



НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Тихоновские чтения

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

*Посвящается памяти академика
Андрея Николаевича Тихонова*

26 – 31 октября 2020 года

МОСКВА
2020

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
И КИБЕРНЕТИКИ

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

*Посвящается памяти академика
Андрея Николаевича Тихонова*

26 – 31 октября 2020 года



МОСКВА – 2020

УДК 517
ББК 22.16
Т46

*Заседания конференции проходят дистанционно
на факультете ВМК
Московского государственного университета*

Т46 **«Тихоновские чтения»: научная конференция: тезисы докладов: посвящается памяти академика Андрея Николаевича Тихонова: 26 – 31 октября 2020 г.** – Москва: МАКС Пресс, 2020. – 108 с.

ISBN 978-5-317-06488-4

<https://doi.org/10.29003/m1546.TRC-2020>

В брошюре публикуются тезисы докладов, которые будут прочитаны на конференции «Тихоновские чтения», посвященные исследованиям в области прикладной математики и информатики.

УДК 517
ББК 22.16

КОНФЕРЕНЦИЯ «ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2020»

Секция: «Нелинейная динамика: качественный анализ и управление»

1. **Фомичев В.В., Каменщиков М.А.** Методы построения фильтров пониженного порядка 8
2. **Фурсов А.С., Мосолова Ю.М.** К вопросу о стабилизации переключаемых интервальных линейных систем 9
3. **Бегишев Р.Р., Ильин А.В.** Поиск и исследование на устойчивость периодических решений определённого класса нелинейных динамических систем 10
4. **Самарин А.И., Фомичев В.В.** Задача о коллективной транспортировке грузов 11

Секция: «Системный анализ»

1. **Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А.** Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России 12
2. **Зайцева М.В., Точилин П.А.** Задача управления потоками людей в здании во время эвакуации 13
3. **Алимов Д.А., Обросова Н.К., Шананин А.А.** Анализ влияния пандемии на показатели производства в российском автопроме с помощью математической модели 14

Секция: «Вычислительные технологии и моделирование»

1. **Симаков С.С., Тимофеев А.Е.** Анализ системного кровообращения пациента с имплантированным аппаратом вспомогательного кровообращения левого желудочка 15
2. **Ткаченко Е.В., Дебольский А.В., Мортиков Е.В.** Исследование турбулентной динамики и переходных периодов суточного хода атмосферного пограничного слоя 16
3. **Легкий А.А., Саламатова В.Ю.** Моделирование деформации гиперупругой мембраны в случае таблично заданных определяющих соотношений 17
4. **Ваньшунь Ли, Дюль Рафаэль, Кулагин Алексей, Мяо Хуэй-хуэй-хуэй, Ожигов Юрий, Чжен Кэли.** Управление атомными ансамблями в модели Тависа-Каммингса-Хаббарда 18
5. **Мордвинцев М.К.** Анализ проблем, возникающих при обобщении алгоритма дополнения тензора и оценка числа элементов, необходимых для дополнения 19

Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

1. **Коровина М.В.** Проблема Пуанкаре и асимптотики решений линейных ОДУ с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности 20
2. **Денисов В.Н.** О поведении средних по времени решения задачи Коши для параболического уравнения 21
3. **Савчук А.М., Садовничая И.В.** Теоремы равносходимости для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами 22

4. Крицков Л.В., Иоффе В.Л. Спектральный анализ задачи Коши для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией	23
5. Тихомиров В.В., Исаев Р.Р. Применение вариационного метода для исследования устойчивости системы Лотки – Вольтера (для 3 измерений)	24
6. Куркин М.Л., Никитин А.А. Сравнение симуляционного и численного подходов в исследовании модели стационарных биологических сообществ	25
7. Зайцева Н.В. Классические решения двумерных гиперболических уравнений с неосциллирующими сдвигами	26
8. Аристов А.И. Точные решения неклассического уравнения	27

Секция: «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Кувшинов Е.Э., Хохлов Ю.С. Оценка вероятности разорения в многомерной модели коллективного риска	28
2. Гончаренко М.Б., Захарова Т.В. Свойства смесей распределений, связанных с нормальным	29
3. Захарова Т.В. Статистическая обработка электроэнцефалограмм при изучении специфики зрительной рабочей памяти	30
4. Палионная С.И., Шестаков О.В. Свойства оценки риска при множественной проверке гипотез с использованием FDR-метода	31
5. Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. О методе логарифмических моментов для оценивания параметров гамма-экспоненциального распределения	32
6. Кудрявцев А.А., Недоливко Ю.Н. О представлении вероятностных характеристик масштабной смеси обобщенных гамма-распределений	33
7. Шевцова И.Г., Целищев М.А. Аппроксимация случайных сумм показательным распределением	34

Секция: «Математическая кибернетика»

1. Селезнева С.Н., Мазуренко А.П. О графах с почти реберно непересекающимися остовными деревьями	35
2. Селезнева С.Н., Лобанов А.А. О сложности функций малого числа переменных в классе псевдополиномов	36
3. Мельник М.В. Некоторое ослабление ограничений для одного класса 3-раскрашиваемых графов	37
4. Бухман А.В. Применение разбиений графа для задачи проверки равенства нулю обобщенного полинома	38
5. Алексеев В.Б. О некоторых интервалах замкнутых классов в частичной k -значной логике	39
6. Александрова Н.Е., Романов Д.С. О единичных проверяющих тестах относительно вставок не сохраняющих константу элементов	40
7. Куцак Н.Ю., Подымов В.В. О выразимости операций логики трюичных цифровых сигналов	41
8. Попков Г.А., Подымов В.В. Бисимуляционная эквивалентность систем переходов с реальным временем	42
9. Хзмалян Д.Э., Ложкин С.А. О контактной сложности стандартных мультиплексорных функций	43
10. Жайлауова Ш.Р. Проверка эквивалентности трансдюсеров над полугруппой целочисленных векторов	44

Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром»

1. **Волков В.Т., Нефедов Н.Н.** Асимптотическое решение некоторых коэффициентных обратных задач для сингулярно возмущенного уравнения типа Бюргерса..... 45
2. **Бутузов В.Ф., Симаков Р.Е.** Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с многозонным внутренним слоем..... 46
3. **Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.** Численно-аналитические представления семейств регуляторов для сингулярно возмущенных задач управления 47
4. **Тищенко Б.В., Левашова Н.Т.** Существование и устойчивость решения системы двух нелинейных уравнений диффузии с внутренним переходным слоем на границе раздела сред..... 48
5. **Левашова Н.Т., Бышора С.В., Мельникова А.А., Самсонов Д.С., Тищенко Б.В.** Верхние и нижние решения с внутренним переходным слоем систем уравнений диффузии с различными условиями квазимонотонности 49
6. **Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.** Неустойчивые периодические решения с пограничным слоем уравнения реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями 3 рода..... 50
7. **Рублев Г.Д., Давыдова М.А.** Асимптотические решения с пограничными слоями в стационарных задачах нелинейной теплопроводности с учетом конвекции 51
8. **Богданов А.Н.** Некоторые задачи газовой динамики, описываемые дифференциальными уравнениями с малым параметром при старшей производной 52

Секция: «Обратные задачи управления»

1. **Никольский М.С.** Приближенное вычисление множеств достижимости для линейных управляемых объектов при фазовых ограничениях..... 53
2. **Жуковский В.И., Жуковская Л.В., Кудрявцев К.Н.** Устойчивость равновесия санкций и контрсанкций в дифференциальной линейно-квадратичной игре трех лиц без побочных платежей..... 54
3. **Груздев А.П., Мельников Н.Б.** Блочный преобуславливатель Якоби для решения динамической модели общего экономического равновесия..... 55
4. **Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.** Об особых режимах в задачах оптимального управления с приложением в экономике 56
5. **Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М.** Алгоритм решения задачи квадратичной минимизации с неравномерно возмущёнными ограничениями 57
6. **Шатков С.А.** Некоторые обратные задачи в космической навигации 58
7. **Григоренко Н.Л., Горьков В.П.** Задача управления совпадением двух движущихся тел 59
8. **Лукьянова Л.Н.** О задаче оптимального управления со смешанными ограничениями 60
9. **Камзолкин Д.В.** Построение функции цены в одной задаче наведения на целевое множество при наличии неопределенности 61

Секция: «Математическое моделирование и вычислительные методы»

1. **Головизнин В.М., Афанасьев Н.А.** Двудомные разностные схемы и их применение для уравнений мелкой воды 62

2. Головизнин В.М., Афанасьев Н.А., Сипатов А.М. Моделирование процессов термоакустической неустойчивости балансно-характеристическими методами	63
3. Бутаков О.Б., Мухин С.И. Квазиодномерная криволинейная реконструкция в разностных схемах газовой динамики	64
4. Богомолов С.В., Захарова Т.В. Уравнение Больцмана без гипотезы о молекулярном хаосе	65
5. Богомолов С.В., Филиппова М.А., Кувшинников А.Е. Двумерный разрывный метод частиц для невязкого уравнения Бюргерса	66
6. Федотов М.В., Харитонов Д.М., Трофимов В.А. Математическая модель, записанная в рамках multi-scale метода, для процесса понижения частоты оптических импульсов в случае каскадных процессов, реализованных на квадратичной нелинейности второго порядка.....	67
7. Логинова М.М., Трофимов В.А. Роль инвариантов при построении неполностью консервативных разностных схем для систем нелинейных уравнений Шредингера ..	68
8. Егоренков В.А., Логинова М.М., Трофимов В.А. Связь разрешимости задачи Неймана, описывающей процесс эволюции 3D лазеро-индуцированной плазмы полупроводника, с эффективностью применения прямых и итерационных методов решения разностных уравнений.....	69
9. Головизнин В.М., Горбачев Д.Ю. Схема КАБАРЕ для решения простейшего уравнения переноса на тетраэдральных сетках	70
10. Головизнин В.М., Майоров Павел А., Майоров Петр А., Соловьев А.В. Сравнение гидростатической и негидростатической моделей на лотковых экспериментах	71
11. Головизнин В.М., Майоров Павел А., Майоров Петр А., Соловьев А.В. Неявная по одному направлению схема КАБАРЕ на сетках с большим аспектным отношением	72
12. Андреев В.Ф., Попов А.М. Обратные задачи расчета сценария разряда в токамаке с железным сердечником	73
13. Зотов И.В., Высоцкий Л.И. Параллельный метод для нахождения распределения тока в токамаке на основе графических процессоров.....	74
14. Загидуллин Р.Р., Смирнов А.П., Матвеев С.А., Рыкованов С.Г. Разработка библиотеки для моделирования физических процессов в трехмерном пространстве с использованием параллельных вычислительных технологий.....	75
15. Ершов Н.М., Никитина О.П. Подбор и настройка алгоритмов непрерывной оптимизации с помощью методов коллаборативной фильтрации.....	76
16. Бражников А.А., Ечкина Е.Ю., Майсурадзе А.И. Систематизация моделей данных и методов визуализации векторных полей.....	77
17. Шагиров Н.Э. Метод частиц для определения точек фазового перехода в молекулярной системе.....	78
18. Шенна Е.А., Смирнов А.П. Оптимальные параметры многочастотного эксперимента по определению диэлектрической проницаемости слоя в волноводе.....	79

Секция: «Математическая физика и обратные задачи»

1. Баев А.В. Решение одной обратной задачи для уравнений мелкой воды в бассейне с переменной глубиной.....	80
2. Ильинский А.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. О сходимости бариецентрического метода в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах	81
3. Разгулин А.В., Турганбаев С.А., Ирошников Н.Г. О точности проекционного метода в одной задаче восстановления волнового фронта по его локальным наклонам ...	82

4. **Разгулин А.В., Будзинский С.С., Ларичев А.В.** Об одной модели конфокальной микроскопии 83
5. **Павельева Е.А., Тихонова В.А., Сафронова Е.И.** Решение задач сегментации биометрических изображений..... 84
6. **Романенко Т.Е., Семенов А.Н.** Использование современных компьютерных технологий для построения виртуальной модели глазного дна..... 85
7. **Гаврилов С.В.** О численном методе решения двумерной задачи электроимпедансной томографии в случае кусочно-постоянной проводимости 86
8. **Лопушенко В.В., Котельников И.А.** Численная схема на основе теоремы отсчетов для решения интегрального уравнения в скалярной задаче дифракции 87

Секция: «Исследование операций»

1. **Белянкина Т.В., Кюнченкова Д.Д.** Метод взвешенных наименьших квадратов в задаче оценивания резервов убытков страховой компании 88
2. **Белолипецкий А.А., Сычев А.А.** Оценка вероятности разорения страховой компании со случайными потоками доходов и убытков за конечное время..... 89
3. **Данилишин А.Р., Голембиовский Д.Ю.** Модификация расширенного принципа Гирсанова и его применение к моделированию ARIMA-GARCH случайных процессов 90
4. **Денисов Д.В., Мешина З.В.** Исследование задачи кредитных рисков и модели оптимизации стоимости страхования кредита 91
5. **Морозов В.В.** Игровая модель предъявления опционов..... 92
6. **Морозов В.В., Абдыкалик Ш.** Вычисление стоимости стрэнгл-опциона..... 93
7. **Цыганов Н.И.** Вероятностная модель двустороннего длительного боя 94

Секция: «Системное программирование и информационные технологии»

1. **Лазухин И.С., Петровский М.И., Машечкин И.В.** Разработка и реализация подходов для прогноза и оптимизации производственного процесса нефтепереработки 95
2. **Горохов О.Е., Петровский М.И., Машечкин И.В.** Методы обнаружения аномалий в сложно структурированных данных 96
3. **Димов И.Н., Добров Б.В.** Автоматическое извлечение аргументации в текстах 97
4. **Полевой А.В., Герасимов С.В., Мещеряков А.В.** Исследование алгоритмов инкрементального моделирования 98
5. **Александров В.В., Царёв Д.В.** Моделирование пользовательского поведения с помощью нейронных сетей для решения задачи обнаружения инсайдеров 99
6. **Селякин А.С., Герасимов С.В., Мещеряков А.В.** Применение обучения с подкреплением для оптимизации маршрутов 100
7. **Сорока А.Г., Мещеряков А.В., Герасимов С.В.** Использование semi-supervised подхода на основе соревновательных автокодировщиков для ускорения разметки данных в задаче классификации астрономических изображений..... 101
8. **Никольский И.М., Фурманов К.К.** Об эффективности дублирования сообщений в беспроводных сенсорных сетях 102
9. **Бахтин В.А., Рошина К.А.** Разработка средств анализа производительности программ для гибридных кластеров 103
10. **Волканов Д.Ю., Маркобородов А.А., Скобцова Ю.А.** Метод трансляции таблицы потоков коммутатора программно-конфигурируемой сети в язык ассемблера сетевого процессора..... 104

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФИЛЬТРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Фомичев В.В.¹, Каменщиков М.А.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСУПУ, e-mail:
fomichev@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра НДСУПУ, e-mail:
mkamenshchikov@cs.msu.ru

Доклад посвящен задаче построения оптимальных наблюдателей (фильтров) пониженного порядка для стохастических объектов управления. Исследуемая задача находится на пересечении двух классических задач теории автоматического управления: задачи оптимального наблюдения полного порядка для стохастических систем [1,2] и задачи о построении функционального наблюдателя (пониженного порядка) для детерминированных систем [3]. Вместо традиционно используемого фильтра Калмана, формирующего оценку полного вектора состояния системы, и имеющего порядок, совпадающий с порядком системы, предполагается строить его аналог, функциональный фильтр, имеющий пониженную размерность.

Целью данной работы является развитие алгоритмов построения оптимальных наблюдателей пониженного порядка для различных классов стохастических динамических систем (как непрерывных, так и дискретных систем; как линейных, так и нелинейных систем). В качестве критерия оптимальности могут быть выбраны: установившаяся среднеквадратическая ошибка наблюдения, ошибка прогнозирования невязок краевых условий в терминальных системах.

В работе рассматриваются существующие методы [4,5] построения фильтров пониженного порядка для стохастических систем. Разбирается подход [6], в котором задача построения функциональных оптимальных наблюдателей сводится к задаче нелинейной оптимизации. Проводится синтез и сравнение функциональных фильтров различных динамических порядков по критерию оптимальности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 20-37-90065, 20-08-00073).

Литература

1. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems //Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering. Ser. D. – 1960. – V.82. – №. 1. – P. 35-45.
2. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory //Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering. Ser. D. – 1961. – V.83. – №. 1. – P. 95-108.
3. Коровин С.К., Фомичёв В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. Darouach M. On the optimal unbiased functional filtering //IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – V. 45. – №. 7. – P. 1374-1379.
5. Darouach M., Ali H.S. Optimal unbiased functional filtering in the frequency domain //Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal. – 2014. – V. 2. – №. 1. – P. 308-315.
6. Каменщиков М.А., Капалин И.В. Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2018. — № 4. — С. 19–26.

К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Фурсов А.С.¹, Мосолова Ю.М.²

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: fursov@cs.msu.ru

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: july2412@mail.ru

В работе рассматривается задача построения цифрового регулятора, сверхстабилизирующего непрерывную переключаемую линейную интервальную систему. Подход к стабилизации включает в себя построение непрерывно-дискретной замкнутой системы с цифровым регулятором, переход к ее дискретной модели и последующему построению дискретного регулятора.

Рассматривается непрерывная скалярная по входу переключаемая интервальная линейная система

$$\dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in P \subset S_0, \quad (1)$$

где $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, q\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_0 – множество всех переключающих сигналов σ ; P – множество допустимых переключающих сигналов; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; если σ принимает значения $i \in \{1, \dots, q\}$, то $[A_\sigma]$ – значение $[A_i]$, а $[b_\sigma]$ – значение $[b_i]$. Здесь $[A_i]$ ($i = \overline{1, q}$) – интервальные матрицы, а $[b_i]$ ($i = \overline{1, q}$) – интервальные векторы.

Для объекта (1) с заданным множеством $P \subset S_0$ и не наблюдаемыми переключающими сигналами $\sigma \in P$ необходимо построить цифровой регулятор

$$u[IT] = -kx[IT],$$

обеспечивающий робастную P – устойчивость в нуле замкнутой непрерывно-дискретной системы.

Определение. Переключаемую интервальную линейную систему (1) при заданном управлении u (в форме обратной связи и, в частности, при $u \equiv 0$) назовем *робастно P -устойчивой в нуле* ($P \subset S_0$), если при любых $x(0) = x_0$ и $\sigma \in P$ для соответствующего пучка траекторий \tilde{S}_t выполнено условие

$$\|\tilde{S}_t\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Предложен алгоритм построения цифрового стабилизатора (при некоторых ограничениях), обеспечивающего P -устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной переключаемой системы.

Литература

1. Фурсов А.С., Миняев С.И., Исхаков Э.А. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы // Дифференц. уравнения (2017) **53**, №8, с.1121-1127.
2. Liberzon D., Morse A.S. Basic problems in stability and design of switched systems // IEEE Control Systems Magazine. 1999. Vol.19, № 5. P.59-70.

ПОИСК И ИССЛЕДОВАНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОПРЕДЕЛЁННОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Бегишев Р.Р.¹, Ильин А.В.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: begrusso@gmail.com

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления, e-mail: iline@cs.msu.su

Основой для работы послужило изучение определённой термоэлектромеханической системы, включающей в себя материал с памятью формы (СПФ)[1]. Такого рода установка перерабатывает тепловую энергию в электрическую.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, описывающую вышеописанную установку[2]. Отбросив электрическую часть (в данной задаче она не понадобится) получим систему (1). Данная система описывает процесс нагревания нити (при котором происходит сжатие нити из СПФ) и охлаждение (при котором нить возвращается в прежнее состояние на нагреватель). Цикл повторяется.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k(x + \delta) = -\beta\dot{x} + F_{SMA} \\ \dot{T} = \begin{cases} \frac{1}{\rho V_s c_p} (Ri^2 + A_s h_c (T_\infty - T)), x \leq x_T \\ \frac{1}{\rho V_s c_p} (A_s h_c (T_\infty - T)), x > x_T \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Для стабильной работы системы было выдвинуто предположение, что необходимы периодические решения с постоянной амплитудой и периодом. Было проведено моделирование системы (1) в среде Simulink. На произвольных параметрах появились достаточно «шумные» решения, постоянных амплитуды и периода не наблюдалось. Для поиска необходимых параметров был использован генетический алгоритм. Была найдена конфигурация системы, при которой решение имеет постоянные период и амплитуду.

Результатом проведённой работы может быть утверждение о том, что в системе (1) существуют периодические решения с постоянной амплитудой и периодом, а, следовательно, установка имеет параметры для стабильной бесперебойной работы.

Литература

1. T. Todorov, N. Nikolov, G. Todorov, Modelling and investigation of a hybrid thermal energy harvester // MATEC Web of Conferences, 12002, 2018. p. 148.
2. Rosen Mitrev, Todor Todorov, Andrei Fursov, Vasily Fomichev, Alexander Il'in «A Case Study of Combined Application of Smart Materials in a Thermal Energy Harvester with Vibrating Action». (in press).

ЗАДАЧА О КОЛЛЕКТИВНОЙ ТРАНСПОРТИРОВКЕ ГРУЗОВ

Самарин А.И.¹, Фомичев В.В.²

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: liotbiu1@gmail.com

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра НДСиПУ, e-mail: fomichev@cs.msu.ru

Новые достижения в робототехнике позволили значительно уменьшить размер робота, его стоимость, что повлекло за собой развитие идеи использовать для решения сложных задач группу роботов. Вдохновением для ученых стали биологические системы, где часто встречается кооперативное поведение. Наиболее ярко взаимодействие индивидов проявляется у общественных насекомых. Так муравьи, кооперируясь, могут выполнять задачи значительно превышающие возможности отдельной особи.[1]

В данном докладе рассматривается задача о коллективной транспортировке грузов. Эта задача является хорошей иллюстрацией возможностей кооперации. Группа муравьев может перенести груз, который не способен перенести один муравей. Более того, исследования показали, что при кооперации возрастает эффективность муравьев, то есть один муравей способен нести больше груза.[2]

В докладе представлен обзор различных моделей [2-5], реализующих это поведение. Одним для них является принцип децентрализации. Он заключается в следующем: все агенты имеют одинаковое строение, каждому агенту доступна только локальная информация о системе, коммуникация между агентами также локально ограничена, агенты самостоятельно выбирают свое поведение и имеют возможность влиять только на близкие объекты. Эти требования приводят к масштабируемой, отказоустойчивой системе, но значительно повышают сложность создания алгоритма управления. В работе произведено моделирование и сравнение некоторых существующих моделей и алгоритмов.

Литература

1. Hamann H. Swarm Robotics: A Formal Approach (2018).
2. Kube C.R., Bonabeau E. Cooperative transport by ants and robots //Robotics and Autonomous Systems, Volume 30, Issues 1–2, 2000, Pages 85-101, ISSN 0921-8890
3. Wilson S., Pavlic T.P., Kumar G.P. et al. Design of ant-inspired stochastic control policies for collective transport by robotic swarms //Swarm Intell 8, 303–327 (2014).
4. Nouyan, Shervin & Groß, Roderich & Bonani, Michael & Mondada, Francesco & Dorigo, Marco. Teamwork in Self-Organized Robot Colonies. IEEE Trans. Evolutionary Computation. 13. 695-711. 10.1109/TEVC.2008.2011746 (2009).
5. Mellinger D., Shomin M., Michael N., Kumar V. (2013) Cooperative Grasping and Transport Using Multiple Quadrotors. In: Martinoli A. et al. (eds) Distributed Autonomous Robotic Systems. Springer Tracts in Advanced Robotics, vol 83. Springer, Berlin, Heidelberg.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОЛОЖЕНИЯ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ В РОССИИ

Тарасенко М.В.¹, Трусов Н.В.², Шананин А.А.³

1) МГУ, экономический факультет; e-mail: tarasenko.m12@gmail.com

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра системного анализа; МФТИ, кафедра анализа систем и решений e-mail: trunick.10.96@gmail.com

3) МГУ, факультет ВМК, кафедра системного анализа; МФТИ, кафедра анализа систем и решений; ФИЦ ИУ РАН; РУДН e-mail: alexshan@yandex.ru

Динамика спроса на потребительское кредитование оказывает возрастающее влияние на социальное и экономическое развитие российского общества. В условиях низких реальных доходов основной части населения потребительский кредит стимулировал экономическую активность населения, поддерживал платёжеспособный спрос домашних хозяйств и оказывал положительное влияние на темпы роста ВВП. Уже осенью 2019г. в правительстве РФ обсуждалась проблема потребительского кредита как актива коммерческих банков, а также меры по реструктуризации задолженности по потребительскому кредиту как условия дефолта физических лиц.

Моделирование экономического поведения домашних хозяйств основывается на модели рамсеевского типа [1]-[2]. В данной работе авторами исследована задача оптимального управления, моделирующая экономическое поведение репрезентативного домашнего хозяйства. Доказана теорема о существовании решения, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина-Кларка. Построение синтеза оптимального управления позволило описать изменения экономического поведения при изменении конъюнктуры.

Используя данные РМЭЗ НИУ ВШЭ, были выделены репрезентативные типы домашних хозяйств. Модель идентифицирована по статистическим данным о доходах, расходах, потребительских кредитах и сбережениях домашних хозяйств России за апрель 2009г. – январь 2019г. и верифицирована по статистическим данным за февраль 2019г. – февраль 2020г. Расчёты по модели показали обоснованность опасений о платёжеспособности заёмщиков в части регионов РФ. Снижение реальных доходов населения, вызванные пандемией COVID-19 обостряют эту проблему. Значимое влияние на увеличение долговой нагрузки населения оказывает рост процентной ставки. Она может быть оперативно отрегулирована государством с помощью изменения ключевой ставки Банка России. Расчёты по модели показывают, что снижение ключевой ставки уменьшает долговую нагрузку на домашние хозяйства и долю неплатёжеспособных заёмщиков среди физических лиц. При этом эффективность снижения ключевой ставки существенно зависит от динамики снижения. Однако, стоит отметить, что резкое уменьшение ключевой ставки может привести к негативным последствиям, таким как резкое ослабление курса рубля или значительное увеличение темпов инфляции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20-07-00285).

Литература

1. Рудева А.В., Шананин А.А. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учётом ограничения ликвидности // Дифференциальные уравнения. 2009. Т.45. №12. С.1799-1803.
2. Гималтдинов И.Ф. Исследование спроса на потребительские кредиты и наличные деньги // Математическое моделирование. 2012. Т.24. №2. С.84-98.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКАМИ ЛЮДЕЙ В ЗДАНИИ ВО ВРЕМЯ ЭВАКУАЦИИ

Зайцева М.В.¹, Точилин П.А.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра системного анализа, e-mail: zaimarko@gmail.com

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра системного анализа, e-mail: tochilin@cs.msu.ru

Данная работа посвящена математическому моделированию движения групп людей в здании, имеющем сложную структуру, в случае чрезвычайного происшествия, например, пожара, загрязнения отравляющими веществами и т.п. В такой ситуации необходимо эвакуировать людей из помещения, не допуская при этом возникновение давки.

При математическом моделировании движения групп людей обычно выделяют *микроскопический* [1] и *макроскопический* [2] подходы. В первом случае учитывается поведение отдельных людей: его положение, скорость и направление движения. Однако в работе количество эвакуируемых людей предполагается очень большим и отследить перемещение каждого человека не представляется возможным. Поэтому в качестве основного следует использовать макроскопический подход и усредненную характеристику — $\rho = \rho(t, x)$, где $t \in [t_0, t_1]$ — текущий момент времени, а x — вектор координат, однозначно задающий положение в рассматриваемом здании. Но для калибровки модели — оценки параметров — задействован также и микроскопический подход.

Изложенная математическая модель является обобщением гидродинамической модели, применяемой для моделирования автотранспортных средств [3]. В основе построения модели в данной работе использована *фундаментальная диаграмма*, описывающая зависимость потока людей от плотности, в форме трапеции: $f(\rho) = \min\{v\rho, f_{max}, w(\rho_{max} - \rho)\}$, $\rho \in [0, \rho_{max}]$, где $\rho_{max} > 0$ — максимальная плотность толпы, f_{max} — максимальный поток, v — скорость свободного движения, w — скорость распространения затора. Для получения численных оценок на неопределенные параметры фундаментальной диаграммы была проведена серия вычислительных экспериментов, основывающаяся на микромоделировании толпы.

Основным результатом данной работы является предложенный субоптимальный алгоритм безопасной эвакуации. Схема его работы проиллюстрирована модельным примером.

Литература

1. Helbing D., Farcas I., Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic // Nature. – 2000. – V. 407, P. 487–490.
2. Kachroo P., Al-nasur S.J., Wadoo S.A., Shende A. Pedestrian Dynamics. Feedback Control of Crowd Evacuation. Springer, 2008.
3. Куржанский А.Б., Куржанский А.А., Варайя П. Роль макро моделирования в активном управлении транспортной сетью // Труды МФТИ – 2010. – Т. 2, № 4, с. 110–118.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАНДЕМИИ НА ПОКАЗАТЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА В РОССИЙСКОМ АВТОПРОМЕ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Алимов Д.А.¹, Обросова Н.К.², Шананин А.А.³

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра Системный анализ, e-mail: alimov2007d@gmail.com*

2) *Вычислительный центр РАН имени Дородницына, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра Системный анализ, Московский физико-технический институт, факультет Управления и прикладной математики, кафедра Анализ систем и решений, e-mail: nobrosova@yandex.ru*

3) *Московский физико-технический институт, факультет Управления и прикладной математики, кафедра Анализ систем и решений, Вычислительный центр РАН имени Дородницына, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра Системный анализ, e-mail: alexshan@yandex.ru*

В условиях пандемии 2020 года большинство российских предприятий сталкиваются с проблемой резкого снижения платежеспособного спроса. В силу исторических особенностей обрабатывающий сектор экономики функционирует в условиях конкуренции с импортом, дефицита оборотных средств и компании вынуждены обращаться за кредитами для пополнения оборотных фондов. Поэтому резкое снижение спроса может негативным образом сказаться на деятельности обрабатывающих предприятий и привести к социальным последствиям. В условиях ограниченности бюджета выбор разрабатываемых правительством программ поддержки экономики должен производиться на основе подробного анализа экономической ситуации. Мы предлагаем методику анализа деятельности производства в условиях изменения внешней экономической ситуации, в том числе снижения спроса, на основе анализа модели функционирования производственной компании в условиях нестабильного спроса и дефицита оборотных средств [1]. Модель формализована в форме уравнения Беллмана относительно реальной стоимости компании. Решение этого уравнения было найдено в явном виде, а также выписана система алгебраических уравнений модели, связывающая данные, которые можно найти в официальной отчетности компаний, и параметры модели. Модель была идентифицирована для российских автопроизводителей легкового транспорта, которые занимают крупную долю в российском обрабатывающем секторе. Для нескольких автопроизводителей по модели были проведены численные расчеты для оценки влияния снижения спроса с учетом принимаемых правительством мер. Были идентифицированы данные за 2018 и 2019 года, а также построен прогноз на 2020 год. Это позволило оценить влияние мер поддержки на основные экономические показатели функционирования компаний.

Работа выполнена при поддержке по проекту РФФИ №20-07-00285.

Литература

1. Обросова Н.К., Шананин А.А. Модель производства в условиях нестабильного спроса с учетом влияния торговой инфраструктуры. Эргодичность и ее приложения //ЖВМ Москва (2015) **55**, №4, с.704–729.

Секция: «Вычислительные технологии и моделирование»

АНАЛИЗ СИСТЕМНОГО КРОВООБРАЩЕНИЯ ПАЦИЕНТА С ИМПЛАНТИРОВАННЫМ АППАРАТОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО КРОВООБРАЩЕНИЯ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА

Симаков С.С.¹, Тимофеев А.Е.²

1) МФТИ, Сеченовский Университет, e-mail: simakovss@ya.ru

2) МФТИ, e-mail: richardstallman42@gmail.com

Использование имплантируемого аппарата вспомогательного кровообращения направлено на восстановление выброса крови у пациента с тяжелой степенью сердечной недостаточности. Последние поколения данных устройств представлены роторными насосами, режим работы которых оказывает существенное влияние на камеры и клапаны сердца, а также изменяет характер потока крови в артериях.

Цель данной работы заключается в изучении воздействия насосов крови семейства Спутник на кровеносную систему пациента с дилатационной кардиомиопатией методами математического моделирования [1]. Рассматривается одномерная модель гемодинамики с ауторегуляцией на графе системных артерий, который включает в себя коронарную и церебральную сети, а также нульмерные модели левого сердца, насоса и терминальных узлов графа. Численное решение системы уравнений одномерной модели гемодинамики получено с помощью явной двухшаговой сеточно-характеристической схемы.

Численные эксперименты показали, что распределение крови по сосудам рассматриваемого графа не зависит от степени пульсации потока при постоянном выбрасываемом в аорту объеме. Проведено сравнение моделей насосов Спутник и HeartMate II [2]. Определены постоянные скорости вращения ротора каждого из рассматриваемых насосов, при которых происходит восстановление до нормального уровня величин потока, давления и скорости в системных артериях. Следует отметить, что работа на данных скоростях препятствует открытию аортального клапана. Также определены скорости насосов, которые характеризуются отсутствием обратного тока через насос, закрытым состоянием аортального клапана во время всего сердечного цикла, а также постоянно открытым состоянием митрального клапана. Численные эксперименты также показали, что добавление в модель кровеносной системы стенозов в левой бедренной артерии, передней нисходящей артерии, правой и левой общей сонной артерии приводит к значительным изменениям в распределении крови. Восстановление потока через пораженные сосуды хоть и возможно за счет увеличения скорости насоса, однако это приводит к существенному увеличению потока через здоровые сосуды.

Литература

1. Simakov S., et al. Analysis of Operating Modes for Left Ventricle Assist Devices via Integrated Models of Blood Circulation //Mathematics. – 2020. – V.8
2. Boes S., et al. Hydraulic characterization of implantable rotary blood pumps //IEEE Transactions on Biomedical Engineering. – 2018.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИНАМИКИ И ПЕРЕХОДНЫХ ПЕРИОДОВ СУТОЧНОГО ХОДА АТМОСФЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ткаченко Е.В.¹, Дебольский А.В.², Мортиков Е.В.³

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, ВТМ, e-mail: evtkachenko@hotmail.com

2) НИВЦ МГУ, ИФА РАН, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

3) НИВЦ МГУ, ИВМ РАН, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

Атмосферным пограничным слоем (АПС) называется самая нижняя часть атмосферы, на которую влияют процессы, происходящие на поверхности Земли или вблизи неё. Он характеризуется наличием суточного хода, где различают два переходных периода: вечерний (от конвективного, дневного, к устойчивому ПС) и утренний (от устойчивого, ночного, к конвективному ПС). Переходные периоды являются нестационарными процессами в атмосфере при активном тепловом обмене с поверхностью Земли, которая нагревается утром и охлаждается вечером.

Для воспроизведения процессов турбулентного обмена в АПС в моделях прогноза погоды и климата используются полуэмпирические замыкания. Существующие турбулентные замыкания позволяют достаточно точно описывать стационарные или квазистационарные пограничные слои при нейтральной (или близкой к нейтральной) стратификации, однако необходимо их уточнение для описания условий присильной стратификации и нестационарных процессов, которые на сегодняшний день воспроизводятся некорректно.

В данной работе проводилось численное исследование динамики вечернего перехода с помощью одномерной RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) k - ϵ модели АПС. Результаты расчётов сравнивались с известными данными трёхмерных экспериментов с вихреразрешающими (Large-Eddy Simulations, LES) моделями.

При исследовании вечернего перехода рассматривалась динамика затухания турбулентной кинетической энергии (ТКЭ), которое следует степенной зависимости $E(t) \sim t^{-\alpha}$, где $E(t)$ – ТКЭ и t – время, нормированные на конвективные масштабы скорости и времени (Deardorff, 1970), определяемые потоком плавучести на поверхности и высотой ПС. Было рассмотрено, как параметризация турбулентного масштаба длины и выбор внешних параметров эксперимента (в частности геострофический ветер, величина потока тепла на поверхности, скорость оседания) влияют на динамику затухания ТКЭ. Также было изучено, как меняется динамика переходного периода как при мгновенном, так и при постепенном уменьшении потока тепла на временах, характерных для суточного хода в АПС.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта №20-05-00776 и Гранта Президента Российской Федерации в рамках проекта МК-1867.2020.5.

Литература

1. Deardorff J.W. Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Rayleigh convection // J. Atmos. Sci. American Meteorological Society. – 1970. – 27, pp. 1211–1213.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИПЕРУПРУГОЙ МЕМБРАНЫ В СЛУЧАЕ ТАБЛИЧНО ЗАДАННЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Легкий А.А.¹, Саламатова В.Ю.^{2,1}

1) МФТИ (НИУ), факультет ФПМИ, e-mail: al.liogky@yandex.ru

2) ИВМ РАН им. Г.И. Марчука, e-mail: salamatova@gmail.com

Данная работа посвящена моделированию деформаций нелинейных гиперупругих мембран с таблично заданными определяющими соотношениями при использовании меры деформации, основанной на верхнетреугольном (QR) разложении градиента деформации [1]. При моделировании предполагается мембранное приближение (отсутствие сопротивления изгибающим нагрузкам) и используется метод гиперупругих узловых сил [2], [3]. В качестве экспериментальных данных были использованы синтетические данные, полученные в результате моделирования деформаций мембран из материалов Нео-Гук и Гент на тестах по раздутию круглой мембраны [3] и растяжения плоского патча с отверстиями [4]. Произведено качественное сравнение входных табличных данных, полученных обоими тестами. Для проверки описательной и прогностической способности предложенного метода моделирования деформирования мембран с таблично заданными определяющими соотношениями рассмотрены следующие тестовые задачи: раздутие круглых мембран, раздутие цилиндрической мембраны и индентация круглой мембраны с фиксированной зоной контакта [5]. Решение последних двух задач осложнялось отсутствием сходимости нелинейного решателя для данных, полученных из симуляции раздутия мембраны. Расходимость связана с недостаточностью экспериментальных данных для предсказания отклика под разными нагрузками. Предложено два метода расширения входных данных для решения этой проблемы: линейная аппроксимация частных производных упругого потенциала в окрестности малых деформаций и дополнительный сбор данных при раздутии сжатой мембраны. Верификация расчетов подтвердила работоспособность метода моделирования деформаций гиперупругих мембран с расширенными входными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 19-71-10094).

Литература

1. Srinivasa A.R. On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials //International Journal of Engineering Science. 2012. Т. 60. С. 1-12.
2. Vassilevski Y.V., Salamatova V.Y., Lozovskiy A.V. Concise formulas for strain analysis of soft biological tissues //Differential Equations. 2017. Т.53. №7. С. 908-915.
3. Salamatova V.Y., Liogky A.A. Method of Hyperelastic Nodal Forces for Deformation of Nonlinear Membranes //Differential Equations. 2020. Т. 56. №7. С. 950-958.
4. Stainier L., Leygue A., Ortiz M. Model-free data-driven methods in mechanics: material data identification and solvers //Computational Mechanics. 2019. Т.64. №2. С.381-393.
5. Long R., Hui C.Y. Axisymmetric membrane in adhesive contact with rigid substrates: Analytical solutions under large deformation //International Journal of Solids and Structures. – 2012. – Т. 49. – №. 3-4. – С. 672-683.

УПРАВЛЕНИЕ АТОМНЫМИ АНСАМБЛЯМИ В МОДЕЛИ ТАВИСА-КАММИНГС-ХАББАРДА

Ваньшунь Ли¹, Дюль Рафаэль¹, Кулагин Алексей¹, Мяо Хуэй-хуэй-хуэй¹, Ожигов Юрий¹,
Чжен Кэли¹

*1)Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, факультет
Вычислительной математики и кибернетики, кафедра Суперкомпьютеров и квантовой
информатики, e-mail: ozhigov@cs.msu.ru*

Исследованы возможности модели Тависа-Каммингса-Хаббарда (ТСН) по управлению квантовой динамикой атомов и поля, заключенных в оптических полостях, с помощью компьютерного моделирования. В частности, установлена возможность представления движения свободной квантовой частицы через модель ТСН с различной проводимостью оптических волокон, соединяющих полости. Проведено численное моделирование квантового гейта соCSign на асинхронных атомных возбуждениях, и установлена принципиальная возможность использования этой схемы в квантовых вычислениях на малом числе кубитов (до 10).

Исследована также структура темных состояний в модели ТСН для трехуровневых атомов на суперкомпьютере Ломоносов — 2. Проверена численно гипотеза о том, что все такие состояния ансамблей трехуровневых атомов являются элементами линейной оболочки обобщенных 3 — синглетов. Проверка проведена для максимального числа атомов, для которых это возможно на данном суперкомпьютере: $n=20$. Для двухуровневых атомов доказана общая теорема о структуре темных состояний. Получить аналог этой теоремы для трехуровневых атомов не удалось.

Предложена и численно рассчитана схема практического получения темных состояний методом оптического отбора: для двухуровневых и для трехуровневых атомов. Численно найдена также размерность темного подпространства для трехуровневых атомов при небольшом их числе $n < 20$.

Литература

1. Ожигов Ю.И. Квантовые гейты на асинхронных атомных возбуждениях, Квантовая электроника, 2020, статья принята в печать (Квантовая электроника)

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ОБОБЩЕНИИ АЛГОРИТМА ДОПОЛНЕНИЯ ТЕНЗОРА И ОЦЕНКА ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ДОПОЛНЕНИЯ

Мордвинцев М.К.

ВМК МГУ кафедра ВТМ, студент 3 курса. mordvincevmisha@mail.ru

Существует большое количество алгоритмов на матрицах. Это возможно благодаря хорошо развитой теории, содержащей, в частности, SVD разложение, позволяющее находить проекцию на множество матриц, ранга не выше заданного. Для некоторых задач интересно использовать алгоритмы для тензоров, аналогичные матричным. В своем докладе я хочу проанализировать некоторые трудности, возникающие при попытке придумать такие алгоритмы на примере алгоритма дополнения тензора, а также попробую оценить число элементов, необходимых для дополнения тензора.

На основе алгоритма дополнения матриц (SVP), представленного в [2], был придуман алгоритм для дополнения тензора с рангами Таккера не выше заданных. Используя этот алгоритм, я пытался понять, сколько элементов нужно знать для того, чтобы восстановить тензор. Я высказал некоторые предположения, опираясь на матричные оценки необходимого [2] и достаточного [3] для дополнения числа известных элементов и число значений, задающих разложение Таккера и попытался проверить их, запуская алгоритм дополнения тензора на тензорах разного размера и имеющих различные ранги Таккера.

Проверялось предположение, можно ли дополнить тензор, зная $O(n)$ элементов (n — размерность тензора). Для матриц ответ положительный [3]. Можно установить, применяя матричный результат к разверткам тензора, что $O(n^{d-1} \log^2(n))$ будет достаточно для восстановления тензора. Однако некоторые соображения, а также численные тесты говорят о том, что достаточно знать $O(dnr^{d-1} \log^x(n))$ элементов.

Результаты тестов не могут однозначно показать, какое именно число элементов нужно для восстановления тензора, однако число элементов, которые нужно знать для дополнения тензоров, зависит от размера линейно (в выражении нет множителя n^{d-1}).

После проведения практических тестов и из-за некоторых соображений, о числе значений, которые нужно знать, чтобы восстановить тензор с рангами Таккера не выше заданных (их не больше, чем $r^d + dnr$) я предполагаю, что для восстановления тензора достаточно знать $Cdnr^{d-1}$ умножить на $\log^x(n)$ элементов.

Литература

1. Тыртышников Е. Е. Матрицы, тензоры, вычисления //М.: МГУ им. МВ Ломоносова. – 2013.
2. Jain P., Meka R., Dhillon I. S. Guaranteed rank minimization via singular value projection //Advances in Neural Information Processing Systems. – 2010. – С. 937-945.
3. Benjamin Recht. A Simpler Approach to Matrix Completion //Journal of Machine Learning Research — 2011 — V.12 №104 с.3413-3430.

Секция: «Теория дифференциальных уравнений»

ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ И АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Коровина М.В.¹

1)МГУ им. Ломоносова, ф-т ВМиК, кафедра ОМ, e-mail: betelgeuer@yandex.ru

Рассмотрим ОДУ с голоморфными коэффициентами

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_1(x)\left(\frac{d}{dx}\right) u(x) + \dots + a_0(x)u(x) = 0 \quad (1)$$

здесь $a_i(x)$ голоморфны в окрестности бесконечности, т.е. существует такая внешность круга $|x| > a$, что функции $a_i(x), i = 0, 1, \dots, n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды

$a_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_i^j / x^j$. Путем замены $x = 1/r$ (1) сводится к уравнению с вырождением типа клова

второго порядка, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u + b_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u + b_1 r^{m+1} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u + b_2 r^{m+2} \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + \dots + b_{k+1} r^{m+k} u + \\ + \sum_{i=1}^m r^i \sum_{j=h_i}^{n-1} b_j^i \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^j u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a^i(r) \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u = 0 \end{aligned}$$

Здесь $i + h_i > m + k$, для всех $1 \leq i \leq m$, b_i, b_j^i – соответствующие числа, $a^i(r)$ – голоморфные функции. $h = m + k$ называется индексом сингулярности уравнения (1).

ТЕОРЕМА. Пусть $h_i + i - h > (m-i) \frac{n-k-m}{m}$, тогда любая асимптотика решения уравнения (1) в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности бесконечности имеет вид $u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{\sigma_j} \sum_{l=1}^{\infty} A_l^j x^{\frac{l}{n-k}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i}$,

где $\alpha_{n-k-m}^j, j = 1, \dots, n-k$ корни полинома $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$.

Пусть $h_i + i - h < (m-i) \frac{n-k-m}{m}$, тогда любая асимптотика решения имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) \approx \sum_{j=1}^v \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m-\beta_i} \beta_i^j x^{\frac{i}{n-k-m-\beta_i+1}}\right) x^{\sigma_j^1} \sum_{l=0}^{\infty} A_l^j x^{\frac{l}{n-k-m-\beta_i+1}} + \\ + \sum_{j=1}^{\beta_i+m-i} \exp\left(\sum_{i=1}^{\beta_i} \alpha_i^j x^{\frac{i}{m-i+\beta_i}}\right) x^{\sigma_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_l^j x^{\frac{l}{m-i+\beta_i}} + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i} \end{aligned}$$

Здесь $v = n-k + i - m - \beta_i, \beta_i^j, j = 1, \dots, v$ – корни полинома $p^v + c$, где $c = b_1 \left(\frac{v}{v-i}\right)^v$.

$\alpha_{\beta_i}^j, j = 1, \dots, m-i + \beta_i$ – корни полинома $a_0 + b_1 \left(\frac{1}{d-1}\right)^{i-m-\beta_i} p^{-i+m+\beta_i}$. $A_l^j, B_l^j, \sigma_j^1, \sigma_j^2, b_l^j, k_0$ – неко-

торые числа, $\sum_{l=0}^{\infty} A_l^j x^l, \sum_{l=0}^{\infty} B_l^j x^l$ – асимптотические ряды.

О ПОВЕДЕНИИ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Денисов В.Н.

МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, каф.ОМ, e-mail: vdenisov2008@yandex.ru

Пусть $u(x,t)$ – классическое решение задачи Коши

$$u_t - Lu = 0, \quad x \in E^N, \quad t > 0, \quad u(x,0) = v(x)$$

для параболического уравнения 2-го порядка дивергентного вида без младших коэффициентов, с начальной функцией, непрерывной во всем евклидовом пространстве, и имеющей на бесконечности степенной рост порядка m , $m > 0$,

$$|v(x)| \leq M(1 + |x|^m).$$

Предполагается также, что коэффициенты параболического уравнения удовлетворяют условиям гладкости и равномерной параболичности во всем пространстве.

Мы устанавливаем точную оценку для разности $R(x,t)$ средних Абеля по времени t от $u(x,t)$, и средних Чезаро порядка α по t от $u(x,t)$. Определение средних Абеля от $u(x,t)$ можно найти в [2], стр. 45, формула (9), а средних Чезаро порядка α по t от $u(x,t)$ - в [2], стр. 45, формула (7).

Теорема.

Предполагая, что порядок α средних Чезаро является переменным, $\alpha = t^m$, мы доказываем оценку

$$|R(x,t)| \leq M_1/t^{m/2}, \quad M_1 > 0,$$

равномерно относительно x на каждом компакте.

Автор благодарит акад. Е.И.Моисеева за внимание и ценные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00223)

Литература

1. Денисов В.Н. О поведении при больших значениях времени решений параболических уравнений// СМФН, 2020, т.60, №1, с.1-155.
2. Денисов В.Н. О стабилизации средних по времени от решения задачи Коши для параболических уравнений// Дифференц. уравн., 1988, т.24, №1, с.44-54.

ТЕОРЕМЫ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Савчук А.М.¹, Садовничая И.В.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра ТФФА,
e-mail: artem_savchuk@mail.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ОМ,
e-mail: ivsad@yandex.ru

Рассматривается оператор Штурма-Лиувилля общего вида с сингулярными коэффициентами на конечном отрезке $[a, b]$. Обсуждаются теоремы равносходимости спектральных разложений функции $f \in L_\mu[a, b]$ по метрике пространства $L_\nu[a, b]$, причем связь между индексами μ и ν определяется явно из условий на коэффициенты оператора.

Пусть оператор L порождается дифференциальным выражением

$$l(z) = -(\tau_1 z')' + i(\sigma z)' + i\sigma z' + \tau_0 z$$

На области определения

$$D(L) = \{z \mid z, \quad z^{[1]} \in W_1^1[a, b], \quad l(z) \in L_2[a, b], \quad U_1(z) = U_2(z) = 0\}.$$

Здесь $\tau_1 \in H^1[a, b]$, причем $\tau_1(x) > 0$, $\sigma \in L_2[a, b] = H[a, b]$, $\tau_0 \in H^{-1}[a, b]$, где $H^1[a, b]$ – классическое пространство Соболева функций с квадратично суммируемой производной, а $H^{-1}[a, b]$ – симметричное к $H^1[a, b]$ относительно $H[a, b]$ пространство. Символом $z^{[1]}$ обозначена первая квазипроизводная функции z , а именно:

$$z^{[1]} = \tau_1 z' - (T + i\sigma)z,$$

где $T \in L_2[a, b]$, $\tau_0 = T'$. Краевые условиями задаются двумя линейно независимыми формами

$$U_j(z) = a_{j1}z(a) + a_{j2}z^{[1]}(a) + b_{j1}z(b) + b_{j2}z^{[1]}(b), \quad j = 1, 2.$$

Теорема 1. Обозначим через $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ систему собственных и присоединенных функций оператора L с регулярными по Биркгофу краевыми условиями, а через $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – биортогональную к ней систему. Пусть $\{y_n^0\}_{n=1}^{+\infty}$ – система собственных и присоединенных функций оператора \tilde{L}_0 , порожденного в пространстве $L_2[0, c]$ дифференциальным выражением $\tilde{l}(y) = -y''$ и краевыми условиями \tilde{U} , где $c = \int_a^b \tau_1^{-1/2}(t)dt$, а новые краевые условия \tilde{U} выписываются явным образом через краевые условия U и коэффициенты исходного дифференциального выражения. Обозначим через $\{u_n^0\}_{n=1}^{+\infty}$ систему, биортогональную к $\{y_n^0\}_{n=1}^{+\infty}$.

Тогда для произвольной функции $f \in L_2[a, b]$ имеет место равномерная на всем отрезке $[a, b]$ равносходимость разложений функции f в ряды по системам $\{z_n\}$ и $\{z_n^0\}$

Здесь $z_n^0 = W y_n^0$, $c_n = (f, w_n)$, $c_n^0 = (f, (W^*)^{-1} u_n^0)$, а W – оператор, осуществляющий подобие оператора L оператору \tilde{L} .

Теорема 2. Пусть оператор L порожден дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и регулярными по Биркгофу краевыми условиями, где $q = u'$, $u \in L_\kappa[a, b]$, $\kappa \geq 2$. Тогда для любой функции $f \in L_\mu[a, b]$ имеет место равномерная равносходимость разложений по системам собственных и присоединенных функций возмущенного и невозмущенного операторов соответственно, причем разность частичных сумм стремится к нулю по норме пространства $L_\nu[a, b]$, если $\mu, \nu \in [1, \infty]$ и выполнено соотношение: $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leq 1$, за исключением случая $\kappa = \nu = \infty$, $\mu = 1$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 19-01-00240.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Крицков Л.В.¹, Иоффе В.Л.²

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра общей математики,
e-mail: kritskov@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: vitaioffe@yandex.ru

В работе изучены спектральные свойства оператора, порождаемого дифференциальной операцией

$$l_\alpha u(x) = -u''(x) + \alpha u(-x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

с условиями Коши $u(-1) = u'(-1) = 0$.

Наличие в (1) преобразования инволюции $\phi(x) = -x$ в слагаемом со страшей производной даже в случае, когда $0 < |\alpha| < 1$, приводит к появлению в спектральных свойствах оператора «резонансных» явлений на всюду плотном множестве значений параметра α .

На основании анализа резольвенты рассматриваемого оператора \mathcal{L}_α показано

Теорема 1. Система корневых функций (с.к.ф.) оператора \mathcal{L}_α полна в $L_2(-1,1)$ при любом $\alpha: 0 < |\alpha| < 1$.

Решающую роль в базисных свойствах с.к.ф. играет параметр $\kappa = \sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$ (см. [1-2]).

Теорема 2. Если κ иррационален, то с.к.ф. не образует базис в $L_2(-1,1)$.

Теорема 3. Пусть κ рационально. Тогда: а) если κ представим в виде $\frac{2m_0}{2n_0-1}$, $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$, то оператор \mathcal{L}_α имеет бесконечно много трехкратных собственных значений, при этом специальным образом выбранная с.к.ф. образует безусловный базис в $L_2(-1,1)$, б) если κ не представим в указанном виде, то оператор \mathcal{L}_α имеет простой спектр, при этом система его собственных функций образует безусловный базис в $L_2(-1,1)$.

Литература

1. Крицков Л.В., Сарсенби А.М. Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Дифф. уравнения (2015) 51, №8, с.990-996.
2. Крицков Л.В., Сарсенби А.М. Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Дифф. уравнения (2017) 53, №1, с.35-48.

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРА (ДЛЯ 3 ИЗМЕРЕНИЙ)

Тихомиров В.В.¹, Исаев Р.Р.²

1) Кафедра общей математики, e-mail: zedum@cs.msu.ru

2) Факультет вычислительной математики и кибернетики, e-mail: xzidkeyx@gmail.com

В работе проводится исследование устойчивости динамической системы Лотки – Вольтера «один хищник - две жертвы» с помощью вариационного метода. Этот метод применим для исследования устойчивости положений равновесия нелинейных динамических систем любого вида и любой размерности. Он доказывает свою эффективность даже в тех случаях, когда применение функции Ляпунова вызывает большие затруднения (например, при решении задач большой размерности). В основе предложенного метода лежит вариационный способ оценки скорости изменения метрики фазового пространства состояний возмущенной системы при стремлении переменной $t \rightarrow \infty$.

Недостатком вариационного метода является тот факт, что этот метод позволяет получить лишь необходимые условия устойчивости. Однако его применение полезно как первый шаг при исследовании на устойчивость нелинейных систем большой размерности.

Далее представлена задача для исследования устойчивости положений равновесия динамической системы Лотки – Вольтера «один хищник - две жертвы»

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\gamma_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_2 - x_3) \\ \dot{x}_2 &= \gamma_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_1) \\ \dot{x}_3 &= \gamma_3 \cdot x_3 \cdot (\alpha - x_1)\end{aligned}$$

Теорема. Условия возмущения точек бифуркации системы имеют следующий вид:

1. Для **устойчивости** положения равновесия $M_0(0, 0, 0)$ необходимо имеют место соотношения: $\gamma_1 > 0$; $\gamma_2 < 0$; $\alpha \cdot \gamma_3 < 0$ (или $\gamma_3 < 0$).
2. Для **устойчивости** положения равновесия $M_1(1, 1, 0)$ необходимо имеют место соотношения: $\gamma_1 < 0$; $\gamma_2 > 0$; $\gamma_3 \cdot (\alpha - 1) < 0$ (или $\gamma_3 > 0$, $\alpha < 1$).
3. Для **устойчивости** положения равновесия $M_2(\alpha, 0, 1)$ необходимо имеют место соотношения: $\gamma_1 < 0$; $\gamma_2 \cdot (1 - \alpha) > 0$; (или $\gamma_2 < 0$, $\alpha < 1$); $\gamma_3 > 0$.
4. С другой стороны, если хотя бы одно из перечисленных условий нарушается, то возмущение решения в окрестности соответствующего положения равновесия **не является устойчивым**.

Литература

1. Братусь А. и др. // Динамические системы и модели в биологии. // Физматлит. 2009. 400 с.
2. Смольяков Э. // Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем. 2019.Т.55.№ 4.
3. Четаев Н. // Некоторые задачи теории устойчивости. Работы по аналитической механике // М. АНСССР. 1962.

СРАВНЕНИЕ СИМУЛЯЦИОННОГО И ЧИСЛЕННОГО ПОДХОДОВ В ИССЛЕДОВАНИИ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНЫХ БИОЛОГИЧЕСКИХ СООБЩЕСТВ

Куркин М.Л.¹, Никитин А.А.²

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра Общей математики, e-mail: maxkurkin@inbox.ru

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра Общей математики, e-mail: nikitin@cs.msu.ru

Ранее проблема выбора подходящего замыкания третьего момента для пространственной динамики биологической популяции обсуждалась в [1]. Экологическую проблему пространственной динамики одного вида можно описать следующей системой интегральных уравнений:

$$0 = \frac{dN}{dt} = (b - d)N - d' \int_{\mathbb{R}} C(\xi) \omega(\xi) d\xi$$
$$0 = \frac{dC(\xi)}{dt} = bm(\xi)N + \int_{\mathbb{R}} bm(\xi')C(\xi + \xi')d\xi' - (d + d'\omega(\xi))C(\xi) - \int_{\mathbb{R}} d'\omega(\xi')T(\xi, \xi')d\xi' \quad (1)$$

Где $m(x)$ и $w(x)$ - ядра рождаемости и смертности вида соответственно, $N, C(x), T(x, y)$ - первый, второй и третий пространственный моменты популяции, $d, d', b \in \mathbb{R}$.

Используя трёхпараметрическое замыкание третьего момента этой системы, можно переписать её и решить численным методом рядов Неймана, сходимость которого обоснована в [2].

Главной целью настоящей работы являлось сравнение результатов численного метода решения интегрального уравнения, получающегося после подстановки вышеуказанного замыкания с результатами работы симуляций, основанных на процессах Пуассона, описанных в [3].

В ходе работы были рассмотрены несколько наборов вещественных параметров d, d', b . В одних случаях численный метод работал некорректно, не иллюстрируя вымирание особей, в других аппроксимировал симуляции, но с довольно высокой относительной ошибкой, в третьих — аппроксимировал симуляции довольно точно.

The article was prepared within the framework of the Academic Fund Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2020 -- 2021 (grant № 20-04-021) and by the Russian Academic Excellence Project 5-100.

Литература

1. Law R., Dieckmann U. Moment approximations of individual-based models // The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity / Ed. by U. Dieckmann, R. Law, J. Metz. Cambridge University Press, 2000. P. 252-270.
2. Николаев М. В., Никитин А. А. О существовании и единственности решения одного нелинейного интегрального уравнения // Доклады Академии наук. 2019. Т. 488, No 6. С. 501–507
3. Галкин Е. Г., Никитин А. А. Стохастическая геометрия для моделирования популяционной динамики: модель Дикмана с неподвижными особями // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15 2020. No 2. С. 11–18.

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ

Зайцева Н.В.¹

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра системного программирования, e-mail: zaitseva@cs.msu.ru

Впервые дифференциально-разностное уравнение было изучено J. Bernoulli [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Уравнение, рассмотренное им, встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других математиков (см., напр., [2] и имеющуюся там библиографию).

В настоящее время подробно исследованы задачи для дифференциально-разностных уравнений с частными производными в ограниченных областях [3]. В неограниченных областях изучены задачи для параболических [4] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений [5]. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по переменной времени [6].

В нашей работе для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{j=1}^n a_j u_{xx}(x - h_j, t),$$

рассматриваемого в области $(x, t) \in R^1 \times (0, +\infty)$, где a_j, h_j ($j = \overline{1, n}$) – заданные вещественные числа, построено однопараметрическое семейство гладких решений. Доказана теорема, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа разностного оператора, входящего в уравнение, положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено.

Литература

1. Bernoulli J. Meditationes. De chordis vibrantibus // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae (1728) **3**, с.13–28.
2. Burkhardt H. Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik // Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. (1908) **10**, с.1–1804.
3. Skubachevskii A.L. Ordinary Difference-Differential Equations // Basel-Boston-Berlin: Birkhauser. – 1997.
4. Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. матем. Фундам. направл. (2014) **52**, с. 3–143.
5. Муравник А.Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки (2019) **105**, №5 с. 747–762.
6. Власов В.В., Медведев Д.А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. матем. Фундам. направл. (2008) **30**, с. 3–173.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аристов А.И.¹

*1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра общей математики,
e-mail: ai_aristov@mail.ru*

Работа посвящена изучению неклассического нелинейного уравнения четвёртого порядка, содержащего неизвестную функцию, зависящую от двух одномерных переменных (пространственной и временной). Это исследование опубликовано в статье [1].

В статье [2] рассмотрено близкое уравнение (сводящееся к данному линейной заменой). Оно может описывать волны в плазме. Изучено два класса задач для него. Для одного показано, что решение существует, по крайней мере, локально по времени, причём в случае только локальной (не глобальной) разрешимости имеет место опрокидывание решения. Для другого показано, что решения не существует ни на каком временном интервале.

Интересен вопрос построения точных решений исследуемого уравнения и анализа их качественного поведения. Здесь построено три семейства точных решений, выражаемых через решения обыкновенных дифференциальных уравнений и ряды Лорана. Указано несколько их подклассов, выражаемых через элементарные функции. Показано, что среди них есть как ограниченные глобально по времени, так и опрокидывающиеся, т. е. определенные в некоторой окрестности начального момента и стремящиеся к бесконечности при стремлении времени к конечному значению.

Использованы метод бегущей волны, метод разделения переменных и построение решений специального вида.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10085мк) и содействии Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература

1. Aristov A.I. Exact Solutions of a Nonclassical Nonlinear Equation of the Fourth Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, № 10, pp. 1933–1937.
2. Korpusov M.O. Instantaneous blow-up of a weak solution of a problem in plasma theory on the half-line // Differ. Equat. **55** (1), 60–67 (2019).

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ В МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА

Кувшинов Е.Э.¹, Хохлов Ю.С.²

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра математической статистики,
e-mail: kuvshinov.eugeny@yandex.ru

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра математической статистики,
e-mail: yskhokhlov@yandex.ru

Задача оценки вероятности разорения является одной из наиболее популярных в актуарной математике. Получено огромное число результатов в этой области, большинство из которых относится к одномерным моделям риска. В последние 15-20 лет усилился интерес к получению аналогичных результатов для многомерных моделей риска. При этом стали большое внимание уделять моделям, в которых распределение величины выплат имеет так называемые тяжелые хвосты. Для этого нужно использовать то или иное обобщение понятия правильного изменения на многомерный случай.

Недавно появилась очень интересная работа Константиноидиса и Ли, где получена оценка вероятности разорения в многомерной модели коллективного риска. При этом использовался довольно общий вариант многомерного процесса восстановления в качестве модели поступления исков и понятие правильного изменения хвоста распределения величины иска в некотором смысле равномерного по всем направлениям. Последнее условие является довольно ограничительным для многих реальных задач, так как зачастую выплаты по разным направлениям страхования в рамках одного договора имеют принципиально разную величину.

В нашем докладе мы на примере двумерной задачи рассматриваем более общую модель, где распределение выплат по двум разным направлениям имеет разную степенную скорость убывания. Для такой модели мы получаем точную асимптотику вероятности разорения при большой величине начального капитала, который распределяется по разным направлениям специальным образом, что довольно естественно, т.к. риски по разным направлениям различны. Показано, что с точностью до мультипликативных констант асимптотика вероятности разорения определяется однозначно поведением хвоста распределения индивидуальных выплат по величине начального капитала. Выписано явное выражение этой асимптотики. В нашей модели мы предполагаем для упрощения вычислений, что выплаты по каждому направлению страхования независимы. Но развитые нами методы позволяют получить и более общий результат, когда предположение о независимости не делается. Основным техническим приемом является некоторое многомерное обобщение теоремы Бреймана, ранее доказанное только для упомянутого варианта многомерного правильного изменения. Ограничение двумерным случаем также сделано только для наглядности изложения. Результат легко переносится на случай произвольной размерности.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 18-11-00155)

Литература

1. D.J. Konstantinides, J.Z. Li. Ruin Probabilities for a Multidimensional Renewal Risk Model with Multivariate Regularly Varying Claims. // Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications. — Proceedings of the International Conference. — 23-27 October, 2017, Moscow, Russia, p.p. 446-452.

СВОЙСТВА СМЕСЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С НОРМАЛЬНЫМ

Гончаренко М.Б.¹, Захарова Т.В.^{2,3}

1) АО «Интел», e-mail: goncharenko.mir@yandex.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, e-mail: lsa@cs.msu.ru

3) Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Зачастую при обработке результатов реального эксперимента приходится иметь дело с данными, распределение которых имеет сложную структуру. Такие распределения можно приблизить достаточно точно нормальной смесью [1]. В частности, распределение аддитивного шума в данных магнитоэнцефалографии (МЭГ) хорошо описывается конечной нормальной смесью.

МЭГ – неинвазивная технология нейровизуализации, которая позволяет изучать различные аспекты функционирования головного мозга, путем анализа магнитной индукции, регистрируемой около поверхности головы испытуемого [2].

Многие пакеты программ обработки данных МЭГ предполагают нормальное распределение шума, однако, не всегда это предположение выполняется. Нормальное распределение обладает множеством хорошо известных свойств, которые используются при проектировании методов обработки экспериментальных данных. При замене распределения шума на более сложное, в виде нормальной смеси, остро встает вопрос о том, какие свойства остаются справедливыми, а какие – нет.

Было установлено, что при трансформации нормальная смесь ведет себя схожим образом с нормальным распределением, а именно, смеси распределений Стьюдента, логнормального и хи-квадрат, получаются схожими трансформациями с нормальным распределением. Однако, такое важное свойство как эквивалентность независимости и некоррелированности координат многомерного нормального вектора уже не справедливо для нормальной смеси [3].

При анализе данных МЭГ интерес представляет как форма сигнала, так и расположение источников активности. Для их поиска необходимо решать обратную задачу МЭГ. Одним из самых распространенных в прикладных исследованиях методов является обобщенный метод наименьших квадратов. Хорошо известно, что для его применения требуется положительная определенность матрицы ковариации шума. Было доказано, что нормальная смесь сохраняет это свойство, если хоть одна из составляющих компонент обладает невырожденной ковариационной матрицей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-07-00352).

Литература

1. Королев В.Ю. EM-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор //М.: ИПИ РАН – 2007.
2. Захарова Т.В., Никифоров С.Ю., Гончаренко М.Б., Драницына М.А., Климов Г.А., Хазиахметов М.Ш., Чаянов Н.В. Методы обработки сигналов для локализации невосполнимых областей головного мозга //Системы и средства информатики (2012) 22, №2, с. 157–175.
3. Гончаренко М.Б., Захарова Т.В. Особенности поведения конечных смесей нормальных распределений //Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика (2018), № 3, с. 30–36.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СПЕЦИФИКИ ЗРИТЕЛЬНОЙ РАБОЧЕЙ ПАМЯТИ

Захарова Т.В.^{1,2}

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики, e-mail: lsa@cs.msu.ru

2) Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Рабочая память – многокомпонентная система, несущая функцию временного хранения информации в активном и доступном для анализа состоянии. Рабочая память принимает участие в мышлении человека, служит связующим звеном между системами восприятия и долговременной памятью, а характеристики рабочей памяти определяют скорость и объем обработки информации. В составе рабочей памяти выделяют зрительную рабочую память – подсистему, использующуюся для хранения зрительной информации и для манипулирования ею в ходе выполнения познавательных заданий.

В настоящее время механизмы рабочей памяти активно изучаются. За последние годы накопилось множество экспериментальных данных, согласно которым при выполнении людьми заданий, требующих рабочей памяти, активность наблюдается не только в префронтальной, но и в зрительной, теменной, височной коре.

Цель проделанной работы состояла в изучении связности различных зон мозга и их взаимодействия при удержании информации в зрительной рабочей памяти на основе обработки и анализа сигналов электроэнцефалограмм (ЭЭГ). Исследование функциональной связности головного мозга проводилось методом вызванных потенциалов. Ранее на основании этого метода автором решалась задача по локализации функциональных зон головного мозга путем обработки магнитоэнцефалограмм [1].

В докладе проведен сравнительный анализ внутрикорковых связей в задаче зрительной рабочей памяти наклон линий и расположение паттернов. Связи оценивались на этапе удержания зрительного стимула и сравнивались с корковыми связями при простом наблюдении этих же стимулов. Первым и наиболее важным этапом явилось построение вероятностной модели электроэнцефалограммы. Из записей ЭЭГ каждого испытуемого исключались фрагменты с физиологическими артефактами и с неверными ответами. Далее выделялись отрезки длиной 900 миллисекунд, соответствующие этапу удержания информации в рабочей памяти, и для каждого слабостационарного 900-миллисекундного отрезка строилась вероятностная модель. Для этого был применен метод векторной авторегрессии [2] или метод построения VAR-модели (Vector Autoregression model). VAR-модель отражает динамику нескольких временных рядов, в которой текущие значения этих рядов зависят от прошлых значений этих же временных рядов. С помощью функции частной направленной когерентности были определены силы влияния каналов ЭЭГ друг на друга.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-07-00252).

Литература

1. Zakharova T. V. The inverse ill-posed problem of magnetoencephalography // Journal of Mathematical Sciences (2020) **246**, No.4, P.587–591.
2. Schlogl A. The Electroencephalogram and the Adaptive Autoregressive Model: Theory and Applications: Dr. techn. Diss. – Graz: Technischen Universitat Graz – 2000.

СВОЙСТВА ОЦЕНКИ РИСКА ПРИ МНОЖЕСТВЕННОЙ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ FDR-МЕТОДА

Палионная С.И.¹, Шестаков О.В.^{1,2}

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, e-mail: palionnaya@gmail.com, oshestakov@cs.msu.ru*

2) *Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской академии наук*

Проблемы обработки и анализа многомерных случайных векторов возникают в самых разнообразных областях. Важными практическими задачами являются экономное представление, выделение значимых признаков, и удаление незначимых (шумовых) признаков. Эти задачи являются принципиально важными для широкого класса практических приложений, таких как анализ генетических цепочек, энцефалограмм, спектрограмм, обработка видео- и аудиоданных и ряда других. Среди современных исследований в этой области широко представлены работы, посвященные различным методам фильтрации, основанные на разреженном представлении получаемых экспериментальных данных и различных статистических процедурах их обработки.

Одним из популярных методов построения статистических оценок закономерностей в экспериментальных данных являются процедуры множественной проверки гипотез о значимости наблюдений. Для таких процедур в работе [1] предложена мера FDR (false discovery rate), обобщающая понятие ошибки первого рода. Данный подход, контролирующий долю ложных отклонений нулевой гипотезы, широко применяется в ситуациях, когда число проверяемых гипотез настолько велико, что предпочтительнее допустить некоторое количество ошибок первого рода с целью увеличения статистической мощности. Для контроля над FDR чаще всего используется алгоритм множественной проверки гипотез Бенжамини—Хочберга [1].

В докладе анализируются асимптотические свойства оценки среднеквадратичной погрешности (риска) этой процедуры. В работе [2] была доказана состоятельность данной оценки. Оказывается, что она также является сильно состоятельной и асимптотически нормальной. Полученные результаты дают возможность строить асимптотические доверительные интервалы для среднеквадратичной погрешности FDR-метода, используя только наблюдаемые данные.

Исследования проводились в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература

1. Benjamini Y., Hochberg Y. Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing // *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B* (1995) **57**, с. 289–300.
2. Заспа А.Ю., Шестаков О.В. Состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR-порогом // *Вестн. Тверского гос. ун-та. Серия: Прикладная математика* (2017), №1, с. 5-16.

О МЕТОДЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГАММА-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Кудрявцев А.А.¹, Шестаков О.В.^{1,2}

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, e-mail: nubigena@mail.ru, oshestakov@cs.msu.ru*

2) *Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" Российской академии наук*

Во многих областях прикладной математики возникает потребность в моделировании реальных процессов и явлений при помощи вероятностных распределений, имеющих неограниченный положительный носитель. Обычно подобные модели используют частные случаи обобщенного гамма-распределения, или распределения Крицкого–Менкеля [1, 2], и обобщенного бета-распределения второго рода, или распределения Феллера–Парето [3].

В докладе обсуждается возможность применения так называемого гамма-экспоненциального распределения [4], обобщающего перечисленные распределения и, таким образом, расширяющего возможности анализа прикладных задач.

Основная трудность использования гамма-экспоненциального распределения в приложениях заключается в невозможности аналитического представления основных вероятностных характеристик последнего без использования специальных функций (гамма-функция, полигамма-функция, гамма-экспоненциальная функция и др.). В докладе обсуждается модифицированный метод моментов для оценивания параметров гамма-экспоненциального распределения, использующий возможность его представления как масштабной смеси распределений Крицкого–Менкеля. Также приводятся оценки некоторых параметров, обсуждаются их свойства.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 20-07-00655); исследования проводились в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература

1. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. О приемах исследования случайных колебаний речного стока // Труды НИУ ГУГМС. Сер. IV, 1946. Вып. 29. С. 3–32.
2. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. Выбор кривых распределения вероятностей для расчетов речного стока // Известия АН СССР. Отд. техн. наук, 1948. № 6. С. 15–21.
3. McDonald J.B. Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income // *Econometrica*, 1984. Vol. 52. No. 3. P. 647–665.
4. Кудрявцев А.А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и ее применения, 2019. Т. 13. Вып. 4. С. 78–82.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАСШТАБНОЙ СМЕСИ ОБОБЩЕННЫХ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Кудрявцев А.А.¹, Недолилко Ю.Н.²

1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, e-mail: nubigena@mail.ru*

2) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, e-mail: mouse98@mail.ru*

Распределения гамма-типа играют важную роль в задачах, решаемых методами теории вероятностей. К ним относятся гамма-распределение, показательное распределение, хи-квадрат – распределение, распределение Вейбулла–Гнеденко, m-распределение Накагами, распределение Рэлея и др. Все они представляют частные случаи обобщенного гамма-распределения, или распределения Крицкого–Менкеля [1, 2].

В широком круге прикладных задач [3, 4] для построения адекватных моделей реальных явлений можно использовать масштабные смеси обобщенных гамма-распределений. Задача получения аналитических представлений основных вероятностных характеристик (функции распределения, плотности, моментов) такой смеси достаточно трудоемка, а сами характеристики могут быть представлены только в терминах специальных функций. При этом принципиальную роль в исследовании играет положительность или отрицательность произведений параметров формы обобщенных гамма-распределений.

В докладе рассматривается подход к исследованию масштабных смесей законов с параметрами формы одного знака, основанный на использовании преобразования Меллина и его обращении. Приводятся аналитические выражения для вероятностных характеристик в терминах H-функции Фокса, функции Макдональда, обобщенной гипергеометрической функции. Проводится сравнительный анализ с аналогичными результатами для случая параметров формы разных знаков, выражаемыми в терминах гамма-экспоненциальной функции. Приводятся новые свойства последней. Также обсуждаются возможные подходы к статистическому оцениванию параметров масштабных смесей обобщенных гамма-распределений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 20-07-00655); исследования проводились в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература

1. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. О приемах исследования случайных колебаний речного стока // Труды НИУ ГУГМС. Сер. IV, 1946. Вып. 29. С. 3–32.
2. Крицкий С.Н., Менкель М.Ф. Выбор кривых распределения вероятностей для расчетов речного стока // Известия АН СССР. Отд. техн. наук, 1948. № 6. С. 15–21.
3. Кудрявцев А.А. Байесовские модели баланса // Информатика и ее применения, 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 18–27.
4. Кудрявцев А.А. Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях баланса // Информатика и ее применения, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 20–26.

АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СУММ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Шевцова И.Г.¹, Целищев М.А.²

1) МГУ, ф-т ВМК, каф. мат. статистики, e-mail: ishevtsova@cs.msu.ru

2) МГУ, ф-т ВМК, каф. мат. статистики, e-mail: m.tselishchev@cs.msu.ru

В работе предлагается обобщение понятия равновесного преобразования распределения случайной величины (с.в.) с ненулевым средним без ограничений на носитель, а также изучаются его свойства.

В отличие от случая знакопостоянных величин, обобщённое равновесное преобразование распределения знакопеременной с.в. оказывается в общем случае мерой со знаком (зарядом).

Доказано оптимальное моментное неравенство, ограничивающее сверху расстояние в метрике Канторовича между распределением с.в. и её обобщённым равновесным преобразованием.

С использованием обобщённого равновесного преобразования и метода Стейна исследуется скорость сходимости в теореме Реньи о слабой сходимости к показательному распределению должным образом нормированных геометрических случайных сумм независимых случайных слагаемых с одинаковыми ненулевыми средними и конечными вторыми моментами при стремлении математического ожидания числа слагаемых к бесконечности. Получены оценки сверху правильного порядка малости для метрики Канторовича между упомянутыми распределениями, тем самым обобщены результаты работы [2] на случай знакопеременных слагаемых. Кроме того, вводится понятие асимптотически наилучшей константы для оценки сверху метрики Канторовича в теореме Реньи для геометрических случайных сумм независимых одинаково распределённых с.в. с конечными вторыми моментами. Для этой константы приводится оценка снизу.

Используя тот факт, что отрицательное биномиальное распределение с параметром, меньшим единицы, представимо в виде смеси геометрических распределений, в работе, помимо прочего, приведена оценка скорости сходимости нормированных отрицательных биномиальных сумм к гамма-распределению.

Литература

1. Shevtsova I., Tselishchev M. A Generalized Equilibrium Transform with Application to Error Bounds in the Rényi Theorem with No Support Constraints. *Mathematics* 2020, 8(4). doi:10.3390/math8040577.
2. Peköz E.A., Röllin A. New rates for exponential approximation and the theorems of Rényi and Yaglom // *Ann. Probab.* 2011, vol.39, 587–608.

О ГРАФАХ С ПОЧТИ РЕБЕРНО НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОСТОВНЫМИ ДЕРЕВЬЯМИ

Селезнева С.Н., Мазуренко А.П.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра математической кибернетики,
e-mail: selezn@cs.msu.ru, anapmazurenko@gmail.com*

В работе рассматриваются конечные неориентированные графы, в которых могут присутствовать петли и кратные ребра (псевдографы). Подграф D графа G называется остовным деревом, если D содержит все вершины графа G и является деревом (т. е. связным графом без циклов). В [1, 2] найден критерий существования в графе k реберно непересекающихся остовных деревьев, $k \geq 2$. В [3] предложен полиномиальный алгоритм, который проверяет, найдутся ли в графе k , $k \geq 2$, реберно непересекающихся остовных деревьев и при положительном ответе отыскивает некоторые такие деревья.

Несколько подграфов графа назовем почти реберно непересекающимися, если не более двух из этих подграфов содержат не более одного общего ребра. В работе рассматриваются графы, в которых можно найти k почти реберно непересекающихся остовных деревьев, $k \geq 2$.

В работе получен критерий существования в графе k почти реберно непересекающихся остовных деревьев, $k \geq 2$.

Теорема 1. *В графе $G = (V, E)$ найдутся k , $k \geq 2$, почти реберно непересекающихся остовных деревьев тогда и только тогда, когда для любого разбиения множества V его вершин на t , $t \geq 2$, подмножеств выполняется условие, что не менее $k(t-1)-1$ ребер соединяют вершины из разных частей разбиения.*

Кроме того, показано, что задача проверки существования в графе k , $k \geq 2$, почти реберно непересекающихся остовных деревьев и при положительном ответе поиска некоторых таких деревьев может быть решена полиномиальным алгоритмом.

Теорема 2. *Существует полиномиальный алгоритм, который для графа G и числа k проверяет, найдутся ли в этом графе k почти реберно непересекающихся остовных деревьев и при положительном ответе отыскивает некоторые такие деревья.*

Работа поддержана МЦФПМ-МГУ, проект «Оценки сложных характеристик булевых функций и графов» (2020 г.)

Литература

1. Nash-Williams C.St.J.A. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs // J. London Math. Soc. 1961. V. 36. P. 445-450.
2. Tutte W.T. On the problem of decomposing a graph into n connected factors // J. London Math. Soc. 1961. V. 36. P. 221-230.
3. Roskind J., Tarjan R. A note on finding minimum-cost edge-disjoint spanning trees // Mathematics of operations research. 1985. V. 10. P. 701-708.

О СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МАЛОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ В КЛАССЕ ПСЕВДОПОЛИНОМОВ

Селезнева С.Н., Лобанов А.А.

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра математической кибернетики,
e-mail: selezn@cs.msu.ru, alex_cmc@likemath.ru*

Минимизация функций алгебры логики при различных их представлениях востребована при логическом проектировании цифровых устройств. Среди других представлений рассматриваются полиномиальные формы. Полиномиальной формой называется выражение, являющееся суммой по модулю два произведений сомножителей определенного вида. Можно выделить такие классы полиномиальных форм, как поляризованные полиномиальные формы, полиномиальные нормальные формы, псевдополиномиальные формы и другие. В ряде работ разработаны алгоритмы минимизации и получены оценки сложности (длины) функций в этих классах полиномиальных форм. При этом исследования ведутся в нескольких направлениях, в частности, получение оценок длины самых сложных функций n переменных для произвольных n и нахождение точной длины функций малого числа переменных.

Работа посвящена нахождению точной длины функций алгебры логики малого числа переменных в классе псевдополиномиальных форм (ПСПФ). Вопросы применения ПСПФ при логическом проектировании цифровых устройств обсуждаются в [1]. Под псевдополиномиальной формой (ПСПФ), или псевдополиномом, понимается выражение, являющееся суммой по модулю два произведений линейных функций. Длиной ПСПФ называется число ее слагаемых; длиной $l(f)$ функции алгебры логики f в классе ПСПФ — наименьшая длина среди всех ПСПФ, представляющих эту функцию.

В работе для получения классификации функций по длине в классе ПСПФ была написана программа на языке C++14. Программа осуществляет перебор функций n переменных, в алгоритме применяется некоторое ограничение перебора. Для каждой функции f программа находит не только ее длину $l(f)$ в классе ПСПФ, но и ПСПФ наименьшей длины для этой функции f .

При помощи этой программы получено, что средняя длина функций четырех переменных в классе ПСПФ равна 2,8515015, а функций пяти переменных — 4.115962973795831. Найдено распределение функций четырех и пяти переменных по длине в классе ПСПФ: для функций 4-х переменных установлено, что функций длины 1; 2; 3 и 4 соответственно 0,5; 24,8; 63,7 и 11,0 процентов; для функций 5-ти переменных установлено, что функций длины 1; 2; 3; 4 и 5 соответственно 0; 0; 6,5; 75,3 и 18,2 процентов. Кроме того, в работе получена полная классификация по длине в классе ПСПФ функций четырех переменных. А именно, рассмотрены классы, которые замкнуты относительно невырожденных аффинных преобразований переменных входящих в них функций. Ясно, что у любых двух функций из произвольного класса их длина в классе ПСПФ одинакова. При помощи программы найдены все 32 таких класса функций четырех переменных.

Работа поддержана МЦФПИМ-МГУ, проект «Оценки сложностных характеристик булевых функций и графов» (2020 г.).

Литература

1. Ishikawa R., Hirayama T., Koda G., Shimizu K. New three-level Boolean expression based on EXOR gates // IEICE Trans. Inf. & Syst. 2004. V. E87-D, N 5. P. 1214-1222.

НЕКОТОРОЕ ОСЛАБЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА 3-РАСКРАШИВАЕМЫХ ГРАФОВ

Мельник М.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики, e-mail: melnikmv@cs.msu.ru

Задача 3-раскраски состоит в том, чтобы выяснить, можно ли вершины произвольного графа так раскрасить в 3 цвета, чтобы смежные вершины получили разные цвета. Известно, что задача 3-раскраски произвольного графа является NP-полной [1]. В настоящее время задачу 3-раскраски исследуют для графов с ограничениями. В частности, рассматриваются графы не содержащие определенных порожденных подграфов. В данной работе рассматриваются графы с ограничениями структуры, а именно псевдокубические графы. Псевдокубическими назовем такие графы, у которых степени всех вершин за исключением одной не превосходят 3-х, а степень исключительной вершины не превосходит 4-х. Они являются расширением класса субкубических графов, для которых известно, что они 3-раскрашиваемы, если не содержат подграфов K_4 [2]. Ранее в [3] было показано, любой псевдокубический граф с одной исключительной вершиной можно раскрасить в три цвета, если он не содержит подграфов K_4 и K_4^- .

В данной работе была предпринята попытка ослабить ограничения наложенные на структуру псевдокубических графов, а именно, допустить существование хотя бы одного подграфа K_4^- в псевдокубическом графе, и понять, являются ли такие графы также 3-раскрашиваемыми или нет. Была доказана следующая теорема, которая является усилением предыдущего результата.

Теорема. *Если G – связный псевдокубический граф с исключительной вершиной степени 4, не содержащий подграфов K_4 и содержащий не более одного подграфа K_4^- , то его вершины можно раскрасить в 3 цвета.*

Работа поддержана МЦФПМ-МГУ, проект «Оценки сложных характеристик булевых функций и графов» (2020 г.).

Литература

1. Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L.J. Some simplified NP-complete graph problems // Theoretical Computer Science. 1976. V. 1. P. 237-267.
2. Brooks R.L. On coloring the nodes of network // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1941. V. 37. P. 194–197.
3. Селезнева С.Н., Мельник М.В., Астахова А.В. Раскраска в три цвета псевдокубических графов // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2019. № 2. С. 39–45.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗБИЕНИЙ ГРАФА ДЛЯ ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ РАВЕНСТВА НУЛЮ ОБОБЩЁННОГО ПОЛИНОМА

Бухман А.В.¹

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра математической кибернетики,
e-mail: avbukhman@cs.msu.ru

Булевой функцией от n переменных назовём отображение декартовой n -ой степени множества $\{0,1\}$ во множество $\{0,1\}$. Одним из способов задания булевых функций является их представление в виде обобщённых полиномов. Мономом назовём произведение различных переменных или их отрицаний, либо 1. Обобщённый полином – это сумма по модулю два различных мономов.

Каждая функция имеет несколько представлений в виде обобщённого полинома. Поэтому актуальным является вопрос о проверке того, что некоторый обобщённый полином является представлением заданной функции, например константы 0. В данной заметке рассматривается задача проверки равенства нулю обобщённого полинома, то есть на вход подаётся обобщённый полином, а на выходе нужно выдать ответ, задаёт ли он функцию константа 0 или нет. При такой постановке задачи длина входного слова равна произведению длины полинома на число переменных. В настоящий момент нет полиномиального алгоритма для этой задачи, также неизвестно, является ли задача NP-трудной. Поэтому актуальным является вопрос построения быстрых алгоритмов. В данной задаче будет рассмотрен вопрос уменьшения размера входа задачи.

Для этого рассмотрим граф, который строится по обобщённому полиному следующим образом. Каждому моному поставим в соответствие вершину графа. Ребро между вершинами присутствует, если мономы, соответствующие этим вершинам, при перемножении дают не 0. Мост – ребро в графе, при удалении которого увеличивается число компонент связности. Известно, что задача поиска мостов в графе выполняется за линейное время [1].

Теорема. Пусть P – обобщённый полином длины l , зависящий от n переменных, G_p его граф. И пусть в графе G_p есть мост, который делит его на два подграфа G_1 и G_2 . Обобщённый полином P будет тождественно равен 0 тогда и только тогда, когда тождественно равны 0 полиномы $P_1 \oplus K_1 K_2$ и $P_2 \oplus K_1 K_2$, где P_1 и P_2 – обобщённые полиномы, соответствующие подграфам G_1 и G_2 , K_1 и K_2 – это мономы, соответствующие вершинам моста графа G_p .

Замечание. Полученный результат интересен тем, что позволяет переходить от задачи проверки равенства нулю обобщённого полинома длины l , к двум задачам проверки равенства нулю обобщённых полиномов с длинами l_1 и l_2 , где $l_1 + l_2 = l + 2$.

Литература

1. Tarjan R. A note on finding the bridges of a graph // Information Processing Letters. — Т. 2, вып. 6. — С. 160—161.

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРВАЛАХ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ В ЧАСТИЧНОЙ k -ЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

Алексеев В.Б.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра математической кибернетики, e-mail: vbalekseev@rambler.ru

Пусть A – замкнутый класс в множестве всюду определенных k -значных функций. Начиная с работы [1], активно изучался интервал $I(A)$ в решетке замкнутых классов частичной k -значной логики, состоящий из всех замкнутых классов, в которых множество всюду определенных функций совпадает с A [2]. И только недавно была установлена мощность $I(A)$ для всех замкнутых классов A 2-значной логики [3]. В данной работе исследуются более узкие интервалы. Пусть $Str(A)$ – замкнутый класс в частичной k -значной логике, состоящий из всех функций частичной k -значной логики, доопределимых до какой-нибудь функции из A . Пусть $Int(A)$ – семейство всех замкнутых классов C в частичной k -значной логике таких, что $A \subseteq C \subseteq Str(A)$. В [1] для замкнутого класса L линейных булевых функций доказано, что $Int(L)$ содержит бесконечное число классов, но точная мощность $Int(L)$ пока не установлена. Пусть $Z(A)$ – семейство всех подмножеств предикатов на множестве $\{0, 1, \dots, k-1\}$, содержащих все предикаты от любого числа переменных, тождественно равные 1, а также замкнутых относительно переименования переменных, добавления и изъятия фиктивных переменных, подстановки в предикаты функций из A и взятия конъюнкции предикатов.

Теорема 1. Для любого замкнутого класса A в множестве всюду определенных k -значных функций ($k \geq 2$), содержащего все селекторы (то есть клона), семейства $Int(A)$ и $Z(A)$ с отношением включения изоморфны как частично упорядоченные множества.

Эта теорема позволяет исследование семейства $Int(A)$ сводить к исследованию семейства $Z(A)$. На этом пути удастся получить достаточно простые доказательства следующих результатов.

Теорема 2. Если A – это множество всех селекторов в k -значной логике, то семейство $Int(A)$ состоит из континуума замкнутых классов.

Пусть Pol_k – замкнутый класс в k -значной логике, состоящий из всех функций, представимых полиномом по модулю k . Если k – простое число, то Pol_k совпадает с множеством P_k всех всюду определенных k -значных функций. В этом случае $Int(Pol_k)$ состоит из 3 классов.

Теорема 3. Пусть k – произведение двух различных простых чисел. Тогда $Int(Pol_k)$ состоит из 7 классов.

Все 7 классов из теоремы 3 явно описаны через соответствующие классы из $Z(Pol_k)$ в соответствии с теоремой 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00200).

Литература

1. Алексеев В.Б., Вороненко А.А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика (1994), **6**, №4, с. 58-79.
2. Lau D. Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory // Berlin.: Springer – 2006.
3. Couciero M., Haddad L., Schoelzel K., Waldhauser T. A solution to a problem of D. Lau: Complete classification of intervals in the lattice of partial Boolean clones // J. Mult.-Valued Logic Soft Comput. (2017) **28**, pp. 47-58.

О ЕДИНИЧНЫХ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТАХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВСТАВОК НЕ СОХРАНЯЮЩИХ КОНСТАНТУ ЭЛЕМЕНТОВ

Александрова Н.Е.¹, Романов Д.С.²

- 1) ООО «Глоубайт Аналитические решения», e-mail: alexandrova-nat@mail.ru
2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра математической кибернетики, e-mail: romanov@cs.msu.ru

Пусть $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ — система булевых функций (БФ) n переменных, S — реализующая ее схема из функциональных элементов (СФЭ) в базисе B . Пусть на СФЭ S мог подействовать источник одиночных неисправностей U , способный видоизменять схему конечным числом способов. Схема S называется *неизбыточной* относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда при любой одиночной неисправности элемента, вызванной действием источника U , реализуемая неисправной схемой система оказывается неравной системе, реализуемой схемой S при отсутствии неисправностей. Под *длиной минимального проверяющего теста* для системы БФ $F(x_1, \dots, x_n)$, реализованной с помощью СФЭ в базисе B , относительно источника неисправностей U понимается величина $L_B(U, F)$, равная минимуму по всем реализующим F избыточным СФЭ S с n входами и одним выходом в базисе B минимуму по всем проверяющим тестам T для S относительно U величины $L(T)$. Под *вставкой m -входового ($m \in \mathbb{N}$) элемента E* в схему S понимается следующая операция: в S выбираются m не обязательно различных функциональных элементов (ФЭ) $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m-1)}, E^{(m)}$ так, что никакой элемент среди $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m-1)}$ не лежит ни на каком ориентированном пути от $E^{(m)}$ к выходу схемы (однако, некоторые из элементов $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m-1)}$ или даже все могут совпадать с элементом $E^{(m)}$), все дуги, исходящие из $E^{(m)}$, заменяются на дуги с теми же концами, исходящие из E (при этом, если элемент $E^{(m)}$ был выходным элементом схемы, то в результате вставки выходным оказывается элемент E , а элемент $E^{(m)}$ перестает быть выходным), и добавляются m дуг с концами в E , исходящих из $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m)}$. О такой вставке элемента E в дальнейшем будем говорить как о *вставке элемента E от элементов $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(m-1)}$ под элемент $E^{(m)}$* . Пусть U_1^i — источник одиночных вставок элементов (с произвольным числом входов), не сохраняющих нуль, в схему, а U_1^n — источник одиночных вставок элементов (с произвольным числом входов), не сохраняющих единицу, в схему. Пусть $B' = \{xy, x \oplus y, x \sim y\}$, $\hat{B} = \{x \vee y, x \oplus y, x \sim y\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. При любом натуральном $n \geq 1$ для произвольной булевой функции $f(\vec{x}^n)$, не равной константе и тождественной функции, для любого $B \in \{B', \hat{B}\}$ и любого $U \in \{U_1^i, U_1^n\}$ имеет место равенство $L_B(U, f) = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (проект «Оценки сложностных характеристик булевых функций и графов»), РФФИ (проект № 18-01-00800-а) и госбюджетной темы НИР № 5.4.19 факультета ВМК МГУ.

О ВЫРАЗИМОСТИ ОПЕРАЦИЙ ЛОГИКИ ТРОИЧНЫХ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

Куцак Н.Ю.¹, Подымов В.В.²

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра МК, e-mail: ¹⁾ nina_svetik@mail.ru, ²⁾ valdus@yandex.ru

В настоящее время при проектировании цифровой аппаратуры [1] все активнее используются методы формальной верификации. Суть этих методов состоит в переходе от цифрового устройства к его математической модели, формальной записи требований к поведению устройства и строгому анализу соответствия между полученными моделью и формулой. Ранее в [2] мы предложили формальный язык (*сигнальную* темпоральную логику), предназначенный для записи требований к диаграммам цифровых сигналов, возникающим на практике на ранних этапах проектирования цифровых схем. Сигнальная логика занимает в некотором смысле промежуточное положение между двумя широкими классами известных темпоральных логик [3]: логиками дискретного времени и логиками реального времени, в которых время описывается соответственно множеством целых чисел и множеством действительных чисел.

Известные темпоральные логики зачастую основываются на «классических» темпоральных операциях: pUq – «когда-нибудь станет верно q , а до тех пор будет верно p »; Fp – «когда-нибудь станет верно p »; Gp – «всегда будет верно p »; U , F , G – аналоги операций U , F и G , в которых будущее время заменено на прошедшее. В сигнальную логику в [2] включены операция U и несколько «неклассических» операций, предназначенных для естественной записи свойств диаграмм сигналов и не имеющие известных смысловых аналогов: pCq – « p верно в каждый момент текущего такта q », pXq – « p верно в момент следующего переднего фронта q », Rp – « p верно, если зеркально отразить диаграмму относительно текущего момента времени».

Основная цель работы — приблизить устройство языка сигнальной логики к устройству языков известных темпоральных логик при помощи добавления в него недостающих «классических» операций и устранения «неклассических» с сохранением выразительных возможностей языка.

В исходный язык сигнальной логики включены темпоральные операции U , C , X и R . В работе: (а) строго определяется семантика остальных «классических» операций и показывается, как эти операции выражаются через U и R ; (б) показывается, как операции C и X выражаются через U и U ; (в) предлагается способ устранения операции R из произвольной формулы, построенной над темпоральными операциями R , U и U . Из этого следует основной результат: языки сигнальных логик с наборами темпоральных операций $\{U, C, X, R\}$, $\{U, F, G, U, F, G\}$ и $\{U, U\}$ одинаково выразительны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00854).

Литература

1. D. Harris, S. Harris. Digital Design and Computer Architecture – Elsevier – 2nd Edition – 2013.
2. Куцак Н.Ю., Подымов В.В. Формальная верификация диаграмм троичных цифровых сигналов // Моделирование и анализ информационных систем (2019) **26**, №3, с.332-350.
3. Baier C., Katoen J.-P. Principles of model checking – The MIT Press – 2008.

БИСИМУЛЯЦИОННАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ ПЕРЕХОДОВ С РЕАЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Попков Г.А.¹, Подымов В.В.²

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра МК, e-mail: 1) gpopkow@yandex.ru, 2) valdus@yandex.ru*

Особенностью систем реального времени (СРВ) является зависимость их поведения не только от порядка изменения состояний, но и от времени, за которое происходит изменение этих состояний. Для формальной верификации (строгой проверки правильности поведения) СРВ широко используются [1,2] автоматные модели с реальным временем в комбинации с логикой ветвящегося реального времени (ТСТЛ), на языке которой формализуются требования к поведению этих моделей, и сама верификация задается как проверка выполнимости ТСТЛ-формулы на модели. Существует много схожих, но всё же существенно различающихся видов автоматных моделей с реальным временем, и естественным образом возникает задача проверки «одинаковости» (эквивалентности) поведения моделей разных видов.

Для формализации дискретных систем — выполняющихся пошагово, а не в реальном времени — широко применяется особый вид недетерминированных конечных автоматов, называемых моделями Крипке (МК). Для МК предложено много разных видов эквивалентности, и в том числе такие (бисимуляционные): две МК эквивалентны, если любой шаг выполнения одной из моделей может быть воспроизведен в другой модели. Известны результаты, отождествляющие эквивалентность МК в некотором бисимуляционном смысле с равновыполнимостью произвольных формул одной из темпоральных логик [1]. При этом для СРВ не известны ни автоматная модель настолько же универсальная, как модель Крипке, ни бисимуляционная эквивалентность, которую можно было бы отождествить с равновыполнимостью произвольных ТСТЛ-формул.

Целью работы является разработка упомянутых модели и эквивалентности для СРВ. В работе предлагается такая модель (*система переходов с часами*, СПЧ), совмещающая в себе черты некоторых более общих моделей, непригодных для верификации относительно ТСТЛ [3], и более специальных моделей для конкретных видов автоматов с реальным временем [1]. Для СПЧ в работе формулируется понятие бисимуляционной эквивалентности и доказывається, что на эквивалентных СПЧ равновыполнимы любые ТСТЛ-формулы. Есть основания полагать, что в обратную сторону последнее утверждение также верно, однако обоснование аналогичных фактов для дискретных бисимуляций, как правило, весьма нетривиально, и в связи с этим доказательство обратного утверждения оставлено на будущее.

Литература

1. Baier C., Katoen J.-P. Principles of Model Checking – The MIT Press – 2008.
2. Podymov V.V. A Flattening Algorithm for Hierarchical Timed Automata // Computational Mathematics and Modeling (2019) **30**, N.2, p.99-106.
3. Byg J., Jacobsen M., Jacobsen L., Jørgensen K.Y., Møller M.H., Srba J. TCTL-preserving translations from timed-arc Petri nets to networks of timed automata // Theoretical Computer Science (2014) **537**, p.3–28.

О КОНТАКТНОЙ СЛОЖНОСТИ СТАНДАРТНЫХ МУЛЬТИПЛЕКСОРНЫХ ФУНКЦИЙ

Хзмалян Д.Э.¹, Ложкин С.А.²

1) МГУ им. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МК, e-mail: david.khzmalian@gmail.com

2) МГУ им. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МК, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru

В данной работе рассматривается задача индивидуального синтеза (все необходимые определения могут быть найдены, например, в [1]) в классе контактных схем (КС) для стандартной мультиплексорной функции алгебры логики (ФАЛ) μ_n порядка n . Напомним, что функция μ_n от $n + 2^n$ булевых переменных (БП), первые n из которых называются “адресными” БП, а оставшиеся $2^n - n$ – “информационными” БП, причем значение функции μ_n равно значению той ее информационной переменной, номер которой поступил на ее адресные входы, то есть

$$\mu_n(x_1, x_2, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\vec{\sigma}=(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in B^n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} y_{v(\vec{\sigma})},$$

где $v(\vec{\sigma})$ это число, двоичная запись которого совпадает с $\vec{\sigma}$.

Сложностью $L(\Sigma)$ контактной схемы Σ будем, как обычно, называть количество контактов в ней. Цепь из контактов считается проводящей, если существует набор переменных, на котором все они проводят. Будем говорить, что контактная схема Σ от адресных БП x_1, \dots, x_n и информационных БП y_1, \dots, y_{2^n-1} *корректна*, если любая её проводящая цепь проходящая через вершину, инцидентную какому-либо контакту информационной переменной, проходит также через один из контактов информационных переменных инцидентных данной вершине.

Теорема 1. Пусть Σ – минимальная контактная схема, реализующая мультиплексорную ФАЛ μ_n , в которой имеется не более двух контактов каждой информационной переменной. Тогда число тех информационных БП, которые имеют в схеме Σ ровно два контакта, не превосходит $8 \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right)$.

Теорема 2. Для любой корректной контактной схемы Σ , реализующей мультиплексорную ФАЛ μ_n , $n \geq 2$, справедливо следующее неравенство:

$$L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{4n} - O\left(\frac{2^n}{n^2}\right).$$

Из теоремы 2 и верхней оценки сложности реализации ФАЛ μ_n в классе параллельно-последовательных КС из работы [2], которая достигается на корректной КС, следует, что для минимальной корректной контактной схемы Σ , реализующей ФАЛ μ_n , $n \geq 2$, выполняются неравенства:

$$2^{n+1} + \frac{2^n}{4n} - O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) \leq L(\Sigma) \leq 2^{n+1} + \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right).$$

Работа выполнена при поддержке гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики и гранта РФФИ №18-01-00800а.

Литература

1. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. Изд-во МГУ // Москва. – 1984.
2. Ложкин С.А., Власов Н.В., О сложности мультиплексорной функции в классе π -схем // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 151, № 2, Изд-во Казанского ун-та, Казань, – 2009, – 98–106 с.

ПРОВЕРКА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТРАНСДЬЮСЕРОВ НАД ПОЛУГРУППОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Жайлауова Ш.Р.

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра Математической кибернетики, e-mail: shomykiy@gmail.com*

Цель работы - исследование проблемы проверки эквивалентности автоматов-преобразователей (трансьюдсеров), работающих над полугруппой целочисленных векторов, и дальнейшее применение полученных результатов для решения проблемы проверки эквивалентности в одном классе многоленточных автоматов.

Трансьюдсеры представляют из себя размеченную систему переходов. Каждый переход помечен парой меток: входным символом и элементом полугруппы, над которой работает трансьюдсер. Особенность трансьюдсеров рассматриваемого класса состоит в том, что выполняя переход в заключительное состояние, трансьюдсер может выдать произвольный вектор, являющийся целочисленной линейной комбинацией некоторых заданных неотрицательных целочисленных векторов. Описывая вычисления, исходящие из каждого состояния трансьюдсера, линейными уравнениями, автору данной работы удалось свести проверку эквивалентности трансьюдсеров к проверке разрешимости системы уравнений. Система состоит из уравнений, описывающих состояния двух трансьюдсеров, эквивалентность которых необходимо проверить. Так как все вычисления трансьюдсеров начинаются в инициальном состоянии, в систему уравнений также будет входить соотношение, приравнивающее переменные инициальных состояний двух трансьюдсеров. Для проверки разрешимости такой системы был предложен полиномиальный по времени алгоритм, и доказана его корректность.

Разрешимость проблемы эквивалентности рассмотренных трансьюдсеров позволяет применить полученные результаты для решения проблемы проверки эквивалентности детерминированных многоленточных односторонних автоматов, имеющих унарный алфавит на всех лентах, кроме одной. Многоленточные автоматы, как и трансьюдсеры, можно представить в виде размеченной системы переходов. Однако в случае многоленточных автоматов, при переходе из одного состояния в другое, считывается символ на одной из входных лент. Для сведения проблемы проверки эквивалентности многоленточных автоматов к аналогичной проблеме для трансьюдсеров был разработан алгоритм трансляции многоленточного автомата в трансьюдсер, работающий над полугруппой неотрицательных векторов.

Таким образом, используя сведения о проблеме проверки эквивалентности многоленточных автоматов к проблеме проверки эквивалентности трансьюдсеров, удалось показать, что проблема эквивалентности детерминированных многоленточных односторонних автоматов, имеющих унарный алфавит на всех лентах, кроме одной, разрешима за время, полиномиальное относительно размеров автоматов.

Литература

1. Harju T., Karhumaki J. The equivalence problem of multitape finite automata //Theoretical Computer Science – 1991. – V.78. – I.2. – p.347-355
2. Zakharov V.A. Equivalence checking of prefix-free transducers and deterministic two-tape automata//Proceedings of the 13-th International Conference Language and Automata Theory and Applications – 2019. – p.146–158

Секция: «Асимптотические методы и дифференциальные уравнения с малым параметром»

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ
КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО
ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА**

Волков В.Т.¹, Нефедов Н.Н.²

1) МГУ, физический факультет, кафедра математики; e-mail: volkovvt@mail.ru

2) МГУ, физический факультет, кафедра математики; e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Асимптотический анализ применен при решении некоторого класса обратных задач для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения реакция-диффузия-адвекция с периодическими коэффициентами. В частности, рассмотрены задачи о восстановлении функции источника и граничных условий по известной информации о наблюдаемом решении прямой задачи на некотором временном интервале (периоде) для уравнения типа Бюргерса с различными типами адвективного и реактивного слагаемых.

Решения дифференциальных уравнений указанного типа могут содержать узкие пограничные и/или внутренние слои, а также движущиеся фронты. Асимптотический анализ позволяет доказать существование, исследовать устойчивость решения прямой задачи и получить асимптотическое приближение решения. Кроме того, асимптотический подход дает возможность свести исходную нелинейную сингулярно возмущенную задачу к набору более простых задач, получив достаточно точное качественное и количественное описание решения, а также установить более простые связи между входными данными и параметрами обратной задачи (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и т.п.), которые необходимо определить.

Обратная задача поставлена в рамках теоремы существования решения прямой задачи и заключается в определении неизвестного коэффициента реакции при котором фронт будет двигаться по заданному временному закону, либо этот коэффициент требуется определить по наблюдаемой траектории движения фронта. Сформулировано понятие асимптотического решения обратной задачи и показано, что для рассматриваемого класса уравнений обратная задача определения функции источника сводится к существенно более простой – линейному алгебраическому уравнению, связывающему наблюдаемое положение движущегося фронта с коэффициентами в уравнении и граничными условиями. Таким образом, если имеется возможность наблюдения траектории движения фронта на временном отрезке (периоде), то вопрос об определении неизвестного коэффициента уравнения сводится к набору простых алгебраических операций. Аналогичным образом может быть исследована обратная задача восстановления граничных режимов или задача граничного управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 18-11-00042).

Литература

1. Руденко О.В. Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубичной нелинейностями // Докл. АН (2016) **471**, №1, с. 23-27.
2. Nefedov N.N. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of Burgers type equation with modular advection // Math. Model. Nat. Phenom. (2019) **4**, №4, p. 1-14.
3. Nefedov N.N., Rudenko O.V. On front motion in a Burgers-type equation with quadratic and modular nonlinearity and nonlinear amplification // Doklady Mathematics (2018) **97**, p. 99-103.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗОННЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

Бутузов В.Ф.¹, Симаков Р.Е.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,
e-mail: butuzov@phys.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,
email: simakov.re@physics.msu.ru

Рассматривается краевая задача для системы уравнений

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = F(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d^2 v}{dx^2} = f(u, v, x, \varepsilon), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

с краевыми условиями в точках $x = 0$ и $x = 1$, здесь $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $u(x, \varepsilon)$ и $v(x, \varepsilon)$ - искомые скалярные функции.

Особенность задачи состоит в том, что уравнение

$$F(u, v, x, 0) = 0 \quad (2)$$

имеет три непересекающихся корня $u = \varphi_i(v, x)$, $i = 1, 2, 3$, причём корень $u = \varphi_1(v, x)$ - двукратный, а два другие корня - однократные.

Установлены условия, при которых для достаточно малого ε задача имеет решение $u(x, \varepsilon)$, $v(x, \varepsilon)$, обладающее внутренним переходным слоем в окрестности некоторой точки x_0 интервала $(0; 1)$. В этой окрестности функция $u(x, \varepsilon)$ быстро изменяется от значений, близких к корню $u = \varphi_1(v, x)$, до значений, близких к корню $u = \varphi_2(v, x)$. В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ в точке $x = x_0$ образуется «ступенька». Такое решение называется *контрастной структурой типа ступеньки* (КСТС).

Построена асимптотика КСТС по малому параметру ε . В силу двукратности корня $u = \varphi_1(v, x)$ и сама асимптотика, и алгоритм её построения качественно отличаются от известной асимптотики в случае, когда все корни $u = \varphi_i(v, x)$ являются однократными [1]. Главная особенность асимптотики КСТС в данной задаче состоит в том, что переходный слой оказывается шестизонным с различным характером быстрого изменения решения в разных зонах.

Обоснование асимптотики проводится на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств, применение которого в данной задаче также имеет специфические особенности.

Литература

1. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущённой системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журнал вычисл. математики и матем. Физики (2012) **52**, №11, с.1983-2003.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЕМЕЙСТВ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Даник Ю.Э.¹, Дмитриев М.Г.²

1) Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Институт системного анализа РАН (ФИЦ ИУ РАН), e-mail: yuliadanik@gmail.com

2) ФИЦ ИУ РАН, e-mail: mdmitriev@mail.ru

Рассматривается задача стабилизации для сингулярно возмущенных линейных и нелинейных систем с квадратичным критерием качества

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1(x)x + A_2(x)y + B_1(x)u, \quad x(0) = x^0, \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= A_3(x)x + A_4(x)y + B_2(x)u, \quad y(0) = y^0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n, y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z \in Z \subset \mathbb{R}^n, \quad n_1 + n_2 = n, u \in \mathbb{R}^r, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (z^T Q(x, \varepsilon) z + u^T R u) dt \rightarrow \min_u, \quad Q(x, \varepsilon) > 0, \quad R > 0. \quad (2)$$

Для построения синтеза управлений используется подход SDRE, заключающийся в формальном применении алгоритма Калмана с использованием решения соответствующего матричного алгебраического уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. На основе регулярного ряда метода пограничных функций строится матричная односточечная Паде аппроксимация (ПА). Приводятся численные расчеты, демонстрирующие, что формальный регулятор Калмана, построенный на основе ПА, является стабилизирующим. Использование ПА регуляторов в ряде случаев позволяет повысить точность по сравнению традиционными регуляторами на основе асимптотики.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений //Высш. шк – 1990.
2. Kokotovic P.V., O'Malley Jr R.E., Sannuti P. Singular perturbations and order reduction in control theory—an overview //Automatica (1976) **12**, №2, p.123–132.
3. Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations and some optimal control problems //IFAC Proceedings Volumes (1978) **11**, p.963–966.
4. Kokotovic P.V., Khalil H.K. Singular perturbations in systems and control //IEEE press – 1986.
5. Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems // Journal of Soviet Mathematics (1986) **34**, №3, p.1579–1629.
6. Dmitriev M.G., Makarov D.A. The stabilizing composite control in a weakly nonlinear singularly perturbed control system //2017 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC) (2017), p.589–594.
7. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems //Automation and Remote Control (2006) **67**, p.1–43.
8. Danik Yu.E., Dmitriev M.G. Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Padé Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution //IFAC-PapersOnLine (2018) **51**, p. 815–820.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ С ВНУТРЕННИМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Тищенко Б.В.¹, Левашова Н.Т.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: bogdanmsu@yandex.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: natasha@wanaku.net

В работе исследуется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^4 u'' = f_1(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = f_2(u, v, x, \varepsilon) \quad x \in (0, 1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0.$$

Здесь ε – малый параметр, а правые части системы имеют вид

$$f_{1,2}(u, v, x, \varepsilon) = \begin{cases} f_{1,2}^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, 0 \leq x \leq x_0, \\ f_{1,2}^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, x_0 < x \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

то есть при всех допустимых значениях u и v претерпевают разрывы первого рода во внутренней точке x_0 отрезка $(0, 1)$.

Исследуется гладкое решение этой задачи, имеющее вид фронта, то есть область с большим градиентом в окрестности точки x_0 .

В работе сформулированы условия и доказаны существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость по Ляпунову указанного решения задачи как стационарного решения соответствующей параболической системы уравнений. Кроме того, построено асимптотическое приближение этого решения.

При доказательстве используются асимптотический метод дифференциальных неравенств [1, 2] и метод монотонных итераций [3].

Новизна настоящей работы по сравнению с опубликованными ранее, также заключается в проведении обоснования существования гладкого решения систем обыкновенных дифференциальных и параболических уравнений с правыми частями вида (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 19-01-00327).

Литература

1. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. урн. (1995) **31**, №7, с. 1077–1085.
2. Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (2012) **52**, №11, с. 1983–2003.
3. Pao C.V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations // New York: Plenum Press – 1992.

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ РЕШЕНИЯ С ВНУТРЕННИМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ С РАЗЛИЧНЫМИ УСЛОВИЯМ КВАЗИМОНОТОННОСТИ

Левашова Н.Т.¹, Бышора С.В.², Мельникова А.А.³, Самсонов Д.С.⁴, Тищенко Б.В.⁵

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: 1)natasha@wanaku.net, 2)svetlana.since2014@yandex.ru, 3)melnikova@physics.msu.ru, 4)samsafiz@mail.ru, 5) bogdanmsu@yandex.ru

В работе обсуждаются особенности построения верхних и нижних решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T],$$
$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x). \quad (1)$$

Процесс построения верхних и нижних решений является ключевым моментом при доказательстве существовании решения вида фронта у таких систем методом дифференциальных неравенств. В работе [1] обосновано применение этого метода в случае 4 типов неравенств на производные функций в правых частях системы, которые должны выполняться при всех $x \in (0, 1)$, и всех допустимых значениях u и v , называемых также условиями квазимонотонности:

$$1) f_v(u, v, x, \varepsilon) < 0, \quad g_u(u, v, x, \varepsilon) < 0, \quad 2) f_v(u, v, x, \varepsilon) > 0, \quad g_u(u, v, x, \varepsilon) > 0,$$
$$3) f_v(u, v, x, \varepsilon) < 0, \quad g_u(u, v, x, \varepsilon) > 0, \quad 4) f_v(u, v, x, \varepsilon) > 0, \quad g_u(u, v, x, \varepsilon) < 0.$$

В настоящей работе исследуется решение вида фронта для систем (1). Верхнее и нижнее решения в таком случае могут быть построены на основании асимптотического метода дифференциальных неравенств [2] как модификации асимптотических приближений решений [3].

Авторами предложен алгоритм построения верхних и нижних решений, в случае каждого из условий квазимонотонности и получены дополнительные по сравнению опубликованными ранее в [3] достаточные условия существования решений систем вида (1) с условиями квазимонотонности 3) и 4).

Стоит отметить, что полученные условия существования являются также и достаточными условиями устойчивости стационарных систем, соответствующих (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№18-01-00424).

Литература

1. Pao C.V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations* // New York: Plenum Press – 1992.
2. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения (1995) **31**, №7, с. 1077–1085.
3. Левашова Н. Т., Мельникова А. А. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений // Дифф. ур. (2015) **51**, № 3, с. 339-358.

НЕУСТОЙЧИВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ 3 РОДА

Нефедов Н.Н.¹, Никулин Е.И.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,
e-mail: nefedov@phys.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики,
e-mail: nikulin@physics.msu.ru

Рассматривается уравнение реакция-диффузия с сингулярно возмущенным краевым условием третьего рода:

$$N_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, t, \varepsilon) = 0,$$

$$(x, t) \in D_t := \{(x, t) \in R^3: x \in D, t \in R\},$$

$$B_\Gamma(u) := -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(x, t, \varepsilon) + b(x)u(x, t, \varepsilon) = u_\Gamma(x, t), \quad x \in \Gamma, t \in R,$$

$$u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, t \in R,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, производная $\frac{\partial}{\partial n}$ берется по внутренней нормали к гладкой границе Γ заданной двумерной односвязной области D , а $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Будем предполагать выполненными следующие условия: **(A1)** Пусть $f(u, x, t, \varepsilon), b(x) \geq 0, u_\Gamma(x, t)$ - достаточно гладкие T -периодические по t функции в рассматриваемой области определения. **(A2)** Пусть вырожденное уравнение $f(u, x, t, 0) = 0$ имеет T -периодическое по t решение $u = \varphi(x, t)$ причем выполнено неравенство $f_u(\varphi, x, t, 0) > 0, x \in \bar{D}, t \in R$. **(A3)** Пусть при любых фиксированных $(\theta, t) \in [0, \Theta) \times R$ задача (5) имеет монотонное по τ решение $\Pi_0(\tau, \theta, t)$, непрерывное по совокупности параметров (θ, t) и удовлетворяющее неравенствам

$$\left. \frac{dz}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{f(\varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)}{z(0, \theta, t)} > b(0, \theta) (< b(0, \theta)), \Pi_0(0, \theta, t) > 0 (< 0).$$

Проведено исследование устойчивости периодических по времени решений пограничного типа для поставленной задачи. Построено асимптотическое приближение по малому параметру таких решений. Получены условия, при которых такие решения неустойчивы. Для доказательства использовались результаты, основанные на применении асимптотического метода дифференциальных неравенств и теоремы Крейна-Рутмана.

Литература

1. Omel'chenko O, Recke L., Butuzov V., Nefedov N. Time-periodic boundary layer solutions to singularly perturbed parabolic problems // Journal of Differential Equations. – 2017. – V. 262(9). – P. 4823-4862.
2. C. V. Pao Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations // Springer Science Business Media. 1993
3. Н. Н. Нефедов, Е. И. Никулин Существование и устойчивость периодических решений с пограничным слоем в двумерной задаче реакция—диффузия в случае сингулярно возмущенных граничных условий второго рода // ВМУ. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. № 2. – С. 15–20. – 2020

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ В СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С УЧЕТОМ КОНВЕКЦИИ

Рублев Г.Д.¹, Давыдова М.А.²

- 1) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: rublev.gd15@physics.msu.ru*
- 2) *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: m.davydova@physics.msu.ru*

В настоящей работе рассматривается одномерная стационарная сингулярно возмущенная задача с нелинейными граничными условиями, описывающая распространение тепла в нелинейной неоднородной среде с учётом конвекции в случае воздействия распределенного нелинейного стационарного источника с большой мощностью. С использованием асимптотических методов [1] и теорем сравнения [2] исследован вопрос о существовании решений с пограничными слоями. Изучены случаи граничных условий, соответствующих наличию нелинейных тепловых потоков на границе или конвективного теплообмена с постоянным или нелинейно зависящим от температуры коэффициентом теплообмена.

Исследован вопрос об асимптотической устойчивости решения с пограничными слоями в случае, когда одна из границ теплоизолирована, а на другой поддерживается постоянная температура.

Изучено одномерное тепловое поле линейного стока тепла, который имитирует боковой теплообмен на поверхности неоднородного нагретого прямолинейного стержня. Результаты исследования могут быть использованы для выбора оптимального режима разогрева прямолинейных нагревательных элементов в электрических печах сопротивления [3] и реакторах, посредством которых осуществляется регулирование температуры среды, например в металлургических печах.

Другим приложением модели является описание вертикальной стратификации температуры в пограничном слое несжимаемой атмосферы, а также исследование тепловых (контрастных) структур в прямых и обратных задачах нелинейного теплообмена.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10080.

Литература

1. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2010. № 268. С. 268.
2. Н. Brill. On the Solvability of Semilinear Elliptic Equations with Nonlinear Boundary Conditions. // *Mathematische Annalen*. 1976. Vol. 222, Issue 1, pp 37-48.
3. С.В. Дигонский, Вит. В. Тен. Новый высокоплотный жаростойкий материал на основе карбида кремния и кремния // *Международный научный журнал "Альтернативная энергетика и экология"*. 2010 №7 (87) С. 23

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Богданов А.Н.

НИИ механики МГУ, bogdanov@imec.msu.ru

Методы теории сингулярных возмущений имеют важные приложения в механике жидкости и газа. При формальном упрощении моделирующего рассматриваемый процесс уравнений может быть утрачено описание моделью некоторых существенных в изучаемом явлении процессов (нелинейность, нестационарность, пространственная неоднородность, сжимаемость, завихренность, конвекция и т.д.).

Интересным примером сингулярных возмущений служат релаксационные колебания – периодические изменения параметров среды (процесса), то медленные, то очень быстрые, близкие к скачкообразным. Математическим аппаратом для изучения таких процессов служат системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при некоторых производных. В простейшем случае это одно обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной [1]. К уравнению такого рода сводится система уравнений нестационарного одномерного течения газа в канале при учете вязкости и теплопроводности, позволяющем ввести ударные волны не как разрывы, а как очень быстрые, но непрерывные изменения параметров течения [2].

Задачи теории сингулярных возмущений возникают при исследовании нестационарных трансзвуковых течений. Проблема заключается в том, что получающееся в результате применения трансзвуковых асимптотических разложений к полным уравнениям для потенциала течения уравнение Линя-Рейсснера-Цяня [3] – основное уравнение, описывающее нестационарное трансзвуковое течение, – является вырожденным гиперболическим уравнением (уравнение не содержит второй производной по времени, но имеет смешанную производную по времени и одной из пространственных координат). Исследования показали [4], что сохранение в уравнении Линя-Рейсснера-Цяня (при его выводе из полного уравнения потенциала) слагаемого со второй производной по времени (с коэффициентом, малым в трансзвуковом приближении) снимает многие проблемы из вышеперечисленных. Получающееся уравнение описывает возмущения любой частоты, распространяющиеся во всех направлениях, задача Коши для него корректна, можно построить конус зависимости решения от начальных данных, получить интеграл энергии и оценки решения для начальных и краевых задач.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ (тема АААА-А19-119012990113-1) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00793).

Литература

1. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
2. Богданов А.Н. Моделирование вынужденных релаксационных колебаний газа в канале переменного сечения// *Мат. моделирование*. 1994, Т. 6, № 1. С. 69-85.
3. Cole J.D., Cook L.P. *Transonic aerodynamics*. Amsterdam, etc.: North-Holland, 1986 (Имеется перевод: Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989.)
4. Богданов А.Н., Дисперсов В.Н., Жук В.И. Неклассические трансзвуковые пограничные слои. К преодолению некоторых тупиковых ситуаций в аэродинамике больших скоростей// *ЖВММФ* (2018) **58**, №2, с. 270-280.

Секция: «Обратные задачи управления»

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Никольский М.С.

*МИАН РАН; МГУ, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления
e-mail : mni@mi-ras.ru*

В теории оптимального управления (см., например, [1-3]) важным объектом изучения является множество достижимости управляемого объекта. В линейном случае (см. [1-3]), при отсутствии фазовых ограничений, для вычисления этого множества эффективным является аппарат опорных функций (см. [2]). При наличии фазовых ограничений даже в линейном случае вычисление множеств достижимости становится существенно сложнее.

В докладе излагается один метод приближенного вычисления множеств достижимости для линейных управляемых объектов при наличии выпуклого фазового ограничения и выпуклости компакта P , ограничивающего допустимые управления. Этот метод основан на разбиении отрезка $[0, T]$, на котором происходит движение управляемого объекта, на мелкие части и использовании известной в линейной теории управления формулы Коши. Доказана сходимость метода к искомому множеству достижимости в смысле метрики Хаусдорфа при измельчении разбиений. При некоторых добавочных требованиях получена оценка скорости сходимости.

Отметим, что в работе при получении оценки скорости сходимости метода были использованы некоторые конструкции из Главы 10, параграфа 3 [3].

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Наука – 1976.
2. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория // М.: Высшая школа – 2001.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации // М.: Факториал пресс – 2002.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ САНКЦИЙ И КОНТРСАНКЦИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ БЕЗ ПОБОЧНЫХ ПЛАТЕЖЕЙ

Жуковский В.И.¹, Жуковская Л.В.², Кудрявцев К.Н.³

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

2) Центральный экономико-математический институт РАН, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru

3) Южно-Уральский государственный университет, кафедра вычислительной математики
и высокопроизводительных вычислений, e-mail: kudrkn@gmail.com

В докладе рассматривается дифференциальная игра трех лиц

$$\Gamma = \left\langle \{N = \{1, 2, 3\}\}, \Sigma, \{\mathfrak{A}_i\}_{i \in N}, \{J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0)\}_{i \in N} \right\rangle,$$

где

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + u_2 + u_3, \quad x(t_0) = x_0, \quad x, u_i \in \mathbf{R}^n,$$

$$\mathcal{G} = \text{const} > t_0 \geq 0, \quad A(\cdot) \in C^{n \times n} [0, \mathcal{G}],$$

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t, x) = P_i(t)x, P_i(\cdot) \in C^{n \times n} [0, \mathcal{G}]\} \quad (i \in N),$$

$$J_i(U_1, U_2, U_3, t_0, x_0) = x'(\mathcal{G})C_i x(\mathcal{G}) + \int_{t_0}^{\mathcal{G}} \sum_{j=1}^3 u_j' [t] D_{ij} u_j [t] dt \quad (i \in N).$$

Для паретовского равновесия санкций и контрсанкций [1,2] с коалиционной структурой $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ получены коэффициентные условия индивидуальной устойчивости такой коалиции.

Далее $D > 0$ ($D < 0$) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определенно положительно (отрицательно).

Теорема. Если в дифференциальной игре Γ

- 1) $n \times n$ -матрицы

$$D_{ii} > 0, \quad D_{ij} < 0, \quad C_i < 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; j \neq i)$$

постоянные симметричные;

- 2) выполнено неравенство

$$[\Lambda_{11} \Lambda_{22} < \Lambda_{12} \Lambda_{21}],$$

где $\Lambda_{ii} (-\Lambda_{ij})$ наибольший корень характеристического уравнения $\det [D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$

(соответственно $\det [D_{ij} - \Lambda E_n] = 0$) ($i, j = 1, 2, 3; j \neq i$),

то коалиционная структура $\mathfrak{K} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ индивидуально устойчива.

Литература

1. Жуковский В.И., Житенева Ю.Н., Бельских Ю.А. Паретовское равновесие угроз и контругроз в одной дифференциальной игре трех лиц // Математическая теория игр и ее приложения (2019) **11**, № 1, с. 39–72.
2. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры // М.: Юрайт – 2017

БЛОЧНЫЙ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ЯКОБИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Груздев А.П.¹, Мельников Н.Б.²

1) *Научно-Технический центр ИВМ, e-mail: gruzdev@cs.msu.ru*

2) *МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального Управления, e-mail: melnikov@cs.msu.ru*

Динамическая модель общего экономического равновесия описывается системой нелинейных уравнений в рамках теории Эрроу–Дебре. Число неизвестных в системе может достигать сотен тысяч и миллионов переменных. Для сокращения времени счета используются технологии параллельных вычислений. Альтернативным подходом является предобуславливание матрицы линеаризованной системы уравнений на каждой итерации решения нелинейной системы.

В работах [1,2] используется блочный предобуславливатель Якоби для метода Ньютона–Крылова, где блоки якобиана системы соответствуют переменным в фиксированный момент времени. Однако методы ньютоновского типа могут оказаться неприменимы для моделей, которые рассматривают большое число регионов и длинный горизонт времени.

Мы используем обобщение метода Гаусса–Зейделя, в котором подсистема относительно внутривременных переменных модели решается методом крыловского типа GMRES [3]. Нами реализован блочный предобуславливатель Якоби по регионам для ускорения метода GMRES [4]. Проведено сравнение двух способов применения предобуславливателя. Первый способ требует хранения в памяти полного якобиана, второй требует только реализации функции умножения якобиана на вектор.

Второй подход оказался эффективнее, поскольку требует меньшего числа вызовов функции и дает большее ускорение вычислений. В результате использование предобуславливателя дало ускорение в 1.6 раз и уменьшило число вызовов функции на порядок. Блочный предобуславливатель Якоби позволяет не только уменьшить число итераций при решении линеаризованной системы, но и улучшает сходимость метода. Для предобусловленной системы число обусловленности оказывается на пять порядков меньше по сравнению с исходной системой.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования высокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. Gilli M., Pauletto G.: Krylov methods for solving models with forward-looking variables //J. Econ. Dyn. Control – 1998 – V. 22
2. Pauletto G., Gilli M. Parallel Krylov methods for econometric model //Computational Economics – 2000 – V.16
3. Melnikov N.B., Gruzdev A.P., Dalton M.G., Weitzel M., O’Neill B.C. Parallel extended path method for solving perfect foresight models //Computational Economics – 2020
4. Gruzdev A.P., Melnikov N.B. Block Jacobi preconditioning for solving dynamic general equilibrium models //Eds: Tarasyev A. et al., “Stability, Control, Differential Games”, Chap. 12, Springer, Berlin, 2020

ОБ ОСОБЫХ РЕЖИМАХ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЕМ В ЭКОНОМИКЕ

Киселёв Ю.Н.¹, Аввакумов С.Н.², Орлов М.В.³, Орлов С.М.⁴

1) *ВМК МГУ, Москва, kiselev@cs.msu.su*

2) *ВМК МГУ, Москва, asn@cs.msu.su*

3) *ВМК МГУ, Москва, orlov@cs.msu.su*

4) *ВМК МГУ, Москва, sergey.orlov@cs.msu.su*

В докладе содержится обзор результатов, полученных авторами при исследовании нелинейных задач оптимального управления с функционалом интегрального типа с дисконтирующим множителем. Исследуемые модели допускают экономическую интерпретацию: экономического роста, распределения ресурсов и пр. Во всех моделях используется классическая многосекторная производственная функция Кобба-Дугласа. Фазовые переменные с учётом коэффициентов амортизации характеризуют уровни развития соответствующих секторов экономики. Функционал качества определяет интегральный объём потребления.

Аналитическое описание оптимального решения опирается на принцип максимума Понтрягина [1]. При достаточно большом горизонте планирования оптимальное решение выходит на магистраль – стационарный режим сбалансированного экономического роста, который в фазовом пространстве можно представить в виде луча, выходящего из начала координат. Оптимальная траектория на начальном участке времени стремится как можно быстрее выйти на магистраль, причём оптимальное управление может содержать различные особые участки, затем фазовая траектория, двигаясь по лучу, удаляется от начала координат, что соответствует фазе сбалансированного роста. Если горизонт планирования конечный, то фазовая траектория сходится с магистрали на конечном участке времени.

Оптимальность полученных решений обосновывается с помощью теоремы [2] о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкерлидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
2. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // – Материалы научного семинара «Математические модели в экономике и биологии». М.: МАКС Пресс. – 2003. С. 57–67.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ С НЕРАВНОМЕРНО ВОЗМУЩЁННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Артемяева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М.

*МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления,
e-mail: artemieva.luda@gmail.com, andrja@yandex.ru, mmpotapovrus@gmail.com*

Рассматривается задача квадратичной минимизации с ограничениями:

$$\|Au - f\|_F^2 \rightarrow \min, \quad u \in U = \{u \in U_0 \subseteq H \mid Bu = g\}, \quad (1)$$

где $A : H \rightarrow F$, $B : H \rightarrow G$ – линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовых пространствах H, F, G , множество U_0 выпукло и замкнуто, оператор B имеет замкнутый в G образ, а $f \in F$, $g \in G$ – заданные элементы. Целью работы является численный поиск решения u_* задачи (1), имеющего минимальную норму.

Предполагается, что вместо точных входных данных A, B, f и g известны последовательности приближённых данных $A_n \in L(H \rightarrow F)$, $B_n \in L(G \rightarrow F)$, $f_n \in F$, $g_n \in G$, а информация об уровнях погрешностей h_n^+ , h_n^- в операторах доступна в следующем виде, отличающемся от классического:

$$\|A_n u - Au\|_F \leq h_n^- \|u\|_{H^-}, \quad \forall u \in H^-, \quad \|A_n u - Au\|_{F^+} \leq h_n^+ \|u\|_H, \quad \forall u \in H,$$

$$\|B_n u - Bu\|_G \leq h_n^- \|u\|_{H^-}, \quad \forall u \in H^-, \quad \|B_n u - Bu\|_{G^+} \leq h_n^+ \|u\|_H, \quad \forall u \in H,$$

где H^- , F^+ , G^+ – вспомогательные гильбертовы пространства, связанные с исходными пространствами непрерывными и всюду плотными вложениями: $H^- \subset H$, $F \subset F^+$, $G \subset G^+$. Кроме того, предполагается наличие следующих оценок с известными σ_n , σ_n^+ :

$$\|f_n - f\|_F \leq \sigma_n, \quad \|f_n - f\|_{F^+} \leq \sigma_n^+, \quad \|g_n - g\|_G \leq \sigma_n, \quad \|g_n - g\|_{G^+} \leq \sigma_n^+.$$

От исходной постановки осуществляется переход к задаче поиска седловой точки функции Лагранжа $L(u, \lambda) = \|Au - f\|_F^2 + \langle \lambda, Bu - g \rangle_G$ на множестве $(u, \lambda) \in U_0 \times G$.

Для устойчивого численного решения задачи поиска седловой точки предлагается двухэтапная модификация регуляризованного экстраградиентного метода [1], на каждом шаге которого сначала, как и в [2], ищется приближение μ_n к оптимальному значению функционала (1) при выборе параметра регуляризации, согласованном с уровнями погрешностей h_n^- и σ_n , а затем, с учётом найденного μ_n , ищется следующее приближение к u_* , использующее другое значение параметра регуляризации, согласованное с погрешностями h_n^+ и σ_n^+ .

В работе доказана сильная сходимость предложенного метода к нормальному решению u_* исходной задачи.

Исследование выполнено за счет средств гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (МК 3539.2019.1)

Литература

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011
2. Дряженков А.А. Модифицированный обобщенный принцип невязки для задач минимизации с погрешностями известного уровня в ослабленных нормах // Вычисл. методы и программ.: Новые вычисл. технологии. 2015. Т. 16. С. 456-463.

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

Шатков С.А.¹

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, кафедрa Оптимального Управления, аспирант, e-mail: shatkovsa@gmail.com

Межпланетные перелёты требуют больших затрат топлива. Альтернативным решением является использование солнечных парусов. Одной из основных задач для аппаратов данного типа является минимизация времени перелёта. Ключевыми параметрами для паруса являются отношение площади Миделя к массе, способ управления его ориентацией, а также отражающая способность и масса материала. Благодаря тому, что срок активного существования космического аппарата такого типа ограничен в основном сроком износа материала солнечного паруса, с его помощью можно решать долгосрочные задачи, в том числе такие, как движение по траекториям, не являющимися Кеплеровыми. В докладе приведен обзор некоторых основных подходов к проектированию космических аппаратов с солнечными парусами, указываются их преимущества и недостатки, а также особенности конструкции, позволяющие осуществлять управляемый полёт в космическом пространстве [1]. Рассмотрена задача межпланетного перелёта космического аппарата с солнечным парусом на орбиту с заданным наклоном и радиусом. Используется модель идеального солнечного паруса:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{V}, \mathbf{V}' = -\frac{1}{R^3}\mathbf{R} + \beta \frac{1}{R^4}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n},$$

где (\mathbf{R}, \mathbf{V}) – положение и скорость аппарата в гелиоцентрической системе координат, R – расстояние до Солнца, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к плоскости паруса, β – общий коэффициент отражательной способности паруса. Задача состоит в поиске управляющей функции $\mathbf{n}(t)$, переводящей космический аппарат с гелиоцентрической орбиты Земли на круговую гелиоцентрическую орбиту с заданными радиусом и углом между плоскостью конечной орбиты и плоскости эклиптики за минимальное время [2]. За единицу расстояния принято среднее расстояние от Солнца до Земли, единица времени выбрана таким образом, что гравитационный параметр Солнца равен единице. Для исследования задачи минимизации затраченного времени применен Принцип Максимума Понтрягина. Сформулированы условия существования оптимальных траекторий, связывающие отражательную способность паруса, а также конечные радиус и наклонение орбиты. Приведён ряд задач управления для аппарата с солнечным парусом: перелёт с одной орбиты на другую, перелёт к другой планете Солнечной системы, а также перелет с возвращением к исходной планете. Приведены формулировки теорем относительно использования симметрии при нахождении оптимальных траекторий возвращения [3].

Литература

1. Fu B., Sperber E., Eke F. Solar Sail Technology – A State of the Art Review // Progress in Aerospace Sciences. Elsevier. – Oct.2016. – V.86. – p.1-19.
2. Gong S.-P., Gao Y.-F., Li J.-F. Solar sail time-optimal interplanetary transfer trajectory design // Research in Astronomy and Astrophysics. Science Press. IOP Publishing. – V.11. – No.8. – p.981-996.
3. Kim M., Hall C.D. Symmetries in the Optimal Control of Solar Sail Spacecraft // Springer Science. Business Media. – Aug.2005 – V.95. – p.273-293.

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ СОВПАДЕНИЕМ ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Григоренко Н.Л.¹, Горьков В.П.²,

1) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Оптимального управления,
e-mail: grigor@cs.msu.ru

2) МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория Обратных задач,
e-mail: v-p-gorkov@yandex.ru

Рассматривается дифференциальная игра двух объектов, динамика каждого из которых описывается уравнениями [1,2]:

$$\begin{aligned}r_i' &= v_i * \sin \theta_i, r_i(0), \\r * \varphi_i' &= v_i * \cos \theta_i, \varphi_i(0), \\v_i' &= a_i * \cos \gamma_i - \frac{\sin \theta_i}{r_i^2}, v_i(0), \\v_i * \theta_i' &= a_i * \sin \gamma_i + \left(\frac{v_i^2}{r_i} - \frac{1}{r_i^2} \right) * \cos \theta_i, \theta_i(0),\end{aligned}$$

где $i=1,2$. (r_i, φ_i) – полярные координаты движущейся точки для системы координат с центром в центре земли, θ_i – угол между вектором скорости и перпендикуляром к радиусу, a_i – тяга двигателя (модуль ускорения), v_i – модуль скорости, γ_i – угол между вектором ускорения и вектором скорости; $(a_1(t), \gamma_1(t))$ параметры управления первого объекта, $(a_2(t), \gamma_2(t))$ параметры управления второго объекта. Игра рассматривается с позиции первого игрока [3]. Цель первого игрока – выполнение соотношений $r_1(T) = r_2(T), \varphi_1(T) = \varphi_2(T)$ в некоторый конечный нефиксированный момент времени T . Управление игрока 1: $a_1(t), \gamma_1(t)$ в момент t использует информацию о векторе $\xi(t)=(v_i(t), \theta_i(t), \varphi_i(t), r_i(t), v_2'(t), \theta_2'(t), i=1,2)$. Решение задачи управления совпадением двух тел использует конструкции метода экстремального прицеливания [2] и метода структурного синтеза [4]. В докладе приведено описание начальных позиций и позиционного управления: $a_1(t, \xi(t)), \gamma_1(t, \xi(t))$ гарантирующее δ – совпадение движущихся объектов за конечное время.

Литература

1. Гродзовский Г.Л. Иванов Ю.Н. Токарев В.В. Механика космического полета, проблемы оптимизации, Наука, 1975
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.Наука,1968.
3. Понтрягин Л.С., “Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры”, *Тр. МИАН СССР*, **169** (1985), с. 119–158
4. Бойчук А.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М. Энергия, 1971.

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Лукиянова Л.Н.

МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория Обратных задач,
e-mail: lln@cs.msu.ru

В докладе рассматривается задача оптимального управления для модели динамики экономических показателей односекторной экономики [1],[2] с управляемым параметром – уровнем потребления на одного работающего $c(t)$:

$$\begin{aligned}k'(t) &= f(k(t)) - c(t) - \mu k(t), k(0) = k_0, k(T) = k_T, 0 \leq t \leq T, \\0 < c_1 &\leq c(t) \leq f(k(t)), f(k_0) > c_1, \\J &= \int_0^T e^{-\delta t} U(c(t)) dt \rightarrow \max_{c(t)},\end{aligned}\tag{1}$$

где $k(t)$ – фондовооруженность одного работающего, $f(k)$ – неоклассическая производственная функция рассматриваемого процесса. При ограничении $0 \leq c(t) \leq f(k(t))$ соответствующая задача управления рассмотрена в работе [3]. При ограничении $\mu f(k(t)) \leq c(t) \leq f(k(t))$, $\mu < 1$ соответствующая задача управления может быть сведена к случаю $c(t) \in [c_1, f(k(t))]$ заменой переменных. В настоящей работе приведено решение задачи управления для ограничения вида $c_1 \leq c(t) \leq f(k(t))$, в случае экспоненциального закона изменения трудовых ресурсов. Соответствующая модель описана в работах [2], [3]. Обоснование существования решения в задаче (1), проведено на основании теоремы существования из работы [6] для задач со смешанными ограничениями вида (1). Исследование задачи (1) проведено на основании необходимых условий оптимальности [4], [5] для задачи оптимального управления со смешанными ограничениями. Доказано выполнение условий регулярности смешанных ограничений для рассматриваемой задачи. Найдены характеристики особого режима при различных параметрах задачи и ряде функций полезности. Построена картина синтеза оптимальных траекторий для различных вариантов значений краевых условий. Найдены условия на параметры системы (1) при которых справедлива теорема о достаточных условиях оптимальности для задачи со смешанными ограничениями работы [6]. Показано, что при этих условиях экстремальные траектории являются оптимальными траекториями. Приведены результаты расчета управления для тестовых параметров модели.

Литература

1. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория, 1975.
2. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М.Наука, 1984.
3. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование, 2005.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Изд-во Наука, 1983.
5. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении, М. Мех-мат МГУ, 2004, 167 стр.
6. Seierstad A., Sydsaeter K. Optimal control theory with economic application, Elsevier Science Publishers B.V., 1987.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ НА ЦЕЛЕВОЕ МНОЖЕСТВО ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Камзолкин Д.В.¹

*1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра оптимального управления,
e-mail: kamzolkin@cs.msu.ru*

В докладе рассмотрен один класс конфликтно-управляемых систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя управляющими параметрами, называемыми управлениями первого и второго игроков. Рассматривается случай линейной по управляющим параметрам правой части. Решается задача наведения траектории системы на заданное целевое множество до заданного конечного момента времени при наличии неопределенности в выборе управления второго игрока. Первый игрок использует детерминированные позиционные стратегии для решения своей задачи, в то время как второй игрок использует стохастическое управление с заданной вероятностной мерой на ресурсном множестве управлений второго игрока, зависящей от текущей позиции.

Вводится функция цены в рассматриваемой дифференциальной игре как максимальная усредненная вероятность наведения траектории системы на терминальное множество, и задача сводится к вычислению значения этой функции.

Предложен численный метод приближенного вычисления значений искомой функции цены в узлах равномерной сетки в пространстве позиций управляемой системы, основанный на использовании теории стабильных множеств, «пиксельных методов» и метода динамического программирования. Исследуется вопрос достаточных условий сходимости метода и оценки погрешности аппроксимации.

Литература

1. Grigorenko N.L., Kamzolkin D.V., Luk'yanova L.N., Pivovarchuk D.G. A Class of Control Problems under Uncertainty. // - Computational Mathematics and Modeling, Consultants Bureau (United States) - том 27, № 3 – 2016.
2. Kamzolkin D.V., Grigorenko N.L., Pivovarchuk D.G. Optimization of Two-Step Investment in a Production Process.// - Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics - Vol. 262 – 2008.

ДВУДОМНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Головизнин В.М.¹, Афанасьев Н.А.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: gol@ibrae.ac.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: nafanas.cmc@gmail.com

Доклад посвящен описанию и исследованию нового типа разностных схем для решения уравнений в частных производных гиперболического типа. Вводятся два типа разностных схем: однодомные и двудомные. В однодомных схемах используются только переменные, заданные в узлах сетки, и соотношения между ними строятся исходя из характеристических свойств рассматриваемых уравнений. Все четырехточечные схемы этого типа были исследованы на простейшем одномерном уравнении переноса, были изучены их диссипативные и дисперсионные свойства, результаты были изданы в виде монографии [1].

Двудомные разностные схемы используют переменные как в узлах сетки (поточковые переменные), так и в ячейках (консервативные переменные). Разностные уравнения схем записываются исходя из законов сохранения, к которым могут быть добавлены характеристические, экстраполяционные, интерполяционные или другие консервативные соотношения. Некоторые двудомные схемы (например, схемы “Крест” и КАБАРЕ) могут быть сведены к однодомным путем исключения консервативных переменных.

Особое внимание в докладе уделяется некоторым двудомным схемам, не приводящимся к однодомным, рассматриваются их явные и неявные варианты. Схемы исследуются на простейшем одномерном уравнении переноса, строятся их диссипативные и дисперсионные соотношения, проводятся модельные расчеты.

Обратимые по времени двудомные схемы изучаются на предмет гибридного использования со схемой КАБАРЕ для расчетов трансзвуковых течений, возникающих в нелинейных уравнениях гиперболического типа. Приводятся результаты расчетов по гибридным схемам на тестах Торо для одномерной мелкой воды над ровным дном [2].

Литература

1. Головизнин В.М., Соловьев А.В. Дисперсионные и диссипативные характеристики разностных схем для уравнений в частных производных гиперболического типа //М.: МАКС Пресс — 2018.
2. Toro E.F. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows //New York: Wiley — 2001.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕРМОАКУСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БАЛАНСНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Головизнин В.М.¹, Афанасьев Н.А.², Сипатов А.М.³

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: gol@ibrae.ac.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: nafanas.cmc@gmail.com

3) АО “ОДК-Авиадвигатель”, e-mail: sipatov@avid.ru

В газовых турбинах с камерами сгорания класса DLE может возникать термоакустическая неустойчивость (вибрационное горение). Это может привести к самоподдерживающимся колебаниям большой амплитуды, которые сокращают эксплуатационный ресурс изделия и могут вызвать повреждение газовой турбины.

Целью данной работы является разработка нового подхода к определению области зависимости параметров течений в жаровых камерах реактивных двигателей, при которых возможно возникновение режимов вибрационного горения. В работе показано, что, решая квази-одномерные уравнения газовой динамики с помощью разностной схемы КАБАРЕ, можно получить режимы с развивающейся неустойчивостью с достаточно высокой точностью. Схема КАБАРЕ является обратимой по времени и не имеет схемной вязкости [1].

Предложенный метод был протестирован на задачах о течении газа в трубе с локальным подогревом (труба Рийке). Результаты показали высокую точность метода в определении скорости роста неустойчивых мод, сравнимую с точностью результатов, получаемых по моделям термоакустических цепей низкого порядка [2]. Традиционные алгоритмы решения уравнений газодинамики таким свойством не обладают.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. *Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных систем* // М.: Издательство Московского университета - 2013.
2. J. Li, D. Yang, C. Luzzato, A.S. Morgans. *Open Source Combustion Instability Low Order Simulator (OSCILOS) Technical Report* – 2017.

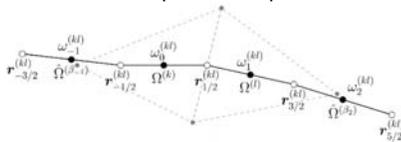
КВАЗИОДНОМЕРНАЯ КРИВОЛИНЕЙНАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ В РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Бутаков О.Б.¹, Мухин С.И.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: butakovoleg@gmail.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: vmmus@cs.msu.ru

Рассматривается семейство экономичных разностных схем с квазиодномерными криволинейными реконструкциями (CBR, *curve-based reconstruction schemes*) для решения задач вычислительной газовой динамики на неструктурированных сетках. В схемах этого семейства численные потоки реконструируются по одномерной схеме вдоль ломаной наименьшей кривизны, проведенной по элементам сетки в окрестности грани.



Для обеспечения точности предлагаемого алгоритма реконструкции на линейной функции используется следующая процедура. Оператор реконструкции записывается в виде:

$$R^{(kl)}(\{\tilde{u}\}) = \tilde{u}^{(l)} + |\mathbf{r}^{(kl)} - \mathbf{r}^{(l)}| \sum_i \beta_{i+1/2}^{(kl)} \frac{\tilde{u}_{i+1}^{(kl)} - \tilde{u}_i^{(kl)}}{|\mathbf{r}_{i+1}^{(kl)} - \mathbf{r}_i^{(kl)}|}, \quad (1)$$

где $\tilde{u}_i^{(kl)}$ – значения осреднений консервативных переменных по ячейкам локального шаблона грани, являющейся пересечением ячеек сетки с номерами k и l , а $\mathbf{r}_i^{(kl)}$, $\mathbf{r}^{(l)}$ и $\mathbf{r}^{(kl)}$ – координаты центров масс ячеек шаблона, ячейки l и грани kl соответственно. Коэффициенты $\beta_{i+1/2}^{(kl)}$ в формуле (1) определяются из условия точности реконструкции на линейной функции как ближайшие к заданному набору коэффициентов одномерной схемы $\gamma_{i+1/2}^{(kl)}$ на неравномерной сетке с шагами, соответствующими длинам звеньев ломаной.

Исследуется расстояние между этими наборами в зависимости от углов кривизны ломаной, а также погрешность, возникающая при расчете без использования коррекции.

В ходе численных расчетов будет показано, что CBR-схемы обладают точностью, сопоставимой со схемами с многомерной реконструкцией. Достоинством предложенного класса схем является низкая вычислительная стоимость и относительная простота реализации, что делает CBR-схемы перспективными с точки зрения практического применения и дальнейшего теоретического исследования.

Литература

1. Bakhvalov P.A., Kozubskaya T. EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes. //Computers & Fluids. 2017. V. 157.
2. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes. //International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2015. V. 81.

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА БЕЗ ГИПОТЕЗЫ О МОЛЕКУЛЯРНОМ ХАОСЕ

Богомолов С.В.¹, Захарова Т.В.^{2,3}

- 1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: bogomo@cs.msu.su
- 2) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра математической статистики,
e-mail: lsa@cs.msu.ru
- 3) Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра
«Информатика и управление» Российской академии наук

Вероятностная модель газа из твёрдых сфер рассматривается как с помощью теории случайных процессов, так и в терминах классической кинетической теории для плотностей функций распределения в фазовом пространстве, которые удовлетворяют уравнению Больцмана, представляющему собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для неслучайной функции распределения. Точнее, из системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) выводится сначала обобщённое, а затем - случайное и неслучайное уравнение Больцмана с учётом корреляций и флуктуаций. Главной особенностью исходной модели является случайный характер интенсивности скачкообразной меры и её зависимость от самого процесса.

Такой подход к газовой динамике как к системе частиц, положения и скорости которых являются случайными величинами, был заложен А.А. Арсеньевым [1]. Опираясь на эти идеи, была построена иерархия по величине числа Кнудсена стохастических газодинамических мезо- и макро- моделей [2], при аккуратном усреднении которых получается неслучайная система уравнений, уточняющая систему уравнений Навье – Стокса. Поэтому анализ исходной модели с позиций существующих неслучайных представлений привлёк наше внимание и привёл к уравнению Больцмана, дополненному корреляционными и флуктуационными членами, а значит, более богатому, чем классическое.

Кроме того, вычислительные эксперименты с нашими моделями, описывающими функционирование больших систем с помощью вычисления траекторий частиц с использованием аппарата СДУ, показали, что даже стационарные решения отличаются от нормальных распределений, что не соответствует свойствам традиционного интеграла столкновений Больцмана. Подобная ситуация возникает и при анализе экспериментальных данных. Выясняется, что вероятностные распределения, не подчиняются классическим законам, а имеют более сложную структуру, что связано с неоднородностью объектов, а также с возникающими в ходе эксперимента зависимостями между объектами [3].

Литература

1. Арсеньев А. А. О приближении решения уравнения Больцмана решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито // Журнал вычисл. матем. и матем. физики (1987) **27**, №3, с.400-410.
2. Богомолов С. В., Есикова Н. Б., Кувшинников А. Е. Микро-макро модели Фоккера–Планка–Колмогорова для газа из твёрдых сфер // Матем. моделирование (2016) **28**, №2, с. 65–85.
3. Гончаренко М. Б., Захарова Т. В. Особенности поведения конечных смесей нормальных распределений // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика (2018), № 3, с. 30–36.

ДВУМЕРНЫЙ РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ЧАСТИЦ ДЛЯ НЕВЯЗКОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Богомолов С.В.¹, Филиппова М.А.², Кувшинников А.Е.³

1)МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, ВМ, e-mail: bogomo@cs.msu.su

2)МГУ имени М.В. Ломоносова, ВМК, ВМ, e-mail: mariyaph17@gmail.com

3)ИИПМ им. М.В. Келдыша РАН, e-mail: kuvsh90@yandex.ru

Представлен алгоритм разрывного метода частиц [1] для двумерного невязкого уравнения Бюргерса с новым методом выделения взаимодействующих частиц по значению параметра прицеливания, что является главным отличием от одномерных задач. Высокая точность метода проявляется в его низкой вязкости: разрывное решение размазывается всего на 1 частицу на фронте. Этот факт подтверждается расчётами эволюции двумерной «ступеньки».

В основе метода лежит микромодель, описывающая движение частиц с заданными скоростями, дополненная специальным способом восстановления плотности распределения, которое требуется для решения нелинейных задач. Переход от «микро» к «макро» позволяет строить «сквозные» алгоритмы для микро–мезо–макро моделирования, что является необходимым инструментом для повышения точности и надёжности описания многомасштабных, мультифизических явлений [2,3].

Литература

1. Богомолов С.В., Кувшинников А.Е. Разрывный метод частиц на газодинамических примерах //Матем. моделирование (2019), **31**, №2, с.63–77.
2. Богомолов С.В., Есикова Н.Б., Кувшинников А.Е. Микро–макро модели Фоккера–Планка–Колмогорова для газа из твёрдых сфер //Матем. моделирование (2016) **28**, №2, с.65–85.
3. Богомолов С.В., Есикова Н.Б. Стохастическая магнитогидродинамическая иерархия в сильном внешнем магнитном поле //Матем. моделирование (2019) **31**, №8, с.120–142.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ЗАПИСАННАЯ В РАМКАХ MULTI-SCALE МЕТОДА, ДЛЯ ПРОЦЕССА ПОНИЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В СЛУЧАЕ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ, РЕАЛИЗОВАННЫХ НА КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Федотов М.В.¹, Харитонов Д.М.², Трофимов В.А.³

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, fedotov@cs.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, dmitrykharitonov@yandex.ru

3) Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай, trofimov@scut.edu.cn

Лазерное излучение в инфракрасной области имеет ряд эффективных применений, таких как спектроскопия, оптическая метрология и другие. Для получения излучения этого частотного диапазона используется процесс генерации разностной частоты $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$ в нелинейной среде, на входе в которую задается интенсивная волна на частоте ω_3 (высокочастотная волна, ВВ). Математическое описание этого процесса может быть найдено в [1], а последние результаты в данной области содержатся в [2].

Нами рассматривается специальный случай, когда частоты низкочастотной (НВ), промежуточной (ПВ) и ВВ связаны следующим образом: $\omega_3 = 3\omega_1, \omega_2 = 2\omega_1$. При этом имеет место условие фазового синхронизма между ВВ и НВ, а фазовая расстройка между НВ и ПВ $\Delta_{21}k$ большая. Данный процесс описывается системой нелинейных уравнений Шредингера. Используя метод multi-scale (многих масштабов), представляя комплексные амплитуды в виде ряда функций, соответствующий разложению по малому параметру (обратная величина к $\Delta_{21}k$), степени которого определяют пространственные масштабы по координате, вдоль которой распространяются волны, выведена новая система уравнений (модифицированная система), решение которой аппроксимирует решение исходной задачи со вторым порядком по малому параметру.

Записаны решения модифицированной системы в приближении длинных импульсов в зависимости от параметров задачи. Данные решения позволяют определить эффективность преобразования частоты, а также установить характеристики нелинейной среды (например, её длину). Показано, что существуют два режима преобразования частоты: высокоэффективный и низкоэффективный. При этом граница между двумя этими режимами зависит от входных интенсивностей волн. Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием, которое проведено в двух случаях: ПВ отсутствует на входе (при этом присутствует НВ); ПВ присутствует на входе (интенсивность НВ может быть равна нулю). В обоих случаях подтверждена высокая эффективность: более 70%.

Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн: Учебное пособие.-2-е изд., перераб. и доп. – 1990.
2. Petrov V. Frequency down-conversion of solid-state laser sources to the mid-infrared spectral range using non-oxide nonlinear crystals //Progress in Quantum Electronics. – 2015. – Т. 42. – С. 1-106.
3. Найфэ А. Н. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. – мир, 1984.

РОЛЬ ИНВАРИАНТОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ НЕПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

Логинова М.М.¹, Трофимов В.А.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов,
e-mail: mloginova@cs.msu.ru

2) Южно-Китайский университет технологий, SCUT, Guangzhou, China,
e-mail: trofimov@scut.edu.cn

Многие явления нелинейной оптики описываются системами нелинейных уравнений Шредингера. В частности, процесс генерации третьей оптической гармоники ($\omega_3 = 3\omega$) фемтосекундного импульса, распространяющегося в среде с кубичной нелинейностью, описывается системой уравнений:

$$R_j A_j + i\gamma F_j = \frac{\partial A_j}{\partial z} + \nu_j \frac{\partial A_j}{\partial t} + iD_{2j} \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} + ij\gamma A_j (\gamma_{j1} |A_1|^2 + \gamma_{j3} |A_3|^2) + i\gamma F_j = 0, \quad j = 1, 3,$$

$$F_1 = A_3 A_1^{*2} e^{-i\Delta k z}, \quad F_3 = A_1^3 e^{i\Delta k z}. \quad (1)$$

в финитной области по времени и пространству $0 < t < L_t$, $0 < z \leq L_z$.

Начальные условия имеют вид:

$$A_j(0, t) = A_{j0}(t), \quad A_j(z, 0) = A_j(z, L_t) = 0, \quad j = 0, 3. \quad (2)$$

Выше A_j обозначает безразмерную комплексную амплитуду, z – координата, вдоль которой распространяются импульсы, t – время, $\gamma_{11} = \gamma_{33} = 1$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = 2$.

Система уравнений (1) – (2) обладает следующими инвариантами:

$$I_1 = \int_0^{L_t} (|A_1|^2 + |A_3|^2) dt,$$

$$I_3 = \int_0^{L_t} \left[\sum_{j=1,3} \left\{ (4-j) \left(-D_{2j} \left| \frac{\partial A_j}{\partial t} \right|^2 + \nu_j \operatorname{Im} \left(A_j^* \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) + \frac{3}{2} \gamma |A_j|^4 \right) \right\} + 6\gamma |A_1|^2 |A_3|^2 + 2\gamma \operatorname{Re} (A_1^3 A_3^* e^{-i\Delta k z}) \right] dt,$$

где I_1 – инвариант энергии, I_3 – Гамильтониан.

Для рассматриваемой системы уравнений (и подобным ей) не удастся построить полностью консервативную разностную схему: один из инвариантов при этом сохраняется со вторым порядком, по другому инварианту схема консервативна. Поэтому вопрос о выборе инварианта, по которому разностная схема будет консервативна, является принципиальным при проведении компьютерного моделирования.

В настоящем докладе показано, что несохранение разностного аналога Гамильтониана значительно сильнее влияет на разностное решение, чем отсутствие консервативности схемы по инварианту энергии I_1 . Для иллюстрации данного вывода нами обсуждается связь инвариантов с интегральными характеристиками оптических импульсов.

Логинова М.М. выражает благодарность за финансовую поддержку Российскому Научному Фонду (грант №19-11-00113).

СВЯЗЬ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ЭВОЛЮЦИИ 3D ЛАЗЕРО-ИНДУЦИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ПОЛУПРОВОДНИКА, С ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЯМЫХ И ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Егоренков В.А.¹, Логинова М.М.¹, Трофимов В.А.²

*1) Московский центр фундаментальной и прикладной математики и МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных методов
e-mail: mloginova@cs.msu.ru*

*2) Южно-Китайский университет технологий, SCUT, Guangzhou, China,
e-mail: trofimov@scut.edu.cn*

В работе исследуются и сравниваются подходы к моделированию задачи воздействия фемтосекундного лазерного импульса на полупроводник в 3D постановке. Математическая модель процесса описывается системой безразмерных нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений. В нее входят уравнение относительно концентраций заряженных частиц в зоне проводимости полупроводника, уравнения Пуассона, записанного относительно потенциала светоиндуцированного электрического поля и уравнения, описывающего процесс распространения светового импульса через полупроводник. Последнее уравнение может быть записано относительно интенсивности падающего импульса или в виде уравнения Шрёдингера относительно комплексной амплитуды светового пучка. Нами рассматриваются обе постановки. Для уравнения Пуассона ставятся неоднородные граничные условия второго рода (полупроводник помещен во внешнее электрическое поле).

Компьютерное моделирование многомерных задач требует особого внимания к асимптотической устойчивости и экономичности применяемых численных методов. В связи с этим, мы уделяем особое внимание решению многомерной задачи Неймана для уравнения Пуассона, входящего в систему нестационарных дифференциальных уравнений. Для решения отдельной поставленной задачи Неймана на практике чаще всего используются прямые методы, например, такие как метод быстрого дискретного преобразования Фурье. Однако, в рассматриваемом случае, правая часть уравнения Пуассона зависит от значений функций, вычисляемых приближенно. Более того, следует учитывать влияние нелинейной обратной связи в оптически бистабильной системе и влияние внешнего электрического поля при постановке неоднородных граничных условий. Таким образом, вычислительная погрешность и ошибки округления накапливаются и могут существенно влиять на правую часть уравнения Пуассона. Это, в свою очередь, приводит к нарушению условия разрешимости задачи Неймана, связывающего граничные условия и правую часть уравнения Пуассона. Важно также отметить, что для рассматриваемой задачи Неймана условие ее разрешимости соответствует закону сохранения заряда. Следовательно, свойство консервативности разностной схемы, заключающееся в выполнении закона сохранения заряда, является критически важным, и чтобы избежать его нарушения нами применяется итерационный процесс. Эффективность подтверждается результатами компьютерного моделирования для различных значений и направлений внешнего электрического поля.

В.А. Егоренков и М.М. Логинова выражают благодарность Московскому центру фундаментальной и прикладной математики.

СХЕМА КАБАРЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ СЕТКАХ

Головизнин В.М.¹, Горбачев Д.Ю.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: gol@ibrae.ac.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра Вычислительных Методов,
e-mail: gorbachev-daniil@inbox.ru

Данный доклад посвящен обобщению схемы КАБАРЕ на тетраэдральные сетки. Метод КАБАРЕ был обобщен авторами на треугольные сетки в работе [1]. Данное обобщение сохраняет все преимущества схемы КАБАРЕ: временная обратимость, консервативность, высокая разрешающая способность и минимальность шаблона. В данном докладе предложенный способ обобщения в двумерном случае был применен для обобщения на трехмерный случай с тетраэдральными сетками.

Как и в КАБАРЕ для гексаэдральных сеток, будем использовать два набора переменных: консервативные, которые отнесем к центру масс расчетной ячейки и которые выражают законы сохранения, и потоковые, которые отнесем к граням расчетной ячейки. В методе КАБАРЕ для вычисления потоковых переменных на новом временном слое используется процедура экстраполяции локальных Римановых инвариантов со вторым порядком точности. Для обобщения на тетраэдральные сетки с сохранением второго порядка точности экстраполяционной процедуры будем использовать по три точки на гранях расчетных ячеек. Введение дополнительных точек на гранях позволяет использовать на тетраэдральных сетках основные алгоритмические шаги, которые характерны для метода КАБАРЕ на гексаэдральных сетках.

Схема КАБАРЕ на тетраэдральных сетках была верифицирована на основных тестах для простейшего уравнения. Показано, что в трехмерном случае сохраняются все преимущества схемы КАБАРЕ, присущие ей на четырехугольных и гексаэдральных сетках.

Литература

1. Gorbachev D.Y., Goloviznin V. M. The Balance-Characteristic Numerical Method on Triangle Grids // Journal of Physics: Conference Series (1392:012036) – 2019.
2. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных систем // Издательство Московского университета, Москва – 2013.

СРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ И НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ НА ЛОТКОВЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Головизнин В.М.¹, Майоров Павел А.², Майоров Петр А.³, Соловьев А.В.⁴

1) ИБРАЭ РАН, ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

2) ИБРАЭ РАН, ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов,
e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

3) ИБРАЭ РАН, ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов,
e-mail: maiorov.peter@gmail.com

4) ИБРАЭ РАН, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

В работе рассматриваются две модели течений жидкости. Первая - многослойная гидростатическая модель течений со свободной поверхностью [1]. Она представляет из себя совокупность однослойных моделей мелкой воды с непостоянной плотностью, взаимодействующих посредством сил реакции, приложенных к границам раздела. Для каждой из однослойных моделей записывается схема КАБАРЕ [2].

Вторая – негидростатическая модель уравнений динамики стратифицированной слабосжимаемой жидкости с положением поверхности, определяющимся уравнениями мелкой воды. В новом подходе решаются две системы: мелкая вода и уравнения слабосжимаемой жидкости. Начальными данными для мелкой воды берутся усредненные по вертикали плотности и горизонтальные скорости и высоты вертикальных столбов жидкости. Эта система считается независимо от уравнений слабосжимаемой жидкости. Вторая система на каждом шаге по времени получает данные изменения поверхности из мелкой воды это позволяет замкнуть систему и получить весь набор переменных на новом временном слое. Обе системы решаются с помощью балансно-характеристической схемы КАБАРЕ.

Сравнение этих моделей производилось на лабораторных экспериментах по изучению динамики стратифицированной жидкости [3]. Эксперименты проводились в акриловом баке длиной 3 м и шириной 0.15 м, заполненном водопроводной водой на глубину 0.2 м. В отделенную перегородкой область наливали два солевых раствора различной плотности, вынимали перегородку и наблюдали движение слоистого раствора в основной части резервуара. Сравнимые модели показывают хорошую согласованность с экспериментами в такой важной характеристике, как длина распространения фронта раствора в пресной воде. Стоит отметить, что представленная негидростатическая модель достаточно точно описывает вихревую структуру движения как на фронте распространения раствора, так и за ним.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 18-11-00163.

Литература

1. Новый численный алгоритм для уравнений многослойной мелкой воды на основе гиперболической декомпозиции и схемы КАБАРЕ / В. М. Головизнин, П. А. Майоров, П. А. Майоров, А. В. Соловьев //Морской гидрофизический журнал. 2019. Т. 35, № 6. С. 600–620.
2. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А., Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных компьютерных комплексов // Москва: Издательство Московского университета – 2013.
3. Gladstone C. et al. An experimental investigation of density-stratified inertial gravity currents //Sedimentology. – 2004. – Т. 51. – №. 4. – С. 767-789.

НЕЯВНАЯ ПО ОДНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ СХЕМА КАБАРЕ НА СЕТКАХ С БОЛЬШИМ АСПЕКТНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

Головизнин В.М.¹, Майоров Павел А.², Майоров Петр А.³, Соловьев А.В.⁴

1) ИБРАЭ РАН, ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов, e-mail: gol@ibrae.ac.ru

2) ИБРАЭ РАН, ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов,
e-mail: pavel.a.mayorov@gmail.com

3) ИБРАЭ РАН, ВМК МГУ Кафедра вычислительных методов,
e-mail: maiorov.peter@gmail.com

4) ИБРАЭ РАН, e-mail: solovjev@ibrae.ac.ru

В различных областях математической физики возникают задачи сильно отличающимися характерными масштабами по разным пространственным направлениям. Так, например, во многих задачах атмосферы и океанологии вертикальное направление значительно меньше горизонтальных. При разрешении данных задач по явным схемам, согласно условию Куранта — Фридрихса — Леви, шаг по времени будет ограничиваться направлением с меньшим пространственным шагом.

В настоящей работе формулируется неявная по одному направлению и явная по другим разностная схема на основе схемы КАБАРЕ [1] для системы уравнений Эйлера в приближении слабой сжимаемости. Неявность разрешается методом бегущего счета, сравнимым по количеству операций с явным шагом. Данный подход помогает увеличить шаг по времени, за счет снятия ограничения для устойчивости по неявному направлению.

Верификация данной схемы производилась на задачах распространения возмущения по плотности в форме гауссиана и одиночного вихря. Полученная схема показала свою робастность на сетках с аспектным отношением до 100.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А., Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных компьютерных комплексов // Москва: Издательство Московского университета – 2013.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА СЦЕНАРИЯ РАЗРЯДА В ТОКАМАКЕ С ЖЕЛЕЗНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

Андреев В.Ф.¹, Попов А.М.²

1) Московский Государственный Университет им М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: vfandreevl@gmail.com

2) Московский Государственный Университет им М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и кибернетики, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: professorpopov@gmail.com

В работе представлены две математические модели для расчета сценария разряда и программного режима в установке токамак с учетом нелинейного поведения железного сердечника. Первая модель включает в себя решение двумерных задач равновесия, а эволюция интегральных параметров плазмы описывается уравнениями Кизхгофа. В работе предложен и реализован эффективный численный алгоритм, позволяющий решить некорректную обратную задачу равновесия, когда по заданной геометрии и параметрам плазмы находятся удерживающие токи, обеспечивающие это равновесие.

Второй подход представляет собой редуцированную модель для описания временного развития разряда в токамаке с железным сердечником. В этой модели плазма рассматривается как жидкий тороидальный проводник, обладающий рядом интегральных характеристик, зависящих от времени и способный растягиваться по большому радиусу, а также сдвигаться вдоль оси симметрии. Модель включает в себя интегральное условие равновесия и устойчивости для тонкого плазменного шнура, а временная эволюция описывается уравнениями Кирхгова. Нелинейное поведение ферромагнетика во время разряда учитывается в индуктивностях, эффективностях и показателях поля, которые рассчитываются из решения двумерных магнитостатических задач.

Расчет сценария разряда и программного режима в токамаке сформулирован в виде обратной задачи – задачи оптимального управления. Предложена модель «квазиоптимального» управления, позволяющая учитывать реальные источники питания.

На примере установки Т-15 рассчитаны равновесия и сценарий разряда.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА В ТОКАМАКЕ НА ОСНОВЕ ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ

Зотов И.В.¹, Высоцкий Л.И.²

- 1) *Московский государственный университет им.М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: iv-zotov@cs.msu.ru*
- 2) *Московский государственный университет им.М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра вычислительных технологий и моделирования, e-mail: vysotskylev@yandex*

Работа посвящена решению обратной задачи определения профиля электрического тока внутри равновесной плазменной конфигурации в установке токамак по дополнительной информации, получаемой различными видами диагностики. Рассматриваются две постановки задачи. Одна - это модель МГД стационарного состояния плазмы с конечной проводимостью. Модель включает в себя уравнение МГД-равновесия, уравнения для магнитного и электрического полей, а также обобщенный закон Ома. Вторая модель - равновесие плазмы с идеальной проводимостью. В качестве диагностических данных используются данные электрических и магнитных измерений на границе вакуумной камеры. Помимо этих данных используются другие виды диагностики, основанные на других физических принципах - на зондировании плазмы с помощью пучка тяжелых частиц, а также на спектроскопической диагностике, позволяющих получать информацию о плотности и температуре плазмы. В обеих моделях постановка обратной задачи основана на интегро-дифференциальном подходе. Геометрия магнитных поверхностей определяется двумерным дифференциальным уравнением равновесия. Распределение тока находится из нелинейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода в координатах, связанных с решением. В этом случае удается построить эффективный быстродействующий устойчивый к ошибкам измерений алгоритм решения обратной задачи с использованием технологии Nvidia Cuda для графических процессоров (GPU). Рассматриваемая обратная задача является вторым этапом решения обратной задачи МГД-равновесия в токамаке. Первый этап связан с восстановлением границы плазмы по результатам электромагнитных измерений. Для этой задачи ранее был создан код RPB (Reconstruction of Plasma Boundary), а также его высокопроизводительная параллельная версия [1-3].

В работе представлен алгоритм решения нелинейной обратной задачи, в том числе его модификация для решения с использованием графических ускорителей в режиме, приближенном к режиму реального времени.

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-07-00391.

Литература

1. Zotov I.V., Vysotsky L.I. High-performance version of the RPB code based on graphic processors for determination of the plasma boundary in tokamaks — *Journal of Physics: Conference Series*, 1383 (2019), 012010.
2. Zotov I.V., Melnikov A.V., Sychugov D.Yu., Lukash V.E., Khayrutdinov R.R. Optimization of electromagnetic diagnostic system of the T-15 tokamak - *43rd EPS Conf. on Plasma Phys. and Contr. Fus. (Leuven, Belgium, 2016)* P2.035.
3. Зотов И.В. Оптимизация системы электромагнитной диагностики в установке токамак — *Computational nanotechnology*, 2018, № 1, с. 16-20..

РАЗРАБОТКА БИБЛИОТЕКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Загидуллин Р.Р.¹, Смирнов А.П.², Матвеев С.А.³, Рыкованов С.Г.⁴

1) МГУ, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail: zagidullinrshat@gmail.com

2) МГУ, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail: sap@cs.msu.ru

3) Сколковский институт науки и технологий, CDISE, email: s.matveev@skoltech.ru

4) Сколковский институт науки и технологий, CDISE, email: s.rykovanov@skoltech.ru

Целью работы является разработка кодов для решения задач физики, оптимизированных под архитектуру суперкомпьютера. Реализация программного пакета предполагается создание функций и классов, которые позволят оптимально распределять ресурсы суперкомпьютера для выполнения поставленной физической задачи, а также анализировать сетевую систему суперкомпьютера для минимизации суммарного проходимого пути при обмене подзадач сообщениями. Также используется функционал параллельной выгрузки данных, гибридные вычисления и интерактивная визуализация данных. Результаты работы получены на основе моделирования процессов пространственно-неоднородной коагуляции и физики плазмы.

Решение уравнения адвекции-коагуляции на параллельных машинах показало, что в отличие от традиционного способа распараллеливания задач, связанного с декомпозицией области решения задачи, оптимально делать декомпозицию по физическим компонентам уравнения. Коагуляционная часть решается быстрее на графических процессорах, так как при численном решении используется преобразование Фурье, с чем ГПУ справляется эффективнее [1].

В ходе моделирования процессов физики плазмы получен вывод о целесообразности неравномерного распределения подобластей для решения задач в зависимости от используемого железа. Например, с численным решением уравнения Максвелла ГПУ справляются быстрее. Поэтому был разработан функционал динамического перераспределения размеров подобластей. Также выявлено, что гибридные вычисления внутри одного узла имеют преимущество в скорости по сравнению с чистыми (только ЦПУ или только ГПУ) меж-узловыми вычислениями.

Для получения дальнейших результатов планируется расширить программу решения двумерных параллельных гибридных уравнений Максвелла до PIC решателя в трехмерном пространстве [2], а решатель переноса-коагуляции – до решателя адвекции-коагуляции с включением законов гидродинамики в трехмерном пространстве.

В программах используются следующие технологии и библиотеки: CUDA, MPI, CGAL, OpenGL, Eigen, MKL.

Литература

1. Steinbach P., Werner M. (2017) gearshift – The FFT Benchmark Suite for Heterogeneous Platforms. In: Kunkel J., Yokota R., Balaji P., Keyes D. (eds) High Performance Computing. ISC 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol 10266. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58667-0_11
2. T. D. Arber, K. Bennett, C. S. Brady, A. Lawrence-Douglas, M. G. Ramsay, N. J. Sircombe, P. Gillies, R. G. Evans, H. Schmitz, A. R. Bell and C. P. Ridgers (2015) Contemporary particle-in-cell approach to laser-plasma modelling. Plasma Physics and Controlled Fusion, 57(11).

ПОДБОР И НАСТРОЙКА АЛГОРИТМОВ НЕПРЕРЫВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ КОЛЛАБОРАТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Ершов Н.М.¹, Никитина О.П.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра АНИ, e-mail: erшов@cs.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра СКИ,
e-mail: nikitinaolga_msu@mail.ru

Актуальным и популярным подходом к решению многомерных задач непрерывной оптимизации является применение популяционных методов оптимизации [1], к которым относятся прежде всего эволюционные алгоритмы (генетические, метод дифференциальной эволюции), а также алгоритмы роевой оптимизации (метод роя частиц, алгоритм бактериального поиска и т.д.) [2]. В настоящее время существуют десятки различных типов популяционных алгоритмов оптимизации и сотни их различных вариаций. Кроме того, эффективность применения алгоритмов рассматриваемого класса к различным прикладным задачам оптимизации зависит (иногда критическим образом) от достаточно большого числа параметров этих алгоритмов (т.н. *метапараметров*), значения которых обычно приходится подбирать экспериментально. Перечисленные факты делают актуальной задачу подбора подходящих алгоритмов оптимизации, а также задачу настройки их метапараметров, с целью наиболее эффективного решения заданного класса задач. В настоящей работе предлагается подход к решению этих двух проблем, основанный на применении методов коллаборативной фильтрации [3, 4], используемых традиционно при построении рекомендательных систем [5]. Описывается прототип программной системы, построенный на базе наиболее популярных популяционных алгоритмов оптимизации и системы тестовых целевых функций для задач непрерывной оптимизации, традиционно используемых при тестировании различных алгоритмов их решения [6].

Литература

1. Полуян С.В., Ершов Н.М. Применение параллельных эволюционных алгоритмов оптимизации в задачах структурной биоинформатики// Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 4, с. 143-152.
2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации// М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
3. Melville P., Mooney R., Nagarajan R. Content-Boosted Collaborative Filtering for Improved Recommendations // University of Texas, USA: AAAI-02, Austin, TX, USA, 2002. P. 187-192.
4. Xiaoyuan Su, Taghi M. Khoshgoftaar, A Survey of Collaborative Filtering Techniques// Advances in Artificial Intelligence, vol. 2009, Article ID 421425, 19 pages, 2009.
5. Falk K. Practical Recommender Systems // Manning Publications, 2019.
6. Guohua Wu, Mallipeddi R., Suganthan P. N. Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2017 Competition on Constrained Real-Parameter Optimization, 2016.

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ДАННЫХ И МЕТОДОВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Бражников А.А., Ечкина Е.Ю., Майсурадзе А.И.

- 1) МГУ, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail: brazhnikov.alexey0@gmail.com
- 2) МГУ, факультет ВМК, кафедра АНИ, e-mail: ejane@cs.msu.ru
- 3) МГУ, факультет ВМК, кафедра ММП, e-mail: artchil@mail.ru

Понятие векторного поля является основополагающим в естественных науках. Они встречаются в любой пространственной задаче, в частности, в задачах симуляции некоторого численного эксперимента. Отсюда возникает необходимость работы с векторными полями, в том числе их визуализация.

Известно, что из-за ограниченности объёма памяти на компьютере, непрерывное векторное поле можно сохранить только с ограниченной точностью. Возникает понятие модели данных векторного поля, которое сохраняет только часть векторного поля, как правило, в виде хранения значений поля в некоторой сетке.

Моделей данных и методов визуализации векторных полей существует множество. А повсеместное применение достижений векторного анализа при решении прикладных задач вызывает необходимость в систематизации накопленных знаний. Поэтому в данной работе приведена систематизация известных методов визуализации и моделей данных векторных полей.

Литература

1. Nsonga B., Scheuermann G., Gumhold S., Ventosa-Molina J., Koschichow D., Frohlich J. Analysis of the near-wall flow in a turbine cascade by splat visualization //IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS – 2020. V.26
2. Oeltze S., Lehmann D.J., Kuhn A., Janiga G., Theisel H., Preim B. Blood flow clustering and applications in virtual stenting of intracranial aneurysms //IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS – 2014. V.20
3. Wang Y., Archambault D., Scheidegger C.E., Qu H. A vector field design approach to animated transitions //IEEE TRANSACTIONS ON VISUALIZATION AND COMPUTER GRAPHICS – 2018. V.24
4. Wang Y., Archambault D., Scheidegger C.E., Qu H. The state of the art in flow visualisation: Feature extraction and tracking //COMPUTER GRAPHICS forum – 2003. V. 22

МЕТОД ЧАСТИЦ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В МОЛЕКУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ

Шагиров Н.Э.

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра Автоматизации научных исследований, e-mail: nikkey.shagirov@yandex.ru

Задача определения точек фазового перехода и исследования поведения системы вблизи таких точек возникает во многих областях, включая современные нанотехнологии. Даже в случае двухфазной системы (типа конденсированное вещество и газ) это не является простой задачей, если речь идет о детальном изучении процессов вблизи межфазного перехода. Метод частиц и его популярная разновидность, метод молекулярной динамики (ММД) [1], является, наряду с методами Монте-Карло, эффективным инструментом исследования такого рода проблем.

Целью настоящей работы является создание эффективных вычислительных программ молекулярно-динамического моделирования двухфазных сред при заданном потенциале межчастичного взаимодействия. В частности, в работе был использован потенциал Леннарда-Джонса. Как известно, ММД основан на численном решении классических уравнений движения и вычислении требуемых физических величин вдоль фазовой траектории системы. Силы межмолекулярного взаимодействия представляются в виде градиента потенциальной энергии системы. Состояние молекулярной системы при этом характеризуется макроскопическими параметрами, такими как давление, температура, получаемыми путем соответствующих усреднений в ходе вычислений.

Примененный в работе алгоритм основан на приведении системы к заданной температуре путем периодического перемасштабирования скоростей, полученных из решения уравнений движения, до достижения термодинамического равновесия. После чего и определяются макроскопические параметры системы. Так при расчете давления использовалась формула, учитывающая межмолекулярное взаимодействие [2]:

$$P = \frac{N}{V}kT + \frac{1}{3V} \sum_i \sum_{j>i} \vec{r}_{ij} \vec{F}(\vec{r}_{ij})$$

Возможность фазового перехода обусловлена наличием второго слагаемого.

Для решения динамической задачи использовано два подхода. Классический метод Верле в скоростной форме (с возможностью перенесения на многопроцессорную архитектуру) и метод Штермера 8-го порядка, позволяющего в несколько раз увеличить шаг по времени.

На основе разработанной программы проведен ряд методических расчетов.

Литература

1. Попов А.М. Вычислительные нанотехнологии. М.: КНОРУС, 2014. 312с.
2. Rapoport D.C. The Art of Molecular Dynamics Simulation. Second edition // Cambridge University Press, 2004.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ МНОГОЧАСТОТНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛОЯ В ВОЛНОВОДЕ

Шейна Е.А., Смирнов А.П.

МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: sheina_elena@mail.ru

Рассмотрена некорректная обратная задача восстановления действительной диэлектрической проницаемости плоскопараллельного слоя в идеально проводящем прямоугольном волноводе или в свободном пространстве по экспериментальным данным с использованием явной формулы NRW [1, 2], связывающей параметры образца и элементы матрицы рассеяния. Данная задача может оказаться неразрешимой из-за неточности экспериментальных данных, а для идеального эксперимента решение может быть не единственно, поскольку соответствующая параметрическая кривая функции коэффициента прохождения волны на комплексной плоскости имеет точки самопересечения в достаточно широкой области определения параметров задачи.

Измерения данных рассеяния электромагнитного поля на диэлектрическом образце проводятся с помощью аппаратуры типа VNA (векторный анализатор цепей), который допускает обработку измерений одновременно для серии экспериментов, соответствующей набору частот. В работе показано, что данную техническую возможность можно использовать для постановки корректной задачи.

Для идеального незашумленного эксперимента, соответствующего математической модели слоя в волноводе, неединственность решения может быть устранена, если рассматривать векторную постановку задачи, определенную набором частот в диапазоне однододовости волновода. Векторная функция коэффициента прохождения становится несамопересекающейся, если используется частотная сетка с достаточно малым шагом.

Показано, что для реального физического многочастотного эксперимента с малым частотным разрешением искомое решение обратной задачи о восстановлении параметров диэлектрика может быть найдено методом наименьших квадратов. Приближенное решение сходится к точному решению, если качество эксперимента (определяемое как шумами, так и дефектами измерительной установки и образцов материала) улучшается. Скорость сходимости увеличивается при росте числа частот, используемых в эксперименте.

Литература

1. Nicolson A. M., Ross G. F. Measurement of the intrinsic properties of materials by time-domain techniques // IEEE Trans. Instrum. Meas. – 1970. – V. 19. P. 377–382.
2. Weir W. B. Automatic Measurement of Complex Dielectric Constant and Permeability at Microwave Frequencies. Proceedings of the IEEE. – 1974. – V. 62. P. 33–36.

Секция: «Математическая физика и обратные задачи»

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В БАССЕЙНЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНОЙ

Баев А.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК,
кафедра математической физики, e-mail: baev@cs.msu.ru

Движение невязкой жидкости с малыми колебаниями поверхности ζ в мелком бассейне переменной медленно изменяющейся глубины h описывается системой

$$\varphi_{zz} + \varepsilon \Delta_2 \varphi = 0, \quad -h(\mathbf{r}) \leq z \leq 1 + \varepsilon \zeta(\mathbf{r}, t), \quad \varphi_t + \zeta + \frac{1}{2} \varepsilon |\nabla_2 \varphi|^2 + \frac{1}{2} \varphi_z^2 = 0, \quad z = 1 + \varepsilon \zeta(\mathbf{r}, t),$$

$$\zeta_t + \varepsilon (\nabla_2 \zeta, \nabla_2 \varphi) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi_z, \quad z = 1 + \varepsilon \zeta(\mathbf{r}, t), \quad \varphi_z = -\varepsilon (\nabla_2 h, \nabla_2 \varphi), \quad z = -h(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2,$$

где $\varphi(\mathbf{r}, z, t)$ — потенциал поля скорости жидкости, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Для расходящейся круговой волны с формой поверхности $q(\xi, \tau)$ получаем уравнение Кортевега–де Вриза с переменными коэффициентами, которые определяются глубиной и геометрической расходимостью в переменной эйконал τ , здесь ξ — фазовая переменная:

$$q_\tau - 6\alpha(\tau)qq_{\xi\xi} + \beta(\tau)q_{\xi\xi\xi} = 0, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad \tau > 0.$$

Установившиеся решения последнего уравнения определяются системой с гамильтонианом

$$H(p, q, \tau) \equiv \frac{p^2}{2} + U(q, \tau) = E(\tau), \quad p \equiv q_\tau, \quad U(q, \tau) \equiv -(\alpha(\tau)q^2 - \frac{\beta(\tau)}{2}q + \gamma(\tau))q.$$

Период и адиабатический инвариант фазовых траекторий этой системы удовлетворяют равенствам (с учетом симметрии по переменной q):

$$T(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha(\tau)A(\tau)}} \int_{-1}^1 \frac{d\lambda}{\psi(\mu(\tau), \lambda)}, \quad I = 4\alpha(\tau)A^5(\tau) \int_{-1}^1 \psi(\mu(\tau), \lambda) d\lambda, \quad \psi(\mu, \lambda) = \sqrt{(\mu - \lambda)(1 - \lambda^2)},$$

где $A(\tau)$ — амплитуда колебаний, функция $\mu(\tau)$ — не известна.

Сформулируем обратную задачу для уравнения КдВ на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$: по периоду $T(\tau)$ и амплитуде колебаний $A(\tau) = \max_\theta |q(\theta, \tau)|$ найти функции $\alpha(\tau), \beta(\tau)$, если хотя бы одна из них известна в некоторой точке $\tau_0 \in [\tau_1, \tau_2]$.

Теорема 1. *Поставленная обратная задача имеет не более одного решения.*

Предложен и численно реализован алгоритм решения обратной задачи, основанный на установленном в работе свойстве строгой монотонности функции

$$\sigma(\mu) = \int_{-1}^1 \psi(\mu, \lambda) d\lambda \int_{-1}^1 \frac{d\lambda}{\psi(\mu, \lambda)}, \quad \mu > 1.$$

Приведены результаты численного решения модельных задач. Показано, что учет геометрического расхождения волн, т. е. фактора размерности, влияет на результаты восстановления рельефа дна по данным обратной задачи.

Работа выполнена в рамках бюджета темы гос.рег. № АААА-А16-116021510092-2 и при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

О СХОДИМОСТИ БАРИЦЕНТРИЧЕСКОГО МЕТОДА В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ПРОВОДЯЩИХ ТОНКИХ ЭКРАНАХ

Ильинский А.С.¹, Полянский И.С.², Степанов Д.Е.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра МФ, e-mail: celd@cs.msu.ru
2) Академия ФСО России, e-mail: van341@mail.ru

В работе определяется оценка сходимости барицентрического метода (БМ) в решении интегро-дифференциального уравнения, формируемого в задачах дифракции электромагнитного поля (ЭМП) на бесконечно тонком идеально проводящем экране S [1]. В БМ задается приближенное решение $u^{\mathcal{M}}$ при определении плотность тока u на S в постановке метода Галёркина. Особенность БМ [2] заключается в формировании глобальной для S полной системы базисных функций ψ_j через:

$$\psi_j^h(x) = -v^0(x) \times \sum_{\bar{j} \in \mathbb{M}_p} a_{\bar{j}\bar{j}}^h \nabla_2 \phi_{\bar{j}}(x); \quad \psi_j^e(x) = v^0(x) \times \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} a_{jj'}^e \nabla_2 \phi_{j'}(x), \quad (1)$$

где $\nabla_2 = \{-\partial/\partial x_2, \partial/\partial x_1, 0\}$; $\nabla_2 = \{\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, 0\}$; $v^0(x)$ – орт-вектор нормали в $x \in S$; $a_{\bar{j}\bar{j}}^h$ и $a_{jj'}^e$ – \bar{j} -е и j' -е элементы \bar{j} -го и j' -го соответствующих собственных векторов матриц $\mathbf{A}^{h,e} = [\mathbf{B}^{h,e}]^{-1} \mathbf{C}^{h,e}$ при составлении $\mathbf{B}^{h,e}$, $\mathbf{C}^{h,e}$ при численном решении БМ [2] задач Неймана и Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца; $\phi_{\bar{j}}(x) = p! \prod_{n=0}^{N-1} [\zeta(x)]^{\bar{j}_n} / \bar{j}_n!$; $\zeta(x)$

– барицентрические координаты, заданные для раскрыва $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ экрана S при $\partial S = \partial\Omega$, $\partial\Omega$ – замкнутая непересекающаяся ломанная линия с вершинами $\{P_0, \dots, P_n, \dots, P_{N-1}\}$; \mathbb{M}_p , $\overline{\mathbb{M}}_p$ – множества мультииндексов [2].

Теорема 1. Пусть $u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{\bar{j} \in \mathbb{M}_p} c_{\bar{j}}^h \psi_{\bar{j}}^h(x) + \sum_{j \in \mathbb{M}_p} c_j^e \psi_j^e(x)$, тогда метод Галёркина сходится и справедлива оценка

$$\|u^{\mathcal{M}} - u\|_W = C_2 \left(C_1 h (p-1)^{-1/2} + p^{-1} \right), \quad (2)$$

где C_1, C_2 – независящие от p положительные постоянные; $h = \frac{1}{2} \max_{n_1, n_2 \in \{0; N-1\}} |P_{n_1} - P_{n_2}|$.

Норма $\|u\|_W^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|\nabla \cdot u\|_{-1/2}^2$ в (2) определяется для гильбертова пространства $W(\bar{S}) := \{u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{S}) : \nabla \cdot u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{S})\}$ [1].

Указанные результаты более подробно обсуждаются в докладе при уточнении направлений дальнейших исследований.

Литература

- Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. – Москва : ИПРЖР, 1996. – 176 с.
- Полянский И.С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орёл : Академия ФСО России, 2017. – 148с.

О ТОЧНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПО ЕГО ЛОКАЛЬНЫМ НАКЛОНАМ

Разгулин А.В.¹, Турганбаев С.А.¹, Ирошников Н.Г.²

1) Факультет ВМК МГУ, кафедра математической физики, e-mail: razgulin@cs.msu.ru

2) Физический факультет МГУ, кафедра медицинской физики, e-mail: nikita@optics.ru

Задача восстановления волнового фронта по его наклонам является важной прикладной задачей, состоящей в восстановлении функции $u(x, y)$ по приближенным измерениям $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ ее производных по переменным x и y . Вариационный подход приводит к задаче минимизации функционала невязки $J(u)$

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left((u_x - g_1)^2 + (u_y - g_2)^2 + \alpha u^2 \right) dx dy, \quad \alpha > 0,$$

на множестве периодических функций из пространства Соболева $H^1(\Omega)$ в случае прямоугольной области Ω , условие минимума которого в форме вариационного равенства с проекцией на кусочно-линейные по каждой переменной конечные элементы приводит к конечномерной проекционной схеме [1], наилучшим образом подходящей для случая восстановления волнового фронта, не обладающего высокой гладкостью. В [2] предложено семейство новых методов реконструкции волнового фронта, в которых для улучшения пространственно-частотной характеристики схемы и ее выравнивания на высоких частотах добавлено зависящее от двух параметров $\gamma > 0$, $s > 0$ стабилизирующее слагаемое с разностными производными второго порядка в дробной степени

$$B_2 A_1 \tilde{u}^h + B_1 A_2 \tilde{u}^h + \alpha B_1 B_2 \tilde{u}^h + \gamma (A_1 A_2)^s \tilde{u}^h = F(g_1, g_2),$$

где сеточные операторы $B_{1,2}$, $A_{1,2}$ задаются с помощью матриц Грама в L_2 рассматриваемых одномерных сплайнов и их градиентов.

В данном докладе обсуждаются вопросы точности схемы и оценки в нормах $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Показано, что при соответствующем согласовании шага сетки h с параметрами γ , s и естественных требованиях к гладкости волнового фронта удается получить оценки скорости сходимости порядка $O(h)$ и $O(h^2)$, характерные для стандартного метода конечных элементов. Результаты иллюстрируются данными вычислительного эксперимента по восстановлению разрывного волнового фронта типа спиральной фазы.

Работа выполнена в рамках тематики Московского центра фундаментальной и прикладной математики и при поддержке РФФИ, проект № 18-29-02103.

Литература

1. Razgulin A.V., Kuzhamaliyev Y.Z., Goncharov A.S., Larichev A.V. A variational method for wavefront reconstruction from Shack–Hartman sensor measurements // Atmospheric and Oceanic Optics (2017) 30, № 4, p. 399-403.
2. Razgulin A.V., Kuzhamaliyev Y.Z., Iroshnikov N.G., Larichev A.V. A variational method of wavefront reconstruction from local slope measurements using a fractional order of smoothness stabilizer // Computational Mathematics and Modeling (2019) 30, № 2, p. 164-176.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КОНФОКАЛЬНОЙ МИКРОСКОПИИ

Разгулин А.В.¹, Будзинский С.С.¹, Ларичев А.В.²

1) Факультет ВМК МГУ, кафедра математической физики, e-mail: razgulin@cs.msu.ru

2) Физический факультет МГУ, кафедра медицинской физики, e-mail: nikita@optics.ru

Конфокальные оптические системы широко используются в микроскопии для исследования объектов различной природы (см., например, [1]), поскольку по сравнению с широкоугольными системами обладают лучшим разрешением при секционировании по глубине. Конфокальные системы в последнее время находят применение и в офтальмологии [2]. В литературе в основном изучаются классические схемы оптической микроскопии и строятся их математические модели (см., например, [3], [4]). Однако этих фундаментальных исследований обычно бывает недостаточно для непосредственного исследования моделей конкретных конфокальных систем, например, применяющихся в офтальмологических системах диагностики глазного дна на основе адаптивной оптики. В этом случае приходится учитывать достаточно тонкую специфику оптической схемы, однако и получающаяся на этом пути математическая модель является наиболее адекватной физическому устройству, что позволяет эффективно проводить его исследование и оптимизацию параметров, влияющих на продольное и поперечное разрешение.

Особенность обсуждаемой системы состоит в том, что формирующий подсветку слоев объекта оптический сигнал является узким гауссовым пучком с плоской фазой на объекте. Отраженная от слоев объекта волна распространяется когерентно в системе двух линз и зеркала с дыркой и фокусируется на фотоприемнике, который регистрирует среднюю по апертуре интенсивность. Для описания дифракции в такой системе использовано приближение Френеля.

Проведенные тестовые расчеты показывают, что рассматриваемая схема конфокальной оптической системы демонстрирует хорошие возможности трехмерного секционирования при соответствующей фокусировке и сканировании слоев объекта. Однако необходимым элементом построения качественного изображения слоя является цифровая постобработка, которая нацелена на очищение изображения от паразитных размытых изображений соседних слоев. Математически задача описывается в виде решения трехмерного интегрального уравнения. Такая задача некорректно поставлена и для ее решения необходимо использовать специальные регуляризирующие процедуры метода Тихонова.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-29-02103.

Литература

1. Basic confocal microscopy // Jerome W. G. and Price R.L. ed. Second Edition, Springer - 2018.
2. High resolution imaging in microscopy and ophthalmology // Bille J.F. ed. New Frontiers in Biomedical Optics series, Springer - 2019.
3. Wilson T., Sheppard C. Theory and practice of scanning optical microscopy // Academic Press Inc, London - 1984.
4. Gu M. Principles of three-dimensional imaging in confocal microscopes, World Scientific, Singapore - 1996.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СЕГМЕНТАЦИИ БИОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

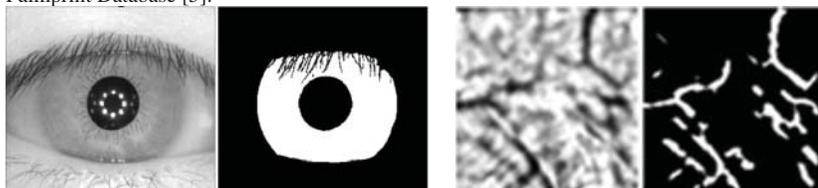
Павельева Е.А., Тихонова В.А., Сафронова Е.И.

*Кафедра математической физики, факультет ВМК, МГУ имени М. В. Ломоносова,
e-mail: pavelyeva@cs.msu.ru, varvara.a.tikhonova@gmail.com, katyasafit@gmail.com*

В работе предложен гибридный подход к решению задач сегментации биометрических изображений радужных оболочек глаз и вен ладоней. На изображении глаза необходимо выделить область радужной оболочки, не содержащую век и ресниц, а на изображении ладони – область вен. Результатом применения алгоритма сегментации является бинарная маска изображения, где белым цветом выделены области, пригодные для дальнейшей идентификации человека.

В работе разработан метод сегментации изображений на основе применения нейронных сетей и классических математических методов. После предобработки входного изображения и выделения на нем области интереса [1] применяется нейронная сеть для выделения предварительной маски изображения, а затем результат уточняется с помощью метода главных кривизн [1, 2]. В работе используется нейронная сеть архитектуры U-Net [3] для сегментации изображений радужной оболочки глаза и нейронная сеть архитектуры W-Net [4] с обучением без учителя для сегментации изображений вен ладони. В методе кривизн анализируются собственные значения матрицы Гессе, вычисленные в точках ресниц и вен. Далее выделяются новые точки ресниц и вен в направлении собственного вектора, отвечающего минимальному по модулю собственному значению матрицы Гессе.

Примеры работы предложенного метода представлены на рисунке. Тестирование проводилось на изображениях баз данных CASIA-IrisV4-Interval Database и CASIA Multi-Spectral Palmprint Database [5].



Литература

1. Safronova E. I., Pavelyeva E. A. Palm vein recognition algorithm using multilobe differential filters. //International Conference on Computer Graphics and Machine Vision “Graphicon”. – 2019. – Pp. 117–121.
2. Choi J. H., Song W., Kim T., Lee S. R., Kim H. C. Finger vein extraction using gradient normalization and principal curvature //Image Processing: Machine Vision Applications II. – 2009. – Vol. 7251. – P. 725111.
3. Ronneberger O., Fischer P., Brox T. U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation //International Conference on Medical image computing and computer-assisted intervention. – 2015. – Pp. 234-241.
4. Xia X., Kulis B. W-net: A deep model for fully unsupervised image segmentation //arXiv preprint arXiv:1711.08506. – 2017. – Pp. 4321-4333.
5. CASIA Iris Image Database Version 4.0 and CASIA Multi-Spectral Palmprint Database. <http://biometrics.idealtest.org>

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ВИРТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ГЛАЗНОГО ДНА

Романенко Т.Е.¹, Семенов А.Н.²

- 1) МГУ, ВМК, кафедра математической физики, e-mail: romanenko@cs.msu.ru
2) МГУ, ВМК, кафедра автоматизации научных исследований, e-mail: asemenov@cs.msu.ru

Один из перспективных методов диагностики патологий сетчатки человека *in-vivo* основан на реконструкции трехмерной структуры глазного дна по набору изображений, полученных с помощью цифровой конфокальной биомикроскопии [1]. Получаемые с помощью этого метода данные представляют собой стек изображений в каждой из фокальных плоскостей. При этом каждое из этих изображений является суперпозицией истинного сечения в данной фокальной плоскости и размытых изображений остальных сечений, на которые накладываются аберрации оптической системы глаза и искажения светочувствительных сенсоров. В рассматриваемом случае изображение искомого трехмерного объекта описывается уравнением

$$i(x, y, z) = o(x, y, z) * h(x, y, z), \quad (1)$$

где $i(x, y, z)$ – наблюдаемое изображение, $o(x, y, z)$ – искомый объект, а $h(x, y, z)$ – трехмерная функция точечного источника (point spread function, PSF), а задача реконструкции структуры глазного дна человека состоит в восстановлении стека слоев искомого трехмерного объекта $o(x, y, z)$. Решение задачи затрудняется как тем, что рассматриваемая обратная задача является некорректной в силу свойств функции $h(x, y, z)$, и тем, что результаты наблюдений имеются лишь в конечном наборе секущих плоскостей, так и тем, что как правило, функция точечного источника с учетом аберраций оптической системы глаза известна неточно.

В настоящей работе предлагается использовать современные компьютерные технологии для трехмерного анализа как прямой, так и обратной задачи реконструкции трехмерного объекта. Трехмерный анализ прямой задачи состоит в ее многократном решении по сгенерированным синтетическим трехмерным моделям для различных PSF и применением методов машинного обучения, предварительно обученных на датасете, полученном при многократном решении прямой задачи, для более точного получения параметров PSF для их использования при решении уже обратной задачи. Для решения обратной задачи реконструкции трехмерного объекта хорошо себя зарекомендовал спектральный итерационный метод [2], основанный на локализации выбора параметра регуляризации в зависимости от спектральных компонент и допускающий эффективное распараллеливание как на современных многоядерных CPU, так и GPU [3].

Литература

1. Larichev A. V., Ivanov P. V., Iroshnikov N. G., Shmalhauzen V. I., Otten L. J. Adaptive system for eye-fundus imaging // Quantum Electronics. 2002. Vol. 32. P. 902-908.
2. А. В. Разгулин, Н. Г. Ирошников, А. В. Ларичев, С. Д. Павлов, and Т. Е. Романенко. Об одной задаче численного секционирования в офтальмологии. Компьютерная оптика, 39(5):777–786, 2015.
3. Т. Е. Романенко and А. В. Разгулин. A three-dimensional deconvolution algorithm using graphic processors. Computational Mathematics and Modeling, 30(1):80–90, 2019.

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО- ПОСТОЯННОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Гаврилов С.В.¹

1) МГУ, ВМК, кафедра математической физики, e-mail: gvrlserg@gmail.com

В докладе рассматривается следующая математическая задача. Пусть Ω ограниченная односвязная область на плоскости с границей кривая Γ_0 . Пусть Ω_1 односвязная область с границей Γ_1 , такая, что $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$. Кривые Γ_0 и Γ_1 гладкие: $\Gamma_0, \Gamma_1 \in C^2$. Пусть $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$, а σ_0 и σ_1 — положительные постоянные.

Пусть известны функции $g^j(M)$ и $f^j(M)$, $j=1,2,\dots,k$ непрерывные на Γ_0 . Пусть функции $u^i(M)$ таковы что: $u^i \in C(\overline{\Omega}), u^i(M) = u_i^j(M), M \in \Omega_i (i=0,1)$, где $u_i^j \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega_i})$,

$$\Delta u_i^j(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i=0,1, \quad (1)$$

$$u_0^j(M) = u_1^j(M), \quad M \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1^j(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \quad (3)$$

$$u_0^j(M) = f^j(M), \quad M \in \Gamma_0. \quad (4)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0^j(M)}{\partial n} = g^j(M), \quad M \in \Gamma_0, \quad (5)$$

здесь σ_0, σ_1 - известные положительные постоянные, представляющие собой коэффициенты проводимости внутри областей Ω_0 и Ω_1 . Задача электроимпедансной томографии состоит в определении неизвестной кривой Γ_1 в краевых задачах (1)-(5).

В докладе предлагается численный метод нахождения приближенного решения поставленной задачи электроимпедансной томографии. Метод основан на разложении функции, параметризующей неизвестную границу Γ_1 , по конечномерной системе базисных функций.

Работа проводилась при частичной поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература

1. Gavrilov S.V., Denisov A.M. Numerical method for determining the inhomogeneity boundary in the Dirichlet problem for Laplace's equation in a piecewise homogeneous medium // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, v.50, №8, p.1391-98.

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ

Лопушенко В.В.¹, Котельников И.А.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, лаборатория математической физики,
e-mail: lopushnk@cs.msu.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: lllkot3ll@mail.ru

В настоящей работе обсуждается применение метода объемных интегральных уравнений в спектральной области (МИУСО) при решении скалярной задачи дифракции на трёхмерной неоднородности. В основу рассматриваемого подхода положен классический метод объёмных интегральных уравнений [1], который с помощью трехмерного преобразования Фурье приводит к интегральному уравнению в спектральной области. В работах [2,3] МИУСО был предложен для моделирования рассеяния света одиночными объектами малой толщины, расположенными на подложке. Естественным развитием этого подхода является новая математическая модель, в которой рассматриваются рассеиватели произвольной толщины.

Численная схема новой модификации МИУСО построена на основе теоремы отсчетов, позволяющей получить систему алгебраических линейных уравнений относительно значений искомого решения в дискретном наборе точек с шагом, определяемом размерами рассеивателя. Важно отметить, что с помощью соответствующих рядов Котельникова-Шеннона записываются все функции, входящие в интегральное уравнение, в том числе и функция Грина свободного пространства, для которой используется представление, аналогичное [4]. Полученная система линейных уравнений решается итерационным методом с применением быстрых алгоритмов вычисления свёрток, что обеспечивает предложенному алгоритму высокую производительность.

В работе обсуждаются преимущества предложенного подхода по сравнению с классическим вариантом метода интегральных уравнений и демонстрируются результаты, полученные при решении задачи рассеяния на эллипсоидах, расположенных в свободном пространстве.

Литература

1. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. // М.: Макс пресс – 2008.
2. Eremin Yu.A., Lopushenko V.V. Method of integral equations in the spectral domain for the analysis of plane defects of a substrate // Differential Equations (2014) **50**, №9, pp.1173-1181.
3. Lopushenko V.V. Analysis of Plane Cylindrical Wafer Defects by the Spectral-Domain Integral Equation Method // Computational Mathematics and Modeling (2016), **27**, №1, pp. 44-59.
4. Felipe Vico, Leslie Greengard, Miguel Ferrando. Fast convolution with free-space Green's functions // Journal of Computational Physics; (2016) **323**, №15, pp. 191-203.

Секция: «Исследование операций»

МЕТОД ВЗВЕШЕННЫХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗЕРВОВ УБЫТКОВ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Белянкина Т.В.¹, Кюнченкова Д.Д.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра исследования операций, *tbelyank@mail.ru*

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, кафедра исследования операций,
kyunchenkova.d@yandex.ru

В настоящей работе представлено вычисление резерва произошедших, но незаявленных убытков (РПНУ) четырьмя разными методами: цепная лестница (ЦЛ), мюнхенская цепная лестница (МЦЛ), метод наименьших квадратов (МНК), метод взвешенных наименьших квадратов (ВНК), а также предложен сравнительный анализ этих методов по четырём разным показателям: абсолютное процентное отклонение прогноза от теоретического значения резерва, среднеквадратичное отклонение, дисперсия, максимальный модуль разности между прогнозом и теоретическим значением резерва. Задача вычисления РПНУ может решаться на основании треугольников развития заявленных или оплаченных убытков $\{C_{i,k}, D_{i,k}, i = 1 \dots n, k = 1 \dots n, i + k \leq n + 1\}$, где $C_{i,k}(D_{i,k})$ - кумулятивный уровень оплаченного (заявленного) убытка года события i спустя k лет развития, n - число лет, используемых для построения треугольников развития убытков. Однако, полученные на основании этих треугольников прогнозные значения РПНУ, могут сильно различаться, а это затрудняет выбор оптимальной оценки этого резерва.

Т. Мак и Г. Кварг в своей статье [1] обнаружили, что во многих годах развития присутствует регрессионная зависимость между индивидуальными множителями развития $F_{i,k} = C_{i,k}/C_{i,k-1}, G_{i,k} = D_{i,k}/D_{i,k-1}$ и отношениями между оплаченными и заявленными убытками $C_{i,k-1}/D_{i,k-1}, D_{i,k-1}/C_{i,k-1}$. То есть модель цепной лестницы модифицируется с учётом этой зависимости, что позволяет использовать данные о заявленных и оплаченных убытках одновременно, а также учитывать предыдущие состояния убытков, а, следовательно, улучшать точность вычислений.

Предлагается применить подход, описанный в [1], для вычисления РПНУ с помощью МНК и ВНК (с диагональной ковариационной матрицей для последнего) [2], то есть расчёт неизвестных коэффициентов с помощью этих методов. Также проведено сравнение и анализ всех четырёх методов по указанным выше показателям. Для анализа используются гистограммы и средства MS Excel. В качестве данных для тестирования был смоделирован портфель договоров страхования сроком на 5 лет.

Проведённое исследование показало, что несомненным лидером по всем показателям среди анализируемых методов является МЦЛ. Также было обнаружено, что можно подобрать такие веса для ВНК в гетероскедастичной модели, что результаты, полученные с его помощью, не уступают гомоскедастичному МНК. Однако, поскольку присутствует мультиколлинеарность, то ВНК является самым чувствительным из всех методов.

Литература

1. Mack T., Quarg G. Munich chain ladder: A reserving method that reduces the gap between IBNR projections based on paid losses and IBNR projections based on incurred losses, variance, volume 2, number 2, 2008 // First published in: Deutscher Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik. – 2004. – Т. 26. – No. 4. – С. 597.
2. Катышев П.К., Магнус Я.Р., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс // М.: Дело. – 2007.

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПОТОКАМИ ДОХОДОВ И УБЫТКОВ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ

Белолипецкий А.А.^{1,2}, Сычев А.А.³

1) МГУ, ВМК, кафедра исследования операций, e-mail: abelolipet@mail.ru

2) Федеральный исследовательский центр Информатика и Управление РАН

3) Московский физико-технический институт (государственный университет)

Проблема оценки вероятности разорения страховых компаний имеет давнюю историю. За неимением места сошлемся лишь на три русскоязычных работы [1]-[3], в которых исследовалась эта тема. В большей части исследований по теории разорения входной финансовый поток предполагается детерминированным. Цель приведенной работы построить простую динамическую модель, в которой как доходы, так и убытки страховой компании были бы стохастическими, и привести быстро вычисляемые нижние оценки вероятности разорения на конечном временном интервале.

Пусть $N(\tau)$ - число страховых полисов, находящихся в портфеле страховщика на интервале времени $(\tau, \tau + 1)$. Динамика объема портфеля задается стохастическим уравнением $N(\tau + 1) = N(\tau) + Y(\tau) - Z(\tau)$, $N(0) = n_0$. Здесь $Y(\tau)$ - случайная величина привлеченных на интервале $(\tau, \tau + 1)$ страхователей, имеющая пуассоновское распределение с параметром λ_p , а $Z(\tau)$ - случайное число выбывших страхователей, имеющее смешанное пуассоновское распределение со случайным параметром $\Lambda(\tau) = \lambda_c N(\tau)$, $\lambda_c \in (0, 1)$. Динамика рискового резерва $U(\tau)$ задается уравнением $U(\tau + 1) = U(\tau) + pN(\tau) - bZ(\tau)$, $U(0) = u_0$. С помощью аппарата производящих функций, можно получить конечно разностные уравнения для трех первых моментов случайных величин $N(\tau)$, $U(\tau)$. Используя значения этих моментов можно аппроксимировать функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины $U(\tau)$, используя, например, гауссово приближение или трехпараметрическое гамма-распределение. Тогда величину вероятности того, что компания не разорилась к моменту T , можно заменить грубой нижней оценкой $P(U(1) > 0) \cdot P(U(2) > 0) \cdot \dots \cdot P(U(T) > 0)$. Например, если $b = 1$, $U(0) = 100$, $N(0) = 1000$, $\lambda_c = 0.05$, $p = 0.95\lambda_c$, то при гауссовой аппроксимации функции $F(x)$ нижняя оценка вероятности не разорения в течение 15 лет равна 72%. Имитационное моделирование процесса дало оценку 83%. Последнее вселяет надежду на возможность использования такого подхода для частичного решения поставленной проблемы.

Литература

1. Бауэрс Н., Гербер Х. и др. Актуарная математика //М.: Янус-К- 2001. 656 с.
2. Калашников В.В., Константи́нидис А.А. Вероятность разорения //Фундаментальная и прикладная математика. 1996, т.2, №4, с. 1005-1100.
3. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска//М.: Физматлит – 2007, 542 с.

МОДИФИКАЦИЯ РАСШИРЕННОГО ПРИНЦИПА ГИРСАНОВА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ARIMA-GARCH СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Данилишин А.Р.¹, Голембиовский Д.Ю.²

1) ВМК МГУ, кафедра исследования операций, e-mail: danilishin-artem@mail.ru

2) ВМК МГУ, кафедра исследования операций, e-mail: golemb@cs.msu.su

Моделирование динамики цен базовых активов лежит в основе нахождения справедливой стоимости производных финансовых инструментов [1]. Зачастую, моделирование цен предполагает использование физической вероятностной меры, однако для соблюдения условия безарбитражности, то есть отсутствия возможности получения безрисковой прибыли при нулевых затратах [2], которое является одним из главных принципов ценообразования финансовых инструментов, необходимо использование риск-нейтральных вероятностных мер. Для полного рынка характерно существование и единственность данной меры, однако в условиях неполного рынка, данных мер может быть бесчисленное множество.

Существуют способы трансформации физической вероятностной меры в риск-нейтральную (преобразование Эшера, расширенный принцип Гирсанова), данные способы получаются естественным образом – путем решения оптимизационных задач (максимизация индивидуальной функции полезности, минимизация индивидуальной функции затрат). Однако, для данных методов требуется существование производящей функции моментов, что ограничивает их использование для распределений с тяжелыми хвостами, в качестве такого распределения было рассмотрено распределение Su Джонсона. [3, 4]. Основным результатом исследования является модификация расширенного принципа Гирсанова и нахождения риск-нейтральной вероятностной меры, а также применение полученных результатов к специальному виду случайного процесса условного среднего и дисперсии (ARIMA-GARCH).

Литература

1. Hull J. Options, futures, and other derivatives. - 10th ed. - Pearson, 2018. 896 p.
2. Patton A. Quantitative finance. - London: University of London Press Publisher, 2015. 65 p.
3. Bollerslev T. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // Rev. Econ. Stat., 1987. Vol. 69. Iss. 3. P. 542-547. doi: 10.2307/1925546.
4. Simonato J. G. GARCH processes with skewed and leptokurtic innovations: Revisiting the Johnson SU case. May 16, 2012. <https://ssrn.com/abstract=2060994>.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КРЕДИТНЫХ РИСКОВ И МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ СТОИМОСТИ СТРАХОВАНИЯ КРЕДИТА

Денисов Д.В.¹, Мешина З.В.²

1) Факультет ВМК МГУ, кафедра исследования операций, email: dvden@bk.ru

2) Факультет ВМК МГУ, кафедра исследования операций, email: zlatav@bk.ru

Банки, выдавая кредиты, неизбежно несут потери, с ними связанные. Существует риск невозврата заемщиком средств, взятых у банка. Банки применяют различные методы и стратегии, чтобы сократить кредитные риски. Один из таких методов – это страхование данных рисков.

В работе проведен анализ влияния кредитных рисков на рынок страхования, рассмотрены основные концепции актуарной математики и на их основе построена модель для нахождения актуарной приведенной стоимости страхования кредита для случаев ежегодных и -кратных выплат по нему.

Была проведена оценка компонент полученной модели при помощи методов актуарной математики и данных банковской статистики, а также приведены примеры вычисления актуарной приведенной стоимости страховки на основе имеющихся статистических данных.

Предположим, что заемщик должен выплатить банку сумму в размере C . Сумма выплачивается за n итераций, по $\frac{C}{n}$ за один раз. Необходимо учесть процент, который банк требует за возможность такой рассрочки. Пусть банковская ставка равна $1000 i$ процентам за некоторый промежуток времени, например, год. Тогда по окончании первого года заемщик выплатит банку сумму $\frac{C}{n}(1+i)$, по окончании второго года $\frac{C}{n}(1+i)^2$, и так далее. По окончании n -го года заемщик выплатит банку сумму $\frac{C}{n}(1+i)^n$. Таким образом, финансовая приведенная стоимость этого кредита равна

$$C_n = \frac{C}{n}((1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n) = \frac{C}{n}(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{C(1+i)^n - 1}{n a}$$

Процент, начисляемый m раз в год, будет отличаться от процента, начисляемого ежегодно. Обозначим новую процентную ставку $i^{(m)}$. Это номинальная процентная ставка при m -кратном конвертировании. Если клиент банка берет кредит на сумму C , и годовая процентная ставка равна i , то в конце периода кредитования продолжительностью n лет он должен выплатить сумму $C(1+i)^n$. Если кредит выплачивается m раз в год равными частями, то сумма одного такого платежа составит $\frac{C(1+i)^n}{nm} = \frac{C}{nm} + Ci^{(m)}$. Имея статистические данные, характеризующие неплатежи по той или иной категории кредитов, можно рассчитать стоимость их страхования на основе построенной модели в данной работе и, заключив договор со страховой компанией, минимизировать таким образом кредитные риски.

Литература

1. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt N.J. Actuarial Mathematics //Saumburg, Illinois: Society of Actuaries. – 1997.

ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДЪЯВЛЕНИЯ ОПЦИОНОВ

Морозов В.В.

Факультет ВМК МГУ, кафедра исследования операций, email: vmorosov@mail.ru

На финансовом рынке ценных бумаг действуют продавцы и покупатели, интересы которых, как правило, противоположны. Игровая ситуация возникает в тех случаях, когда ценная бумага включает заранее оговоренные стратегические возможности ее реализации. Например, для продавца – это ее досрочный выкуп у инвестора, а для инвестора – это досрочный возврат бумаги продавцу. Пример такой бумаги см. в [1].

В докладе предлагается вид ценной бумаги, представляющей собой следующий контракт между двумя участниками рынка (первым и вторым игроком). Первый (второй) игрок может в любой момент времени t предъявить партнеру колл-опцион с платежом $(S(t) - K_1)^+$ (пут-опцион с платежом $(K_2 - S(t))^+$) на акцию, где $S(t)$ – стоимость акции, а $K_1(K_2)$ – цена исполнения. Действие контракта заканчивается в случае предъявления опциона одной из сторон. Стоимость акции $S(t)$ удовлетворяет уравнению геометрического броуновского движения $dS(t) = S(t)((r - \delta)dt + \sigma dz(t))$, где $z(t)$ – стандартный винеровский процесс, $z(0) = 0$, r – процентная ставка, σ – волатильность, а $\delta > 0$ – интенсивность потока выплачиваемых дивидендов, которые реинвестируются в покупку новых акций.

Пусть $S = S(0)$ – начальная стоимость акции и $K_2 < S < K_1$. Стратегией первого (второго) игрока является число $x \geq K_1$ ($y \leq K_2$), определяющее пороговое решающее правило предъявления опциона $\tau_x = \min\{t: S(t) = x | S(s) > y, \forall s \leq t\}$ (решающее правило $\tau_y = \min\{t: S(t) = y | S(s) < x, \forall s \leq t\}$). Функция выигрыша первого игрока

$$F(x, y) = (x - K_1)E[\exp(-r\tau_x) | S(0) = S] + (y - K_2)E[\exp(-r\tau_y) | S(0) = S]$$

представляет собой стоимость бесконечного двустороннего (double) барьерного опциона с выигрышами первого игрока $x - K_1 \geq 0$ и $y - K_2 \leq 0$ в случае достижения процессом $S(t)$ соответственно уровней x и y . В работе доказано, что в полученной антагонистической игре существуют единственные оптимальные стратегии игроков и разработан метод их построения. Определения оптимальных стратегий и значения игры см. в [2].

Для того чтобы условия контракта были для игроков справедливыми, при его заключении первый игрок должен внести второму плату, равную значению игры v , если $v > 0$. Если же $v < 0$, то второй должен заплатить первому сумму $-v$.

Пример. Пусть $S = 100, K_1 = 105, K_2 = 95, r = 0.04, \sigma = 0.1$. В таблице в зависимости от δ указаны оптимальные стратегии игроков x^0, y^0 и значение игры v . В последнем столбце указан тренд $\tilde{\alpha} = r - \delta - \sigma^2/2$, определяющий тенденцию к возрастанию или убыванию стоимости акции.

δ	x^0	y^0	v	$\tilde{\alpha}$
0.02	252	95	8.56	0.015
0.04	134	75.5	0.53	-0.05
0.06	105	54.2	-5.8	-0.25

Литература

1. McConnell J.J., Schwartz E.S. LYON taming// Journal of Finance. – 1986. – V. 41. – № 3. – P. 561–576.
2. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. //М.: МАКС-Пресс – 2005.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТОИМОСТИ СТРЭНГЛ-ОПЦИОНА

Морозов В.В.¹, Абдыкалик Ш.²

1) Факультет ВМК МГУ, кафедра исследования операций, email: vmorosov@mail.ru

2) Факультет ВМК МГУ, кафедра исследования операций, email: shyngys_96@bk.ru

Чтобы обезопасить себя от колебаний рынка, инвесторы часто приобретают так называемый стрэнгл-опцион, представляющий собой портфель, состоящий из колл и пут-опционов на акцию одного вида. Функция платежа стрэнгл-опциона имеет вид

$$f(S) = a_1(S - K_1)^+ + a_2(K_2 - S)^+,$$

где $a_i, K_i, i = 1, 2$, – количества и цены исполнения соответственно колл и пут-опционов, а S – стоимость акции. Бесконечный стрэнгл-опцион можно предъявить в любой момент времени. При этом исполняются только опционы, имеющие положительные платежи. При $K_1 \geq K_2$ стоимость опциона была найдена в [1] с использованием мартингалового подхода. В докладе предложен метод нахождения стоимости опциона при $K_1 < K_2$

Стоимость акции $S(t)$ удовлетворяет уравнению геометрического броуновского движения $dS(t) = S(t)((r - \delta)dt + \sigma dz(t))$, где $z(t)$ – стандартный винеровский процесс, $z(0) = 0$, r – процентная ставка, σ – волатильность, а $\delta > 0$ – интенсивность потока выплачиваемых дивидендов, которые реинвестируются в покупку новых акций.

Стоимость стрэнгл-опциона определяется по формуле

$$F(S) = \max_{\tau} E[\exp(-r\tau)f(S(\tau)) | S(0) = S],$$

где максимум берется по всем марковским моментам предъявления опциона. Доказано, что множество немедленного исполнения опциона $\mathcal{E} = \{S: F(S) = f(S)\}$ состоит либо 1) из двух полуинтервалов $(0, c_2]$ и $[c_1, \infty)$, где $c_2 < K_1 < K_2 < c_1$, либо 2) к ним добавляется отрезок $[c_3, c_4]$, где $K_1 < c_3 < c_4 < K_2$. На множестве $\mathcal{E}^c = \{S: F(S) > f(S)\}$, дополнении к множеству \mathcal{E} , стоимость опциона $F(S) = AS^{\beta_1} + \hat{A}S^{\beta_2}$, где $\beta_{1,2}$ – корни квадратного уравнения $0.5\sigma^2\beta^2 + (r - \delta - 0.5\sigma^2)\beta - r = 0$. Функция $F(S)$ дифференцируема во всех точках $S > 0$. Для ее построения используется следующий метод. Сначала предполагается, что имеет место случай 1). Решается система уравнений

$$F(c_1) = a_1(c_1 - K_1), F'(c_1) = a_1, F(c_2) = -a_2(c_2 - K_2), F'(c_2) = -a_2 \quad (1)$$

относительно неизвестных c_1, c_2, A, \hat{A} . Обозначим через S^* точку минимума функции $F(S) - f(S) = AS^{\beta_1} + \hat{A}S^{\beta_2} - a_1(S - K_1) - a_2(K_2 - S)$ на отрезке $[K_1, K_2]$. Если выполнено неравенство $F(S^*) - f(S^*) \geq 0$, то функция $F(S)$ построена, но при значении минимума, равном нулю, множество $\mathcal{E} = (0, c_2] \cup [c_1, \infty) \cup \{S^*\}$. Если $F(S^*) - f(S^*) < 0$, то $\mathcal{E} = (0, c_2] \cup [c_3, c_4] \cup [c_1, \infty)$ и для построения функции $F(S)$ на интервалах (c_2, c_3) и (c_4, c_1) необходимо решить системы, аналогичные (1):

$$F(c_2) = -a_2(c_2 - K_2), F'(c_2) = -a_2, F(c_3) = f(c_3), F'(c_3) = a_1 - a_2;$$

$$F(c_4) = f(c_4), F'(c_4) = a_1 - a_2, F(c_1) = a_1(c_1 - K_1), F'(c_1) = a_1.$$

Пример. Пусть $K_1 = 80, K_2 = 120, r = 0.03, \delta = 0.01, \sigma = 0.1, a_1 = a_2 = 5$. Тогда

$$S^* = 80.26, F(S^*) - f(S^*) = 36.6 \text{ и } \mathcal{E} = (0, c_2] \cup [c_1, \infty), \text{ где } c_1 = 295.48, c_2 = 67.37.$$

Если при тех же данных $\sigma = 0.06$, то $S^* = 83.97, F(S^*) - f(S^*) = -1.74$. Здесь множество $\mathcal{E} = (0, c_2] \cup [c_3, c_4] \cup [c_1, \infty)$, где $c_1 = 260.77, c_2 = 77.45, c_3 = 83.91, c_4 = 84.48$. График функции $F(S)$ имеет вид «чаши» с дном между точками

$$(c_3, a_1(K_2 - K_1)) \text{ и } (c_4, a_1(K_2 - K_1))$$

и боковыми стенками, соединенными с дном кривыми.

Литература

1. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Martingale approach to pricing perpetual American options// AUSTIN Bulletin. – 1994. – V. 24. – № 2. – P. 195–220.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДВУСТОРОННЕГО ДЛИТЕЛЬНОГО БОЯ

Цыганов Н.И.

Факультет ВМК МГУ, кафедра исследования операций, e-mail: nikita--93@mail.ru

Моделирование боевых действий – важная задача в исследовании операций. Особенная актуальность данной темы в наше время обуславливается неспадающей террористической угрозой и наличием в мире большого числа вооруженных конфликтов, в том числе недалеко от границ Российской Федерации.

Основное отличие данной работы от работ других авторов [1-3] состоит в учете случайных факторов. Рассматривается модель двустороннего длительного боя, в котором каждая сторона задается начальной численностью, вероятностью уничтожения единицы противника собственной единицей за один период боя, а также пороговым уровнем потерь, при достижении которого сторона прекращает бой и считается проигравшей. Ставится задача нахождения вероятности победы для каждой стороны.

Отдельно рассматривается динамика средних численностей (ДСЧ), при которой потери сторон в каждом периоде совпадают со своими математическими ожиданиями. В рамках данной динамики исследуется влияние эффективности обнаружения и целераспределения на исход боя. Получены условия, при которых отношение численностей сторон в период t стремится к нулю (победа первой стороны) и к бесконечности (победа второй стороны) при $t \rightarrow \infty$.

При пропорциональном увеличении начальных численностей сторон поведение вероятностей побед сторон тесно связано с ДСЧ. Так, в бою до полного уничтожения (когда пороговые уровни потерь равны 1 для каждой стороны) доказано, что если в ДСЧ побеждает некоторая сторона, то тогда в исходной задаче вероятность победы данной стороны стремится к 1 при пропорциональном увеличении начальных численностей сторон до бесконечности. Для случая, когда пороговые уровни потерь для обеих сторон меньше 1, справедлив похожий результат.

Также приводится алгоритм решения исходной задачи нахождения вероятностей побед сторон. Число операций алгоритма имеет порядок $O(N(0)^4)$, где $N(0)$ – начальная численность сторон.

Литература

1. Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Шаповалов Т.Г. Многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона» //Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика (2017), №6, с.57-69.
2. Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Лесик А.И. Многошаговое обобщение модели «нападение-оборона» //Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика (2017), №2, с.89-100.
3. Шумов В.В. Иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов //Управление большими системами (2019) **79**, с.86-111.

РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ПОДХОДОВ ДЛЯ ПРОГНОЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА НЕФТЕПЕРЕРАБОТКИ

Лазухин И.С.¹, Петровский М.И.², Машечкин И.В.³

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: ivanlazuhin@mail.ru

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: michael@cs.msu.su

3) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: mash@cs.msu.su

Современные технологические процессы отличаются высоким уровнем автоматизации и контроля, а также способностью предоставить подробную информацию о своем состоянии в каждый момент времени. Такую информацию можно задать как многомерный временной ряд значений всевозможных контроллеров, задающий последовательность состояний производственной системы во времени.

Для изучения были предоставлены наборы данных за несколько лет из передового нефтеперерабатывающего комплекса, контроль которого происходит с помощью устаревших утилит, основанных на линейных моделях. Поэтому, основной задачей данного исследования было создание алгоритмов построения нелинейных прогнозных моделей, с целью последующей оптимизации управления и контроля производственного процесса.

В рамках исследования были предложены несколько методов отбора признаков во времени для выбранной прогнозируемой переменной, финальный алгоритм основан на подсчете важности наиболее значимых переменных в модели градиентного бустинга LightGBM [1]. Для выбора периодов стабильной работы установки, на совокупности которых будет выгоднее всего обучать прогнозные модели, был предложен алгоритм на основе кластеризации K-means. Основная же прогнозная модель строится для каждой переменной процесса индивидуально, на основе простой полносвязной нейронной сети. При обучении используется функция потерь на основе корреляции.

Для оптимизации процесса было предложено использовать метод доверительных областей. В качестве целевой функции задается взвешенная сумма переменных с учетом технологических ограничений, что в совокупности оправдывает выбор основной прогнозной модели в данной задаче.

Полученные результаты вполне удовлетворили экспертов предметной области, поэтому по стопам научного исследования был реализован демонстрационный программный стенд. В его функции входят загрузка сырых данных, их разметка на периоды обучения и оценки качества, отбор признаков и построение прогнозных моделей, их применение. В рамках оптимизационного функционала пользователю доступны поиск управления и прогноз производственного процесса в выбранные моменты времени на основе построенных моделей.

Литература

1. Ke G., Meng Q., Finley T., Wang T., Chen W., Ma W., Ye Q. Liu T-Y. LightGBM: A highly efficient gradient boosting decision tree //Neural Information Processing Systems Conference.

МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ В СЛОЖНО СТРУКТУРИРОВАННЫХ ДАННЫХ

Горохов О.Е.¹, Петровский М.И.², Машечкин И.В.³

- 1) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,
e-mail: owlman995@gmail.com
- 2) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,
e-mail: michael@cs.msu.su
- 3) МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,
e-mail: mash@cs.msu.su

Анализ сложно структурированных данных является актуальной областью исследований в современном обществе. Это связано с тем, что большинство информации, с которой мы сталкиваемся, представляет собой структурированные объекты (различные текстовые данные, потоки событий в системных журналах). Кроме того, важным является обнаружение аномалий в такой информации [1].

Стоит отметить, что сложно структурированные данные могут быть представлены в текстовом виде. При этом, как правило, мы сталкиваемся с частично контролируруемыми аномалиями, когда нам известны примеры нормальных данных и отсутствуют либо недостаточно описаны аномальные данные (например, в задаче выявления авторства текстов). Таким образом, поставленная задача сводится к задаче обнаружения частично контролируемых аномалий в содержимом текстовых данных [1].

В последнее время наиболее эффективным является подход, основанный на тематическом моделировании текстовых данных. Однако, классические методы, использующие этот подход, не позволяют достичь достаточно хороших результатов в задаче обнаружения аномалий.

В данной работе предлагается рассмотреть архитектуру одноклассовой нейронной сети, основанную на выделении признаков (латентных тематик) посредством применения операции свёртки ко входному слою с дальнейшей кластеризацией. Переобучение сети удаётся избежать за счёт регуляризации и применения операции dropout. После этого, на основании полносвязного слоя, мы пытаемся выделить кластеры, к которым принадлежат нормальные данные [2].

В ходе проведённых экспериментальных исследований, предложенный алгоритм позволил добиться лучшего результата по сравнению с классическими методами (одноклассовый SVM, Fuzzy, репликаторные нейронные сети) [2].

Дальнейшими направлениями развития исследуемой задачи является возможный учёт временной составляющей (т.к., как правило, сложно структурированные данные представляют собой некоторый поток данных) [3].

Литература

1. Chandola V., Banerjee A., Kumar V. Anomaly Detection: A Survey //ACM Computing Surveys (2009) **41**, №3, p.15:1–15:58.
2. Gorokhov O., Petrovskiy M., Mashechkin I. Convolutional Neural Networks for Unsupervised Anomaly Detection in Text Data //Lecture Notes in Computer Science (2017) **10585**, p.500-507.
3. Gupta M., Gao J., Aggarwal C. C., Han J. Outlier Detection for Temporal Data: A Survey //IEEE transactions on knowledge and data engineering (2014) **26**, №9, p.2250-2267.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ АРГУМЕНТАЦИИ В ТЕКСТАХ

Димов И.Н.¹, Добров Б.В.²

1) МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,
e-mail: iliyadimov@icloud.com

2) МГУ имени М.В. Ломоносова, НИВЦ, лаборатория АИР,
e-mail: dobrov_bv@mail.ru

Извлечение аргументации в текстах является одной из ключевых задач в области анализа текста. Задача актуальна для построения экспертных и диалоговых систем, выявления противоречий в документах отдельных предметных областей, выявления и анализа различных точек зрения в политических или научно-технических дискуссиях.

С формальной точки зрения текстовое выражение аргументации включает в себя следующие компоненты: «утверждение» («claim»), «обоснование» («evidence») и, возможно, «тему» («topic»). На практике существует большое разнообразие текстовых представлений компонент аргументации, из-за чего значительный прогресс в решении данной задачи происходит только в последнее время с развитием нейросетевых подходов на основе использования размеченных экспертами наборов данных («датасетов»).

Важным частным случаем задачи извлечения аргументации является выделение и анализ политической аргументации. В рамках научного соревнования SemEval 2020 [1] при конференции COLING 2020 был предложен метод [2] извлечения пропагандистских приемов, использующий большие предобученные языковые модели на основе архитектуры transformer (BERT). Для решения поставленных задач также были адаптированы дополнительные архитектуры: LaserTagger и R-BERT.

В докладе описываются подходы к портированию системы [2] на более общую задачу извлечения аргументации, в том числе для русского языка. Будет предоставлена модификация нейросетевой архитектуры для учета структурных особенностей других размеченных корпусов.

Литература

1. Da San Martino G. et al. SemEval-2020 task 11: Detection of propaganda techniques in news articles //Proceedings of the 14th International Workshop on Semantic Evaluation, SemEval. – 2020.
2. Dimov I., Korzun V., Smurov I. NoPropaganda at SemEval-2020 Task 11: A borrowed approach to sequence tagging and text classification //arXiv preprint arXiv:2007.12913. – 2020.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Полевой А.В.¹, Герасимов С.В.², Мещеряков А.В.³

- 1) *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: polevoianton@bk.ru*
- 2) *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра интеллектуальных информационных технологий, e-mail: gerasimov@mlab.cs.msu.su*
- 3) *Институт космических исследований РАН, e-mail: mesh@cosmos.ru*

За последние годы систематический сбор и анализ поведенческих данных о потребителях услуг позволили выявить в них ряд скрытых паттернов. Инкрементальное моделирование — это подход интеллектуального анализа данных, в котором ставится задача выбора объектов, чувствительных к некоторому выбранному воздействию на основе полученных данных о клиентах. Следующие примеры подчеркивают разнообразие задач, в которых могут применяться подобные подходы: директ-маркетинг (поиск целевой аудитории у товара или услуги), медицина (выбрать подгруппу пациентов, для которых рассматриваемое лечение является самым выгодным), сельское хозяйство (подбор удобрений для агрокультуры с целью повышения урожая).

В нашей работе проведен обзор существующих подходов моделирования воздействия. Подробно исследуются алгоритмы, основанные на деревьях решений, в сравнении с прочими подходами в этой области. Нами предложен подход, в котором при построении дерева используется статистический тест (см. например [7]) для учёта дисбаланса классов в treatment и control группах в левой и правой вершинах.

Точность моделей оценивалась на выборках: Criteo-Uplift [3], конкурсная выборка от X5 retail group (<https://retailhero.ai>).

Литература

1. Verbeke, Wouter & Baesens, Bart & Bravo, Cristián Profit Driven Business Analytics: A Practitioner's Guide to Transforming Big Data into Added Value (2018)
2. Kane, K., V. S. Y. Lo, and J. Zheng. 2014. "Mining for the Truly Responsive Customers and Prospects Using True-Lift Modeling: Comparison of New and Existing Methods." *Journal of Marketing Analytics* 2 (4): 218–238.
3. Eustache Diemert, Artem Betlei, Christophe Renaudin, and Massih-Reza Amini A Large Scale Benchmark for Uplift Modeling. In *Proceedings of AdKDD & TargetAd (ADKDD'18)*. ACM, New York, NY, USA. 2018.
4. Gutierrez, P., & Gérardy, J. Y. (2017). Causal Inference and Uplift Modelling: A Review of the Literature. In *International Conference on Predictive Applications and APIs* (pp. 1-13)
5. Michel, René & Schnakenburg, Igor & Martens, Tobias. (2019). Targeting Uplift: An Introduction to Net Scores. 10.1007/978-3-030-22625-1.
6. Radcliffe, N.J. (2007). Using control groups to target on predicted lift: Building and assessing uplift model. *Direct Market J Direct Market Assoc Anal Council*, 1:14–21, 2007.
7. Mouloud Belbahri, Alejandro Murua, Olivier Gandouet, Vahid Partovi Nia. Uplift Regression: The R Package tools4uplift. Arxiv:1901.10867v1. 2019. <http://arxiv.org/abs/1901.10867>.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ ИНСАЙДЕРОВ

Александров В.В.¹, Царёв Д.В.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: xelav.rus@gmail.com

2) МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ, e-mail: tsarev@cs.msu.ru

Обнаружение инсайдерских угроз является очень трудной задачей в силу того, что инсайдеры используют доверенный им доступ, что позволяет им с относительной легкостью обходить системы защиты информации. По отчету Ponemon за 2020 год [1] стоимость ущерба от инсайдерских угроз составляет 11,45 миллионов долларов в среднем за атаку, и это число стремительно растет каждый год.

В рамках данной работы решается задача раннего обнаружения инсайдерского поведения, в которой проводится классификация пользователей на основе их поведенческих признаков. Поведенческие признаки включают в себя как структурированную информацию о действиях пользователя, так и неструктурированную текстовую информацию, с которой работал пользователь (содержимое писем электронной почты и текстовых документов)

На основе анализа моделей и их результатов была взята статья [2], по которой были выбраны рекуррентная нейросетевая архитектура LSTM, выполняющая анализ и моделирование пользовательского поведения, и сверточная нейронная сеть для классификации пользовательского поведения.

При построении модели было обнаружено, что качество модели сильно страдало из-за проблемы переобучения. Для решения этой проблемы были апробированы такие техники как, взвешивания функции потерь, добавления слоев различных вспомогательных слоев в архитектуру сверточной сети, использование информации о контенте пользовательских файлов, обработанной с помощью тематической модели. Это дало улучшение метрики AUC ROC на наборе данных CERT, содержащем синтетические пользовательские данные, где некоторые действия пользователей отмечены как инсайдерские.

Литература

1. Ponemon Report: 2020 Cost of Insider Threats Global Organizations. - 2020. <https://www.observeit.com/ponemon-report-cost-of-insider-threats/>
2. Insider Threat Detection with Deep Neural Network / Fangfang Yuan, Yanan Cao, Yanmin Shang et al. // Computational Science ICCS 2018 / Ed. By Yong Shi, Haohuan Fu, Yingjie Tian et al. Cham: Springer International Publishing, 2018. Vol. 10860. Pp. 43-54. http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-93698-7_4.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТОВ

Селякин А.С.¹, Герасимов С.В.¹, Мещеряков А.В.²

1) *МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра ИИТ,
e-mail: arssel1997@mail.ru*

2) *Институт космических исследований РАН*

Оптимизация маршрутов является одной из ключевых задач в области логистики. Быстрые и качественные решения в данной области позволяют экономить время клиентов и деньги предоставляющих услуги перевозки/доставки фирм.

С формальной точки зрения задача оптимизации маршрутов имеет множество разновидностей. Базовая постановка представляет собой задачу коммивояжера и является NP-трудной [1]. В прикладных областях возникают дополнительные условия, такие как: ограничения спроса на разные категории товаров, временные окна посещения вершин графа, ограничения на последовательность посещения и т.д. Для решений подобных задач не было предложено эффективных полиномиальных алгоритмов. Используются два подхода: (i) поиск точных решений с помощью методов целочисленного программирования (требующих существенных временных затрат) и (ii) использование эвристик (приближенных решений, не гарантирующих достаточную точность).

В настоящей работе исследуются алгоритмы глубокого обучения с подкреплением для решения задач оптимизации маршрутов, основанные на механизмах внимания (attention, self-attention) и алгоритмах reinforce with baseline [2] и Actor-Critic [3]. Для обучения и тестирования алгоритмов была разработана среда моделирования логистических задач в условиях ограничений.

Литература

1. Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность//Мир. – 1985.
2. Kool et al. Attention, Learn to solve routing problems!//International Conference on Learning Representations. – 2019.
3. Wu et al. Learning Improvement Heuristics for Solving Routing Problems.//arXiv preprint arXiv:1912.05784. – 2020.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ SEMI-SUPERVISED ПОДХОДА НА ОСНОВЕ СОРЕВНОВАТЕЛЬНЫХ АВТОКОДИРОВЩИКОВ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ РАЗМЕТКИ ДАННЫХ В ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Сорока А.Г.¹, Мещеряков А.В.², Герасимов С.В.³

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, ИИТ, e-mail: soroka_irk@mail.ru

2) Институт космических исследований РАН, e-mail: mesch@iki.cosmos.ru

3) МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, ИИТ, e-mail: sergun@gmail.com

Морфологическая классификация галактик является частью исследований эволюции галактик, но при этом сложна для полностью автоматической параметризации. Будущие небесные обзоры (такие как EUCLID) будут содержать в себе изображения более миллиарда галактик [2]. Аннотация морфологической информацией осуществляется людьми путем визуальной классификации изображений, это означает, что в больших проектах требуются либо значительные денежные затраты (в случае коммерческих краудсорсинговых решений по типу MTurk или Toloka), либо большое количество добровольцев (в случае волонтерских проектов помощи научным исследованиям, таких как Galaxy Zoo). Любая ручная разметка в какой-то момент перестает масштабироваться под растущий объем данных.

На сегодня существуют гибридные решения, объединяющие машинное обучение и человеческую разметку, они позволяют существенно ускорить процесс морфологической классификации галактик. Например, SOTA решение (Beck. et al [1]) достигает точности 93,1% в задаче наличия у галактики структуры (вопрос верхнего уровня дерева классификации Galaxy Zoo 2), используя при этом 0,93 миллиона действий разметки, при увеличении действий разметки до 2,3 миллионов, точность растет до 95,7%. Однако данный подход не может быть масштабирован под объем будущих обзоров, так как требует постоянного участия людей в процессе разметки. Нашей целью является создание быстрых и точных методов машинной морфологической классификации с ограниченным использованием человеческой разметки, которые были бы способны масштабироваться под современный объем данных.

В работе предложена модель морфологической классификации галактик, основанная на активном обучении глубокой нейронной сети соревновательного автокодировщика. Наша модель использует как размеченные, так и неразмеченные данные при обучении (semi-supervised). Для задачи наличия у галактики структуры мы достигаем точности решения Beck, 93,1% на тестовой выборке, используя всего 0,86 миллиона действий разметки. Предложенная модель легко масштабируется для любого количества изображений в современных обзорах, не требуя дополнительных усилий по разметке.

Литература

1. Beck M. R. et al. Integrating human and machine intelligence in galaxy morphology classification tasks // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2018. – Т.476. – No. 4. – С. 5516-5534.
2. Refregier A. et al. Euclid imaging consortium science book //arXiv preprint arXiv:1001.0061. – 2010.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДУБЛИРОВАНИЯ СООБЩЕНИЙ В БЕСПРОВОДНЫХ СЕНСОРНЫХ СЕТЯХ

Никольский И.М.¹, Фурманов К.К.²

1) МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, каф. СКИ, e-mail: oliv_mail@mail.ru

2) НИУ ВШЭ, департамент прикладной экономики, e-mail: kfurmanov@hse.ru

Мониторинг различных процессов в реальном времени с помощью автоматизированных систем используется во многих сферах человеческой деятельности. Такой мониторинг позволяет оптимизировать расход различных ресурсов, предупреждать отказы оборудования и т. д. [1]

Одной из популярных технологий построения систем мониторинга является беспроводная сенсорная сеть (БСС). Узлами такой сети являются устройства (в англоязычной литературе их называют motes), включающие микроконтроллер, радиомодуль, и набор сенсоров. Питание как правило осуществляется от батарейки. Связывание сенсоров в сеть позволяет передавать информацию не напрямую от каждого сенсора к базовой станции (что приводит к излишнему расходу энергии из-за дальних передач), а по цепочке узлов сети, используя короткие передачи.

Использование радиоканала в сетях сенсоров часто приводит к потере информации. Наличие отражения радиоволн от препятствий, коллизий и других явлений приводит к необходимости разработки протоколов передачи сообщений, учитывающих ненадёжность связи. Потери информации могут быть уменьшены за счёт дублирования сообщений. В этом случае актуальной задачей становится рациональное определение количества дублей. Эта задача нетривиальна: маленькое количество дублей приводит к невозможности передать хоть одну копию данных, если же их будет слишком много, то это приведёт к чрезмерному расходу ресурса элемента питания. На данный момент предложен целый ряд способов оптимизации количества дублей. Так например в [3] был представлен метод основанный на нечёткой логике, а авторы [4] разработали распределенный алгоритм, основанный на динамическом программировании.

В данной работе предложен метод определения количества дублей, основанном на статистическом анализе потерь в радиоканале. Метод прост в реализации, кроме того не использует таймауты, продолжительность которых трудно оценить рационально. Метод был опробован на тестовой БСС, разработанной одним из авторов. Логика работы узлов этой БСС реализуется с помощью микроконтроллеров Arduino Nano, для передачи информации применяются трансиверы NRF24L01. С помощью серии экспериментов было показано, что предлагаемый метод позволяет обеспечить достаточно надёжную связь между узлами сенсорной сети.

Литература

1. J.Ramson, D. Mon Applications of wireless sensor networks—A survey// Proceedings of International conference on innovations in electrical, electronics, instrumentation and media technology (ICEEIMT), pp. 325-329. IEEE, 2017.
2. I. Umoren, D. Asuquo, O. Gilean, M. Esang Performability of Retransmission of Loss Packets in Wireless Sensor Networks // Computer and Information Science; Vol. 12, No. 2; 2019 pp71-86
3. Bi, R., Li, Y., Tan, G., & Sun, L. (2016). Optimizing Retransmission Threshold in Wireless Sensor Networks. Sensors (Basel, Switzerland), 16.

РАЗРАБОТКА СРЕДСТВ АНАЛИЗА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ПРОГРАММ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ КЛАСТЕРОВ

Бахтин В.А.¹, Рощина К.А.²

- 1) МГУ им. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СП, e-mail: bakhtin@keldysh.ru
- 2) МГУ им. Ломоносова, факультет ВМК, кафедра СП, e-mail: karoshchina@gmail.com

В документации к DVM-системе [1, 2] описан сценарий для анализа эффективности DVMH-программ. Цель данной работы — реализовать визуальный инструмент для отладки эффективности выполнения DVMH-программ, а также упростить анализ при использовании данного сценария.

При запуске DVMH-программы происходит накопление трассировочной информации в оперативной памяти используемых программой процессоров. Полученная информация записывается в файл, содержащий информацию о множестве различных характеристик производительности заданной программы, таких как **полезное время**, **количество используемых процессоров**, **потерянное время** и др. Для анализа сложных и объёмных DVMH-программ характеристик выполнения всей программы целиком может быть недостаточно, поэтому DVM-система предоставляет возможности детализации этих характеристик применительно к отдельным частям программы — интервалам, размечаемым пользователем и/или компилятором. Для каждого из интервалов собирается набор различных характеристик производительности запускаемой DVMH-программы и записывается в рассмотренный ранее сжатый файл.

В рамках реализованного визуального инструмента происходит распаковка подаваемого на вход файла с характеристиками запуска и сохранение информации в json-представлении с возможностью последующей быстрой загрузки. Все записи ранее сохранённых статистик выполнения представлены в виде таблицы с краткой информацией о запуске и дате загрузки статистики с возможностью сортировки.

Единичная статистика может быть выбрана из списка и загружена для анализа. Информация представлена в отдельной вкладке в виде трёх панелей, содержащих дерево интервалов программы, столбчатую диаграмму потерянного времени для выбранного интервала, представляющую информацию о составляющих потерянного времени для каждого из используемых процессоров, и текст выбранного интервала.

Инструмент также предоставляет возможность сравнения нескольких загруженных статистик. Сравнение происходит в одноименной вкладке. На ней можно просмотреть диаграммы сравнения двух типов, а также произвести поинтервальный анализ с использованием пересечения деревьев интервалов сравниваемых статистик, что позволяет рассматривать программы с отличающейся интервальной структурой.

В результате проделанной работы был создан визуальный инструмент для анализа и отладки эффективности выполнения параллельных DVMH-программ. С помощью реализованного средства были произведены сравнение и анализ статистик выполнения теста NAS BT. Были показаны эффективность и удобство использования визуального анализатора.

Литература

1. Официальный сайт DVM-системы [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. — URL: <http://dvm-system.org/>
2. Документация к DVM-системе [Электронный ресурс]. — Электрон. дан. — URL: <https://www.keldysh.ru/dvm/dvmhmtl1107/rus/listr.html#Документация%20разработчика>

МЕТОД ТРАНСЛЯЦИИ ТАБЛИЦЫ ПОТОКОВ КОММУТАТОРА ПРОГРАММНО-КОНФИГУРИРУЕМОЙ СЕТИ В ЯЗЫК АССЕМБЛЕРА СЕТЕВОГО ПРОЦЕССОРА¹,

Волканов Д.Ю.¹, Маркобородов А.А.², Скобцова Ю.А.³

1) МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра АСВК, e-mail: volkanov@asyk.cs.msu.ru

2) МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра АСВК, e-mail: amark@lvk.cs.msu.ru

3) МГУ имени М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, кафедра АСВК, e-mail: xenerizes@lvk.cs.msu.ru

Среди протоколов управления в программно-конфигурируемых сетях широкое распространение получил протокол OpenFlow [1]. Правила обработки пакетов в OpenFlow коммутаторе организованы в таблицы потоков. Для классификации входящих пакетов необходимо производить поиск правила в таблице потоков по значениям полей заголовка. В работе рассматривается коммутатор, в котором основные задачи по обработке поступающих пакетов выполняет программируемый сетевой процессор (СП) [2]. Поиск в программе на языке ассемблера данного СП реализуется в виде дерева поиска, состоящего из команд условных переходов. При разработке ПКС коммутатора возникает задача по реализации классификации по таблице потоков в программе на языке ассемблера СП. Учитывая частоту обновления таблицы потоков, целесообразно поддерживать инкрементально обновляемое промежуточное представление таблицы потоков.

В работе проводится обзор существующих структур данных для выполнения классификации пакета по таблице потоков OpenFlow. По результатам анализа подходов предлагается поддерживающая добавление и удаление правил структура данных для промежуточного представления таблицы потоков и два способа трансляции структуры данных в программу на языке ассемблера, реализующую поиск по набору правил таблицы потоков. Разработанные способы позволяют получать программу, в процессе выполнения которой поле заголовка пакета загружается только один раз, а программа, полученная вторым способом, также не содержит дублирующих блоков команд для загрузки полей заголовка. Для данных алгоритмов также проводится экспериментальное исследование с целью оценки объема памяти и среднего времени обработки пакета для получаемой программы на языке ассемблера, а также с целью оценки времени обновления структуры данных. Для рассмотренных характеристик были выявлены линейные зависимости от количества правил в исходной таблице потоков. При сравнении программ, получаемых двумя разработанными способами трансляции, были определены шаблоны правил таблицы потоков, на которых каждый из способов получает программу, занимающую меньший объем памяти СП.

Литература

1. OpenFlow Switch Specification Version 1.3.0 (Wire Protocol 0x04)// Foundation Open Networking. 2012.
2. Giladi R. Network processors: architecture, programming, and implementation// Morgan Kaufmann. 2008..

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-01076)

Абдыкалик Ш.	93	Егоренков В.А.	69	Мещеряков А.В. ...	98, 100, 101
Аввакумов С.Н.	56	Ершов Н.М.	76	Мординцев М.К.	19
Александров В.В.	99	Ечкина Е.Ю.	77	Морозов В.В.	92, 93
Александрова Н.Е.	40	Жайлауова Ш.Р.	44	Мортиков Е.В.	16
Алексеев В.Б.	39	Жуковская Л.В.	54	Мосолова Ю.М.	9
Алимов Д.А.	14	Жуковский В.И.	54	Мухин С.И.	64
Андреев В.Ф.	73	Загидуллин Р.Р.	75	Мяо Хуэй-хуэй-хуэй ...	18
Аристов А.И.	27	Зайцева М.В.	13	Недоливко Ю.Н.	33
Артемяева Л.А.	57	Зайцева Н.В.	26	Нефедов Н.Н.	45, 50
Афанасьев Н.А.	62, 63	Захарова Т.В.	29, 30, 65	Никитин А.А.	25
Баев А.В.	80	Зотов И.В.	74	Никитина О.П.	76
Бахтин В.А.	103	Ильин А.В.	10	Никольский И.М.	102
Бегишев Р.Р.	10	Ильинский А.С.	81	Никольский М.С.	53
Белолипецкий А.А.	89	Иоффе В.Л.	23	Никулин Е.И.	50
Белянкина Т.В.	88	Ирошников Н.Г.	82	Обросова Н.К.	14
Богданов А.Н.	52	Исаев Р.Р.	24	Ожигов Юрий.	18
Богомолов С.В.	65, 66	Каменщиков М.А.	8	Орлов М.В.	56
Бражников А.А.	77	Камзолкин Д.В.	61	Орлов С.М.	56
Будзинский С.С.	83	Киселёв Ю.Н.	56	Павельева Е.А.	84
Бутаков О.Б.	64	Коровина М.В.	20	Палионная С.И.	31
Бутузов В.Ф.	46	Котельников И.А.	87	Петровский М.И. ...	95, 96
Бухман А.В.	38	Крицков Л.В.	23	Подымов В.В.	41, 42
Быцюра С.В.	49	Кувшинников А.Е.	66	Полевой А.В.	98
Ваньшунь Ли.	18	Кувшинов Е.Э.	28	Полянский И.С.	81
Волканов Д.Ю.	104	Кудрявцев А.А.	32, 33	Попков Г.А.	42
Волков В.Т.	45	Кудрявцев К.Н.	54	Попов А.М.	73
Высоцкий Л.И.	74	Кулагин Алексей.	18	Потапов М.М.	57
Гаврилов С.В.	86	Куркин М.Л.	25	Разгулин А.В.	82, 83
Герасимов С.В.	98, 100, 101	Куцак Н.Ю.	41	Романенко Т.Е.	85
Голембиовский Д.Ю. ...	90	Кюнченкова Д.Д.	88	Романов Д.С.	40
Головизнин В.М.	62, 63, 70, 71, 72	Лазахин И.С.	95	Рощина К.А.	103
Гончаренко М.Б.	29	Ларичев А.В.	83	Рублев Г.Д.	51
Горбачев Д.Ю.	70	Левашова Н.Т. ...	46, 48, 49	Рыкованов С.Г.	75
Горохов О.Е.	96	Легкий А.А.	17	Савчук А.М.	22
Горьков В.П.	59	Лобанов А.А.	36	Садовничая И.В.	22
Григоренко Н.Л.	59	Логина М.М.	68, 69	Саламатова В.Ю.	17
Груздев А.П.	55	Ложкин С.А.	43	Самарин А.И.	11
Давыдова М.А.	51	Лопушенко В.В.	87	Самсонов Д.С.	49
Даник Ю.Э.	47	Лукьянова Л.Н.	60	Сафронова Е.И.	84
Данилишин А.Р.	90	Мазуренко А.П.	35	Селезнева С.Н.	35, 36
Дебольский А.В.	16	Майоров Павел А. ...	71, 72	Селякин А.С.	100
Денисов В.Н.	21	Майоров Петр А.	71, 72	Семенов А.Н.	85
Денисов Д.В.	91	Майсурадзе А.И.	77	Симаков Р.Е.	46
Димов И.Н.	97	Маркобородов А.А. ...	104	Симаков С.С.	15
Дмитриев М.Г.	47	Матвеев С.А.	75	Сипатов А.М.	63
Добров Б.В.	97	Машечкин И.В.	95, 96	Скобцова Ю.А.	104
Драженков А.А.	57	Мельник М.В.	37	Смирнов А.П.	75, 79
Дюль Рафаэль.	18	Мельников Н.Б.	55	Соловьёв А.В.	71, 72
		Мельникова А.А.	49	Сорока А.Г.	101
		Мешина З.В.	91		

Степанов Д.Е.	81	Трусов Н.В.	12	Царёв Д.В.	99
Сычев А.А.	89	Турганбаев С.А.	82	Целищев М.А.	34
Тарасенко М.В.	12	Федотов М.В.	67	Цыганов Н.И.	94
Тимофеев А.Е.	15	Филиппова М.А.	66	Чжен Кэли.	18
Тихомиров В.В.	24	Фомичев В.В.	8, 11	Шагиров Н.Э.	78
Тихонова В.А.	84	Фурманов К.К.	102	Шананин А.А.	12, 14
Тищенко Б.В.	48, 49	Фурсов А.С.	9	Шатков С.А.	58
Ткаченко Е.В.	16	Харитонов Д.М.	67	Шевцова И.Г.	34
Точилин П.А.	13	Хзмалян Д.Э.	43	Шейна Е.А.	79
Трофимов В.А.	67, 68, 69	Хохлов Ю.С.	28	Шестаков О.В.	31, 32

Научное издание

Научная конференция
ТИХОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ
ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
26 – 31 октября 2020 г.

Электронное издание <https://cs.msu.ru//news/3385>

Напечатано с готового оригинал-макета

Подписано в печать 27.10.2020 г.

Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 6,75. Тираж 100 экз. Изд. 165.

Издательство ООО “МАКС Пресс”

Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

2-й учебный корпус, 527 к.

Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891.

