

*А. С. Ильинский¹, И. С. Полянский², К. О. Логинов³,
Н. С. Архипов⁴*

К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ ИНФОРМАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЭЛЕКТОРАТ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ВЫБОРНЫХ КАМПАНИЙ

Введение

В работе [1] в развитие исследований [2–5] по информационному противоборству в структурированном социуме при введении стохастической компоненты в интенсивностях агитации и разделении общества численностью N_0 на M подгрупп $\left(N_m < N_0, N_m \geq 1, \sum_{m=1}^M N_m = N_0\right)$ предложена математическая модель оценки информационного воздействия на электорат в социальных медиа при проведении выборных кампаний. Она сведена к определению в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ общего числа адептов $x_{mk}(t)$ и предадептов $y_{mk}(t)$ ($m = \overline{1, M}$) k -го ($k = \overline{1, K}$, где K – общее число кандидатов) кандидата, выполняемого при усреднении [1]: $\hat{Z}(t) = \int_{\Omega} \vec{Z} p(\vec{Z}, t) d\vec{Z}$, где $\vec{Z} = (Z_l)_d = (\vec{z}^{(1)}, \dots, \vec{z}^{(M)})$; $\vec{z}^{(m)} = (z_k^{(m)})_{2K} = (x_{m1}, y_{m1}, \dots, x_{mK}, y_{mK})$; $\Omega = \varepsilon^{(1)} \times \dots \times \varepsilon^{(M)} \subset \mathbb{R}^d$ – d -мерный выпуклый многогранник ($d = 2MK$); $\varepsilon^{(m)} \subset \mathbb{R}^{2K}$ – симплекс с $2K + 1$ вершинами $P_1^{(m)} = (0, 0, \dots, 0)$, $P_2^{(m)} = (N_m, 0, \dots, 0)$, ..., $P_{2K+1}^{(m)} = (0, 0, \dots, N_m)$; $p(\vec{Z}, t)$ – функция плотности распределения вероятности, удовлетворяющая уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК):

$$dp(\vec{Z}, t) / dt = \mathcal{L} [p(\vec{Z}, t)], \quad (1)$$

¹Профессор кафедры математической физики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: celd@cs.msu.ru.

²Сотрудник Академии ФСО России, e-mail: van341@mail.ru.

³Сотрудник УИТО Спецсвязи ФСО России, e-mail: kvirs@mail.ru.

⁴Советник генерального директора по науке АО «Эврика», e-mail: arhns97@mail.ru.

где $\mathcal{L}[p] = -\sum_{l=1}^d \frac{\partial}{\partial \vec{Z}_l} (A_l p) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \sum_{l'=1}^d \frac{\partial^2}{\partial \vec{Z}_l \partial \vec{Z}_{l'}} (D_{ll'} p)$ – диффузионный оператор; $\mathbf{D} = (D_{ll'})_{d \times d}$ и $\vec{A} = (A_l)_d$ – тензор диффузии и вектор сноса соответственно, компоненты которых уточнены в [1].

Для решения уравнения (1), с учетом заданного начального условия $p(\vec{Z}, t_0)$ и требований нормировки $p(\vec{Z}, t) \geq 0$, $\int_{\Omega} p(\vec{Z}, t) d\vec{Z} = 1$, в [1] предложена численная схема. Однако вопросы ее сходимости при уточнении алгоритмических особенностей программной реализации остались не раскрытыми. Цель настоящей статьи состоит в снятии указанных вопросов при дополнительном уточнении реализации численной схемы оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний при $K \gg 2$, $M \gg 1$.

Постановка задачи численной оценки

Зададим разбиение $\Omega = \bigcup_{u=1}^U \omega^{(u)}$ набором из U симплексов $\omega^{(u)} = \left\{ \sum_{l=1}^{d+1} \zeta_l^{(u)} P_l^{(u)} : \left(\sum_{l=1}^{d+1} \zeta_l^{(u)} = 1 \right) \wedge \left(\forall l = \overline{1, d+1}, \zeta_l^{(u)} \geq 0 \right) \right\} \subset \mathbb{R}^d$ ($u = \overline{1, U}$) с $d+1$ вершинами $P_1^{(u)}, P_2^{(u)}, \dots, P_{d+1}^{(u)}$ и барицентрическими координатами $\zeta_1^{(u)}, \zeta_2^{(u)}, \dots, \zeta_{d+1}^{(u)}$ при $\omega^{(u)} \cap \omega^{(u')} = \emptyset$ ($u \neq u'; u, u' = \overline{1, U}$).

Обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ скалярное произведение

$$\langle \eta, \theta \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \eta(\vec{Z}) \theta(\vec{Z}) d\vec{Z}, \quad (2)$$

для некоторых функций η и θ .

Следуя [1] зададим аппроксимацию $p(\vec{Z}, t)$:

$$\tilde{p}(\vec{Z}, t) = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{M}_r^d} c_j^{(u)}(t) \psi_j^{(u)}(\vec{Z}), \quad (3)$$

подстановка которой в (1) в проекционном представлении метода Галёркина сведет исходную к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1]:

$$d\vec{C}(t)/dt = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q}(t) \vec{C}(t); \quad \vec{C}(t_0) = \mathbf{S}^{-1} \vec{W}. \quad (4)$$

Здесь $\vec{W} = \left(\langle p_0, \psi_j^{(u)} \rangle_{\Omega} \right)_{U|\mathbb{M}_r^d}$; $p_0 \equiv p(\vec{Z}, t_0)$; $\vec{C} = \left(c_j^{(u)} \right)_{U|\mathbb{M}_r^d}$ – вектор искомых коэффициентов разложения, зависящих от t ; $\mathbf{Q} = \left(\langle \psi_j^{(u)}, \mathcal{L}[\psi_{j'}^{(u)}] \rangle_{\Omega} \right)_{U|\mathbb{M}_r^d \times U|\mathbb{M}_r^d}$; $\mathbf{S} = \left(\langle \psi_j^{(u)}, \psi_{j'}^{(u)} \rangle_{\Omega} \right)_{U|\mathbb{M}_r^d \times U|\mathbb{M}_r^d}$;

\mathbb{M}_r^d – множество мультииндексов $j, j' \in \mathbb{M}_r^d$ составленное из [6]:

$$\mathbb{M}_r^d = \left\{ j = (j_1, \dots, j_l, \dots, j_{d+1}) : j_l \in \mathbb{Z}_+, \sum_{l \in [1, d+1]} j_k = r \right\}, \quad (5)$$

где $r \in \mathbb{N}$ – порядок аппроксимации на $\omega^{(u)}$; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\psi_j^{(u)}$ – базисная функция частичной подобласти $\omega^{(u)} \subset \Omega$. Принимая во внимание доводы, отмеченные в [1], $\psi_j^{(u)}$ зададим произведением:

$$\psi_j^{(u)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (r+1) \prod_{k=1}^{d+1} \varphi_{j_k}, \quad (6)$$

Гауссовых базисных функций [8]:

$$\varphi_{j_k} = e^{-\frac{1}{2(d+1)}[2j_k+1-2\zeta_k(r+1)]^2}. \quad (7)$$

Решение системы ОДУ (4) определяется в виде

$$\vec{C}(t) = \exp \left[\mathbf{S}^{-1} \int_{t_0}^t \mathbf{Q}(\tau) d\tau \right] \mathbf{S}^{-1} \vec{W}, \quad (8)$$

где $\exp[\cdot]$ – матричная экспонента.

Для соблюдения условий $p(\vec{Z}, t) \geq 0$, $\int_{\Omega} p(\vec{Z}, t) d\vec{Z} = 1$ на каждом шаге интегрирования (8) по времени последовательно реализуется следующая нормировка для $j \in \mathbb{M}_r^d$:

$$c_j^{(u)} = \begin{cases} c_j^{(u)}, c_j^{(u)} \geq 0; \\ 0, c_j^{(u)} < 0; \end{cases} \quad \vec{C} = \vec{C} / \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{M}_r^d} c_j^{(u)} \Psi_j^{(u)}, \quad (9)$$

где $\Psi_j^{(u)} = \int_{\omega^{(u)}} \psi_j^{(u)}(\vec{Z}) d\vec{Z}$.

Учитывая доказательство [1] существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности непрерывного с вероятностью 1 решения задачи (1) уточним оценку сходимости составленной численной схемы.

Оценка сходимости

Сходимость решения (8) задачи (1) в проекционном представлении (4), с учетом известной, например из [9, с. 80], теоремы Л.В. Канторовича, составляет последовательное исследование задач приближения непрерывной функции на отрезке $[0, 1]$ и симплексе $\omega^{(u)}$ Гауссовыми базисными функциями вида (7) и (6) соответственно.

Принимая во внимание заданное в [1] усредняющее правило $\hat{\vec{Z}}(t) = \int_{\Omega} \vec{Z} p(\vec{Z}, t) d\vec{Z}$ оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний, исследование сходимости выполним в контексте задачи среднеквадратичного приближения [10].

Для $\zeta \in [0, 1]$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим $\varphi_j(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(r+1)e^{-\frac{1}{2}[2j+1-2\zeta(r+1)]^2}$ ($j = \overline{0, r}$) и определим норму $\|\eta\|_{[0,1]} = \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle_{[0,1]}}$ при $\langle \eta, \theta \rangle_{[0,1]} = \int_0^1 \eta(\zeta) \theta(\zeta) d\zeta$.

Лемма 1. Пусть $\eta(\zeta)$ – непрерывно дифференцируемая на $[0, 1]$ функция, а $\tilde{\eta}_r(\zeta) = \sum_{j=0}^r c_j \varphi_j(\zeta)$ – ее наилучшее среднеквадратичное приближение с коэффициентами разложения c_j . Тогда справедлива оценка

$$\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_{[0,1]} \leq O_1 \|\eta\|_{[0,1]} / \sqrt{r+1}, \quad (10)$$

где O_1 – независящая от r положительная постоянная.

Доказательство. Вектор коэффициентов $\vec{C} = (c_j)_r$ определяется [10] из требования $\langle \eta - \tilde{\eta}_r, \varphi_j \rangle_{[0,1]} = 0$ ($j = \overline{0, r}$) при решении системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{S}\vec{C} = \vec{H}, \quad (11)$$

где $\mathbf{S} = (\langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle_{[0,1]})_{r \times r}$; $\vec{H} = (\langle \eta, \varphi_{j'} \rangle_{[0,1]})_r$.

Известно [10], что

$$\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_{[0,1]}^2 = \langle \eta, \eta \rangle_{[0,1]} - \langle \tilde{\eta}_r, \eta \rangle_{[0,1]}. \quad (12)$$

Принимая во внимание (11), (12) установим справедливость

$$\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_{[0,1]} = \|\eta\|_{[0,1]} \sqrt{1 - \mathbf{S}^{-1} \frac{\vec{H}}{\|\eta\|_{[0,1]}} \frac{\vec{H}}{\|\eta\|_{[0,1]}}}. \quad (13)$$

Для уточнения (13) при установлении явной зависимости \mathbf{S}^{-1} от r , с учетом известного определения интеграла [11]:

$$\int e^{-[ax^2-2bx+c]} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{[b^2/a-c]} \operatorname{erf}\left(\frac{ax-b}{\sqrt{a}}\right) + \text{const}, \quad (14)$$

вычислим:

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle_{[0,1]} = \\ & = \frac{2(r+1)^2}{\pi} \int_0^1 e^{-4\zeta^2(r+1)^2 + 4\zeta(j+j'+1)(r+1) - \left[\frac{(2j+1)^2}{2} + \frac{(2j'+1)^2}{2}\right]} d\zeta = \\ & = \frac{r+1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(j-j')^2} \left[\operatorname{erf}(2(r+1) - j - j' - 1) + \operatorname{erf}(j + j' + 1) \right] \leq \frac{r+1}{\sqrt{\pi}} e^{-(j-j')^2} \end{aligned} \quad (15)$$

заметив, что $\langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle_{[0,1]} \approx e^{-(j-j')^2} (r+1) / \sqrt{\pi}$.

Учитывая (15) проведем процедуру ортогонализации линейно

независимых функций φ_j , используя процесс Гамма–Шмидта:

$$\begin{aligned}
\check{\varphi}_0 &= \varphi_0; \\
\check{\varphi}_1 &= \varphi_1 - \check{\varphi}_0 \langle \varphi_1, \check{\varphi}_0 \rangle_{[0,1]} / \langle \check{\varphi}_0, \check{\varphi}_0 \rangle_{[0,1]} \approx \varphi_1 - e^{-1} \varphi_0; \\
\check{\varphi}_2 &= \varphi_2 - \frac{\check{\varphi}_0 \langle \varphi_2, \check{\varphi}_0 \rangle_{[0,1]}}{\langle \check{\varphi}_0, \check{\varphi}_0 \rangle_{[0,1]}} - \frac{\check{\varphi}_1 \langle \varphi_2, \check{\varphi}_1 \rangle_{[0,1]}}{\langle \check{\varphi}_1, \check{\varphi}_1 \rangle_{[0,1]}} \approx \varphi_2 - (e^{-1} + e^{-3}) \varphi_1 + e^{-2} \varphi_0; \\
\check{\varphi}_3 &= \varphi_3 - \frac{\check{\varphi}_0 \langle \varphi_3, \check{\varphi}_0 \rangle_{[0,1]}}{\langle \check{\varphi}_0, \check{\varphi}_0 \rangle_{[0,1]}} - \frac{\check{\varphi}_1 \langle \varphi_3, \check{\varphi}_1 \rangle_{[0,1]}}{\langle \check{\varphi}_1, \check{\varphi}_1 \rangle_{[0,1]}} - \frac{\check{\varphi}_2 \langle \varphi_3, \check{\varphi}_2 \rangle_{[0,1]}}{\langle \check{\varphi}_2, \check{\varphi}_2 \rangle_{[0,1]}} \approx \\
&\approx \varphi_3 - (e^{-1} + e^{-3} + e^{-5}) \varphi_2 + (e^{-2} + e^{-4} + e^{-6}) \varphi_1 - e^{-3} \varphi_0; \\
\check{\varphi}_4 &= \varphi_4 - \sum_{j=0}^3 \frac{\check{\varphi}_j \langle \varphi_4, \check{\varphi}_j \rangle_{[0,1]}}{\langle \check{\varphi}_j, \check{\varphi}_j \rangle_{[0,1]}} \approx \varphi_4 - (e^{-1} + e^{-3} + e^{-5} + e^{-7}) \varphi_3 + \\
&+ (e^{-2} + e^{-4} + 2e^{-6} + e^{-8} + e^{-10}) \varphi_2 - (e^{-3} + e^{-5} + e^{-7} + e^{-9}) \varphi_1 - e^{-4} \varphi_0; \\
&\dots; \\
\check{\varphi}_j &\approx \varphi_j - \sum_{j'=0}^j \varphi_{j'} e^{-(j-j')^2} (e^{-2j}; e^2)_j / (e^{-2}; e^{-2})_{j-1},
\end{aligned}$$

где обозначение $(a; q)_j$ определяет q -символ Похгаммера.

Для заданных $\check{\varphi}_j$, учитывая (14), (15), вычислим

$$R_j = \int_0^1 \check{\varphi}_j(\zeta) d\zeta \approx 1 - \frac{\sum_{j'=0}^{j-1} R_{j'} e^{-(j-j')^2} (e^{-2j}; e^2)_j}{(e^{-2}; e^{-2})_{j-1}}, \quad R_0 \approx 1; \quad (16)$$

$$\langle \check{\varphi}_j, \check{\varphi}_j \rangle_{[0,1]} \approx \frac{r+1}{\sqrt{\pi}} (e^{-2}; e^{-2})_j. \quad (17)$$

Принимая во внимание (12), (15)–(17), получим оценку

$$\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_{[0,1]} \leq O_0 \|\eta\|_{[0,1]} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{\pi}}{r+1} \sum_{j=0}^r R_j^2 / (e^{-2}; e^{-2})_j}, \quad (18)$$

где O_0 – положительная константа, независящая от r .

Учитывая свойства функции Эйлера [12] $(e^{-2}; e^{-2})_\infty \approx \sqrt{\pi} e^{(1-\pi^2)/12}$ при рекуррентном представлении R_j (14), установим, что при больших j отношение $R_j^2 / (e^{-2}; e^{-2})_j$ стремится к $1/\sqrt{\pi}$, а $\sum_{j=0}^r R_j^2 / (e^{-2}; e^{-2})_j \geq r/\sqrt{\pi}$. Тогда оценку (18) справедливо представить в виде неравенства:

$$\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_{[0,1]} \leq O_1 \|\eta\|_{[0,1]} \sqrt{1 - r/(r+1)} = O_1 \|\eta\|_{[0,1]} / \sqrt{r+1}, \quad (19)$$

которое соответствует (10), что и требовалось доказать. \square

Для $\omega = \left\{ \sum_{k=1}^{K+1} \zeta_k P_k : \left(\sum_{k=1}^{K+1} \zeta_k = 1 \right) \wedge (\forall k = \overline{1, K+1}, \zeta_k \geq 0) \right\} \subset \mathbb{R}^K$,

$r \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{M}_r^K$ обозначим $\psi_j(\vec{\zeta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (r+1) \prod_{k=1}^{K+1} e^{-\frac{1}{2(K+1)} [2jk+1-2\zeta_k(r+1)]^2}$ и

определим норму $\|\eta\|_\omega = \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle_\omega}$ для

$$\langle \eta, \theta \rangle_\omega = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \dots \int_0^{1-\sum_{k=1}^{K-1} \zeta_k} \eta(\vec{\zeta}) \theta(\vec{\zeta}) d\zeta_K \dots d\zeta_2 d\zeta_1 \text{ при } \zeta_{K+1} = 1 - \sum_{k=1}^K \zeta_k.$$

Лемма 2. Пусть $\eta(\vec{\zeta})$ – непрерывно дифференцируемая на ω функция, а $\tilde{\eta}_r(\vec{\zeta}) = \sum_{j \in \mathbb{M}_r^K} c_j \psi_j(\vec{\zeta})$ – ее наилучшее среднеквадратичное приближение с коэффициентами разложения c_j . Тогда справедлива оценка

$$\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_\omega \leq O_2 \|\eta\|_\omega / \sqrt{r+1}, \quad (20)$$

где O_2 – независящая от r положительная постоянная.

Доказательство. Учитывая (14), (15) из леммы 1 и то, что для $K = 1$ $\psi_j(\vec{\zeta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(r+1)e^{-\frac{1}{2}[2j_1+1-2\zeta_1(r+1)]^2}$ при выполнении неравенства $\langle \psi_j, \psi_{j'} \rangle_\omega \leq e^{-(j-j')^2} (r+1) / \sqrt{\pi}$ ($j, j' \in \mathbb{M}_r^K$), установим для $K = 2$ справедливость:

$$\begin{aligned} \langle \psi_j, \psi_{j'} \rangle_\omega &= \\ &= \frac{r+1}{0.5\pi} \int_0^1 \varphi_{j_1}(\zeta_1) \varphi_{j'_1}(\zeta_1) \int_0^{1-\zeta_1} \left[\varphi_{j_2}(\zeta_2) \varphi_{j_3}(1-\zeta_1-\zeta_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \varphi_{j'_2}(\zeta_2) \varphi_{j'_3}(1-\zeta_1-\zeta_2) \right] d\zeta_2 d\zeta_1 \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_0^1 \varphi_{j_1}(\zeta_1) \varphi_{j'_1}(\zeta_1) e^{-\frac{2r(\zeta_1-1)+2\zeta_1+\sum_{k=2}^3(j_k-j'_k)}{6}} \frac{\sum_{k=2}^3(j_k-j'_k)^2}{3} d\zeta_1 \leq \\ &\leq e^{-\frac{1}{9}} e^{-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^3(j_k-j'_k)^2} \sqrt{3}/2, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\varphi_{j_k}(\zeta_k) = e^{-\frac{1}{2(K+1)}[2j_k+1-2\zeta_k(r+1)]^2}$.

Проводя аналогичные (21) вычисления, определим:

– для $K = 3$:

$$\langle \psi_j, \psi_{j'} \rangle_\omega \leq e^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^4(j_k-j'_k)^2} \sqrt{\pi}/(r+1); \quad (22)$$

– для $K = 4$:

$$\langle \psi_j, \psi_{j'} \rangle_\omega \leq e^{-\frac{9}{25}} e^{-\frac{1}{5}\sum_{k=1}^5(j_k-j'_k)^2} 5\sqrt{5}\pi / \left[8(r+1)^2 \right]; \quad (23)$$

– для $K = 5$:

$$\langle \psi_j, \psi_{j'} \rangle_\omega \leq e^{-\frac{4}{9}} e^{-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^6(j_k-j'_k)^2} \sqrt{\pi}9\pi / \left[4(r+1)^3 \right]. \quad (24)$$

Обобщая результаты (15), (21)–(24) для $\forall K \in \mathbb{N}$, получим:

$$\langle \psi_j, \psi_{j'} \rangle_\omega \leq e^{-\frac{K-1}{K+1}} e^{-\frac{1}{K+1}\sum_{k=1}^{K+1}(j_k-j'_k)^2} \left[\frac{\sqrt{K+1}}{2} \right]^{K-1} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{r+1} \right]^{K-2}. \quad (25)$$

Заметим, что доказанный в лемме 1 результат (10), который справедлив для $\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_\omega$ при $K = 1$, согласуется с решением [8] по оценке сходимости аппроксимации функции в \mathbb{R}^K радиальными Гауссовыми базисными функциями. Тогда, следуя [8], для обобщения формируемого решения ($\forall K \in \mathbb{N}$) введем K -мерное прямое \mathcal{F} и обратное \mathcal{F}^{-1} преобразования Фурье, предполагая, что $\eta(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \in \mathbb{R}^K/\omega$, [13]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta)\left(\vec{\xi}\right) &\equiv \tilde{\eta}\left(\vec{\xi}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2}} \int_{\mathbb{R}^K} \eta(\vec{x}) e^{-i\vec{x}\vec{\xi}} d\vec{x} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{K/2}} \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \dots \int_0^{1-\sum_{k=1}^{K-1} \zeta_k} \eta\left(\vec{\zeta}\right) e^{-i(\zeta_1\xi_1 + \dots + \zeta_K\xi_K)} d\zeta_K \dots d\zeta_2 d\zeta_1; \quad (26) \\ \mathcal{F}^{-1}(\tilde{\eta})(\vec{x}) &\equiv \eta(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^K} \tilde{\eta}\left(\vec{\xi}\right) e^{i\vec{x}\vec{\xi}} d\vec{\xi}, \end{aligned}$$

при $\zeta_{K+1} = 1 - \sum_{k=1}^K \zeta_k$; $i = \sqrt{-1}$.

Для (26), принимая во внимание порядок вычислений (21)–(25), получим:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Psi}_j, \tilde{\Psi}_{j'} \rangle_{L_2} &\leq e^{-\frac{[K+1]}{K+1}} e^{-\frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^{K+1} (j_k - j'_k)^2} \left[\frac{\sqrt{K+1}}{2} \right]^{K-1} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{r+1} \right]^{K-2} \leq \\ &\leq (\pi/[r+1])^{\frac{K}{2}} e^{-\frac{1}{K+1} \sum_{k=1}^{K+1} (j_k - j'_k)^2}, \quad (27) \end{aligned}$$

где $\langle \tilde{\Psi}_j, \tilde{\Psi}_j \rangle_{L_2} = \|\tilde{\Psi}_j\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^K} \tilde{\Psi}_j\left(\vec{\xi}\right), \tilde{\Psi}_j\left(\vec{\xi}\right) d\vec{\xi}$ при уточнении, что в соответствии с теоремой Планшереля [13] $\langle \tilde{\Psi}_j, \tilde{\Psi}_j \rangle_{L_2} = \langle \Psi_j, \Psi_j \rangle_{L_2}$.

Учитывая (25), (27) и теорему 4 из [(8), с. 17] определим справедливость неравенства (20), что и требовалось доказать. \square

Теорема 1. Пусть $\tilde{p}\left(\vec{Z}, t\right) = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{M}^d} c_j^{(u)}(t) \psi_j^{(u)}\left(\vec{Z}\right)$, тогда метод Галёркина для уравнения (1) сходится и справедлива оценка

$$\|p - \tilde{p}\|_\Omega \leq O_3 \|p\|_\Omega \sqrt{h/(r+1)}, \quad (28)$$

где O_3 – независящая от r положительная постоянная, h – максимальный линейный размер симплексов $\omega^{(u)}$.

Доказательство. Оператор \mathcal{L} в (1) можно представить в виде суммы операторов $\mathcal{L} = \mathcal{G} + \mathcal{F}$, где $\mathcal{G}[p] = -\sum_{l=1}^d \frac{\partial(A_l p)}{\partial Z_l}$; $\mathcal{F}[p] = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \sum_{l'=1}^d \frac{\partial^2(D_{ll'} p)}{\partial Z_l \partial Z_{l'}}$. Из доказательства теоремы 1 в [1] следует, что операторы \mathcal{L} и \mathcal{G} имеют ограниченные обратные \mathcal{L}^{-1} и \mathcal{G}^{-1} соответственно, а оператор \mathcal{F}

компактен. Отсюда следуя теореме Л. В. Канторовича [9, с. 80] справедлива оценка

$$\|p - \tilde{p}\|_{\Omega} \leq O E_{\tilde{p}}(p), \quad (29)$$

где O – независящая от r положительная постоянная; $E_{\tilde{p}}(p) = \inf_{\tilde{p} \in \Pi} \|\tilde{p} - p\|_{\Omega}$ – наилучшее приближение функции p ; $\tilde{\Pi}$ – подпространство пространства Π при $p \in \Pi$; $\mathcal{P} : \mathcal{P}[p] = \tilde{p}$; \mathcal{P} – проекционный оператор.

Из (29) следует, что для определения сходимости численного решения (1) методом Галёркина необходимо определить оценку $\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_{\Omega}$ наилучшего среднеквадратичного приближения

$$\tilde{\eta}_r(\bar{Z}) = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{M}_d^d} c_j^{(u)} \psi_j^{(u)}(\bar{Z}) \quad \text{с коэффициентами разложения } c_j^{(u)}$$

непрерывно дифференцируемой на Ω функции $\eta(\bar{Z})$. Тогда, принимая во внимание определение Ω , метод замены переменных при интегрировании по симплексу [6] и лемму 2, получим:

$$\|\eta - \tilde{\eta}_r\|_{\Omega} \leq O_4 \|\eta\|_{\Omega} \sqrt{h/(r+1)}, \quad (30)$$

где O_4 – независящая от r положительная постоянная.

Из (29), (30) при $O_3 = OO_4$ следует сходимость метода Галёркина для численного решения уравнения (1) и справедливость оценки (28), что и требовалось доказать. \square

Особенности алгоритмической реализации и тестовые примеры

Основу алгоритмической реализации сформированной численной схемы составляет процедура параметризации Ω при формировании множеств его l -мерных ($l = 0, d-1$) граней (вершин V , ребер E , граней B^0 , ячеек B^1 и пр.).

Известно [14], что исходная количественная характеристика l -мерных граней Ω определяется f - и h -векторами, соотносенными с F - и H -полиномами. Исходя из указанного правила построения $\Omega = \varepsilon^{(1)} \times \dots \times \varepsilon^{(M)} \subset \mathbb{R}^d$ $2K$ -мерными симплексами $\varepsilon^{(m)}$ справедливо представление F -полинома $\varepsilon^{(m)}$ в виде $F(\varepsilon^{(m)}, t) = \sum_{k=0}^{2K} \binom{2K+1}{k+1} t^k$, а H -полинома: $H(\varepsilon^{(m)}, t) = F(\varepsilon^{(m)}, t-1) = \sum_{k=0}^{2K} t^k$. Тогда H -полином Ω , с учетом известного обобщения бинорма Ньютона при введении

мультимодальных коэффициентов, задается соотношением

$$\begin{aligned} H(\Omega, t) &= \left(\sum_{k=0}^{2K} t^k \right)^M = \\ &= \sum_{q \in \mathbb{M}_M^{2K}} \left[\binom{M}{q_1, q_2, \dots, q_{2K+1}} \prod_{k=0}^{2K} t^{q_{k+1}} \right] = \sum_{l=0}^d h_l(\Omega) t^l. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь \mathbb{M}_M^{2K} – множество мультииндексов q , заданное по аналогии с (5) (вычислительно эффективный алгоритм формирования \mathbb{M}_M^{2K} приведен в [15]); $h_l(\Omega)$ – элементы h -вектора, определяемые суммами мультимодальных коэффициентов из (31) по правилу:

$$h_l(\Omega) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{M}_M^{2K} \\ s_q = l}} \binom{M}{q_1, q_2, \dots, q_{2K+1}}, \quad (32)$$

где $s_q = \sum_{\substack{k \in [1; 2K] \\ q_{k+1} \neq 0}} (k+1)q_{k+1}$.

Элементы $f_l(\Omega)$ f -вектора вычисляются из (32) выражением [14]

$$f_l(\Omega) = \sum_{l'=l}^d \binom{l'}{l} h_{l'}(\Omega).$$

С учетом заданных количественных характеристик Ω , выполняется формирование множеств его l -мерных граней. Изначально задается множество V с числом элементов $f_0(\Omega) = |V| = (2K+1)^M$ с использованием алгоритма генерации размещений с повторениями [16] при соблюдении соответствия в назначении элементам вектора координат каждой вершины Ω координат вершин симплексов $\varepsilon^{(m)}$ с установленным порядком формирования $\vec{Z} \in \Omega$ из $\vec{z}^{(m)} = \left(z_k^{(m)} \right)_{2K}$. Затем определяется множество $E \subset V \times V$ с числом элементов $f_1(\Omega) = |E| = (2K+1)^M KM$, составляемых комбинацией пар неповторяющихся вершин Ω , m -е подгруппы в координатах которых совпадают или отличаются в одной позиции. При этом у включаемой пары вершин в E общее число несовпадений значений координат во всех M группах не должно быть больше K .

Множество B^0 с числом элементов $f_2(\Omega) = |B^0|$ формируется по заданным V и E при представлении Ω в виде неориентированного графа $G(V, E) = \langle V, E \rangle$ и последовательном поиске в G всех циклов без хорд длиной $L = [3; 4]$. Полиномиальный алгоритм поиска циклов базируется на алгоритмах построения остового дерева (алгоритм Прима [16]) и рекурсивного поиска в глубину [16]. На исходном шаге работы алгоритма для G относительно исходной (первый элемент множества) вершины строится остовое дерево и формируется список ребер, которые в него не вошли. Затем при последовательном включении в остовое дерево по

одной из не вошедших ребер с помощью поиска в глубину осуществляется нахождение цикла без хорд длины L при проверке того, что в формируемом множестве B^0 отсутствуют повторения. Далее производится последовательное добавление в остовое дерево графа сочетаний без повторений всех пар не вошедших ребер при соответствующем поиске циклов. После завершения процедуры из исходного G исключаются все ребра, которые вошли в его остовое дерево и относительно каждой вершины полученного множества подграфов, степень которой больше 1, определяется остовое дерево при добавлении в список при условии отсутствия повторений. Затем для каждого остового дерева подграфа выше уточненные процедуры поиска циклов при добавлении ребер повторяются. По указанной последовательности действий в алгоритме задается цикл, который продолжается до тех пор, пока в получаемых множествах подграфов не найдется вершины со степенью большей 1 и не удастся найти остовое дерево.

Множество B^1 с числом элементов $f_3(\Omega) = |B^1|$ формируется по заданному B^0 . Каждая грань представляется бинарным числом, позиция элемента которого соотносится с номером ребра, а значение 1 или 0 определяет содержится ли данное ребро в этой грани или нет соответственно. Затем по B^0 и E составляется двойственный граф G' к G , вершины которого сопоставляются с гранями, а ребра определяют их смежность в Ω . Для G' выполняется последовательный поиск всех циклов B^1 без хорд длиной $L = [4; 6]$ и из B^1 выделяются ячейки по критерию того, что сумма по модулю два всех двоичных чисел, кодирующих соседствующие в элементе B^1 грани, равна нулю.

Дальнейшая процедура составления l -мерных граней выполняется по индукции.

Для сформированного Ω симплексы $\omega^{(u)}$ задаются при построении барицентрической триангуляции, которая составляется индукцией по размерности триангуляцией l -мерных граней.

Итоговый алгоритм оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний, сводящийся к оценке числа адептов $\hat{x}_{mk}(t)$ и предадептов $\hat{y}_{mk}(t)$, формируется при дискретизации наблюдений интервала анализа $t \in [t_0, t_1]$ на N подынтервалов. На выходе алгоритма формируется вектор значений $\vec{Z}_0, \vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_{N-1}$, советующих правилу $\vec{Z}(t) = \int_{\Omega} \vec{Z}p(\vec{Z}, t) d\vec{Z}$ при определении \hat{Z} в моменты времени $\tau_n = \frac{1}{3N}(t_1 - t_0)(3n + 2\sqrt{3} + 1)$ для $n = \overline{0, N-1}$.

Псевдокод итоговой функции ESTIMVOTERS оценки адептов и предадептов кандидатов приведен в алгоритме 1.

Основу работы алгоритма 1 составляет рекурсивная процедура вычислений [17] при определении интеграла (8) на подынтервалах

Алгоритм 1 Функция оценки адептов и предадептов кандидатов

```

1: function ESTIMVOTERS( $t_0, t_1, N, \vec{W}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}$ )
2:    $k = 3^{-1/2}$ ;
3:    $h = \frac{t_1 - t_0}{k(N-1)}$ ;
4:    $\mathbf{S}' = \mathbf{S}^{-1}$ ;
5:    $\vec{C} = \text{NORMVECTOR}(\mathbf{S}'\vec{W})$ ;
6:    $\vec{Z}_0 = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{M}_r^d} c_j^{(u)} \Psi_j^{(u)}$ ;
7:    $t = (0,5 + 0,5k)h$ ;
8:    $\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}((0,5 - 0,5k)h)$ ;
9:   for  $n = 0$  to  $N - 1$  do
10:     $\mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{Q}(t)$ ;
11:     $\mathbf{Q}^{(0)} = 0,5h(\mathbf{Q}^{(1)} + \mathbf{Q}^{(2)})$ ;
12:     $\mathbf{G} = \exp[\mathbf{S}'\mathbf{Q}^{(0)}]$ ;
13:     $\vec{C} = \text{NORMVECTOR}(\mathbf{G}\vec{C})$ ;
14:     $\vec{Z}_n = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{M}_r^d} c_j^{(u)} \Psi_j^{(u)}$ ;
15:     $t = t + kh$ ;
16:     $\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{Q}^{(2)}$ ;
17:   return  $\vec{Z}$ 

```

$\vec{C}(\tau_n) = \exp \left[\mathbf{S}^{-1} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \mathbf{Q}(\tau) d\tau \right] \mathbf{S}^{-1} \vec{C}(\tau_{n-1})$ ($\vec{C}(0) = \vec{W}$), реализуемая с применением кубатурных формул второго порядка. Уточним, что в ESTIMVOTERS вспомогательная функция NORMVECTOR реализует условия нормировки, по определенному соотношению (9) правилу.

Для верификации алгоритма с использованием САПР MathCAD выполнены решения тестовых задач для $K = 3, M = 4$ и $K = 4, M = 4$. Результаты, полученных графических зависимостей приведены на рисунках 1.

Получаемый результат по сформированному алгоритму (рис. 1, *e, d*) сопоставлялся: 1) с прямым численным решением методом Дорманда–Принса [18] дифференциального уравнения математической модели [1] (рис. 1, *a, б*); 2) численным решением методом Дорманда–Принса дифференциального уравнения математической модели [1] для сглаженных наблюдаемых интенсивностей $\alpha_{kl}(t), \gamma_{kl}(t)$ алгоритмом скользящей медианы (рис. 1, *в, г*). Из полученных графиков (рис. 1) следует, что в случае явного преимущества одного из кандидатов (рис. 1, *a*) нет смысла в определении оценок по алгоритму 1. Для выявления кандидата-победителя достаточно ограничиться численным

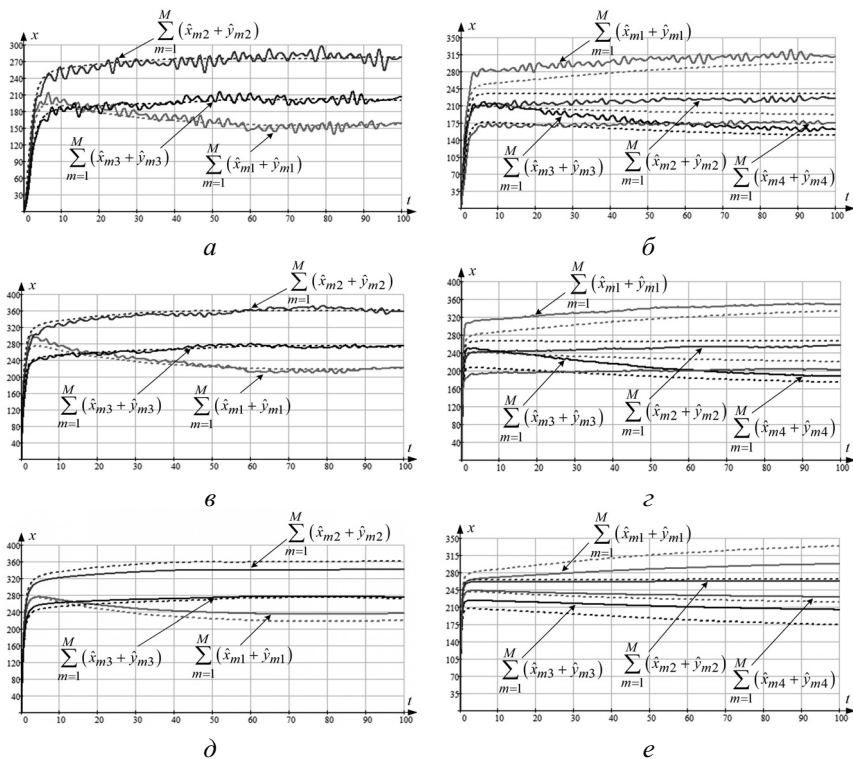


Рис. 1. Примеры графических зависимостей оценок числа adeptов и предадептов кандидатов, полученных: *a*, *б* – численным решением уравнения математической модели [1]; *в*, *г* – численным решением уравнения математической модели [1] для сглаженных $\alpha_{kl}(t)$, $\gamma_{kl}(t)$; *e*, *д* – по сформированному алгоритму 1

решением метода Дорманда–Принса дифференциального уравнения математической модели [1] (рис. 1, *a, б*) и/или при сглаживании (рис. 1, *в, г*) наблюдаемых $\alpha_{kl}(t)$, $\gamma_{kl}(t)$ типовыми методами анализа временных рядов. При наличии спорных по числу (пересечение кривых и их близость, см. рис. 1, *e*) оцененных adeptов и предадептов для корректного анализа процессов формирования информационного воздействия на электорат при информационно-аналитическом сопровождении выборных кампаний необходимо применять составленный в настоящей работе алгоритм 1.

Заключение

Основной результат работы состоит в исследовании сходимости для численной схемы оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний [1], сводящейся к 8 при аппроксимации (3) кусочно-полиномиальными базисными функциями (6). Скорость сходимости (28) определена из исследования частной задачи среднеквадратичного приближения на симплексе Гауссовыми базисными функциями некоторой непрерывно дифференцируемой функции. Оценка (20) среднеквадратичного приближения для симплекса получена при обобщении сформированной оценки (10) среднеквадратичного приближения Гауссовыми базисными функциями на отрезке и результатов [8]. В развитие работы [1] уточнены особенности алгоритмической реализации численной схемы при $K \gg 2$, $M \gg 1$ и снятии вопросов о построении триангуляции исходной области анализа и численного интегрирования.

Литература

1. Полянский И. С., Логинов К. О., Ильин Н. И., Великих А. С. Математическая модель оценки информационного воздействия на электорат в социальных медиа при проведении выборных кампаний // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34. – №1.
2. Петров А. П., Маслов А. И., Цаплин Н. А. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве в социуме // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27. – №12. – С. 137–148.
3. Михайлов А. П., Петров А. П., Прончев Г. Б., Прончева О. Г. Моделирование спада общественного внимания к прошедшему разовому политическому событию // ДАН. – 2018. – Т. 480. – №4. – С. 397–400. DOI: 10.7868/S0869565218160028
4. Петров А. П., Прончева О. Г. Моделирование выбора позиций индивидами при информационном противоборстве с двухкомпонентной повесткой // Математическое моделирование. – 2019. – Т. 31. – №7. – С. 91–108.
5. Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О. Г. Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26. – №3. – С. 65–74.
6. Ильинский А. С., Полянский И. С., Степанов Д. Е. О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в \mathbb{R}^2 для уравнения Гельмгольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т.31. – №1. – С. 3–18.

7. Полянский И.С. Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29. – №11. – С. 140–150.
8. Kainen P. C., Kurkova V., Sanguineti M. Estimates of approximation rates by Gaussian radial-basis functions // CANNGA 2007: Adaptive and Natural Computing Algorithms. – p. 11–18. doi: 10.1007/978-3-540-71629-7_2
9. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. – 2-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2006, 288 с.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва : Наука, 1978, 512 с.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. – Москва : Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 1100 с.
12. Andrews G. E., Berndt B. C. Ramanujan's lost notebook, Part V. New York : Springer-Verlag, 2013, p. 326.
13. Strichartz R. A guide to distribution theory and Fourier transforms. World Scientific, NJ, 2003, p. 213.
14. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). – Москва : Наука. Глав. Ред. Физ-мат лит., 1981, 344 с.
15. Полянский И.С., Степанов Д.Е., Кетух Д.К., Шевченко В.А. Электродинамический анализ зеркальных антенн в приближении барицентрического метода // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2020. – Т.23. – №4. – С. 36–47.
16. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. – Москва : Изд. дом «Вильямс», 2010. – 1296 с.
17. Полянский И.С., Архипов Н.С., Мисюрин С.Ю. О решении проблемы оптимального управления адаптивной многолучевой зеркальной антенны // Автоматика и телемеханика. – 2019. – №1. – С. 83–100.
18. Dormand J. R., Prince P. J. A family of embedded Runge–Kutta formulae // J. Comp. Appl. Math. – 1980. – v.6. – №1. – p. 19–26. doi: 10.1016/0771-050X(80)90013-3