

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

«УТВЕРЖДАЮ»

Декан факультета ВМК МГУ,  
академик РАН

 /Соколов И.А./  
2022 г.

## **ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА**

**(для осуществления приема на обучение по  
образовательным программам высшего образования -  
программам подготовки научных и научно-педагогических  
кадров в аспирантуре)**

### ***1.1.6 «Вычислительная математика»***

Программа утверждена  
Ученым советом факультета  
(протокол № 4 от 28 апреля 2022 г.)

# I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа предназначена для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования - программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 01.01.06 – «Вычислительная математика» и содержит основные темы и вопросы к экзамену, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания.

## II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

### 1. Общая часть.

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела.
2. Функции многих переменных. Полный дифференциал, и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, оценки погрешностей. Понятие о методе Гаусса.
4. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).
5. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана. Умножение рядов.
6. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
7. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.
8. Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства.
9. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций.
10. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
11. Элементарные функции комплексного переменного  $z^n$ ,  $e^z$ ,  $\frac{az+b}{cz+d}$  даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции  $\sqrt{z}$ ,  $\text{Ln}(z)$ .
12. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
13. Ряд Лорана. Полус и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение.
14. Линейные преобразования. Квадратичные формы. Приведение их к

- каноническому виду линейными преобразованиями в комплексной и действительной областях. Закон инерции.
15. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.
  16. Ортогональные преобразования в евклидовом пространстве и ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц.
  17. Характеристический многочлен линейного преобразования векторного пространства. Собственные числа и собственные векторы. Свойства собственных чисел и векторов симметрических матриц. Понятие о методе ортогональных вращений решения полной проблемы собственных значений.
  18. Итерационные методы решения уравнения  $f(x) = 0$  (хорд, Ньютона). Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применение.
  19. Линейные операторы, норма линейного оператора. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (метод простой итерации).
  20. Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором.
  21. Интегральные уравнения Фредгольма 2-ого рода. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричным ядром.
  22. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье. Достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Влияние гладкости функции на порядок коэффициентов Фурье.
  23. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, системы уравнений первого порядка и уравнения  $n$ -ого порядка.
  24. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -ого порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.
  25. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные).
  26. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению. Второй метод Ляпунова.
  27. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с подвижными концами.
  28. Градиентные методы поиска экстремума.
  29. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса: расчетные формулы, подсчет числа действий.
  30. Итерационные методы Якоби и Зейделя решения систем линейных уравнений.
  31. Метод минимальных невязок решения систем линейных уравнений.

32. Метод сопряженных градиентов решения систем линейных уравнений
33. Решение систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
34. Решение разностной задачи на собственные значения для оператора второй разности с граничными условиями первого рода.
35. Метод неопределенных коэффициентов построения формул численного дифференцирования. Примеры.
36. Использование интерполяционных формул для построения формул численного дифференцирования. Корректность численного дифференцирования.
37. Общий вид методов Рунге-Кутты. Одноэтапные методы Рунге-Кутты. Методы Рунге-Кутты третьего порядка.
38. Явные и неявные методы Адамса. Примеры явных и неявных методов. Погрешность аппроксимации явных методов Адамса.
39. Разрешимость и оценка скорости сходимости трехточечной разностной схем, аппроксимирующей первую краевую задачу для стационарного уравнения теплопроводности.
40. Монотонность разностных схем на примере трехточечной разностной схемы для стационарного уравнения теплопроводности. Принцип сравнения. Априорная оценка разностного решения.
41. Аппроксимация самосопряженного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами методом баланса. Погрешность построенной аппроксимации.
42. Метод аппроксимации интегральных тождеств построения разностных схем.
43. Вариационно-разностные и проекционно разностные методы построения разностных схем.
44. Метод Галеркина.
45. Метод конечных элементов.
46. Методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики).
47. Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

## **2. Дополнительная часть.**

1. Математические модели, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Задача Коши и краевая задача. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Задачи, приводящие к уравнениям гиперболического, параболического и эллиптического типов. Математические постановки основных задач для этих уравнений.
3. Понятие корректности постановки краевых задач для уравнений Математической физики. Пример Адамара. Некорректно поставленные задачи, метод регуляризации.
4. Приложения численных методов к решению задач математического моделирования в механике, гидродинамике, электродинамике.

### **III. РЕФЕРАТ ПО ИЗБРАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ**

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы.

### **IV. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА**

**Вопрос 1.** Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с подвижными концами. Условия

**Вопрос 2.** Задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа

**Вопрос 3.** Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

### **V. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

#### **1. ОСНОВНАЯ**

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа, часть 1 и часть 2. М.: Физматлит, 2005 (часть 1) и 2002 (часть 2).
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, часть 1 и часть 2. М.: Дрофа, 2003 (часть 1) и 2004 (часть 2).
3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2009.
6. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2008.
7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Изд-во МЦНМО, 1998.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2006.
9. Колмолгоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
10. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: ГИТТЛ, 1956.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
13. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.

14. Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
16. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
17. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
18. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1 и том 2. М.: ГИФМЛ, 1962 (том 1) и 1959 (том 2).
19. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. М.: Наука. 1989.
20. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
21. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том 1 и том 2. М.: Мир, 1964 (том 1) и 1967 (том 2).
22. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
23. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2010.
24. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012.
25. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.
26. Мальцев А.И. Алгоритмы и вычислимы функции. М.: Наука, 1986.
27. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
28. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002.
29. В.Б. Андреев Численные методы. Электронная версия. Части 1 и 2.
30. А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы. М.: Наука. 1989.
31. Абакумов М.В. Гулин А.В. Лекции по численным методам математической физики. Учебное пособие. НИЦ ИНФРА-М. 2018.

## **2. ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ**

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука 2004.
3. Владимиров В.В. Уравнения математической физики. М.: Наука 1988.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука 1978.

## **V. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ**

Вступительный экзамен по специальности в аспирантуру факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ проводится в устной форме, по

экзаменационным билетам, и состоит из трех вопросов (вопроса по общей части программы, вопроса по дополнительной части программы и вопроса по реферату). Ответ поступающего в аспирантуру оценивается по десятибалльной шкале. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Результаты сдачи вступительного экзамена сообщаются поступающим в течение трех дней со дня экзамена путем их размещения на сайте и информационном стенде структурного подразделения. Вступительное испытание считается пройденным, если абитуриент получил семь баллов и выше.

	0	Нет ответа ни на один из трех заданных вопросов, либо отказ от ответа.
Минимальный уровень знаний	1	Отсутствуют ответы на оба заданных теоретических вопроса, существенные недочеты при изложении темы реферата, выявленные при его экспертной оценке, либо указанные в отзыве.
	2	Отсутствуют ответы на оба заданных теоретических вопроса, незначительные недочеты при изложении темы реферата, выявленные при его экспертной оценке, либо указанные в отзыве.
Низкий уровень знаний	3	Отсутствует ответ на один из заданных теоретических вопросов, фрагментарный ответ на второй заданный теоретический вопрос, значительные трудности в сопоставлении и анализе сведений из различных разделов программы, за исключением изложения темы реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).
	4	Отсутствует ответ на один из заданных теоретических вопросов, неполный ответ на второй заданный теоретический вопрос, значительные трудности в сопоставлении и анализе сведений из различных разделов программы, за исключением изложения темы реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).
Средний уровень знаний	5	Отсутствует ответ на один из заданных теоретических вопросов, полный ответ на второй заданный теоретический вопрос, значительные трудности в сопоставлении и анализе сведений из различных разделов программы, за исключением изложения темы реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).
	6	Неполные ответы на оба заданных теоретических вопроса, значительные трудности в сопоставлении и анализе сведений из различных разделов программы, за исключением изложения темы реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).
Достаточный уровень знаний	7	Полные ответы на оба заданных теоретических вопроса, незначительные трудности в сопоставлении и анализе сведений из различных разделов программы, либо незначительные недочеты при изложении темы реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).
	8	Полные ответы на оба заданных теоретических вопроса, незначительные трудности в сопоставлении и анализе сведений из различных разделов программы, либо незначительные недочеты при изложении темы реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).
Высокий уровень знаний	9	Исчерпывающие ответы на все заданные вопросы, свободное владение материалом, имеются недочеты при сопоставлении и анализе сведений из различных разделов программы, либо незначительные недочеты при изложении темы реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).
	10	Исчерпывающие ответы на все заданные вопросы, свободное владение материалом, грамотные сопоставление и анализ сведений из различных разделов программы, уверенное владение темой реферата (на основе его экспертной оценки, либо отзыва).

## VI. АВТОРЫ

д.ф.м.н., профессор Мухин С.И.,  
 д.ф.м.н., профессор Разгулин А.В.,  
 д.ф.м.н., профессор Сетуха А.В.