Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
Факультет вычислительной математики и кибернетики

«УТВЕРЖДАЮ»
Декан факультета ВМК МГУ,
академик РАН

/Соколов И.А./

«____» ____________2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

1.1.4. – «Теория вероятностей и математическая статистика»

Программа утверждена
Ученым советом факультета
(протокол № 4 от 28 апреля 2022 г.)

Москва-2022

I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа предназначена для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре вступительного экзамена в аспирантуру по специальности Теория вероятностей и математическая статистика и содержит основные темы и вопросы к экзамену, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания (все темы и вопросы должны быть не выше ФГОС ВО магистратуры и специалитета)

II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Общая часть.

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела.

2. Функции многих переменных. Полный дифференциал, и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, оценки погрешностей. Понятие о методе Гаусса.

4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Деламбера, интегральный, Лейбница).

5. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана. Умножение рядов.

6. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).

7. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

8. Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства.

9. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций.

10. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

11. Элементарные функции комплексного переменного z^n, e^z, $\frac{az+b}{ez+d}$, и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции $\sqrt{z}$, $Ln(z)$.

12. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

13. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.

14. Линейные преобразования. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду линейными преобразованиями в комплексной и действительной областях. Закон инерции.

15. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.

16. Ортогональные преобразования в евклидовом пространстве и ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц.

17. Характеристический многочлен линейного преобразования векторного пространства. Собственные числа и собственные векторы. Свойства собственных чисел и векторов симметрических матриц. Понятие о методе ортогональных вращений решения полной проблемы собственных значений.

18. Итерационные методы решения уравнения $f(x)=0$ (хорд, Ньютона). Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применение.

19. Линейные операторы, норма линейного оператора. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (методы простой итерации и Зейделя).

20. Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором.

21. Интегральные уравнения Фредгольма 2-ого рода. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричным ядром.

22. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье. Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Влияние гладкости функции на порядок коэффициентов Фурье.

23. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, системы уравнений первого порядка и уравнения n-ого порядка.

24. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость функций. Фундаментальная

система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.

25. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).

26. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению. Второй метод Ляпунова.

27. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.

28. Градиентные методы поиска экстремума.

29. Формализация понятия алгоритма (машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова). Алгоритмическая неразрешимость.

30. Структура и состав вычислительной системы (аппаратура + программное обеспечение).

31. Основные компоненты архитектуры ЭВМ (процессор, устройства памяти, внешние устройства).

32. Операционные системы, основные функции. Типы операционных систем.

33. Парадигмы программирования (функциональное, императивное, объектно-ориентированное программирование).

34. Базы данных. Основные понятия реляционной модели данных. Реляционная алгебра. Средства языка запросов SQL.

35. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

36. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.

2. **Дополнительная часть.**

1. Аксиоматическое построение теорий вероятностей. Независимые события. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

2. Случайные величин и функции распределения. Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание и дисперсия. Основные теоремы о математическом ожидании и дисперсии.

3. Теорема Пуассона. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

4. Условное математическое ожидание.

5. Понятие о случайных процессах. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс. Марковские процессы. Цепи Маркова.

6. Теория точечного оценивания. Несмещенные, состоятельные и эффективные оценки. Достаточные статистики. Оптимальные оценки.
7. Методы построения оценок. Метод моментов и метод максимального правдоподобия. Свойства получаемых оценок.
8. Критерии проверки гипотез. Теорема Неймана-Пирсона. Критерии согласия хи-квадрат.
9. Порядковые статистики. Эмпирическая функция распределения. Критерий согласия Колмогорова.
10. Многомерное нормальное распределение.

III. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы и рекомендуемую оценку, входящую в общий экзаменационный балл.

IV. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Вопрос 1. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Деламбера, интегральный, Лейбница).

Вопрос 2. Критерии проверки гипотез. Теорема Неймана-Пирсона.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. ОСНОВНАЯ

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа, часть 1 и часть 2. М.: Физматлит, 2005 (часть 1) и 2002 (часть 2).
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, часть 1 и часть 2. М.: Дрофа, 2003 (часть 1) и 2004 (часть 2).
3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.

СПб.: Лань, 2009.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2008.
7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Изд-во МЦНМО, 1998.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2006.
9. Колмолгоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
10. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: ГИТТЛ, 1956.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
13. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.
14. Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
17. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
18. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1 и том 2. М.: ГИФМЛ, 1962 (том 1) и 1959 (том 2).
19. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
20. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
21. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том 1 и том 2. М.: Мир, 1964 (том 1) и 1967 (том 2).
22. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
23. Ивченко Г.И., Медведев Ю.А. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1984.
24. Круглов В.М. Случайные процессы. – М.: Academia, 2013.
25. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989.
26. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2010.
27. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
28. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.
29. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимые функции. М.: Наука, 1986.
30. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
31. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.
32. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
33. Корухова Л.С., Шура-Бура М.Р. Введение в алгоритмы. Учебное пособие для студентов I курса, 2-е исправленное издание. — М. Издательский отдел факультета ВМиК МГУ (лицензия ИД № 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2010, http://sp.cmc.msu.ru/info/1/vvedalg.pdf
34. Э. Таненбаум, Т. Остин, Архитектура компьютера. 6-е издание, СПб: Питер, 2013.

35. Операционные системы. У. Столингс. Вильямс. 2002.
36. Э. Таненбаум, Х. Бос Современные операционные системы. 4-е издание, СПб: Питер, 2015.
37. Т. Пратт. М. Зелкович. Языки программирования. Разработка и реализация 4-е издание, СПб: Питер, 2002.
38. В. Ш. Кауфман. Языки программирования. Концепции и принципы. - М.: ДМК-Пресс, 2010.
39. К. Дейт. Введение в системы баз данных. М: Вильямс, 2006.
40. В.В.Воеводин, Вл.В.Воеводин "Параллельные вычисления", БХВ-Петербург, 2002, 608с.

41. А.С. Антонов Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP: Учеб пособие. Предисл.: В.А. Садовничий - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012. – 344 с. - (Серия "Суперкомпьютерное образование").

2. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977.
2. Лоэв М. Теория вероятностей. – М.: ИЛ, 1962.
3. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1969.
4. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. – М.: наука, 1968.
5. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: УРСС, 2009.
6. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: УРСС, 2010.
7. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.
8. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.

V. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Уровень знаний поступающих в аспирантуру МГУ оценивается по десятибалльной шкале. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Результаты сдачи вступительных экзаменов сообщаются поступающим в течение трех дней со дня экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если абитуриент получил семь баллов и выше. Абитуриент может набрать дополнительные 5 баллов (3 балла – рекомендация кафедры и научного руководителя, 1 балл – наличие диплома с отличием, 1 балл – наличие публикаций).

VI. АВТОРЫ

1. Профессор В.Ю. Королев
2. Профессор О.В. Шестаков