) **81**, №1, с.313-344.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРОВОТОКА В СИСТЕМЕ СОСУДОВ ПЕЧЕНИ

Кубышкин В.А.¹, Мухин С.И.², Хруленко А.Б.³, Рубина А.Ф.⁴, Жалеев Т.Р.⁵

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, Факультет фундаментальной медицины, e-mail: kubvaleri@yandex.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра вычислительных методов, e-mail: vmtmus@cs.msu.su

3) МГУ имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра вычислительных методов, e-mail: khrulenko@cs.msu.su

4) МГУ имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра вычислительных методов, e-mail: alevtina.rubina@yandex.ru

5) МГУ имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра вычислительных методов, e-mail: trzhaleev@mail.ru

Печень – самая большая железа в организме человека, уникальный орган по морфологической структуре и многочисленности функций. Математическое моделирование патологий кровотока в бассейне вен печени позволяет проводить численные эксперименты, на основе которых можно делать вывод о возможном протекании реальных физиологических процессов.

Работа посвящена математическому моделированию кровотока в системе сосудов, связанных с воротной веной печени. Построена анатомически адекватная модель сети венозных сосудов непарных органов брюшной области и бассейна воротной вены, интегрированная в общую модель большого круга кровообращения. Проведен цикл вычислительных экспериментов по моделированию перераспределения потоков венозной и артериальной крови в условиях портальной гипертензии при значительном поражении печени. Исследованы гидродинамические особенности течения крови при наличии типичных шунтов и анастомозов, их влияние на уменьшение давления в портальной вене. Полученные в результате расчетов закономерности согласуются с данными, имеющимися в современной литературе, и могут быть использованы в клинической практике.

Литература

1. Математическое моделирование гидродинамики церебрального кровообращения. / В.А. Лукшин, С.И. Мухин, Т.В. Соколова [и др.]. М.: МАКС Пресс, 2001. С. 1-18.
2. Математическая модель сердечно-сосудистой системы. / А.П.Фаворский, М.В.Абакумов, Н.Б.Есикова [и др.]. М.: МГУ, 1998. С. 1-16. Препринт.
3. А. Вишневский В., А. Кубышкин В., В. Чжао А. Операции на печени: Руководство для хирургов. М.: МИКЛОШ, 2003. С. 114-128.
4. А.Д.Карман, В.Л.Казушиц. Портальная гипертензия : учеб.-метод. пособие. Минск: БГМУ, 2014. С. 32-33..

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Моисеев Т.Е.

МГУ, ВМК, кафедра вычислительных методов, e-mail: tsmoiseev@mail.ru

Впервые на разрешимость уравнений с малым параметром было обращено внимание академиком А.Н. Тихоновым и его учениками [1]. В данном сообщении будет затронут вопрос о близости решения задачи Коши и его гиперболизированной версии для негладких контуров и разрывных начальных данных.[5] Результаты (точнее условия) полученные для гладких контуров [2] неприменимы для доказательства сходимости решения нашей задачи. Для непрерывной функции эта задача бала изучена в работе [3]. Близкие результаты были получены в статье [4]. За последний год эта тематика не потеряла свою актуальность. В настоящей работе показано, что за исключением начальных моментов времени, погрешность гиперболизации стремится к нулю, как корень квадратный от величины добавки. Актуальность этого направления обусловлена тем, что эти результаты позволяют строить явные схемы с условиями устойчивости, характерными для уравнений гиперболического типа. Схемы такого типа особенно эффективны при использовании современных вычислительных систем с массовым параллелизмом.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-71-30014 .

Литература

1. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. Сборник. Нов. сер. 1950. Т.27. №1. С.47-156
2. Репин С. И., Четверушкин Б.Н. Оценка разности приближенных решений задачи Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром // Доклады РАН. 2013. Т.451.№3. С.255-258.
3. Мышецкая Е.Е., Тишкин В.Ф. Оценки влияния гиперболизации для уравнения теплопроводности // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55. № 8.
4. Ильин А.А., Рыков Ю.Г. О близости траекторий для модельных квазигазодинамических уравнений // Доклады РАН. 2016. Т.470.№ 4.
5. Т.Е. Моисеев, Е.Е. Мышецкая, В.Ф.Тишкин. О близости решений невозмущенных и гиперболизированных уравнений теплопроводности для разрывных начальных данных // Доклады РАН. 2018. т.481. №6. с. 605-609 .

О СОГЛАСОВАННОСТИ УРАВНЕНИЙ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Петрова Л.И.¹

*1) Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет
вычислительной математики и кибернетики, кафедра вычислительных методов,
e-mail: ptr@cs.msu.ru*

Как известно, уравнения математической физики, которые описывают материальные среды, такие как термодинамические, газодинамические, космические и т.д., состоят из уравнений законов сохранения энергии, импульса, моментов импульса и массы. Как следует из анализа уравнений законов сохранения с помощью кососимметричных дифференциальных форма, эти уравнения оказываются несогласованными, что указывает на некоммутативность законов сохранения. Некоммутативность законов сохранения связана с тем, что различные воздействия, которые испытывает материальная среда (энергетические, силовые, молекулярные и так далее) практически не являются потенциальными (они не соответствуют природе самой материальной среды) и поэтому не могут стать величинами самой материальной среды (давлением, плотностью, температурой). Это может произойти только, если реализуются какие либо степени свободы. В этом случае уравнения законов сохранения становятся согласованными, но только локально. Это происходит дискретно, и описывает возникновение таких образований, как волны, вихри, турбулентные пульсации и т.д..

Такие результаты следуют из эволюционного соотношения, которое получается из уравнений законов сохранения. Это можно показать на примере уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

ВАЛИДАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МНОГОСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ОСНОВЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ И СХЕМЫ КАБАРЕ

Майоров П.А.¹, Головизнин В.М.²

1) МГУ им М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com,

2) МГУ им М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Многослойные гидростатические модели течений со свободной поверхностью [1] без учета обмена массой и импульсом между слоями в большинстве интересных случаев являются некорректными. Решить указанную проблему можно путем модификации исходной модели, лежащей в основании вывода классических уравнений многослойной мелкой воды. Многослойная модель представляется в виде суммы однослойных (гиперболическая декомпозиция), взаимодействующих посредством сил реакции, приложенных к границам раздела. Для каждой из однослойных моделей записывается схема КАБАРЕ [2].

В данной работе представлены результаты моделирования лабораторных тестов движения стратифицированной по плотности жидкости [3]. Эксперименты проводились в акриловом баке длиной 3 м и шириной 0.15 м, заполненный водопроводной водой на глубину 0.2 м. Водонепроницаемая перегородка находилась в 0.1 м от одного конца резервуара. В отделенную перегородкой область наливали два слоя солевых раствора различной плотности. Затем вынималась перегородка и наблюдали движение слоистого раствора в основной части резервуара. Реализованная гидростатическая модель показала хорошее воспроизведение движения фронта распространения раствора во времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 18-11-00163.

Литература

1. E. Audusse, A multilayer Saint-Venant system: Derivation and numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 5 (2005) 189–214
2. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А., Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных компьютерных комплексов // Москва: Издательство Московского университета – 2013.
3. Gladstone C. et al. An experimental investigation of density-stratified inertial gravity currents // *Sedimentology*. – 2004. – Т. 51. – №. 4. – С. 767-789.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД НА ОСНОВЕ РАЗРЕШАЮЩЕГО ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Терновский В.В.¹, Хапаев М.М.², Хапаева Т.М.³

1) МГУ им. Ломоносова, ВМиК, Вычислительные методы, e-mail:
vladimir@chatroulette.com

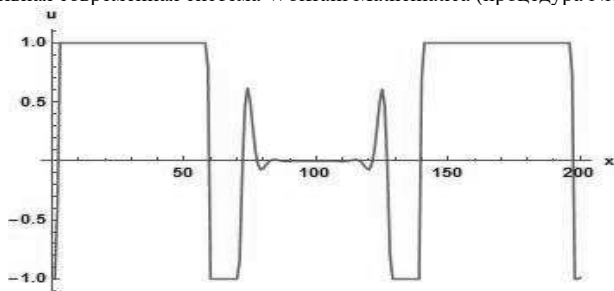
2) МГУ им. Ломоносова, ВМиК, Общая математика

3) МГУ им. Ломоносова, ВМиК, Вычислительные методы, e-mail: tmhapa@yahoo.com

Задачи оптимального управления рассматриваются как вариационные обратные некорректные. По этой причине привлекается аппарат регуляризации Тихонова [1]. Минимизируется функционал, образованный на основе выражений из формулировки задачи, плюс регуляризатор, помноженный на параметр регуляризации. Авторами решены задачи Маршала, Импульсного управления, Годдарда, поезда с постоянным и переменным трением, а так же задача, иллюстрирующая принцип Максимумы Понтрягина. Впервые метод был предложен для поиска собственных функций и значений задачи Штурма-Лиувилля [2]. Вкратце рассмотрим задачу Маршала [3]:

$$\dot{x} = y, \dot{y}(t) = u, J(u) = \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \min, \\ x(0) = x(T) = 2, y(0) = -2, y(T) = 2, |u| \leq 1, 0 \leq t \leq T = 8, \quad (1)$$

Для определения управления $u(t)$ минимизируется специальный функционал $J(u) = \int_0^T [(\dot{x} - y)^2 + (\dot{y}(t) - u)^2 + x^2(t)] dt$, при указанных условиях (1) по $x(t), y(t), u(t)$. При численной реализации к нему добавляется сглаживающий регуляризатор: $\alpha \sum_i \left(x_i^2 + y_i^2 + u_i^2 + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{h^2} + \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{h^2} + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h^2} \right)$. Для вычислений использовалась профессиональная современная система Wolfram Mathematica (процедура NMinimize):



Литература

1. Арсенин В.Я., Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач // Наука. Главная редакция физико-математической литературы (1979) 285 с.
2. Khapaeva T.M A Variational Method in the Sturm-Liouville Problem with the Neumann and Dirichlet Boundary Values //Applied and Computational Mathematics (2014) 3, №4, с.117–120.
3. Marchal C Chattering arcs and chattering controls //Optimization Theory and Applications (1973) 11, №5, с.616–620.

БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Горбачев Д.Ю.¹, Головизнин В.М.²

*1) МГУ им М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru,*

*2) МГУ им М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: gol@ibrae.ac.ru*

Балансно-характеристический численный метод КАБАРЕ [1] показывает хорошие результаты во всех областях CFD. Например, КАБАРЕ был проверен на решении простого уравнения переноса [2], уравнений мелкой воды над неровным дном [5], задач газовой динамики [3] и промышленных задач, таких как: аэроакустика [4], моделирование пристеночной конденсации в контейнменте и многие другие. Несмотря на все преимущества этого метода, он имеет ограничение на использование четырехугольных расчетных сеток. Но во многих промышленных задачах это неприемлемо по многим причинам: вычислительная область слишком сложна, чтобы быть замещенной четырехугольной сеткой с нужным качеством, промышленные расчетные программы, которые принимают только треугольные сетки и так далее.

В данной работе представлен новый балансно-характеристический численный метод, направленный на решение этой проблемы без потери свойств, присущих методу КАБАРЕ. Данный метод был разработан и верифицирован на базовых тестах для уравнений мелкой воды. Преимущества предлагаемого метода: возможность обработки сложной геометрии с использованием неструктурированных треугольных сеток, компактных шаблонов схемы и естественное использование консервативного и характеристического представления исходной гиперболической системы уравнений при вычислении значений переменных на новом временном слое. Как и в КАБАРЕ, данный метод имеет второй порядок точности по пространству и по времени, имеет свойство временной обратимости и выполнение законов сохранения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ: грант 19-11-00104.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А., Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных компьютерных комплексов // Москва: Издательство Московского университета – 2013.
2. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кобринский И.М., Балансно-характеристические схемы с разделенными консервативными и потоковыми переменными // Матем. Моделирование 15 29-48 – 2003.
3. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Матем. Моделирование 18:11 14-30 – 2006.
4. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Козубская Т.К., Максимов Н.В. Схема «Кабаре» для численного решения задач аэроакустики: обобщение на линеаризованные уравнения Эйлера в одномерном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 49:12 2168-2182 – 2009.
5. Головизнин В.М., Исаков В.А. Применение балансно-характеристической схемы для решения уравнений мелкой воды над неровным дном // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 57:7 402-414 – 20017.

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОМЫШЛЕННОМ ПРОИЗВОДСТВЕ В ЦЕЛЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ ИМПОРТОЗАМЕЩЕНИЯ

Савенкова Н.П.¹, Лапонин В.С.², Мокин А.Ю.³, Артемьева Л.А.⁴, Дряженков А.А.⁵

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, ВМ, e-mail: savnp@yandex.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, ВМ, e-mail: lap@cs.msu.ru

3) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, ВМ, e-mail: mknandrew@mail.ru

4) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, ОУ, e-mail: artemieva.luda@gmail.com

5) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, ОУ, e-mail: andrja@yandex.ru

Высокопроизводительное производство со сложной и объемной структурой не может эффективно работать без хорошо отлаженной системы календарного планирования (КП), которая должна охватывать в полном объеме производственный процесс от поступления сырья до отгрузки готовой продукции. В свою очередь, календарное планирование базируется на хорошо отработанной системе сведения материального баланса (МБ). До недавнего времени и разработка КП, и сведения МБ на производстве осуществлялось экономистами фактически вручную, что на крупных предприятиях, например, современных НПЗ, приводило к большим экономическим потерям. В конце 20 века началась компьютеризация КП и МБ. Созданные на западе вычислительные пакеты сведения МБ, основанные на жестком полумпирическом математическом моделировании, показали хорошие результаты внедрения в западной Европе и США, однако не нашли широкого применения в России не только в силу своей высокой стоимости, но и в силу длительности (2-3 года) периода настройки вычислительного пакета. На некоторых крупных предприятиях пакеты программ вообще не нашли применения. Одной из причин создавшейся ситуации является сложность структуры производства и отсутствие измерительных приборов на большинстве производственных объектов.

Что касается задачи КП, то здесь ни на Западе, ни в России до настоящего времени не создано эффективных универсальных вычислительных пакетов. Причиной этого в первую очередь является отсутствие высокоадекватной математической модели производства, которая, безусловно, не может быть жесткой.

В представленном докладе обсуждается созданные специалистами факультета ВМК МГУ (кафедра вычислительных методов и кафедра оптимального управления) модели КП и МБ. Верификация модели МБ прошла на Волгоградском и Нижегородском НПЗ. Точность вычислений составила доли грамма, время вычислений – менее 10 секунд на многоядерном персональном компьютере. Модель КП находится на стадии тестирования и также дает хорошие результаты. Отличительными характеристиками созданного пакета программ являются его сравнительно низкая стоимость, высокая точность и быстродействие, возможность применения на производстве с малым числом измерительных приборов, а также малое время внедрения на предприятии по сравнению с зарубежными аналогами.

Литература

1. Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В. Теория расписаний // М.: НАУКА, 1975.
2. Браун Е. В. Российская наука и передовые IT-технологии (отечественные решения для реального производства) // Деловой журнал.

Секция: «Математическая физика и обратные задачи»

Председатели профессор Денисов А.М., профессор Разгулин А.В.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-де ВРИЗА С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНОЙ

Баев А.В.¹

*1) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра математической физики, e-mail: drbaev@mail.ru*

В работе рассматривается уравнение КдВ с переменным коэффициентом

$$q_{\tau} - 6A(\tau)qq_{\xi} + q_{\xi\xi\xi} = 0$$

К этому уравнению сводится система уравнений мелкой воды с переменной медленно меняющейся по переменной τ глубиной. В рамках такого предположения существуют решения в виде установившихся бегущих волн, модулированных по медленной переменной. Определяющими параметрами этих волн являются период и амплитуда колебаний, являющиеся входными данными обратной задачи.

Обратная задача состоит в определении коэффициента $A(\tau)$ по указанным входным данным. Исследование обратной задачи основано на методе усреднения, что позволяет в рамках гамильтонова формализма использовать интеграл решения в форме адиабатического инварианта.

Доказано, что решение обратной задачи единственно, если, кроме входных данных, функция $A(\tau)$ известна хотя бы в одной точке. Предложен метод решения обратной задачи, основанный на доказанных свойствах монотонности функционалов, выражающих период колебаний и адиабатический инвариант, от амплитуды волны. Представлены результаты вычислительного эксперимента, демонстрирующие работу алгоритма решения задачи.

Литература

1. Баев А.В. О решении одной обратной задачи для уравнения КдВ с переменным коэффициентом //Матем. заметки (2019) **106**, №5, в печати.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

Денисов А.М.¹, Ефимов А.А.²

1) Место работы, (МГУ, ВМК, МФ), e-mail: den@cs.msu.ru

2) Место учёбы (МГУ, ВМК, МФ), e-mail: aleksandr969696@mail.ru

Рассматривается обратная задача, состоящая в определении неизвестных функций $\varphi(t)$ и $u(x, t)$ таких, что

$$u_x(x, t) + \gamma(t)\varphi(t)u(x, t) - \gamma(t) \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t \gamma(\theta)d\theta\right\} \gamma(\tau)\varphi(\tau)u(x, \tau)d\tau = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(l, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $Q_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, а $\gamma(t)$, $\mu(t)$, $g(t)$ – заданные непрерывные положительные на отрезке $[0, T]$ функции.

При известной функции $\varphi(t)$ существует единственное решение задачи (1), (2). Используя условие (3), можно получить нелинейное операторное уравнение для неизвестной функции $\varphi(t)$: $\varphi(t) = (A\varphi)(t)$. Решение этого операторного уравнения находится с помощью итерационного процесса $\varphi_{n+1}(t) = (A\varphi_n)(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, который может быть использован для численного решения обратной задачи. Вычислительные эксперименты показывают хорошую сходимость итерационного метода.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

Королев Г.М.¹, Тихонов И.В.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,
e-mail: korolevgm95@mail.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,
e-mail: ivtikh@mail.ru

Интерес к поведению быстро растущих решений уравнения теплопроводности восходит к работе [1]. Сейчас, используя методику работ [2], [3], изучаем многомерную нелокальную по времени задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) + u(x, T) = \varphi(x).$$

Функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и число $T > 0$ считаем заданными. Нелокальное условие выражает усреднение от функции $u(x, t)$ по ее значениям в начальный и финальный моменты времени. Допускается неограниченный рост решений при $|x| \rightarrow +\infty$.

Для поставленной задачи дано точное описание экспоненциальных классов единственности. Установлена разрешающая формула

$$u_0(x) = \varphi(x) - \int_{\mathbb{R}^n} g_T(x - y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Проведено исследование функции Грина $g_T(x)$. Получено разложение в асимптотический ряд по функциям Ханкеля

$$g_T(x) = \frac{(\pi|x|)^{-\vartheta}}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{z_k}{2} \right)^{\vartheta} H_{\vartheta}^{(1)}(z_k|x|) \right), \quad |x| \neq 0.$$

Здесь $H_{\vartheta}^{(1)}$ – первая функция Ханкеля индекса $\vartheta = (n-2)/2$. При этом

$$z_k \equiv \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2T}} (1+i), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Найдена скорость убывания $|g_T(x)|$ при $|x| \rightarrow +\infty$.

В докладе приводятся точные формулировки результатов и обсуждаются возможные обобщения.

Литература

1. Tychonoff A.N. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Матем. сб. (1935) **42**, №2, с.199–216.
2. Попов А.Ю., Тихонов И.В. Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения (2004) **40**, №3, с.396–405.
3. Попов А.Ю., Тихонов И.В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Матем. сб. (2005) **196**, №9, с.71–102..

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ И НА РЕШЁТКАХ

Ильинский А.С.¹, Галишникова Т.Н.²

1) Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической физики, e-mail: celd@cs.msu.ru

2) Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, лаборатория вычислительной электродинамики, e-mail: tgalish@cs.msu.ru

Для исследования задачи дифракции волноводной волны на импедансном индуктивном стержне в прямоугольном волноводе широко применяется метод интегральных уравнений. В такой постановке электродинамическая векторная задача для системы уравнений Максвелла в волноводной области, содержащей препятствие, сводится к решению контурных интегральных уравнений Фредгольма. Для их получения в качестве фундаментального решения применяется функция Грина незаполненного плоского волновода, удовлетворяющая неоднородному уравнению Гельмгольца внутри волновода, граничному условию первого рода на стенках волновода, а также условию излучения на бесконечности. Для построения численного алгоритма решения интегрального уравнения используется метод Крылова – Боголюбова, основанный на замене интегрального уравнения комплексной системой линейных алгебраических уравнений. При этом важно так аппроксимировать интегральный оператор, чтобы вариации контура интегрирования не сильно влияли на точность аппроксимации.

Функция Грина незаполненного волновода удовлетворяет на границе волновода нулевому условию Дирихле и имеет при совпадении аргументов логарифмическую особенность. Для её построения используется метод отражений [1], результатом которого является знакопеременный медленно сходящийся бесконечный ряд по функциям Ханкеля нулевого порядка первого рода. С помощью формулы суммирования Пуассона [2] полученный ряд можно преобразовать в ряд по собственным функциям поперечного сечения незаполненного волновода.

Для построения численного алгоритма вычисления функции Грина исследуется поведение членов ряда, которые соответствуют затухающим гармоникам. Полученный ряд суммируется в явном виде [3] и используется для окончательного построения алгоритма расчёта элементов матрицы в системе линейных алгебраических уравнений. Логарифмическая особенность ядра при этом выделяется в явном виде [4].

Разработанная методика применена при исследовании задач дифракции поля плоской электромагнитной волны на эквидистантной решётке, образованной бесконечными цилиндрами произвольного поперечного сечения [4].

Литература

1. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике // М.: Наука – 1972.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. // М.: ИЛ --- 1958.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: ГИФМЛ --- 1963.
4. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн // М.: МАКС Пресс –2013..

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАПАЗДЫВАЮЩЕМ УРАВНЕНИИ ДИФFUЗИИ В ТОНКОМ КОЛЬЦЕ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА НАКЛОННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Романенко Т.Е.¹, Будзинский С.С.²

1) *Кафедра математической физики, асс., e-mail: romanenko@cs.msu.ru*
2) *Кафедра математической физики, мат. 2 кат., e-mail: sbudzinskiy@yahoo.com*

В работе рассматривается новый подход к самоорганизации спиральных волн в квазилинейных уравнениях диффузии, использующий комбинацию трёх механизмов: запаздывание, тонкость области и граничные условия на наклонную производную.

При нетривиальном угле наклона производной в граничном условии задача является $SO(2)$ -симметричной, что в частности говорит о том, что не допускается одновременное существование при одних и тех же параметрах вращающихся в противоположных направлениях волн [1]. Тем не менее предельная одномерная задача на окружности, полученная при истончении кольцевой области, обладает более полной группой $O(2)$ симметрий, и благодаря запаздыванию в ней могут возникать вращающиеся по и против часовой стрелки бегущие волны, а также стоячие волны [2].

Для возбуждения спиральных волн в исходной задаче использовались – пересчитанные с учётом толщины области и угла наклона производной – условия существования и устойчивости одномерных волн из предельной задачи. Численные эксперименты показали, что одномерные вращающиеся волны переходят во вращающиеся спиральные волны, а одномерные стоячие волны – в пульсирующие спиральные волны, новый вид самоорганизации [3]. Последние характеризуются тем, что их амплитуда и скорость вращения колеблются в противофазе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 18-31-00236.

Литература

1. Budzinskiy S., Romanenko T. Rotating waves in a spatially nonlocal delayed feedback optical system with diffraction //Journal of Physics: Conference Series (2018) 1141, с. 012106
2. Budzinskiy S.S., Razgulin A.V. Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under $O(2)$ Hopf bifurcation //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (2017) 49, с.17–29.

ОБ УСРЕДНЕНИИ ОПТИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ НАЛИЧИИ АСТИГМАТИЗМА

Будзинский С.С.¹

1) *Кафедра математической физики, мат. 2 кат., e-mail: sbudzinskiy@yahoo.com*

В задачах слепого восстановления изображений часто имеется априорная информация о том, что функция точечного размытия (ФТР) оптической системы, с помощью которой было получено изображение, принадлежит к некоторому параметрическому семейству, и для оценки соответствующих параметров можно использовать расположение и структуру нулей в спектре изображения. Данные нули соответствуют нулям преобразования Фурье ФТР – оптической передаточной функции (ОПФ). В работе рассматриваются ФТР оптических систем с дефокусом и астигматизмом.

Если астигматизма нет, то линии уровня ОПФ – окружности, и для улучшения соотношения сигнал-шум при оценке параметра дефокуса можно применить радиальное усреднение. Наличие астигматизма деформирует линии уровня ОПФ, и они приобретают форму эллипсов.

На основе приближенной формулы для ОПФ без астигматизма [1] были получены приближенные формулы для нулей соответствующей ОПФ в зависимости от величины дефокуса. С их помощью была разработана специальная параметризация частотной области, позволяющая производить для ОПФ с астигматизмом усреднение по эллипсам и учитывающая непостоянство их отношений полуосей. Полученный после усреднения радиальный профиль соответствует эффективному дефокусу, который может быть оценен уже известными способами [2].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-02103.

Литература

1. Stokseth P.A. Properties of a defocused optical system //Journal of the Optical Society of America (1969) 59, с.1314-1321.

ОБРАТНОЕ ДВУМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Устинов В.Д.¹

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики, e-mail: vladustinov90@gmail.com

В статье [1] был впервые предложен особый метод численного решения одномерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В этом методе на основе функции ядра уравнения выписывается базис линейного пространства, состоящий из собственных функций и собственных значений соответствующего интегрального оператора. Для нахождения этого базиса применяется интегральное преобразование Меллина. После получения базиса, исходное интегральное уравнение предлагается решать численно с помощью усеченного ряда Фурье по найденным собственным значениям.

В настоящей работе автор впервые предлагает обобщение данного метода на двумерный случай. Цель данной работы - в явном виде выписать собственные функции и собственные значения соответствующего интегрального оператора, получить необходимые ограничения на функцию ядра интегрального уравнения, протестировать метод численно.

Проведенные теоретические выкладки и полученные численные результаты позволяют сделать вывод о том, что метод применим в двумерном случае и может быть использован для решения различных прикладных задач в том числе при наличии шумов в правой части уравнения.

В качестве примера приложения данного метода выступает обратная задача лазерной дифрактометрии эритроцитов. Она состоит в том, чтобы по измеряемой в эксперименте дифракционной картине найти характерные параметры малых частиц, на которых рассеялась плоская монохроматическая падающая электромагнитная волна. Ранее автором была рассмотрена одномерная постановка этой задачи, когда все частицы считались круглыми [2], а также одномерная задача, когда все частицы характеризовались эллипсами с одинаковой известной площадью [3]. Применение нового подхода, предлагаемого в настоящей работе, позволило численно решить данную задачу в существенно двумерной постановке, когда каждая частица характеризуется эллипсом с двумя неизвестными полуосями.

Литература

1. McWhirter J. G., Pike E. R. On the numerical inversion of the Laplace transform and similar Fredholm integral equations of the first kind //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1978. – Т. 11. – №. 9. – С. 1729.
2. Юрчук Ю. С. и др. Рассеяние лазерного пучка на влажном мазке крови и измерение распределения эритроцитов по размерам //Квантовая электроника. – 2016. – Т. 46. – №. 6. – С. 515-520.
3. Nikitin S. Y. et al. Laser ektacytometry and evaluation of statistical characteristics of inhomogeneous ensembles of red blood cells //Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. – 2014. – Т. 146. – С. 365-375.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Куркина Е.С.¹, Дмитриев В.И.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: e.kurkina@rambler.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической физики,
e-mail: dmitriev@cs.msu.ru

Рассматривается математическая модель, описывающая взаимосвязанный рост ВВП и государственного долга (ГД). В основе модели лежит система двух линейных ОДУ с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= a_{11}(t)Q + a_{12}(t)B, \\ \frac{dB}{dt} &= a_{21}(t)Q + a_{22}(t)B\end{aligned}$$

Считается, что модель приближенно, но с хорошей точностью описывает статистические данные. Математическая модель, связывающая рост ВВП с изменением ГД, была предложена в [1]. В этой работе коэффициенты считались постоянными на некотором отрезке времени, и исследовались возможные типы динамики изменения ВВП и ГД в зависимости от значений параметров. В настоящей работе коэффициенты считаются переменными. Возникает задача восстановления коэффициентов модели по приближенно заданному решению, которая является обратной некорректно поставленной задачей.

В работе разработан алгоритм нахождения коэффициентов линейной системы ОДУ, использующий метод регуляризации А.Н. Тихонова [2]. На модельных примерах путем решения прямой и обратной задач показано, что изменяющиеся со временем коэффициенты находятся с хорошей точностью.

Этот алгоритм применен для нахождения коэффициентов рассматриваемой модели по статистическим данным для нескольких развитых стран. Показано, что коэффициенты системы для разных стран могут качественно различаться (иметь разные знаки), что говорит о разных механизмах экономического роста.

Знание коэффициентов модели и соотнесение их с реальными экономическими показателями может позволить проводить более глубокий анализ роста ВВП с учетом внутренних механизмов, а также делать более точные прогнозы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект: 18-01-00619.

Литература

1. Дмитриев В.И., Куркина Е.С. Исследование математической модели, связывающей рост ВВП с изменением государственного долга // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: МАКС Пресс, 2018. № 59, С. 46-65.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 283 с.

Секция: «Исследование операций»

Председатель академик РАН Евтушенко Ю.Г.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ В ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Белянкина Т.В.

Факультет ВМК МГУ, e-mail: tbelyank@mail.ru

В работах [1, 2] на единой методологической основе теории условных марковских процессов [3] была рассмотрена задача оценивания многомерного ненаблюдаемого стохастического процесса x_t с непрерывным временем по совокупности непрерывных z_t и дискретных $\eta(t_m)$ наблюдений со скользящей памятью произвольной кратности N .

Как частный случай в [1] было получено общее решение (уравнение для совместной апостериорной плотности) задачи прямой интерполяции (интерполяции в фиксированной точке).

На основе этого общего решения в условиях апостериорной гауссовости с использованием метода семинвариантной функции в настоящей работе осуществляется синтез фильтра-интерполятора, определяющего оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки фильтрации $\mu(t)$ и прямой интерполяции $\mu(t_k, t)$ для x_t и соответствующие матрицы ковариации ошибок оценок $\Gamma(t)$ и $\Gamma_{kk}(t_k, t)$.

Для частного вида скалярных процессов: $dx_t = -ax_t dt + \Phi_1 dw_t, a > 0, dz_t = H_0 z_t dt + \Phi_2 dv_t, \eta(t_m) = G_0 x_{t_m} + G_1 x_{t_1} + \Phi_3 \xi(t_m)$, где $a, H_0, G_0, G_1, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ - константы, w_t, v_t - стандартные винеровские процессы, $\xi(t_m), m = 0, 1, \dots$ - последовательность гауссовских величин, и случая редких дискретных наблюдений исследована эффективность дискретного канала наблюдений с памятью кратности $N=1$ относительно канала без памяти в задаче прямой интерполяции. В качестве меры эффективности ε_{10} вводится отношение точности оценки интерполяции $\gamma_{1,1}(\tau_1, t_m)$ в момент поступления наблюдения $\eta(t_m)$ при оценивании по дискретному каналу наблюдений с памятью кратности $N=1$ к точности оценки интерполяции $\tilde{\gamma}_{1,1}(\tau_1, t_m)$ по соответствующему каналу без памяти ($G_1 = 0$).

Рассмотренный пример показал, что наблюдения с памятью могут как улучшать, так и ухудшать точность оценки интерполяции относительно наблюдений с памятью меньшей кратности, что определяется как глубиной памяти, так и внутренними свойствами ненаблюдаемого процесса x_t (дисперсия, время корреляции), а также структурой множества коэффициентов передачи текущего и прошлых значений ненаблюдаемого процесса x_t . Был проведён количественный и качественный анализ поведения введённой меры эффективности, исследовано влияние на неё непрерывных наблюдений без памяти, получены точные формулы для эффективной глубины памяти в тех ситуациях, где она существует, а также дана физическая и графическая интерпретация доказанных свойств.

Литература

1. Абакумова О.Л., Дёмин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. I. Основное уравнение нелинейной фильтрации // *АиТ*, 1995, №9, с. 49 - 59.
2. Абакумова О.Л., Дёмин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II. Синтез фильтров. // *АиТ*, 1995, №10, с. 36-49.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977..

ОЦЕНКА СТОИМОСТИ БЕРМУДСКОГО ОПЦИОНА

Морозов В.В.

Факультет ВМК МГУ, кафедра Исследования операций, email: vmorosov@mail.ru

Рассмотрим модель финансового рынка Блэка-Шоулса [1]. Стоимость акции $S(t)$ является процессом геометрического броуновского движения, задаваемого уравнением $dS(t) = S(t)(\alpha dt + \sigma dz(t))$, $S(0) = S$, где α – средняя доходность акции, $\sigma > 0$ – волатильность, а $z(t)$ – стандартный винеровский процесс. По акции выплачивается и сразу реинвестируется поток дивидендов с интенсивностью $\delta > 0$. Предполагается, что на рынке выполнено условие риск-нейтральности $r = \alpha + \delta$, где $r > 0$ – банковская процентная ставка. Бермудский опцион представляет собой ценную бумагу, которая может быть предъявлена в любой из моментов времени $T_1 < T_2 < \dots < T_n$, где $T_1 > 0$. Обозначим через $C(S, T_1, \dots, T_n)$ стоимость бермудского колл-опциона в момент $t=0$ с платежом $(S(T_i) - K)^+$ в момент исполнения T_i , где $K > 0$ – цена исполнения. Выпишем формулу для $C(S, T_1, \dots, T_n)$, используя метод Геске [2] оценки сложного опциона.

Пусть S_i – корень уравнения $S - K = C(S, T_{i+1} - T_i, \dots, T_n - T_i)$, $i = \overline{1, n-1}$. Положим $S_n = K, \tilde{\alpha} = \alpha - \sigma^2/2$. Введем обозначения: $x^i = (x_1, \dots, x_i)$,

$$d_1(M, T) = \frac{\ln M + (\tilde{\alpha} + \sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2(M, T) = d_1(M, T) - \sigma\sqrt{T}, h_{kj} = d_k\left(\frac{S}{S_j}, T_j\right), k=1,2, j=\overline{1, n}.$$

Рассмотрим ковариационную матрицу $Q_i = (q_{lk})_{l,k=1}^i$ с элементами

$$q_{lr} = \begin{cases} -\sqrt{T_l/T_r}, 1 \leq l < r = i, \\ \sqrt{T_l/T_r}, 1 \leq l \leq r \leq i-1, l = r = i, \end{cases}$$

плотность и функцию i - мерного нормального распределения

$$\psi_i(x^i, Q_i) = \frac{1}{(2\pi)^{i/2} |Q_i|^{1/2}} \exp\left(-\frac{(Q_i^{-1}x^i, x^i)}{2}\right), \Theta_i(x^i, Q_i) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_i} \psi_i(y^i, Q_i) dy^i.$$

Тогда стоимость бермудского опциона

$$C(S, T_1, \dots, T_n) = \sum_{i=1}^n [S \exp(-\delta T_i) \Theta_i(-h_{11}, \dots, -h_{1,i-1}, h_{1i}, Q_i) - K \exp(-r T_i) \Theta_i(-h_{21}, \dots, -h_{2,i-1}, h_{2i}, Q_i)]. \quad (1)$$

Вычисление этой стоимости проводится в следующей последовательности. Сначала находится (по формуле Блэка-Шоулса [1]) стоимость $C(S, T_n - T_{n-1})$, затем корень S_{n-1} , затем по формуле (1) находится стоимость $C(S, T_{n-1} - T_{n-2}, T_n - T_{n-2})$, затем корень S_{n-2} и т.д. Программирование целесообразно осуществлять на языке Python, в котором имеется встроенная функция многомерного нормального распределения.

Литература

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities// Journal of Political Economy. 1973. V.81. № 3. P. 637–654.
2. Geske R. The valuation of corporate liabilities and compound options// Journal of Financial and Quantitative Analyses. 1977. V. 12. № 4. P. 541–552.

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ ДЛЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РЫНКА ТИПА «ЗВЕЗДА»

Цыганов Н.И.

*МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования Операций,
e-mail: nikita—93@mail.ru*

В докладе рассматривается сетевой энергетический рынок однородного товара (такого как газ или нефть) типа «звезда», состоящий из центрального узла и множества узлов, соединенных с центральным узлом транспортными линиями. Каждый узел – это локальный рынок, задающийся функциями спроса и предложения. Каждая линия характеризуется начальной пропускной способностью, удельными затратами на передачу единицы товара, а также функцией затрат на увеличение пропускной способности. Последняя состоит из фиксированных затрат, не зависящих от объема расширения, и переменных затрат.

Ставится задача оптимизации такого рынка с точки зрения максимизации общественного благосостояния, которое определяется как разница суммарной полезности потребления и суммарных затрат на производство и транспортировку. Из-за наличия фиксированных компонент в функциях затрат на увеличение пропускной способности данная задача не является выпуклой, и в общем случае NP-трудная [1].

В докладе описывается алгоритм решения данной задачи, и представлены результаты статистической оценки алгоритма, которая показала, что для случайно сгенерированного набора рынков среднее время решения задачи зависит полиномиально от числа узлов в рынке.

Литература

1. A.A. Vasin, O.M. Grigoryeva, N.I. Tsyganov. A model for optimization of transport infrastructure for some homogeneous goods markets // Journal of Global Optimization. 2019. Vol. 74. № 2. [The electronic source]. URL: <https://doi.org/10.1007/s10898-019-00785-y>.

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЦЕЛЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ: СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Решетов В.Ю.¹, Перевозчиков А.Г.², Яночкин И.Е.²

1) Факультет ВМК МГУ, 2) НПО "РусБИТех"

Изучается максиминный вариант линейной постановки задачи целераспределения предложенный П.С.Краснощеквым в работе [1] и его обобщение, основанное на исключении некоторых типов объектов целераспределения (целей), не подходящих для назначения имеющихся распределяемых средств защиты (обороны). Поскольку исключенным может оказаться в принципе любое подмножество типов целей, то возникает задача дискретной оптимизации, которая не обладает свойством субмодулярности, позволяющим использовать для ее решения метод последовательных расчетов, предложенный В.П.Черениным [2] и развитый В.Р.Хачатуровым с учениками [3]. Поэтому для ее решения предложен общий метод ветвей и границ, основанный на верхних оценках критерия. Показано, что предложенный подход позволяет строить такие оценки на основе обобщенного принципа уравнивания Ю.Б.Гермейера, что делает метод ветвей и границ практически значимым.

Литература

1. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принцип построения моделей. М.: Фазис. 2000.
2. Черенин В.П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов // Научно-методич. Материалы экономико-матем. Семинара Лаб. Экономико-математических методов АН СССР. Вып. 2. М.:Гипромез, 1962.
3. Хачатуров В.Р., Хачатуров Роман В., Хачатуров Рубен В. Оптимизация супермодулярных функций (супермодулярное программирование) // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. Т. 52. № 6. С.999-1000.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ ДЕГРАДАЦИИ ТОРЦОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛАЗЕРНОЙ МИШЕНИ

Белолипецкий А.А.^{1,2}

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра Исследования операций,
e-mail: abelolipet@mail.ru

2) Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН),
e-mail: abelolipet@mail.ru

Для проведения экспериментов по программе инерциального термоядерного синтеза в схеме LAPLAS требуются цилиндрические мишени с криогенным топливным ядром [1]. В данной заметке изучена задача деградации торцов топливного ядра в процессе доставки таких мишеней в центр рабочей камеры. В рамках Российско – Германского сотрудничества предполагается изучить возможность лазерного сжатия твердого дейтерия (т.н. криогенного ядра), защищенного цилиндрической оболочкой из золота или свинца. Цель этих экспериментов - изучение вопроса поведения материи в условиях похожих на те, которые существуют внутри гигантских планет.

Предметом исследования, проведенного в ФИАН, являлось проектирование специализированной криогенной системы (СКС) для изготовления и доставки цилиндрических топливных мишеней в центр экспериментальной установки для проведения экспериментов LAPLAS.

При создании СКС необходимо решить не только проблемы изготовления мишени, но также проблемы сохранения качества ее компонент. Одной из решаемых задач была задача оценка времени сохранения допустимых геометрических параметров цилиндрического топливного ядра при движении или позиционировании мишени в горячей экспериментальной камере. В частности, требовалось оценить скорость «подтаивания» незащищенных оболочкой плоских торцов топливного ядра. В процессе работы в совместном проекте с сотрудниками Лаборатории Термоядерных Мишеней ФИАН автором было показано, что в результате деградации топливного слоя его торцы остаются практически плоскими, причем скорость из передвижения задается приближенной формулой

$$\frac{\sigma T^4}{\lambda \rho},$$

где σ - постоянная Стефана – Больцмана, T - температура стенок камеры, λ, ρ - теплота сублимации и плотность дейтерия $n - D_2$ в тройной точке. Таким образом, скорость движения плоскости тающих торцов оказывается равной 0,007 мм/с, то есть практически нулевой и, следовательно, деформацией торцов криогенного ядра можно пренебречь.

Литература

1. Aleksandrova I.V., Belolipetskiy A.A., Blazevic A. et al. Cryogenic targets for the LAPLAS experiments: fabrication, manipulation and survival study. — Report P034, In: 30th European Conf. on Laser Interaction with Matter, Darmstadt, Germany, 31 Aug.— 05 Sept., 2008

БАЙЕСОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТОРГА ДВУХ ЛИЦ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕЗЕРВНЫХ ЦЕН

Саливон К.Я.

МГУ, ВМК, кафедра Исследования операций, e-mail: salivon689kirill@mail.ru

В игре принимают участие два игрока – продавец и покупатель. Пусть s и b – их резервные цены. Для продавца под резервной ценой s понимается себестоимость товара, ниже которой он товар не продаст. Для покупателя резервная цена – это цена на этот товар на другом рынке, выше которой он не заплатит продавцу. Предположим, что резервные цены – случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[m, n]$. Игрок знает свою резервную цену, но не цену противника. Пусть $S(s)$ и $B(b)$ – стратегии продавца и покупателя. Для продавца $S(s)$ – цена (аск), по которой он готов продать свой товар при резервной цене s . Для покупателя это цена (бид), по которой он готов купить товар при резервной цене b . Поэтому $S(s) \geq s$ и $B(b) \leq b$. Сделка заключается при условии $B(b) \geq S(s)$ по цене $kS(s) + (1 - k)B(b)$, где $k \in [0, 1]$ – коэффициент переговорной силы продавца. При этом выигрыши игроков – это средние значения прибыли от сделки:

$$H_s(B, S) = E_{b,s}[(kS(s) + (1 - k)B(b) - s)I_{\{B(b) \geq S(s)\}}],$$

$$H_b(B, S) = E_{b,s}[(b - kS(s) + (1 - k)B(b))I_{\{B(b) \geq S(s)\}}].$$

Цель работы – найти в игре равновесие по Нэшу в классе кусочно-линейных функций с дополнительными ограничениями p_1 и p_2 на стратегии: при $s > p_1$ продавец обязан продать товар по резервной цене s , а при $b < p_2$ покупатель обязан купить товар по резервной цене b . Решение задачи дается для следующих частных случаев:

1. $k = 0.5$, $m = 0$, $n = 1$ [1].
2. $\forall k \in [0, 1]$, $m = 0$, $n = 1$.
3. $k = 0.5$, $\forall m \geq 0$, $\forall n > m$.
4. $\forall k \in [0, 1]$, $\forall m \geq 0$, $\forall n > m$.

Например, для второго случая справедлива

Теорема. Если выполнены неравенства

$$p_1 \geq \frac{1}{2 - k}, \quad p_2 \leq \frac{k}{1 + k},$$

то равновесные стратегии игроков имеют вид

$$S^0(s) = \begin{cases} s, & s \in \left[\min \left(p_1, \frac{k(1 - k) + 2}{2(2 - k)} \right), 1 \right], \\ \frac{1}{1 + k}s + \frac{k}{2}, & s \in \left[0, \min \left(p_1, \frac{k(1 - k) + 2}{2(2 - k)} \right) \right), \end{cases}$$

$$B^0(b) = \begin{cases} b, & b \in \left[0; \max \left(p_2, \frac{k}{2} \right) \right], \\ \frac{1}{2 - k}b + \frac{k(1 - k)}{2(2 - k)}, & b \in \left(\max \left(p_2, \frac{k}{2} \right); 1 \right]. \end{cases}$$

Литература

1. Мазалов В.В., Менчер А.Э., Токарева Ю.С. Переговоры. Математическая теория. СПб.: Издательство «Лань», 2012.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Денисов Д.В.¹, Скоробогатов М.О.²

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра ИО, e-mail: dvden@cs.msu.ru

2) МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, кафедра ИО, e-mail: skm1000@mail.ru

При планировании производства продукции возникает множество различных факторов, которые влияют на значение издержек, а следовательно, и на финальную прибыль. Данная работа основана на дискретной модели изменения объёма запаса продукции. В задаче существует прогноз спроса на все виды продукции на текущий интервал времени, а также стоимость перенастройки станков для смены вида производимой продукции и стоимость хранения каждого вида продукции за каждый период времени. Проблема состоит в определении количества производимой продукции в каждый период времени, чтобы минимизировать затраты на издержки.

В основе данной работы лежит модель, описанная в работах [1] и [2]. В качестве модификации модели вводится возможность установления цены на продукцию, а также добавляется зависимость между спросом на предыдущих и последующих периодах времени. Зависимость спроса в текущий период времени от спроса в предыдущие периоды можно описать следующим равенством:

$$D_t = \frac{A_t}{r_t} \sum_{i=1}^{t-1} \frac{D_{t-i} - Ld_{t-i}}{2^{i-1}} + B_t$$

где A_t и B_t - константы, зависящие от номера периода, Ld_t - минимальный спрос в период времени t , r_t - цена на товар в период времени t .

Для решения данной задачи оптимизации были применены метаэвристические алгоритмы на основе методов, описанных в [3].

Литература

1. N. Sereshti, M. Bijari. Profit maximization in simultaneous lot-sizing and scheduling problem // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37(23), pp. 9516–9523.
2. M. Bijari, M. Jafarian. Integrated production planning model for noncyclic maintenance and production planning // Industrial Engineering Non-Traditional Applications in International Settings. 2015. pp. 1 – 19.
3. P. Vaez. A New Mathematical Model for Simultaneous Lot-sizing and Production Scheduling Problems Considering Earliness/Tardiness Penalties and Setup Costs // International Journal of Supply and Operations Management. 2017. Vol. 4(2), pp. 167-179.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Язовская Н.А.¹

*1)Московский государственный университет им. Ломоносова, факультет
Вычислительной математики и кибернетики, кафедра Исследование операций, e-mail:
nataliyazovskaya@gmail.com*

Рассмотрена математическая модель открытой одноканальной системы массового обслуживания с неограниченной очередью и отказами заявок. В данной системе массового обслуживания входящий поток содержит заявки двух типов: «терпеливые» заявки, которые встают в очередь независимо от каких-либо параметров и ждут до тех пор, пока не будут обслужены, и «нетерпеливые» заявки, которые становятся в очередь, пока число заявок в этой очереди не достигнет определенного значения. Еще одна характерная черта для «нетерпеливых» заявок – при длине очереди больше определенного значения эти заявки автоматически получают отказ и уходят не обслуженные.

Входной и выходной потоки заявок являются простейшими. Выделяя состояния системы по количеству числа заявок, получаем марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, то есть процесс гибели и размножений.

В данной работе была проведена математическая формализация данной модели, исследованы такие характеристики, как вероятности ожидания и вероятность отказа, среднее число требований под обслуживанием, средняя длина очереди, среднее число требований всей системы. Также исследован характер поведения приведенных выше характеристик, путем построения для каждой из функций семейства кривых, полученных при нескольких значениях максимальной длины очереди.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания //М.: ЛКИ, 2014 – 164с.
2. Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г. Системы массового обслуживания – Учебник//М., Изд-во МГУ, 1984. – 242с.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ

Коломейцев Ю.В.¹

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Исследования операций, e-mail: yury.kolomeytshev@gmail.com

Портфельная оптимизация — это теоретическая и практическая задача финансового инжиниринга, которая заключается в распределении капитала среди активов с целью максимизации доходности при ограничении риска.

Целью работы является изучение эффективности использования различных алгоритмов машинного обучения, в частности глубокого обучения с подкреплением, для решения задачи портфельной оптимизации в режиме реального времени [1].

Мы предлагаем новый алгоритм Мета-обучения для решения задачи портфельной оптимизации на основе обучения с подкреплением (Meta RL). В отличие от предыдущих работ, в которых агенты RL управляли активами напрямую и производили действия в виде покупки или продажи определенного количества некоторого актива [2, 3], в нашем подходе RL агент управляет другими алгоритмами (базовыми). Основная цель Meta RL агента — выяснить, какие базовые алгоритмы будут более прибыльными для текущего торгового периода с учетом их предыдущих доходностей и предсказанных весов. Для обучения RL агента был использован метод Policy Gradient, в качестве агентов, предсказывающих веса активов, были взяты сверточные (CNN) и рекуррентные нейросети (RNN, LSTM, GRU), а в качестве оптимизируемого функционала была взята итоговая доходность стратегии с учетом комиссии брокера.

Проведено тестирование полученных Мета-алгоритмов на бирже MOEX на 30 активах и их сравнение с другими популярными стратегиями. Оно показало, что разработанный подход превосходит все рассматриваемые алгоритмы по основным метрикам. Ниже приведена таблица сравнения Мета-алгоритмов на основе CNN и GRU с тремя другими лучшими стратегиями на тестовом периоде (2018.10.31 – 2019.05.03):

Алгоритм	Sharpe	Return	APY	MDD	Volatility
Meta RL CNN	4.59	0.64	1.68	0.08	0.0098
Meta RL GRU	4.22	0.58	1.5	0.12	0.0100
Markowitz	3.02	0.21	0.46	0.05	0.0057
EG	2.56	0.19	0.47	0.06	0.0064
BMAR-1	2.13	0.25	0.57	0.10	0.0100

Литература

1. Bin Li, Steven C. H. Hoi. Online portfolio selection: A survey. // ACM Computing Surveys, 46(3):35:1–35:36, 2014.
2. Moody J., Wu L., Liao Y., Saffell M. Performance Functions and Reinforcement Learning for Trading Systems and Portfolios. // Journal of Forecasting, Volume 17, Pages 441 - 470, 1998.
3. Zhengyao Jiang, Dixing Xu, Jinjun Liang. A deep reinforcement learning framework for the financial portfolio management problem. // arXiv.org no.1706.10059, 2017.

БИННИНГ ДАННЫХ В КРЕДИТНОМ СКОРРИНГЕ

Шурыгин А.А.¹

1) ПАО Сбербанк России (Московский государственный университет им. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра Исследования операций) e-mail: shurygin1996@gmail.com

Основные модели кредитного скоринга – PD модели (probability default). Это задачи бинарной классификации, в которых необходимо построить модель вероятности того, что клиент выйдет в дефолт. Для построения таких моделей используют формулу логистической регрессии:

$$P(Y = 1) = \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n))} \quad (1)$$

где β_i – коэффициент логистической регрессии, X_i – фактор. Однако реальная зависимость от факторов может быть намного сложнее. Идея состоит в том, что зависимость вероятности дефолта от каждого отдельного фактора нужно просто аппроксимировать. Простейшая форма аппроксимации – ступенчатая функция. Для формулы логистической регрессии используется WoE преобразование, которое требует от факторов разбиение на группы. Вместо значения самого фактора, используется WoE значение группы, в которую попадает это значение.

$$WOE_i = \ln \left(\frac{\frac{N_{G(i)}}{N_G}}{\frac{N_{B(i)}}{N_B}} \right) \quad (2)$$

где $N_G(i)$ и N_G – количество недефолтных наблюдений в группе i и по всей выборке, соответственно, $N_B(i)$ и N_B – количество дефолтных наблюдений в группе i и по всей выборке, соответственно.

От того, как факторы будут разбиты на группы, будет зависеть точность модели. Процесс разбиения значений фактора на группы называется биннинг данных.

В данной работе рассмотрен алгоритм монотонного биннинга. Идея этого алгоритма заключается в том, что он максимизирует метрику ROC_AUC. Данная задача была сведена к геометрической задаче, а именно к поиску максимальной выпуклой оболочки. Также было доказано, что данный алгоритм биннинга имеет квадратичную сложность.

Литература

1. Molnar, C. (2013). Recursive partitioning by conditional inference. Department of Statistics, University of Munich.
2. Zeng, G. (2014). Necessary condition for a good binning algorithm in credit scoring. Applied Mathematical Sciences.

Секция: «Обратные задачи управления»

Председатель академик РАН Осипов Ю.С.

О ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ МНОГОШАГОВЫХ КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Никольский М.С.

*МИАН РАН; МГУ, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления,
e-mail: mni@mi-ras.ru*

Многошаговые конфликтно управляемые процессы представляют большой интерес для математической теории управления и широко используются в приложениях (см., например, [1–3]). В работе рассматриваются многошаговые конфликтно управляемые процессы с двумя игроками, с фиксированным числом шагов и с терминальным выигрышем. Начальное состояние системы фиксировано, а конечное состояние системы свободное. Игровой процесс рассматривается с точки зрения 1-го игрока. Он стремится к максимизации терминального выигрыша. Стратегиями обоих игроков являются позиционные управления. Относительно целей 2-го игрока не делается никаких предположений. Считается, что 1-й игрок знает динамику игрового многошагового процесса и в каждый данный дискретный момент

$k = 0, 1, \dots, N - 1$ игрового процесса (N - момент окончания движения рассматриваемой управляемой системы) знает текущее фазовое состояние многошаговой игры.

В работе вводится понятие максимального гарантированного выигрыша в рассматриваемом игровом процессе с точки зрения 1-го игрока. На базе игрового обобщения известной Беллмановской конструкции из теории динамического программирования при широких предположениях строится последовательность функций Беллмана, с помощью которой удастся вычислить наибольший гарантированный выигрыш.

Были также изучены аналитические свойства соответствующих функций Беллмана. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрены два примера.

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр // М.: Изд-во Высшая школа – 1998.
2. Жуковский В.И., Салукvadзе М.Е. Оценка рисков и многошаговые позиционные конфликты // М.: Юрайт – 2018.
3. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Динамические модели конфликтов. I. Язык моделирования // Автоматика и телемеханика (2014), вып.11, с. 127 – 149.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФАКТОРОВ РИСКА

Асеев С.М.^{1,2}

- 1) Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, e-mail: aseev@mi-ras.ru
2) Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра оптимального управления

Рассматривается следующая задача оптимального управления (Р):

$$J(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) + \int_0^T \lambda(x(t)) \delta_M(x(t)) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1.$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ - фазовый вектор, M_0 и M_1 - непустые замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ - локально липшицеовое многозначное отображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, $\varphi: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ - локально липшицева функция, $\lambda: \mathbb{R}^n \mapsto (0, \infty)$ - непрерывно дифференцируемая функция, а

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Основное отличие задачи (Р) от классической задачи оптимального управления состоит в том, что интегральный член в функционале $J(T, x(\cdot))$ содержит характеристическую функцию $\delta_M(\cdot)$ заданного открытого множества M из $\mathbb{R}^n$, которое может рассматриваться, как множество допустимых, но нежелательных, состояний системы ("зона риска"). Постановка задачи (Р) является ослаблением постановки стандартной задачи оптимального управления с фазовым ограничением [1]. Главная трудность ее изучения связана с разрывностью характеристической функции $\delta_M(\cdot)$.

В докладе обсуждаются необходимые условия оптимальности для задачи (Р) [2] и ее связь с задачей оптимального управления с фазовыми ограничениями. В частности, показано, что при некоторых дополнительных условиях типа управляемости при всех достаточно больших $\hat{\lambda} > 0$ задача (Р) с функцией $\lambda(x) \equiv \hat{\lambda}$ полностью эквивалентна соответствующей задаче с фазовым ограничением. Ранее, в случае замкнутого множества M различные варианты задачи (Р) изучались в работах [3-5].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Физматгиз – 1961.
2. Асеев С.М. Об одной задаче оптимального управления с разрывным интегрантом // Тр. ИММ УрО РАН (2018) **24**, № 1, с. 15–26.
3. Пшеничный Б.Н., Очиллов С. О задаче оптимального прохождения через заданную область // Кибернетика и вычисл. техника (1993) **99**, с. 3–8.
4. Асеев С.М., Смирнов А.И. Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область // Нелинейная динамика и управление, **4**, М: Физматлит – 2004, с. 179–204.
5. Смирнов А.И. Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом // Тр. МИАН (2008) **262**, с. 222–239.

САНКЦИИ И КОНТРСАНКЦИИ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Жуковский В.И.¹, Жуковская Л.В.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

2) ЦЭМИ РАН, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

Рассматривается дифференциальная позиционная игра трех лиц в нормальной форме $\Gamma = \langle \{1, 2, 3\}, \Sigma, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2,3}, \{\mathfrak{F}_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \rangle$.

В Γ управляемая система $\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + \sum_{i=1}^3 u_i$, $x(t_0) = x_0$, где $A(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \mathcal{G}]$,

$\mathcal{G} = \text{const} > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, множество стратегий i -го игрока $\mathcal{U}_i = \{U_i \div Q_i(t)x \mid \forall Q_i(\cdot) \in C_{n \times n}[0, \mathcal{G}]\}$ ($i = 1, 2, 3$), $U = (U_1, U_2, U_3)$ - ситуация, множество их $\mathcal{U}$. Каждый игрок выбирает свою стратегию $U_i \div Q_i(t)x$, образуется ситуация $U \in \mathcal{U}$, строится решение $x(t)$ системы $\dot{x}(t) = [A(t) + \sum_{i=1}^3 Q_i(t)]x(t)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и реализации $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$, далее $u = (u_1, u_2, u_3)$.

На непрерывных парах $\{(x(t), u(t)) \mid t_0 \leq t \leq \mathcal{G}\}$ определена функция выигрыша игрока i : $\mathfrak{F}_i(U, t_0, x_0) = x'(\mathcal{G})C_i x(\mathcal{G}) + \int_{t_0}^{\mathcal{G}} \sum_{j=1}^3 u_j'[t] D_{ij} u_j[t] dt$.

Здесь C_i, D_{ij} постоянные симметричные $n \times n$ матрицы, штрих сверху означает операцию транспонирования. Для трехкритериальной задачи $\Gamma_v = \langle \Sigma, \{\mathfrak{F}_i(U, t_0, x_0)\}_{i=1,2,3} \rangle$ строится методом динамического программирования максимальное по Парето решение $(U^P, \mathfrak{F}^P[t_0, x_0])$ задачи Γ_v , где U^P максимальная по Парето альтернатива Γ_v , а $\mathfrak{F}^P[t_0, x_0] = (\mathfrak{F}_1(U^P, t_0, x_0), \mathfrak{F}_2(U^P, t_0, x_0), \mathfrak{F}_3(U^P, t_0, x_0))$. Первый игрок объявляет санкцию на U^P (определяемую условием коллективной рациональности для Γ), если у него существует стратегия $U_1^T \in \mathcal{U}_1$ такая, что $\mathfrak{F}_1(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0) > \mathfrak{F}_1(U^P, t_0, x_0)$. В ответ на эту санкцию второй игрок объявляет контрсанкцию $U_2^C \in \mathcal{U}_2$, для которой

$$\mathfrak{F}_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) < \mathfrak{F}_1(U^P, t_0, x_0), \quad \mathfrak{F}_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) > \mathfrak{F}_2(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0).$$

Определение. Максимальную по Парето альтернативу U^P задачи Γ_v назовем равновесием санкций и контрсанкций игры Γ , если в ответ на любую санкцию любого игрока, хотя бы у одного из оставшихся имеется контрсанкция.

Далее $D > 0$ (< 0) означает определенную положительность (отрицательность) квадратичной формы $x'Dx$.

Теорема. Пусть в игре Γ

1. матрицы $D_{ii} > 0, D_{ij} < 0$ при $\forall$ парах $(i, j) \in \mathcal{N} = \{i, j = 1, 2, 3; (i \neq j)\}$,

2. $\exists$ пара $(i, j) \in \mathcal{N}$ такая, что $\Lambda_{ii}\Lambda_{jj} < \lambda_{ij}\lambda_{ji}$, где $\Lambda_{ii} > 0$ ($-\lambda_{ij} < 0$) наибольший корень характеристического уравнения $\det|D_{ii} - \lambda E_n| = 0$ (соответственно, $\det|D_{ij} - \lambda E_n| = 0$, E_n - $n \times n$ - единичная матрица).

Тогда в Γ существует равновесие санкций и контрсанкций при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \mathcal{G}] \times \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0_n$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ РЕЖИМОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Киселёв Ю.Н.¹, Аввакумов С.Н.², Орлов М.В.³, Орлов С.М.⁴

1) БМК МГУ, Москва, kiselev@cs.msu.su

2) БМК МГУ, Москва, asn@cs.msu.su

3) БМК МГУ, Москва, orlov@cs.msu.su

4) БМК МГУ, Москва, sergey.orlov@cs.msu.su

В докладе рассматриваются различные нелинейные задачи оптимального управления на конечном и бесконечном отрезках времени с функционалом интегрального типа с дисконтирующим множителем. Все задачи допускают экономическую интерпретацию: модель экономического роста, модель распределения ресурсов и пр. Во всех моделях динамика описывается с помощью многосекторной производственной функции Кобба-Дугласа. Фазовые переменные характеризуют уровень развития соответствующих секторов экономики с равными или различными коэффициентами амортизации. Функционал качества определяет интегральный объём потребления на заданном промежутке времени.

Конструктивное описание оптимального решения получено с использованием принципа максимума Понтрягина [1]. При достаточно большом горизонте планирования оптимальное решение выходит на особый луч --- стационарный режим сбалансированного экономического роста, который в фазовом пространстве можно представить в виде некоторого сингулярного луча, выходящего из начала координат. Поведение оптимальной траектории заключается в следующем: на начальном участке времени фазовая траектория стремится к особому лучу, причём оптимальное управление может содержать различные особые участки, затем фазовая точка, находясь на луче, удаляется от начала координат, что соответствует фазе сбалансированного роста с особым управлением. Если горизонт планирования конечный, то фазовая траектория сходит с особого луча на финальном участке времени.

Обоснование оптимальности построенного экстремального решения производится с привлечением теоремы [2] о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкерлидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // – Материалы научного семинара «Математические модели в экономике и биологии». М.: МАКС Пресс. – 2003. С. 57–67.

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Асеев А.С.¹, Самсонов С.П.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: anton.ser.as@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: samsonov@cs.msu.ru

Рассмотрим следующую управляемую версию модели Калдора [1]:

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= \alpha [I(Y(t), K(t)) - (1-u(t))\gamma Y(t)], \\ \dot{K}(t) &= I(Y(t), K(t)) - \delta K(t).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $Y(t)$ и $K(t)$ — величины национального дохода и основных производственных фондов (капитала) в момент $t \geq 0$, $\alpha > 0$ — поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ — норма амортизации основных фондов. Будем считать, что функции инвестиций $I(Y, K)$, $Y \geq 0$, $K \geq 0$, и сбережений $S(Y)$, $Y \geq 0$, имеют следующий вид:

$$I(Y, K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K, & K \leq \frac{I(Y)}{\beta}, \\ 0, & K > \frac{I(Y)}{\beta}, \end{cases} \quad S(Y) = \gamma Y,$$

где $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, а функция $I: [0; \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ имеет логистический вид, т.е. $I(Y)$ — такая положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, что $I(0) = I_0 > 0$, $\lim_{Y \rightarrow \infty} I(Y) = I_\infty < \infty$, $I'(Y) > 0$ и существует такое $\hat{Y} > 0$, что $I''(Y) > 0$ если $Y < \hat{Y}$ и $I''(Y) < 0$ если $Y > \hat{Y}$.

В качестве допустимых управлений рассматриваются все измеримые по Лебегу функции $u: [0, \infty) \mapsto [0, 1]$. Управляющий параметр $u \in [0, 1]$ характеризует долю $uS(t)$ сбережений $S(t) = \gamma Y(t)$, перераспределенную в потребление $C(t) := Y(t) - S(t)$ в момент времени $t \geq 0$ в результате проводимой центральным планирующим органом политики стимулирования спроса.

Известно, что принцип максимума Понтрягина [2] для гладких управляемых систем является необходимым условием попадания траектории на границу множества достижимости [3]. Основываясь на этом факте предлагается алгоритм приближенного нахождения множества достижимости управляемой системы (1) на заданном интервале $[0, T]$, $T > 0$. Приводятся результаты численного моделирования.

Литература

1. Kaldor N. A model of a trade cycle, The Economic Journal, vol. 50, № 197, pp. 78-92, 1940.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов //М.: Физматгиз, 1961.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы оптимального управления //М.: Изд. Наука, 1972.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ТЕОРИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Сурков П.Г.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
e-mail: spg@imm.uran.ru

Рассматривается динамическая система, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями дробного порядка

$$\begin{aligned} [{}^C D^\gamma x_1](t) &= g_1(t, x_1) + Bx_2(t), \quad x_1(\sigma) = x_{1\sigma}, \quad \gamma \in (0,1), \\ [{}^C D^\gamma x_2](t) &= g_2(t, x_1, x_2) + Cu(t), \quad x_2(\sigma) = x_{2\sigma}, \quad t \in T = [\sigma, \theta]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x_1 \in R^n$, $x_2 \in R^m$, $(x_{1\sigma}, x_{2\sigma})$ - начальное состояние, функции $g_1: T \times R^n \rightarrow R^n$ и $g_2: T \times R^n \times R^m \rightarrow R^m$ заданы и удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных. Для функции $x: T \rightarrow R^n$ и произвольного $\gamma \in (0,1)$, выражение $[{}^C D^\gamma x](t) = \Gamma^{-1}(1-\gamma) \frac{d}{dt} \int_\sigma^t (t-s)^{-\gamma} (x(s) - x(\sigma)) ds$, называется левосторонней дробной производной Капуто [1], где $\Gamma(\cdot)$ - Гамма функция Эйлера.

Траектория $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ заранее неизвестна и определяется некоторым возмущением $u(\cdot)$, которое удовлетворяет априорным ограничениям $u(t) \in P, t \in T$, где P - заданное ограниченное и замкнутое множество в R^m . В дискретные, достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, координата $x_1(\tau_i)$ измеряется с погрешностью $h \in (0,1)$. Результаты измерений $\xi_i^h \in R^n$ удовлетворяют неравенству $\|x_1(\tau_i) - \xi_i^h\|_{R^n} \leq h$. Требуется найти управление $u(\cdot)$, порождающее $x_1(\cdot): u(\cdot) = u(\cdot, x_1(\cdot))$. Ввиду наличия погрешности h и возможной неединственности $u(\cdot)$, необходимо построить алгоритм вычисления некоторого приближения $u(\cdot)$. Алгоритм решения задачи основан на методе динамического обращения, предложенном в [2], а также с использованием метода экстремального прицеливания из теории позиционного управления [3] и локальной регуляризации.

Теорема. Пусть функции g_1 и g_2 удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных с константой $L > 0$, $\gamma \in (1/2, 1)$, параметр регуляризации $\alpha(h)$ и шаг разбиения $\delta(h)$ отрезка T удовлетворяют соотношениям $\alpha(h) \rightarrow 0$, $\delta(h) \rightarrow 0$ и $(h + \delta^\gamma(h))/\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда существуют постоянные $d_i > 0$ и $\beta \in (0,1)$, не зависящие от h , α , δ , такие, что для системы (1) выполнено неравенство $\|w_2(t) - x_2(t)\|_{R^m}^2 \leq d_1 \delta^\gamma + d_2 h^\beta + d_3 h^{1-\beta} + d_4 \frac{\alpha}{h^\beta} + d_5 \frac{\delta^\gamma}{h^\beta} + d_6 \alpha$, где w_2 - координата модельной системы метода экстремального прицеливания Красовского.

Литература

1. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. Theory and applications of fractional differential equations // Elsevier – 2006.
2. Osipov Yu.S., Kryazhinskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions // Gordon & Breach, Basel – 1995.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems // Springer – 1988.

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

Макасимов В.И.

*Институт математики и механики УрО РАН,
e-mail: maksimov@imm.uran.ru*

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), y(t)), \quad t \in T = [0, \mathcal{G}],$$

$$\dot{y}(t) = f_2(t, x(t), y(t), u(t))$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Здесь $0 < \mathcal{G} < +\infty$, $x \in R^n$, $y \in R^N$, $u \in R^r$, $f_2(t, x, y, u) = f_{21}(t, x, y) + Bu$, f_1 и f_{21} – липшицевы функции. На систему действует неизвестное возмущение $u(\cdot) \in L_2(T; R^r)$. В дискретные моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0 = 0$, $\tau_m = \mathcal{G}$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) измеряется часть фазовых состояний системы, а именно состояния $x(\tau_i) = x(\tau_i; x_0, y_0, u(\cdot))$. Состояния $x(\tau_i)$, $i \in [1: m-1]$, измеряются с ошибкой. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in R^n$ – удовлетворяют неравенствам $|x(\tau_i) - \xi_i^h| \leq h$.

Здесь $h \in (0, 1)$ – уровень погрешности измерения. Задача состоит в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения.

Пусть фиксированы разбиения отрезка T : Δ_h , $h \in (0, 1)$, контрольными моментами времени $\tau_{h,i} : \Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$, $\tau_{h,0} = 0$, $\tau_{h,m_h} = \mathcal{G}$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h)$, $\delta(h) \in (0, 1)$, а также две функции $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ и $\alpha_1(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$. Для решения задачи вводятся две вспомогательные управляемые системы

$$\dot{w}_1^h(t) = v_1^h(t) \quad (w_1^h, v_1^h \in R^n),$$

$$\dot{w}_2^h(t) = f_{21}(\tau_i, \xi_i^h, u_{li}^h) + Bu_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0: m_h - 1]$$

с начальными условиями $w_1^h(0) = x_0$, $w_2^h(0) = y_0$. Управления $v^h(\cdot)$ и $u^h(\cdot)$ находятся по формулам

$$v_i^h = -\alpha_1^{-1} [w_1^h(\tau_i) - \xi_i^h + \tau_i f_1(0, x_0, y_0)],$$

$$u_{li}^h = -\alpha^{-1} B^{-1} (w_2^h(\tau_i) - u_{li}^h), \quad u_{li}^h = f_{1y}^{-1}(\tau_i, \xi_i^h, v_i^h + f_1(0, x_0, y_0)),$$

где штрих означает транспонирование, $\alpha = \alpha(h)$, $\alpha_1 = \alpha_1(h)$.

Пусть $M \subset R^n$ – область, в которой остаются первые n фазовых координат решения системы, порожденного неизвестным возмущением $u(\cdot)$.

Условие 1. В области $T \times M$ функция $y \rightarrow F = f_1(t, x, y)$ имеет обратную $y = f_{1y}^{-1}(t, x, F)$, которая является липшицевой. Кроме того, функция f_1 имеет производные по каждому аргументу, и справедливо включение $\ddot{x}(\cdot) \in L_2(T; R^n)$.

Оказывается, что при выполнении Условия 1 при определенном согласовании параметров h , $\delta(h)$, $\alpha(h)$ и $\alpha_1(h)$ функции $u^h(\cdot)$ сходятся в $L_2(T; R^r)$ при $h \rightarrow 0$ к минимальному по L_2 -норме возмущению, порождающему $(x(\cdot), y(\cdot))$.

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОДВИЖНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА

Артемяева Л.А., Дряженков А.А.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления,
e-mail: artemieva.luda@gmail.com, andrja@yandex.ru

Рассматривается задача подвижного управления [1] для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} y_{tt}(t, x) &= y_{xx}(t, x) + v(t)\delta(x - s(t)), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times (0, l), \\ y|_{x=0} &= 0, y|_{x=l} = 0, t \in (0, T), \\ y|_{t=0} &= 0, y_t|_{t=0} = 0, x \in (0, l), \end{aligned} \quad (1)$$

Параметры $l > 0$, $T > 0$ заданы, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Требуется выбрать управляющие воздействия $v(t), s(t)$ так, чтобы

$$y|_{t=T} = f^0(x), y_t|_{t=T} = f^1(x), x \in (0, l).$$

В работе рассматриваются управления $u = (v, s) \in H = L^2(0, T) \times H^1(0, T)$, где $H^1(0, T)$ – пространство Соболева функций, имеющих первую производную из гильбертова пространства Лебега $L^2(0, T)$, и соответствующие им обобщённые решения $y = y(t, x; u)$ краевой задачи (1). Пара функций $f = (f^0, f^1) \in F = H^1(0, l) \times L^2(0, l)$, такая что $f^0(0) = f^0(l) = 0$, считается заданной.

Рассмотрим оператор $A: H \rightarrow F$, действующий по правилу $A(u) = (y|_{t=T}, y_t|_{t=T})$. С использованием этого оператора задача (1) может быть переформулирована в виде нелинейного операторного уравнения $A(u) = f$. Для его устойчивого численного решения предлагается воспользоваться модификацией обобщённого принципа невязки, изложенной в [2]. При этом конечномерные операторы A , приближающие исходный оператор A поточечно, строятся с помощью метода Фурье:

$$\begin{aligned} A(u) &= \left(\sum_{n=1}^N f_n^0 \sin \frac{\pi n x}{l}, \sum_{n=1}^N f_n^1 \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \\ f_n^0 &= \frac{2}{\pi n} \sum_{m=1}^M \sin \frac{\pi n (T - t_{m-1/2})}{l} \sin \frac{\pi n s(t_{m-1/2})}{l} \int_{t_{m-1}}^{t_m} w(t) dt, \\ f_n^1 &= \frac{2}{l} \sum_{m=1}^M \cos \frac{\pi n (T - t_{m-1/2})}{l} \sin \frac{\pi n s(t_{m-1/2})}{l} \int_{t_{m-1}}^{t_m} w(t) dt, t_m = \frac{mT}{M}. \end{aligned}$$

В работе получены две оценки погрешности приближения оператором A исходного оператора A в парах пространств $H^1(0, T) \times H^1(0, T) \rightarrow F$ и $H \rightarrow L^2(0, l) \times (H^1(0, l))^*$, являющиеся априорной информацией для метода из [2].

Исследование выполнено в рамках гранта МК 3539.2019.1, а также при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-31-00391.

Литература

1. Бутковский А.Г., Даринский Ю.В., Пустыльников Л.М. Подвижное управление системами с распределёнными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1976. № 2. С. 15–25.
2. Дряженков А.А., Потапов М.М. Об обобщённом принципе невязки для нелинейных операторных уравнений при наличии возмущений в ослабленных нормах // Тихоновские чтения. Тез. докл. М. : МАКС Пресс, 2018. С. 37.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ РАЗНОТИПНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Григоренко Н.Л.¹, Горьков В.П.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления, e-mail: grigor@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория обратных задач, e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru

Рассматривается движение $m + 1$ точек (игроков P_i , $i = 1..m$; E) x_i , $i = 1..m$ и y , в евклидовом пространстве R^n размерности $n \geq 1$, которое задается уравнениями

$$\begin{aligned} P_i: \quad \ddot{x}_i + f_i(x_i)\dot{x}_i &= u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1..m; \\ E: \quad \ddot{y} + g(y)\dot{y} &= v, \quad y(0) = y_0. \end{aligned}$$

Здесь $f_i(x)$ и $g(y)$ скалярные функции, u_i и v – управляющие векторы, принадлежащие пространству R^n и удовлетворяющие условиям $\|u_i\| \leq p_i$, $\|v\| \leq \sigma$. В пространстве R^n выделены выпуклые компакты M_i . Процесс управления начинается из позиции x_{i0} , $i = 1..m$, y_0 и заканчивается в первый момент T , для которого хотя бы при одном i выполнено включение: вектор $y(T)$ принадлежит множеству $x_i(T) + M_i$. Рассматриваются задача о существовании позиционных управлений u_i [1,2], гарантирующих окончание процесса управления за конечное время при любом допустимом изменении параметра $v(t)$ и задача построения таких управлений. В докладе приведены достаточные условия на параметры управляемой системы, при которых динамика уравнений относительно параметра x_i , $i = 1..m$, позволяет, используя текущую информацию, так конструировать параметры управления u_i , что позиция каждого из векторов $x_i(t)$ относительно вектора $y(t)$ в определенном смысле не ухудшается, и хотя бы для одного вектора $x_i(t)$ строго улучшается [3,4]. Такие способы преследования называются способами гарантированного неухудшения позиции группы объектов P_i относительно объекта E . Приводятся результаты численных расчетов траекторий $x_i(t)$, $y(t)$ и управлений $u_i(t)$, гарантирующих окончание процесса управления за конечное время из заданных начальных позиций, при различных допустимых реализациях управления $v(t)$.

Литература

1. Понtryгин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования //Мат.сб.1980 Т.112, № 3, с 307-330.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.// М.Наука,1974.
3. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подходы к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН. 2006. Т. 61, \№ 4. С. 25-76.
4. Никольский М.С. Особые множества экстремальных управлений в задачах оптимального управления, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, 304, МИАН, М., 2019, 252–256.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО АНАЛИЗАТОРА ДЛЯ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ УПРАВЛЕНИИ.

Лукьянова Л.Н. ¹

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория обратных задач,
e-mail: llm@cs.msu.ru

Рассматривается задача синтеза ограниченного управления для нелинейной управляемой системы в виде схемы дифференциального анализатора — устройства для преобразования функциональных зависимостей, отображающих линии на плоскости в управляющие функции соответствующей системы уравнений [1]. Рассматриваемый дифференциальный анализатор предназначен для использования в системах позиционного управления процессом лечения ряда заболеваний крови. Для описания динамики концентраций нездоровых и здоровых клеток в процессе лечения таких заболеваний, как лимфома, миелома и лейкоз, используется модель конкуренции Лотки–Вольтерры [2]. Для анализа возможных стратегий лечения используется вариант модели с управляемыми параметрами и теория управления [3]. Модель конкуренции Лотки–Вольтерры с фазовыми переменными x, y и управляемыми параметрами w, u [2], при наличии ограничений на управления имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r(1 - k_1 w(t))f_1(x(t), y(t))x(t) - m_1 u(t)x(t), \\ \dot{y}(t) = (1 - k_2 w(t))f_2(x(t), y(t)) - m_2 u(t)y(t), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x_0, y_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 1 - x(t) - b_{12}y(t), \quad f_2(x, y) = 1 - b_{21}x(t) - y(t), \quad b_{12}, b_{21} > 0, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{\max} \leq 1, \quad 0 \leq w(t) \leq w_{\max} \leq \min\{k_1^{-1}, k_2^{-1}\}, \\ m_2 > m_1, \quad k_2 > k_1, \quad b_{12}b_{21} \neq 1. \end{cases} \quad (2)$$

$$F(x, y) = 0, \quad F(1, 0) = 0. \quad (3)$$

В качестве целевого множества рассматривается окрестность точки $x = 1, y = 0$. Движение к ней из начальной точки необходимо осуществить в окрестности кривой, задаваемой дважды дифференцируемой функцией $F(x, y) = 0$. Необходимо найти позиционное управление системой уравнений (1), удовлетворяющее ограничениям (2), для которого траектория системы (1) с некоторого момента времени находится в некоторой окрестности заданной кривой (3) $F(x, y) = 0$. В работе описан поиск управления, осуществляющего движение фазового вектора в окрестности заданной кривой на основе метода структурного синтеза нелинейных систем [1]. Формализация позиционного управления для нелинейной системы опирается на работу [3].

Литература

1. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971. 113 с.
2. Клименкова А.Д., Коробейников А., Хайлов Е.Н. Оптимальные стратегии подавления клеточного деления в антираковой терапии // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, 12-14 декабря 2018 г. – Москва: Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН; МАКС Пресс, 2018, С. 134–137.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

Секция: «Теория вероятностей и математическая статистика»

Председатель профессор Королев В.Ю.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ СТАНЦИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПО РАЗЛИЧНЫМ КРИТЕРИЯМ

Фисак А.А.¹, Захарова Т.В.²

1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, e-mail: toryinside@gmail.com

2) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, e-mail: tvzaharova@mail.ru

В задачах оптимального размещения станций обслуживания в случае конечного числа точек вызовов обычно используются наглядные критерии оценки оптимальности размещения: сумма расстояний от каждой из точек вызова до ближайшей станции или наибольшее из таких расстояний должны быть минимальны. Если же вызов может поступать из любой точки множества мощности континуум, можно выбрать вероятностный критерий: для набора станций обслуживания $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на основе случайной величины ξ , описывающей координату вызова, мы можем построить случайную величину, описывающую расстояние от вызова до ближайшей к нему станции; в качестве критерия предлагается использовать математическое ожидание последней случайной величины, возведенной в выбранную нами положительную степень s . Размещение, доставляющее критерию минимальное значение, будет оптимальным.

Тем не менее нахождение точного решения задачи оптимального размещения для предложенного критерия возможно только в самых простых моделях. В данной работе в рамках задачи размещения станций обслуживания на отрезке вещественной прямой авторы демонстрируют модели, для которых такое решение получено, а также представляют свои текущие результаты в разработке поиска асимптотически оптимальных размещений: алгоритмов расстановки произвольного числа станций таким образом, чтобы по мере роста количества станций значение критерия при предложенной расстановке всё более точно приближалось к значению критерия при неизвестном оптимальном размещении того же числа станций.

В данный момент представлен алгоритм, обеспечивающий асимптотически оптимальное второго порядка размещение станций обслуживания на вещественной прямой для всех критериев с натуральным значением параметра s , а также для случая произвольных положительных значений этого параметра получено обобщение теоремы, лежащей в основе этого результата: эта теорема указывает асимптотику расположения каждой станции внутри зоны обслуживаемых ею точек при увеличении количества размещаемых станций.

Предложенный алгоритм представляет собой практически применимый результат, достаточно хорошо приближающий недоступное идеальное размещение.

Литература

1. Fisak A.A., Zakharova T.V. Asymptotically optimal service station arrangements for a parametric family of criteria //Journal of Mathematical Sciences (2019) **237**, №6, с.766–774.

ОЦЕНКА РИСКА ПОРОГОВОЙ ОБРАБОТКИ В ЗАДАЧАХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНОЙ СЕТКОЙ

Шестаков О.В.^{1,2}

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, e-mail: oshestakov@cs.msu.ru
- 2) Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" Российской академии наук

Алгоритмы вейвлет-анализа в сочетании с процедурами пороговой обработки широко используются в задачах непараметрической регрессии при оценивании функции сигнала по зашумленным данным. Наблюдаемые данные преобразуются в эмпирические вейвлет-коэффициенты, к которым применяется функция пороговой обработки, после чего осуществляется обратное преобразование. Преимущества данных методов заключаются в их вычислительной эффективности и возможности адаптации к локальным особенностям оцениваемой функции. Наиболее распространены функции жесткой и мягкой пороговой обработки.

Для модели отсчетов сигнала, заданных на равномерной неслучайной сетке и содержащих белый гауссовский шум, эти методы хорошо изучены. Предложены способы вычисления пороговых значений, обеспечивающих «почти» оптимальный порядок среднеквадратичного риска [1]. Также изучены статистические свойства оценки среднеквадратичного риска. Анализ этой оценки является важной практической задачей, поскольку дает возможность получать представление о погрешности методов пороговой обработки на основе только наблюдаемых данных. Показано, что при определенных условиях данная оценка оказывается сильно состоятельной и асимптотически нормальной [2].

В некоторых приложениях нет возможности (или она сильно затруднена) регистрировать отсчеты сигнала через равные промежутки времени. Иногда природа сигнала такова, что регистрация его отсчетов производится в случайные моменты времени. Известно [3], что если точки отсчета образуют вариационный ряд, построенный по выборке из равномерного распределения на отрезке регистрации сигнала, то использование обычных процедур пороговой обработки оказывается адекватным. В докладе проводится анализ оценки среднеквадратичного риска пороговой обработки в этом случае и показывается, что статистические свойства этой оценки также не меняются при переходе от фиксированной равномерной сетки отсчетов к случайной [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-11-00155).

Литература

1. Donoho D., Johnstone I.M. Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage // *Biometrika* (1994) **81**, No.3, P.425-455.
2. Шестаков О.В. Вероятностно-статистические методы анализа и обработки сигналов на основе вейвлет-алгоритмов // М.: АРГАМАК-МЕДИА – 2016.
3. Cai T., Brown L. Wavelet Estimation for Samples with Random Uniform Design // *Stat. Prob. Lett.* (1999) **42**, P. 313-321.
4. Шестаков О. В. Свойства вейвлет-оценок сигналов, регистрируемых в случайные моменты времени // *Информатика и ее применения* (2019) **13**, №2, с. 30-35.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЯХ ТРАФИКА. II.

Хохлов Ю.С.¹, Сидорова О.И.²

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра математической статистики,
e-mail: yskhokhlov@yandex.ru

2) ТвГУ, факультет ПМК, кафедра математической статистики и системного анализа,
e-mail: oksana.i.sidorova@yandex.ru

Задача оценки качества обслуживания является одной из наиболее важных проблем в теории телетрафика. Для оценки качества обслуживания используются различные показатели. Одним из наиболее популярных является вероятность переполнения конечного буфера. Данная работой в некотором смысле завершает цикл статей, в рамках которых были получены нижние оценки вероятности переполнения большого буфера в системе, на вход которой подается нагрузка, описываемая конечной суммой независимых дробных броуновских движений и устойчивых движений Леви. При этом предполагается, что мы имеем по крайней мере по одному процессу указанного вида во входящем потоке. Среди специалистов по теории телетрафика распространено мнение, что если во входящем потоке присутствует несколько компонент, содержащих заявки с разной степенью тяжести, то итоговый поток определяется самой тяжелой компонентой. В некоторых примерах это действительно так. В нашем случае мы имеем гауссовские компоненты (легкие хвосты) и устойчивые процессы (тяжелые хвосты). Ожидается, что компоненты первого типа асимптотически не внесут никакого вклада в вероятность переполнения большого буфера. Мы показываем, что это не совсем так. Оказывается, что свойство долговременной зависимости дробного броуновского движения оказывает такое же влияние, как и тяжесть хвоста устойчивого распределения.

В нашей работе мы показываем, что все компоненты входящего потока вносят нетривиальный вклад в оценку вероятности переполнения большого буфера. Эта вероятность имеет степенной порядок убывания с ростом размера буфера. Показатель степени однозначно определяется максимальным показателем Херста дробных броуновских движений и минимальным характеристическим показателем среди устойчивых движений Леви, составляющих входящий поток.

Для получения нашей оценки мы используем метод, предложенный впервые в работе И. Норроса для случая одного дробного броуновского движения и развитый нами позднее для более сложных моделей, опираясь на свойство самоподобия компонент входящего потока и так называемую теорему Бреймана.

Работа поддержана РФФИ, проект 18-07-00678.

Литература

1. Norros. A storage model with self-similar input. // *Queueing Syst.*, (1994), 16, p.p. 387-396.
2. Yu. S. Khokhlov, O.V. Lukashenko, and E.V. Morozov. On a lower asymptotic bound of the overflow probability in a fluid queue with a heterogeneous fractional input. // *Journal of Mathematical Sciences*, (2018), Vol. 237, No. 5, March, 2019. -- 667-672.
3. Гончаров Б.А., Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях трафика. // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2018. № 4. С. 50-63.

Секция: «Математическая кибернетика»

Председатель профессор Ложкин С.А.

О ПРИМЕНЕНИИ SAT-РЕШАТЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПЕРИОДИЧНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Бухман А.В.

ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: antvbx@gmail.com

В заметке рассматривается вопрос о построении быстрых алгоритмов для задачи нахождения периода булевой функции, заданной полиномом, замкнутому класс, с использованием SAT-решателей. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – булева функция, тогда ненулевой вектор $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ назовём периодом этой функции, если $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 \oplus \tau_1, \dots, x_n \oplus \tau_n)$. Булеву функцию, для которой такой вектор существует, назовём периодической с периодом $(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Рассмотрим следующую задачу. Пусть на вход подаётся полином Жегалкина некоторой булевой функции; требуется определить является ли эта функция периодической.

Построим явное сведение задачи проверки периодичности к задаче выполнимости для этого перейдём к системе уравнений. В работе [1] показано, что эта задача равносильна решению системы уравнений вида $\sum_{K \in P: K > \alpha} K \setminus K_\alpha = 0$, записанных для некоторого множества α , мощность которого не превосходит $(l^2 + l)(n + 1)$, где l – длина полинома функции, n – число переменных. Дополним эту систему ещё одним уравнением, а именно $x_1 \vee \dots \vee x_n = 1$, чтобы исключить тривиальное решение.

От системы уравнений к системе дизъюнкций. Для этого каждое уравнение вида $K_1 \oplus \dots \oplus K_s = 0$, перепише в виде следующих уравнений $K_1 \oplus u_1 = 1, u_1 \oplus K_2 \oplus u_2 = 1, \dots, u_{s-1} \oplus K_s = 1$. Нетрудно видеть, что каждое из этих уравнений раскрывается в КНФ длины $O(n)$. Далее полученную систему дизъюнкций можно подать на вход SAT решателю.

Данный подход позволяет применять SAT-решатели для нахождения периода для булевой функции, заданной в форме полинома. Отметим, что построенное здесь сведение является полиномиальным относительно длины записи полинома.

Литература

1. А. В. Бухман, “О свойствах полиномов периодических функций и сложности распознавания периодичности по полиному булевой функции”, *Дискрет. матем.*, **26**:1 (2014), 21–31; *Discrete Math. Appl.*, **24**:3 (2014), 129–137

О СЛОЖНОСТИ ВЕРИФИКАЦИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НАД СВОБОДНЫМИ ПОЛУГРУППАМИ

Гнатенко А.Р.¹, Захаров В.А.²

НИИ ВШЭ, факультет компьютерных наук,

1) *e-mail: gnatenko.cmc@gmail.com*

2) *email: zakh@cs.msu.ru*

Конечные автоматы-преобразователи являются математическими моделями разнообразных прикладных программ, вычислительных устройств и технического оборудования. В связи с этим, вопросы анализа, спецификации и верификации автоматов-преобразователей представляют большой теоретический и практический интерес. Автомат-преобразователь работает над алфавитом входных сигналов и алфавитом элементарных действий. В каждый момент времени автомат находится в одном из управляющих состояний. Получив входной сигнал, он совершает переход в новое состояние и выполняет заданную последовательность действий. Для описания поведения автомата-преобразователя необходимо формализовать соответствие между потоками входных сигналов и соответствующими им последовательностями действий. В работах [1,2] для этой цели предложены языки спецификаций Reg-LTL и Reg-CTL, представляющие собой темпоральные логики с операторами, параметризованными регулярными выражениями.

Задача верификации автоматов-преобразователей состоит в том, чтобы по данным автомату и формуле языка спецификаций определить, удовлетворяет ли автомат формуле. В работе [2] построен алгоритм верификации для формул языка LP-CTL, основанный на построении по автомату и формуле системы переходов и разметке этой системы переходов подформулами данной формулы. Этот алгоритм работает за время, экспоненциальное относительно размера автомата и длины формулы.

В настоящей работе доказывается, что задача верификации для LP-CTL является PSPACE-полной. PSPACE-трудность этой задачи следует из PSPACE-полноты задачи проверки непустоты пересечения произвольного конечного семейства регулярных языков. Действительно, пусть $L_1, L_2, \dots, L_n$ – регулярные языки. Формула $EF(L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n)$ выражает утверждение о существовании такого вычисления, в котором разметка некоторого начального отрезка трассы является словом, принадлежащим пересечению языков $L_1, L_2, \dots, L_n$. Автомат, порождающий на выходе всевозможные слова, удовлетворяет этой формуле если и только если пересечение языков $L_1, L_2, \dots, L_n$ непусто. С другой стороны, для проверки соответствия автомата формуле необязательно строить всю систему переходов, как это делается в статье [2]. Существует рекурсивный алгоритм, анализирующий систему переходов «на лету» и использующий объём памяти, полиномиальный относительно размера входа.

Литература

1. D. G. Kozlova, V. A. Zakharov. On the model checking of sequential reactive systems. Proceedings of the 25th International Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P 2016), CEUR Workshop Proceedings, vol. 1698, p. 233-244. Humboldt Universitet Zu Berlin, 2016.
2. Гнатенко А. Р., Захаров В. А. О верификации конечных автоматов-преобразователей над полугруппами // Труды Института системного программирования РАН (электронный журнал). 2018. Т. 30, № 3. С. 303–324.

О ПРОБЛЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ НАД ОДНОБУКВЕННЫМ ВЫХОДНЫМ АЛФАВИТОМ

Жайлауова Ш.Р.

МГУ, ВМК, кафедра математической кибернетики, e-mail: shomykiy@gmail.com

Одной из первых задач, возникающих при построении моделей информационных процессов, является проверка эквивалентности двух моделей. Для некоторых моделей эта задача имеет простое решение, но по мере усиления вычислительных возможностей модели задача проверки эквивалентности значительно усложняется. Примером тому может служить модель конечных автоматов-преобразователей (трансдюсеров).

В общем случае проблема эквивалентности для автоматов-преобразователей алгоритмически неразрешима [1], но она разрешима для детерминированных [2] и некоторых классов недетерминированных трансдюсеров [3-4]. Вопрос о границе, разделяющей классы трансдюсеров с разрешимой и неразрешимой проблемой эквивалентности остается открытым. В данной заметке представлены новые результаты исследования проблемы эквивалентности для одного класса недетерминированных преобразователей, работающих над унарным выходным алфавитом.

Трансдюсер $\pi = \langle Q, q_0, F, T \rangle$ над входным алфавитом A и выходным алфавитом B состоит из конечного множества состояний Q , начального состояния $q_0 \in Q$, множества состояний выхода $F \subseteq Q$ и конечного отношения переходов $T: Q \times A \rightarrow Q \times B^*$. Трансдюсер π реализует отношение преобразования $R(\pi) \subseteq A^* \times B^*$. Трансдюсеры π_1 и π_2 считаются эквивалентными, если $R(\pi_1) = R(\pi_2)$.

Особенность рассматриваемого класса недетерминированных трансдюсеров состоит в том, что из каждого состояния переходы по одному и тому же входному символу совершаются в одно и то же состояние, но с разными выходными словами над однобуквенным алфавитом, образующими регулярный язык. Путем сведения проблемы эквивалентности трансдюсеров из рассматриваемого класса к проблеме выполнимости формул арифметики Пресбургера, удалось доказать следующее утверждение.

Теорема. *Проблема эквивалентности трансдюсеров с детерминированным управлением, работающих над однобуквенным алфавитом, алгоритмически разрешима.*

Литература

1. Griffiths T. The unsolvability of the equivalence problem for ϵ -free nondeterministic generalized machines // Journal of the ACM. – 1968. – V.15 – p.409-413
2. Blattner M., Head T. The decidability of equivalence for deterministic finite transducers // Journal of Computer and System Sciences – 1979. – v.19 – p.45-49
3. Weber A. Decomposing finite-valued transducers and deciding their equivalence // SIAM Journal on Computing. – 1993. – v.22 – c.175-202
4. De Souza R. On the decidability of the equivalence for a certain class of transducers // Proceedings of 12-th International Conference on Developments in Language Theory. – 2009. – p.478-489.

О СВОЙСТВАХ ВРЕМЕННЫХ АВТОМАТОВ

Винарский Е.М.

МГУ, ВМК, кафедра математической кибернетики, e-mail: vinevg2015@gmail.com

Конечный автомат-распознаватель широко используется для распознавания (генерации) регулярных языков. Классическая теория конечных автоматов работает со словами только в терминах порядка следования символов. Однако для некоторых приложений необходимо учитывать не только порядок следования символов, но ещё и интервалы времени, которые отделяют события, происходящие по ходу вычисления. Такие свойства уже не описываются явно средствами классической теории конечных автоматов. Для моделирования течения времени классический автомат дополняется специальной вещественной переменной [1, 2].

Регулярные выражения представляют иной (алгебраический) способ описания (регулярных) языков [3]. С.Клини было показано [3], что класс регулярных языков также может быть описан конечными автоматами. В связи с этим возникает вопрос: как регулярные выражения могут быть адаптированы для описания временных языков и какими свойствами будут обладать языки, индуцированные ими. В настоящей работе мы предлагаем класс языков, распознаваемых временными автоматами, который также замкнут относительно теоретико-множественных операций, и алгоритм построения дополнения.

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – не пустой конечный алфавит. Временным автоматом над алфавитом A называется кортеж $M = (S, s_0, G, h_s, F)$, где:

- S – конечное множество состояний, $s_0 \in S$ – начальное состояние;
- G – множество допустимых интервалов вида $[u, v)$ и $0 \leq u < v$;
- $h_s \subseteq S \times A \times G \times S$ – отношение переходов;
- $F \subseteq S$ – множество финальных состояний.

Переход (s, a, g, s') означает, что автомат, находящийся в состоянии s и получивший входной символ a , спустя время $t \in g$ после поступления предыдущего входного сигнала, переходит в состояние s' .

Под языком временного автомата будем понимать все временные слова, принимаемые временным автоматом. Два временных автомата эквивалентны, если временные языки, порождаемые ими, равны.

Основными результатами исследований являются следующие теоремы.

Теорема 1. Для любого недетерминированного полностью определённого временного автомата над алфавитом A существует эквивалентный ему временной детерминированный полностью определённый автомат над алфавитом A .

Теорема 2. Класс временных автоматных языков замкнут относительно теоретико-множественных операций объединения, пересечения, конкатенации, итерации и дополнения.

Литература

1. Alur R., Dill D. A theory of timed automata // Theoretical Computer Science, p.183-235. – 1994.
2. Asarin E., Caspi P., Oded M. Timed Regular Expressions. – 2001.
3. Марченков С.С. Учебное пособие. Избранные главы дискретной математики. – 2015.

О ПРОВЕРКЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ БИАВТОМАТОВ

Захаров В.А.

МГУ, ВМК, кафедра математической кибернетики, e-mail: zakh@cs.msu.su

Биавтомат – это модель вычислений с конечным числом состояний, у которой две головки считывают буквы слова, двигаясь навстречу друг другу из разных концов слова. Она занимает промежуточное положение между конечными автоматами и автоматами с магазинной памятью. Эта модель была введена в статьях [1,2] для изучения свойств линейных контекстно-свободных (к-с) языков. В статье [3] была исследована взаимосвязь между различными классами биавтоматов и линейных к-с грамматик и установлена сложность некоторых задач анализа биавтоматов. В частности, было показано, что недетерминированные биавтоматы распознают в точности все линейные к-с языки. Отсюда следует, что проблема эквивалентности для биавтоматов неразрешима. Авторы статьи [3] оставили открытым вопрос о разрешимости проблемы эквивалентности для детерминированных биавтоматов. В настоящей заметке анонсируется результат о разрешимости проблемы эквивалентности для детерминированных биавтоматов за полиномиальное время.

Биавтомат $B = (Q, \Sigma, \cdot, I, F)$ над алфавитом Σ состоит из конечного множества состояний Q , отношений правого перехода $\cdot: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ и левого перехода $\cdot: Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$, подмножеств начальных состояний $I \subseteq Q$ и финальных состояний $F \subseteq Q$. Конфигурацией называется пара (q, w) , где $q \in Q$, и $w \in \Sigma^*$ слов в алфавите Σ . Преобразование конфигураций $\vdash$ определяется так: для любых $q, q' \in Q, w \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$ выполняется $(q, aw) \vdash (q', w)$, если $q' \in q \cdot a$, и $(q, wa) \vdash (q', w)$, если $q' \in q \cdot a$. Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения $\vdash$ обозначим $\vdash^*$. Биавтомат B распознает язык $L(B) = \{w \in \Sigma^* \mid (q, w) \vdash^* (f, \lambda) \text{ для некоторых } q \in I, f \in F\}$. Биавтоматы B_1 и B_2 считаются эквивалентными, если $L(B_1) = L(B_2)$. Биавтомат B называется детерминированным, если $|I| = 1$, и отношения правого и левого переходов – это функции, которые определены на непересекающихся подмножествах состояний Q_1 и Q_2 .

Теорема. Проблема эквивалентности детерминированных биавтоматов разрешима за время $O(n^3)$, где n – число состояний анализируемых биавтоматов.

Построение разрешающего алгоритма указанной сложности проводится путем сведения проблемы эквивалентности детерминированных биавтоматов к задаче проверки разрешимости систем линейных уравнений над семейством префиксных регулярных языков, которые описываются детерминированными конечными автоматами.

Литература

1. Loukanova R. Linear context free languages // Proceedings of the 4-th International Colloquium Theoretical Aspects of Computing. LNCS, 2008, vol. 4711, p. 351-365.
2. Klima, O., Polak, L. On biautomata. // RAIRO - Theoretical Informatics and Applications, 2012, v. 46, N 4, p.573-592.
3. Jiraskova G., Klima O. Deterministic biautomata and subclasses of deterministic linear languages // Proceedings of the 13-th International Conference Languages and Automata Theory and Applications. LNCS, 2019, vol. 11417, p. 315-327.

О СВОЙСТВАХ ОДНОЙ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ БЛОКЧЕЙНА

Захаров В.А.¹, Шокуров А.В.²

1) МГУ, ВМК, кафедра математической кибернетики, e-mail: zakh@cs.msu.su

2) Институт системного программирования, e-mail: shok@ispras.ru

Блокчейн – структура данных, используемая для создания реплицированных распределенных баз данных [1]. Формальная модель протоколов, работающих с блокчейнами, была описана и исследована в статье [2]. Эти модели отличает высокая степень детализации описания блокчейнов и операций над ними. В настоящей работе представлена гораздо более абстрактная модель блокчейна, которая, тем не менее, позволяет выяснить некоторые общие свойства блокчейнов.

Пусть задано конечное множество блоков Σ . Слова в алфавите Σ назовем цепочками. Для произвольного заданного тотального отношения наращивания $B \subseteq \Sigma^* \times \Sigma$ назовем блокчейном всякую цепочку $h = x_1 x_2 \dots x_n$, которая для любого $i, 1 \leq i \leq n$, удовлетворяет условию $(x_1 x_2 \dots x_{i-1}, x_i) \in B$. На множестве блокчейнов можно ввести отношение строгого линейного порядка $\subset$ (отношение предпочтения) удовлетворяющее условию: если блокчейн h – префикс блокчейна H , то $h \subset H$.

Протокол наращивания блокчейна состоит из множества агентов и коммуникационной подсистемы. Состоянием каждого агента A_i является хранимый им блокчейн h_i . Каждый агент способен выполнять три действия: **S**: $\text{send}(h_i)$; **U**: $\text{choose } x \in \Sigma$; **if** $(h_i, x) \in B$ **then** $h_i \leftarrow h_i x$; **R**: $\text{receive}(H)$; **if** $h_i \subset H$ **then** $h_i \leftarrow H$. Коммуникационная среда осуществляет широковещательную рассылку всех отправленных сообщений всем агентам протокола. Состоянием системы является набор состояний ее агентов $s = (h_1, \dots, h_N)$. Бесконечная последовательность состояний $E = s_0, s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots$, в которой каждое состояние s_{i+1} получено из предыдущего состояния s_i в результате выполнения одного из допустимых действий одного из агентов, называется выполнением системы.

Требование консенсуса гласит: для любого выполнения $E = s_0, s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots$ и для любого $n \geq 0$ существует такое $k \geq 0$ и блокчейн h , что $|h| = n$, и для любого состояния $s_m = (h_1, \dots, h_N)$, где $m \geq k$, цепочка h является общим префиксом блокчейнов $h_1, \dots, h_N$.

Теорема. Протокол наращивания блокчейнов удовлетворяет требованию консенсуса тогда и только тогда, когда для любых двух бесконечных последовательностей блоков $x_1, x_2, \dots, x_i$, и $y_1, y_2, \dots, y_i$ удовлетворяющих условию наращивания $(x_1 x_2 \dots, x_i) \in B$ и $(y_1 y_2 \dots, y_i) \in B$ для любого $i \geq 0$, существовало такое $N \geq 0$, для которого, либо для любого $n \geq N$ выполняется отношение $x_1 x_2 \dots x_n \subset y_1 y_2 \dots y_N$, либо для любого $n \geq N$ выполняется отношение $y_1 y_2 \dots y_n \subset x_1 x_2 \dots x_N$.

В частности, условию данной теоремы удовлетворяет всякое отношение предпочтения $\subset$, которое взаимосвязано с отношением наращивания B следующим соотношением: если блокчейны h_1 и h_2 являются префиксами блокчейнов H_1 и H_2 соответственно, то из $h_1 \subset h_2$ следует $H_1 \subset H_2$.

Литература

1. Nakamoto S. Bitcoin – a peer-to-peer electronic cash system // 2008, <http://www.bitcoin.org/bitcoin.pdf>.
2. Pirlea G., Sergey I. Mechanising blockchain consensus // Proceedings of the 7-th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs, 2018, p. 78-90.

АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ НА ОСНОВЕ BDD

Казбекова Д.О.

НИУ ВШЭ, факультет компьютерных наук, e-mail: dkazbekova@edu.hse.ru

Построение конечного автомата с минимальным количеством состояний, эквивалентного заданному, – одна из ключевых задач теории конечных автоматов, имеющая приложения при синтезе СБИС, верификации и оптимизации программ [1, 2]. Известны эффективные алгоритмы минимизации, использующие табличное представление конечных автоматов [3]. Однако для автоматов с числом состояний более 10^6 табличное представление уже невозможно, и поэтому возникает необходимость в других формах представления автоматов и разработке алгоритмов, работающих с этими формами.

Для компактного представления конечных автоматов был использован аппарат двоичных разрешающих диаграмм (Binary Decision Diagrams). Двоичные разрешающие диаграммы – это размеченные ациклические ориентированные графы, реализующие булевы функции. Такое представление позволяет задавать булевы функции от большого числа переменных и эффективно вычислять булевы операции над BDD.

Для задания детерминированного конечного автомата (ДКА) в виде BDD состояния автомата представляются булевыми наборами, а отношение переходов – ассоциативным списком, хранящем BDD для каждого символа входного алфавита ДКА. Опираясь на BDD-представление ДКА, минимизация автомата с большим числом состояний становится осуществимой при ограниченных ресурсах памяти вычислительных систем.

Были разработаны и реализованы и экспериментально проверены алгоритмы построения пересечения, дополнения, объединения, разности ДКА, а также алгоритмы вычисления максимальной бисимуляции для недетерминированных конечных автоматов и алгоритм, основанный на методе минимизации Хопкрофта, для ДКА [3, 4]. Доказана корректность предложенных алгоритмов, использующих представления конечных автоматов в виде BDD.

Для доказательства корректности предложенных алгоритмов были использованы известные результаты теории конечных автоматов с введенным в работу заданием конечных автоматов в виде BDD. На основе этих алгоритмов был создан комплекс программ анализа и минимизации ДКА с большим числом состояний. Эксперименты показали, что разработанный комплекс программ способен решать указанные задачи анализа и преобразования ДКА с числом состояний 10^7 .

Литература

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции (в 2-х томах): Том 1: Пер. с англ. -М.: изд-во "Мир", 1978, -613 с.
2. Baier Christel, Katoen Joost-Pieter. Principles of model checking. The MIT Press, 2008.
3. J. E. Hopcroft. An $n \log n$ algorithm for minimizing the states in a finite automaton. Theory of Machines and Computations, eds. by Z. Kohavi, A. Paz. Academic Press, New York, 1971, pp. 189–196.
4. Kozen Dexter C. Automata and computability. Springer Science Business Media, Inc., New York, 1997.

СЛОЖНОСТЬ РАСШИФРОВКИ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ С ИСКАЖЕНИЯМИ

Селезнева С.Н.¹, Лю Ю.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики, e-mail: selezn@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики, e-mail: yongqingliu@yandex.com

Восстановление объектов по частичной информации о них в настоящее время требуется. Одной из математических моделей такого восстановления являются задачи расшифровки функций. В них требуется расшифровать неизвестную функцию, т.е. восстановить ее значения всех точек. При этом можно задавать вопросы о значениях этой функции в произвольных точках и получать правильные ответы. Причем вопросы можно задавать последовательно, т.е. следующую точку можно выбирать, зная ответы о значениях функции в предыдущих точках (условная расшифровка). При расшифровке желательно минимизировать число задаваемых вопросов. Это число называется сложностью расшифровки. Одной из хорошо изученных задач является задача условной расшифровки монотонных булевых функций. В работах В.К. Коробкова [1] и Ж. Анселя [2] найдена сложность расшифровки монотонных булевых функций n переменных в худшем случае. В дальнейшем, В.Б. Алексеев получил оценки сложности расшифровки монотонных многозначных функций. А.А. Сапоженко нашел асимптотику сложности расшифровки «почти всех» монотонных функций. Р. Damaschke, В.В. Осокин рассматривали задачу расшифровки монотонных булевых функций в случае, когда заранее известно число их существенных переменных. Расшифровка других функций (линейных, пороговых и др.), как и другие виды расшифровок функций (см. [3]) также изучались.

В работе рассматривается задача условной расшифровки монотонных булевых функций с возможными искажениями. Предполагается, что под воздействием каких-то факторов неизвестная функция f исказилась, т.е. изменила свои значения в некотором числе точек, и превратилась в некоторую обязательно немонотонную функцию g из определенного множества искажений функции f . При этом выполняется, что множества возможных искажений для различных монотонных функций не пересекаются. Теперь, спрашивая о значениях функции f в точках, получают ответы о значениях функции g в этих точках. Но восстановить следует функцию f , а не функцию g . Доказано, что в худшем случае сложность расшифровки монотонных булевых функций n переменных с возможным искажением в одной точке не отличается от сложности расшифровки монотонных булевых функций n переменных без искажений.

Работа частично поддержана РФФИ, гранты 17-01-00782-а, 19-01-00200-а.

Литература

1. Коробков В.К. О монотонных функциях алгебры логики // В сб. Проблемы кибернетики. Вып. 13. М.: Наука, 1965. С. 5-27.
2. Ансель Ж. О числе монотонных булевых функций от n переменных // В кн. Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 5. М.: Мир, 1968. С. 53-57.
3. Bshouty N.H. Exact learning from an honest teacher that answers membership queries // Theoretical Computer Science. 2018. V. 733. P. 4-43.

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА БИЛИНЕЙНОЙ СЛОЖНОСТИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ РАЗМЕРОВ 2×2 И $2 \times m$ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Алексеев В.Б.¹, Назаров А.А.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра математической кибернетики, e-mail: vbalekseev@rambler.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра математической кибернетики, e-mail: nazarovandry2@mail.ru

Билинейный алгоритм для задачи умножения матрицы $X = \|x_{ij}\|$ размера $p \times n$ на матрицу $Y = \|y_{kl}\|$ размера $n \times m$ над полем F состоит в вычислении d выражений вида (здесь $t = \overline{1, d}$ и t индекс, а не степень):

$$\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}^t x_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m b_{kl}^t y_{kl} \right),$$

таких, чтобы из них линейными комбинациями можно было получить все pm билинейных форм $\sum_{j=1}^n x_{ij} y_{jl}$, которые представляют все элементы матрицы XY (все коэффициенты берутся из поля F). Число d называют сложностью этого алгоритма, а наименьшее возможное d по всем билинейным алгоритмам для этой задачи называется ее билинейной сложностью и обозначается $rk < p, n, m >$. Точное значение билинейной сложности для умножения матриц над произвольным полем известно только в случаях: $rk < 1, n, m > = nm$, $rk < 2, 2, 2 > = 7$, $rk < 2, 2, 3 > = 11$, $rk < 2, 2, 4 > = 14$ (то же верно при любой перестановке p, n, m) [1-4]. Интерес к изучению билинейной сложности умножения матриц основан на ее связи с задачей о минимальной сложности алгоритмов умножения матриц порядка n [1]. В [5] над произвольным полем получена верхняя оценка: $rk < 2, 2, m > \leq \left\lceil \frac{7m}{2} \right\rceil$ и доказано, что она является точным значением над полем из 2 элементов. В [6] получена нижняя оценка: $rk < 2, 2, m > \geq 3m + 2$ над произвольным полем. Целью данной работы является усиление этой нижней оценки для конечных полей. Доказано следующее утверждение.

Теорема. Для любого конечного поля с K элементами выполняется неравенство: $rk < 2, 2, m > \geq \left(3 + \frac{3}{K^2 + 2} \right) m$.

Эта оценка улучшает известные результаты при $K > 2$ и $m > \frac{2K^2 + 4}{3}$.

Литература

1. Strassen V. Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. (1969) **13**, p. 354-356.
2. Winograd S. On multiplication of 2×2 matrices // Linear Algebra and Appl. (1971) **4**, p. 381-388.
3. Alekseev V.B. On the complexity of some algorithms of matrix multiplication // Journal of Algorithms (1985) **6**, 1, p. 71-85.
4. Алексеев В.Б., Смирнов А.В. О точной и приближенной билинейных сложностях умножения матриц размеров 4×2 и 2×2 // Современные проблемы математики (2013) **17**, с. 135-152.
5. Hopcroft J.E., Kerr L.R., On minimizing the number of multiplications necessary for matrix multiplication // SIAM Journal on Appl. Math. (1971) **20**, 1, p. 30-36.
6. Алексеев В.Б. О билинейной сложности умножения матриц размеров $m \times 2$ и 2×2 // Чебышевский сборник (2015) **16**, 4, с. 11-27.

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СТАНДАРТНЫХ МУЛЬТИПЛЕКСОРНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Хзмалян Д.Э.¹, Ложкин С.А.²

1) МГУ им. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МК, e-mail:

david.khzmalian@gmail.com

2) МГУ им. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МК, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru

В данной работе рассматривается задача индивидуального синтеза в классе контактных схем (КС) для стандартной мультиплексорной функции алгебры логики (ФАЛ) порядка n , то есть для функции μ_n от $n + 2^n$ булевых переменных (БП), где первые n БП называются “адресными” БП, а оставшиеся 2^n – “информационными” БП. При этом значение функции μ_n равно значению той ее информационной переменной, номер которой поступил на ее адресные входы, то есть

$$\mu_n(x_1, x_2, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\vec{\sigma}=(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} y_{v(\vec{\sigma})},$$

где $v(\vec{\sigma})$ это число, двоичная запись которого совпадает с $\vec{\sigma}$.

Рассматриваемая задача относится к теории синтеза управляющих систем, которая является одним из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. Клод Шеннон в работах [1,2] дал строгую математическую постановку задачи синтеза управляющих систем, положив тем самым начало соответствующей теории, исследования в которой ведутся с тех пор непрерывно.

Сложностью $L(\Sigma)$ контактной схемы Σ будем называть количество контактов в ней. Цепь из контактов является проводящей, если существует набор переменных, на которой она проводит. Также, введем необходимое для формулировки теоремы определение.

Определение. Будем говорить, что контактная схема Σ от адресных БП $x_1, \dots, x_n$ и информационных БП $y_1, \dots, y_{2^n-1}$ *корректна*, если выполнены для любой проводящей цепи в схеме Σ верно, что если она содержит вершину, инцидентную некоторому контакту информационной переменной, то она содержит также один из контактов информационных переменных инцидентных данной вершине.

Теорема. Для любой корректной контактной схемы Σ , реализующей мультиплексорную ФАЛ μ_n , $n \geq 2$, справедливо следующее неравенство: $L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{4n} - 4$.

Основная идея доказательства данной теоремы состоит в разделении контактной схемы на связные компоненты информационных БП. Учитывая, что верхняя оценка сложности мультиплексорной ФАЛ из работы [3] достигается построением π -схемы, которая является корректной контактной схемой, то, таким образом, для любой минимальной корректной контактной схемы Σ , реализующей мультиплексорную ФАЛ μ_n , $n \geq 2$, выполняются неравенства:

$$2^{n+1} + \frac{2^n}{4n} - 4 \leq L(\Sigma) \leq 2^{n+1} + \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right).$$

Литература

1. Shannon C.E. A symbolic analysis of relay and switching circuits //Trans. AIEE, 1938, v.57, pp. 713-723.
2. Shannon C.E. The synthesis of two-terminal switching circuits //Bell Syst. Techn. J, 1949, v. 28, pp. 59-98.
3. Ложкин С.А., Власов Н.В., О сложности мультиплексорной функции в классе π -схем // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 151, № 2, Изд-во Казанского ун-та, Казань, – 2009, – 98–106 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА БУЛЕВЫХ РЕФЛЕКСИВНО-РЕКУРСИВНЫХ СХЕМ

Жуков В.В.¹

1) ВМК МГУ, кафедра математической кибернетики, e-mail: zhvv117@gmail.com

Задача синтеза, которая впервые была рассмотрена Шенноном [1], состоит в построении оптимального метода синтеза схем из определённого класса для произвольной булевой функции или системы таких функций. Для оценки оптимальности метода вводится функция Шеннона, которая для заданного n равна максимальной сложности булевой функции от n переменных.

Рассмотрим произвольный полный конечный базис $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_b\}$, в котором каждый функциональный элемент (ФЭ) ε_i , $\varepsilon_i \in B$, реализует некоторую функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, существенно зависящую от всех своих переменных, и имеет вес L_i , $L_i > 0$. Приведённым весом функционального элемента ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ называется величина $\rho_i = L_i / (k_i - 1)$, а приведённым весом ρ_B базиса B — минимальный приведённый вес ФЭ ε_i с числом входов $k_i \geq 2$ [2].

Настоящая работа продолжает исследование [3] и обобщает полученные там результаты на более широкий класс схем. Рефлексивно-рекурсивной схемой из функциональных элементов (РРСФЭ) Σ глубины g в базисе B называется последовательность $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$ схем из функциональных элементов произвольной длины l , где каждая Σ_i , $i = 1, 2, \dots, l$, — СФЭ в базисе $B \cup \{\xi_1, \dots, \xi_l\}$, а ξ_i , $i = 1, 2, \dots, l$, — это многовыходной функциональный элемент, имеющий вес c , $c > 0$, и столько же входов и выходов, что и схема Σ_i последовательности $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$. Если каждая схема $\Sigma_1, \dots, \Sigma_l$ имеет только один выход, будем называть соответствующую РРСФЭ скалярной. Рефлексивно-рекурсивная схема Σ функционирует также, как СФЭ, получаемая в результате $(g - 1)$ -кратного применения операции раскрытия рекурсии (см. [3]) к схеме Σ_l и дальнейшей замене всех ФЭ $\xi_1, \dots, \xi_l$ на функциональные элементы с тем же самым числом входов и выходов, реализующие на всех своих выходах константу 0.

Задачей данной работы является получение асимптотики функции Шеннона как для многовыходных, так и для скалярных рефлексивно-рекурсивных схем из функциональных элементов ограниченной глубины g в произвольном полном конечном базисе B . В ней получены следующие результаты:

$$L_B^{PPC(r)}(n) \sim r \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^r}{\sqrt[r]{n}},$$

$$L_B^{CPPC(r)}(n) \sim r \sqrt[r]{r} \cdot c^{\frac{r-1}{r}} \cdot (r-1)^{\frac{r-1}{r}} \cdot \sqrt[r]{\rho_B} \frac{2^r}{\sqrt[r]{n}}.$$

Литература

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 829 с.
2. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: Изд. отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.
3. Жуков В.В., Ложкин С.А. Асимптотически наилучший метод синтеза булевых рекурсивных схем. Дискретная математика. М.: Наука, 2019. Том 31, №1. С. 99-110.

О ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВСТАВОК ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА В СХЕМУ

Александрова Н.Е.¹, Романов Д.С.¹

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической
кибернетики, e-mail: alexandrova-nat@mail.ru, romanov@cs.msu.ru

Пусть f — булева функция (БФ) n переменных, S — реализующая ее схема из функциональных элементов (СФЭ) в базисе B . Под *вставкой* двухвходового элемента E в схему S понимается следующая операция: в S выбираются два произвольных функциональных элемента (ФЭ) E' и E'' так, что E' не лежит ни на каком ориентированном пути от E'' к выходу схемы, все дуги, исходящие из E'' , заменяются на дуги с теми же концами, исходящие из вершины нового ФЭ E , и добавляются две дуги с концами в E , одна из которых исходит из E' , а другая — из E'' . На СФЭ S мог действовать источник одиночных неисправностей U , способный вставить фиксированный ФЭ E в СФЭ. Множество T входных наборов называется *единичным проверяющим тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любой схемы S' , полученной действием U на S , справедливо: если S' реализует некоторую булеву функцию f' , неравную f , то найдется набор α из T такой, что $f'(\alpha) \neq f(\alpha)$. Число наборов в тесте T называется его *длиной* $L(T)$. Под *длиной минимального проверяющего теста* для БФ $f(x_1, \dots, x_n)$, реализованной с помощью СФЭ в базисе B , относительно источника неисправностей U понимается величина $L_B(U, f)$, равная минимуму по всем реализующим f СФЭ S с n входами и одним выходом в базисе B минимума по всем проверяющим тестам T для S относительно U величины $L(T)$. *Функцией Шеннона* длины проверяющего теста для реализованной с помощью СФЭ в базисе B булевой функции f относительно источника неисправностей U называется величина $L_B(U, n)$, равная максимуму по всем БФ f от n переменных величины $L_B(U, f)$. Обозначим через U источник одиночных неисправностей вида вставки ФЭ «стрелка Пирса» в схему. Доказано, что для базиса Жегалкина $B = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$ и вставляемого ФЭ, реализующего функцию «стрелка Пирса» $x \downarrow y$, имеет место следующее утверждение.

Теорема. При любом натуральном n для базиса Жегалкина B имеет место неравенство: $L_B(U, n) \leq 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00800 А), а также госбюджетной темы № 5.4.19 факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

АЛГЕБРА ТРОИЧНЫХ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

Куцак Н.Ю.¹, Подымов В.В.²

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра МК,
e-mail: 1) nina_svetik@mail.ru, 2) valdus@yandex.ru

Обязательным этапом разработки цифровой схемы [1] является ее отладка, схожая по устройству и важности с отладкой программ. Один из способов отладки схемы после ее описания основан на программной симуляции: моделировании выполнения схемы в упрощённой программной семантике, предоставляемой высокоуровневым языком описания аппаратуры [1], выбранным для разработки схемы. При помощи симуляции можно получить наглядное описание выполнения схемы — диаграмму сигналов, то есть совокупность графиков функциональной зависимости значений сигналов от времени. Сигналы, возникающие в программной симуляции, обладают следующими характерными особенностями: изменение значений в реальном времени, троичность и наличие точек фронтов. Троичность сигнала означает, что наряду с основными логическими значениями 0 и 1 сигнал может принимать и неопределённое значение: одно из значений 0 и 1, но неизвестно или неважно, какое именно. Точкой фронта называется момент изменения значения сигнала.

Цель работы — описание математического аппарата анализа и преобразования сигналов, учитывающего особенности сигналов в программной симуляции. В работе предлагаются определения цифрового сигнала и операций преобразования сигналов, то есть *алгебра троичных цифровых сигналов*, и алгоритмы преобразования сигналов согласно предложенным операциям.

Под *сигналом* понимается особое отображение конечного отрезка действительных чисел в значения 0, 1, неопределённость, фронт. Предлагаемые *операции над сигналами* схожи по смыслу с известными операциями темпоральных логик [2], но учитывают неопределённое значение и моменты фронтов сигналов. Основные такие операции — обобщения троичных функций [3] с множества из трёх значений на множество троичных сигналов, а также особые операции **Fs**, **Gs** (соответственно дизъюнкция и конъюнкция всех значений сигнала s от текущего момента времени до конца отрезка), s_1Cs_2 (значение сигнала s_1 на текущем такте сигнала s_2), s_1Xs_2 (значение сигнала s_1 в момент следующего переднего фронта сигнала s_2), **R** s_1 (зеркальное отражение сигнала s_1). Указанные операции естественным образом возникают при анализе свойств сигналов схем, разрабатываемых на языках описания аппаратуры. Для этих операций в работе предлагаются соответствующие алгоритмы преобразования сигналов с обоснованием корректности и оценкой сложности.

Литература

1. Harris, S. Harris. Digital Design and Computer Architecture. – 2nd Edition. Elsevier, 2013.
2. D. Basin, F. Klaedtke, E. Zălinescu. Algorithms for Monitoring Real-time Properties //Acta Informatica, vol. 55, issue 4. 2018. – p. 309–338.

Аввакумов С.Н.	80
Агошков В.И.	19, 20, 21
Александрова Н.Е.	101
Алексеев В.Б.	98
Андреев Н.А.	14
Артемьева Л.А.	58, 84
Асеев А.С.	81
Асеев С.М.	78
Атамась Е.И.	13
Баев А.В.	59
Балыбердин Г.А.	19
Белолипецкий А.А.	71
Белянкина Т.В.	67
Бочаров Г.А.	23, 25
Будзинский С.С.	63, 64
Бухман А.В.	90
Винарский Е.М.	93
Галишникова Т.Н.	62
Глюнина А.Б.	34
Гнатенко А.Р.	91
Головизнин В.М.	55, 57
Гончаров О.И.	12
Горбатова А.С.	22
Горбачев Д.Ю.	57
Горьков В.П.	85
Гребенников Д.С.	24
Григоренко Н.Л.	85
Гузминова Н.Ю.	39
Даник Ю.Э.	49
Денисов А.М.	60
Денисов В.Н.	27
Денисов Д.В.	73
Дмитриев В.И.	66
Дмитриев М.Г.	49
Донец Д.О.	23
Драженков А.А.	58, 84
Егоренков В.А.	51
Егоров Л.В.	15
Ершов Н.М.	37
Ефимов А.А.	60
Ечкина Е.Ю.	39
Жайлауова Ш.Р.	92
Жалеев Т.Р.	52
Желтков Д.А.	26
Жилкин А.С.	40
Жуков В.В.	100
Жуковская Л.В.	79
Жуковский В.И.	79
Захаров В.А.	91, 94, 95

Захарова Т.В.	87
Злобин Д.В.	12
Зотов И.В.	41
Ильинский А.С.	62
Казачук М.А.	35
Казбекова Д.О.	96
Каменщиков М.А.	9
Киселёв Д.О.	43
Киселёв Ю.Н.	80
Коломейцев Ю.В.	75
Комаров Ю.А.	16
Коровина М.В.	28
Королев Г.М.	61
Коцюбинский К.А.	45
Крицков Л.В.	29
Крылов П.А.	10
Кубышкин В.А.	52
Куржанский А.Б.	16
Куркина Е.С.	66
Куцак Н.Ю.	102
Лапонин В.С.	58
Левашова Н.Т.	46
Лезина Н.Р.	20
Логинова М.М.	51
Ложкин С.А.	99
Лукашевич Д.А.	38
Лукьянова Л.Н.	86
Лю Ю.	97
Магницкий Н.А.	11
Майоров П.А.	55
Макасимов В.И.	83
Мальцева А.В.	13
Мастинен В.А.	20
Мельникова А.А.	45
Моисеев Т.Е.	53
Мокин А.Ю.	58
Морозов В.В.	68
Мухин С.И.	52
Назаров А.А.	98
Нестеров А.В.	47
Нефедов Н.Н.	44, 48
Никольский М.С.	77
Никулин Е.И.	44, 48
Орлов А.О.	44
Орлов М.В.	80
Орлов С.М.	80
Перевозчиков А.Г.	70
Петрова Л.И.	54
Подымов В.В.	102

Полежаева Е.В.	46
Полякова И.Н.	33
Попов А.М.	36
Решетов В.Ю.	70
Роговский А.И.	12
Романенко Т.Е.	63
Романов Д.С.	101
Рубина А.Ф.	52
Савенкова Н.П.	58
Савчук А.М.	30
Садовническая И.В.	30
Саливон К.Я.	72
Самсонов С.П.	81
Сарсенби А.М.	31
Селезнева С.Н.	97
Сидорова О.И.	89
Скоробогатов М.О.	73
Смирнов А.П.	38
Сорокин А.С.	21
Сурков П.Г.	82
Сычугов Д.Ю.	40
Терновский В.В.	56
Тихонов И.В.	61
Точилиин П.А.	17
Третьякова Р.М.	25
Трофимов В.А.	50, 51
Трусов Н.В.	18
Устинов В.Д.	65
Федотов М.В.	50
Филимонова Е.А.	33
Фисак А.А.	87
Фомичев В.В.	9
Фурсов А.С.	10
Хапаев М.М.	56
Хапаева Т.М.	56
Харитонов Д.М.	50
Хзмалян Д.Э.	99
Хорошилова Е.В.	32
Хохлов Ю.С.	89
Хруленко А.Б.	52
Цыганов Н.И.	69
Чистяков И.А.	17
Шелопут Т.О.	21
Шестаков О.В.	88
Шокуров А.В.	95
Шумкин Г.Н.	42
Шурыгин А.А.	76
Язовская Н.А.	74
Яночкин И.Е.	70

Научное издание

Научная конференция
ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ
ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
28 октября – 1 ноября 2019 г.

Напечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 24.10.2019 г.

Формат 60х90 1/16. Усл.печ.л. 6,5. Тираж 120 экз. Изд. 243.

Издательство ООО “МАКС Пресс”

Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

2-й учебный корпус, 527 к.

Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891.