УДК: 517.977

Об одной задаче управления с неполной информацией

Никольский М. С.[1*]

[1*]Факультет ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, Ленинские горы, д. 1, стр. 52 Москва, 119991, Россия.

Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s): mni@mi-ras.ru;

Аннотация

Задачи управления с неполной информацией представляют большой интерес для современной теории управления, так как более адекватно описывают реальные процессы, происходящие, например, в технике и экономике. В настоящей работе рассматривается линейный управляемый объект, находящийся под воздействием ограниченных аддитивных возмущений. Целью субъекта, управляющего системой, является гарантированное выведение за конечное время пучка траекторий на заданное терминальное множество, имеющее вид полупространства в фазовом пространстве конфликтно управляемого объекта. В статье получены конструктивные достаточные условия для решения поставленной задачи управления. Рассмотрен пример.

Ключевые слова: управляемый объект, терминальное множество, пучок траекторий.

Получено редакцией 04.06.2024; внесены авторские правки 16.07.2024; принята к публикации 12.08.2024

1 Введение

В статье рассматривается линейный конфликтно управляемый процесс с терминальным множеством M в виде замкнутого полупространства. Этот процесс рассматривается с точки зрения первого игрока. Его цель побыстрее вывести управляемый объект на терминальное множество. Считается, что первый игрок знает динамические характеристики управляемого объекта, но не знает управления второго игрока. В статье получены достаточные условия, при которых первый игрок может гарантировать выведение пучка возможных движений на терминальное множество. Изучаются свойства наименьшего гарантированного времени завершения процесса. Рассмотрен пример.

2 Основная часть

Расматривается управляемый объект вида (ср. с [1, 2]):

$$\dot{x} = Ax + g(u) + h(v), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ ($n \geqslant 1$), A — постоянная $n \times n$-матрица, $u \in U$ — компакту из R^k ($k \geqslant 1$), $g(u)$ — n-мерная функция, определённая и непрерывная на U, $v \in V$ — компакту из R^l ($l \geqslant 1$), $h(v)$ — n-мерная функция, определённая и непрерывная на V. Условимся в дальнейшем через R^m ($m \geqslant 1$) обозначать m-мерное арифметическое евклидово пространство m-мерных векторов, записываемых в виде столбцов, со стандартным скалярным произведением векторов $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и со стандартной длиной вектора $|\cdot|$.

Движение вектора $x(t)$ (см. (1)) происходит при $t \geqslant 0$ из начальной точки $x(0) = x_0$ и протекает под воздействием пары измеримых по Лебегу управлений $u(t) \in U$, $v(t) \in V$, $t \geqslant 0$. Соответствующее паре допустимых управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и начальному состоянию $x(0) = x_0$ решение уравнения (1) можно описать (см. [1],[2],) формулой Коши вида:

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}(g(u(s)) + h(v(s)))\, ds, \tag{2}$$

где e^{tA} — экспоненциал матрицы tA (о свойствах e^{tA} см., например, в [1],[2],). Отметим, что интеграл в (2) понимается в смысле Лебега. Мы будем считать, что измеримые управления $u(t)$, $v(t)$ находятся в распоряжении двух игроков: 1-й игрок распоряжается выбором $u(t)$, а 2-й игрок распоряжается выбором $v(t)$. Считается, что 1-й игрок заинтересован в скорейшем выведении вектора $x(t)$ на терминальное множество M вида

$$M = \{x \in R^n \colon \langle x, \varphi \rangle \geqslant \alpha\}, \tag{3}$$

где φ — фиксированный вектор единичной длины из R^n, $\alpha \in R^1$ — фиксированная константа. Терминальные множества M вида (3) представляют интерес, например, для механических и экономических приложений. Отметим, что геометрически множество M является замкнутым полупространством в R^n. Предполагается, что 1-й игрок знает динамические характеристики конфликтно управляемого объекта (1), т. е. знает матрицу A, компакты U, V, функции $g(u)$, $u \in U$, $h(v)$, $v \in V$, а также x_0 и M. Считается, что измеримое управление $v(t) \in V$, $t \geqslant 0$, не известно 1-му игроку. Управление $v(t) \in V$, $t \geqslant 0$, моделирует возможные возмущения, действующие на управляемый объект (1). Можно считать, что роль 2-го игрока играет Природа, действия которой не предсказуемы, но они ограничены некоторыми рамками.

Игровой динамический процесс (1) рассматривается с точки зрения 1-го игрока. Для дальнейших рассмотрений введём компакты

$$P = g(U), \quad Q = h(V) \tag{4}$$

и новый конфликтно управляемый объект (ср. с (1))

$$\dot{z} = Az + p + q, \tag{5}$$

где $z \in R^n$, $p \in P$, $q \in Q$, $z(0) = x_0$. Терминальное множество для управляемого объекта (5) определим (см. (3)) в виде

$$M = \{z \in R^n \colon \langle z, \varphi \rangle \geqslant \alpha\}. \tag{6}$$

В качестве допустимых управлений для конфликтно управляемого объекта (5) рассматриваются измеримые по Лебегу функции $p(t) \in P$, $q(t) \in Q$, $t \geqslant 0$, где множества P, Q определяются формулой (4). Игрока, распоряжающегося управлением $p(t)$, будем называть I-м игроком, а игрока, распоряжающегося управлением $q(t)$, будем называть II-м игроком. Цель I-го игрока — по возможности быстрее осуществить приведение вектора $z(t)$ (см. (5)) из начального состояния $z_0 = x_0$ на множество M (см. (6)) при произвольном измеримом управлении $q(t) \in Q$, $t \geqslant 0$. При этом предполагается, что I-й игрок знает динамические характеристики конфликтно управляемого объекта (5), т. е. знает матрицу A, компакты P, Q, а также x_0, M, но он не знает измеримое управление $q(t) \in Q$, $t \geqslant 0$. Игровой динамический процесс (5) рассматривается с точки зрения I-го игрока.

Отметим, что для произвольной допустимой пары измеримых управлений $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ для решения уравнения (5) с начальным условием $z(0) = x_0$ при $t \geqslant 0$ имеет место (см. [1, 2]) формула Коши (ср. с (2))

$$z(t) = e^{tA}x_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}(p(s) + q(s))\, ds, \tag{7}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Заметим, что при произвольных измеримых по Лебегу функциях $u(t) \in U$, $v(t) \in V$, $t \geqslant 0$, функции $p(t) = g(u(t)) \in P$, $q(t) = h(v(t)) \in Q$ измеримы по Лебегу при $t \geqslant 0$. Обратно: если фиксировать измеримые функции $p(t) \in P$, $q(t) \in Q$, $t \geqslant 0$, то применяя лемму об обратной функции (см. Лемму 3A на стр. 175, 176 из [1]), можно построить измеримые функции $u(t) \in U$, $v(t) \in V$, $t \geqslant 0$, такие, что при $t \geqslant 0$ $p(t) = g(u(t))$, $q(t) = h(v(t))$. Отсюда следует, что рассматривая игровой процесс (4)–(6)

с точки зрения I-го игрока при $z(0) = x_0$, нетрудно получить соответствующие результаты для игрового процесса (1), (3) для 1-го игрока при начальном условии $x(0) = x_0$.

С помощью формулы (7) можно оценить при $t \geqslant 0$ воздействие управлений II-го игрока на динамический игровой процесс (5), используя множество

$$\Omega(t) = \bigcup_{q(\cdot)} \int_0^t e^{(t-s)A} q(s)\, ds, \tag{8}$$

где $q(s)$, $s \geqslant 0$, — произвольное измеримое по Лебегу управление, удовлетворяющее ограничению $q(s) \in Q$. Применяя понятие интеграла от многозначного отображения и его свойства (см. [2], можно для $\Omega(t)$ (см. (8)) при $t \geqslant 0$ обосновать следующую формулу:

$$\Omega(t) = \int_0^t e^{rA} Q\, dr. \tag{9}$$

Отметим, что многозначное отображение $e^{rA}Q$ компактнозначно и непрерывно в метрике Хаусдорфа при $r \geqslant 0$ (см. [2],). Поэтому множество $\Omega(t) \neq \varnothing$ при $t \geqslant 0$ и является непустым выпуклым компактом, зависящим от t непрерывным образом в метрике Хаусдорфа (см. [2],).

Рассмотрим при $t \geqslant 0$ множество (см. (7)–(9))

$$D(t, p(\cdot), x_0) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} p(s)\, ds + \int_0^t e^{rA} Q\, dr, \tag{10}$$

где $p(s)$, $s \geqslant 0$, — произвольное допустимое управление I-го игрока, а операция $+$ понимается в алгебраическом смысле.

Теперь для конфликтно управляемого объекта (5) с точки зрения I-го игрока можно сформулировать следующую оптимизационную задачу.

Задача. Пусть $z(0) = x_0 \notin M$ и при некоторых $\tau > 0$ и допустимом управлении $\hat{p}(t)$, $t \in [0, \tau]$, выполняется включение (см. (10))

$$D(\tau, \hat{p}(\cdot), x_0) \subset M. \tag{11}$$

Требуется найти наименьшее из таких τ (обозначим его τ_0) и соответствующее допустимое управление $\tilde{p}(t)$, $t \in [0, \tau_0]$, для которых выполняется включение

$$D(\tau_0, \tilde{p}(\cdot), x_0) \subset M. \tag{12}$$

Замечание 1. *Отметим, что при рассмотрении конфликтно управляемых объектов (1), (5) 1-й и I-й игроки не обладают динамической* *информацией о фазовых состояниях $x(t)$, $z(t)$ и управлениях $v(t)$, $q(t)$ соответственно в текущий момент времени $t \geqslant 0$. Такого рода текущая информация обычно присутствует в известных формализациях теории дифференциальных игр (см., например, [3–5], и др.). Т.о. для конфликтно управляемых объектов (1), (5) 1-й и I-й игрок, соответственно, сужены в своих информационных возможностях, и их стратегиями являются программные управления.*

Теорема 1. *Пусть $x_0 \notin M$ и при некоторых $\tau > 0$ и допустимом управлении $\hat{p}(t)$, $t \in [0, \tau]$, выполняется включение (11). Пусть τ_0 — инфимум из таких τ. Тогда при некотором допустимом управлении $\tilde{p}(t)$, $t \in [0, \tau_0]$, выполняется включение (12).*

Доказательство. Обозначим через π матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на одномерное подпространство (см. (6))

$$L = \{x \in R^n \colon x = \lambda\varphi, \text{ где } \lambda \in R^1\}. \tag{13}$$

Из (8)–(11) с помощью матрицы π получаем включение

$$\pi e^{rA} x_0 + \int\limits_0^\tau \pi e^{(r-s)A} \hat{p}(s)\, ds + \int\limits_0^\tau \pi e^{rA} Q\, dr \subset \pi M, \tag{14}$$

где $+$ означает алгебраическое сложение множеств. $\square$

Нам понадобится операция геометрического вычитания множеств $\underline{*}$ (см., например, [3]). Отметим, что в выпуклом анализе эту операцию иногда называют разностью множеств по Минковскому.

Определение 1. *Пусть S_1, S_2 — некоторые непустые множества из R^n. Тогда их геометрической разностью $S_1 \underline{*} S_2$ называют совокупность векторов $y \in R^n$ таких, что*

$$y + S_2 \subset S_1, \tag{15}$$

где операция сложения $+$ понимается в алгебраическом смысле.

Отметим, что не всегда множество векторов y из включения (15) непустое, т. е. множество $S_1 \underline{*} S_2$ может быть и пустым.

Обозначим при $t \geqslant 0$

$$F(t) = \pi M \,\underline{*} \int\limits_0^t \pi e^{rA} Q\, dr, \tag{16}$$

где интеграл понимается в смысле теории многозначных отображений (см. [2]). Отметим, что (см. (6), (13))

$$\pi M = \{x \in R^n \colon x = \lambda\varphi, \text{ где } \lambda \geqslant \alpha\} \tag{17}$$

и что при $t \geqslant 0$ множество

$$\Omega_1(t) = \int_0^t \pi e^{rA} Q\, dr \tag{18}$$

совпадает (см. (9)) с множеством $\pi\Omega(t)$, причём многозначное отображение $\Omega_1(t)$ компактнозначно, выпуклозначно и непрерывно в смысле метрики Хаусдорфа при $t \geqslant 0$. Из сказанного вытекает, что при $t \geqslant 0$ $\Omega_1(t)$ является отрезком из L, натянутым на концевые точки $\beta_1(t)\varphi$, $\beta_2(t)\varphi$, где скалярные функции $\beta_i(t)$, $i = 1, 2$, непрерывны при $t \geqslant 0$ и $\beta_1(t) \leqslant \beta_2(t)$. Кратко можно записать при $t \geqslant 0$:

$$\Omega_1(t) = [\beta_1(t)\varphi, \beta_2(t)\varphi]. \tag{19}$$

Используя соотношения (16)–(19), нетрудно обосновать при $t \geqslant 0$ формулу

$$F(t) = \{x \in R^n \colon x = \lambda\varphi, \text{ где } \lambda \geqslant (\alpha - \beta_1(t))\varphi\}. \tag{20}$$

Из соотношений (14), (16) и определения геометрической разности получаем следующее включение:

$$\pi e^{\tau A} x_0 + \int_0^\tau \pi e^{(\tau - s)A} \hat{p}(s)\, ds \in F(\tau). \tag{21}$$

Умножая скалярно на вектор φ обе части включения (21), получим (см. (20)) неравенство

$$\langle \pi e^{\tau A} x_0, \varphi\rangle + \int_0^\tau \langle \pi e^{(\tau - s)A} \hat{p}(s)\, \varphi\rangle\, ds \geqslant \alpha - \beta_1(\tau). \tag{22}$$

Отметим, что под скалярным произведением вектора φ на непустое множество $W \subset R^n$ мы понимаем объединение $\bigcup\limits_{w \in W} \langle w, \varphi\rangle$. Обозначим при $t \geqslant 0$

$$\gamma(t) = \int_0^t \max_{p \in P} \langle \pi e^{rA} p, \varphi\rangle\, dr. \tag{23}$$

Отметим, что здесь подинтегральная функция непрерывна на полуоси $r \geqslant 0$. Используя лемму об обратной функции (см. Лемму 3А на с. 175, 176 в [1]), можно показать, что при любом фиксированном $t \geqslant 0$

существует такая измеримая при $s \in [0,t]$ функция $\overline{p}(s,t) \in P$, что

$$\gamma(t) = \int\limits_0^t \langle \pi e^{(t-s)A} \overline{p}(s,t), \varphi \rangle \, ds.$$

Нетрудно видеть (см. (23)), что в (22)

$$\int\limits_0^\tau \langle \pi e^{(\tau-r)A} \hat{p}(s), \varphi \rangle \, ds \leqslant \gamma(\tau)$$

и поэтому выполняется неравенство

$$\langle \pi e^{\tau A} x_0, \varphi \rangle + \gamma(\tau) + \beta_1(\tau) \geqslant \alpha. \tag{24}$$

Анализируя процесс получения неравенства (24) из включения (11), можно обосновать, что из выполнения неравенства (24) при данном $\tau > 0$ следует выполнение включения (11) при некотором допустимом управлении $\hat{p}(t)$, $t \in [0,\tau]$. Это обстоятельство позволяет нам вместо включения вида (11) изучать неравенство (24). В частности, для оправдания включения вида (12) достаточно обосновать, что нижняя грать $\tau_0 > 0$ среди величин $\tau > 0$, для которых выполняется неравенство (24), достигается (отметим, что $\langle \pi x_0, \varphi \rangle < \alpha$). Достижение нижней грани $\tau_0 > 0$ среди таких $\tau > 0$ вытекает из непрерывности функции $\langle \pi e^{tA} x_0, \varphi \rangle + \gamma(t) + \beta_1(t)$ при $t \geqslant 0$. Напомним, что в соотношении (24) $\tau > 0$ и $\langle \pi x_0, \varphi \rangle < 0$. Поэтому для нижней грани $\tau_0 > 0$ выполняется равенство

$$\langle \pi e^{\tau_0 A} x_0, \varphi \rangle + \gamma(\tau_0) + \beta_1(\tau_0) = \alpha.$$

Таким образом, для нахождения величины $\tau_0 > 0$ нужно найти наименьший корень $\tau > 0$ уравнения

$$\langle \pi e^{\tau A} x_0, \varphi \rangle + \gamma(\tau) + \beta_1(\tau) = \alpha. \tag{25}$$

Напомним, что функция $\gamma(t)$ определяется при $t \geqslant 0$ формулой (23). Что касается функции $\beta_1(t)$, то можно при $t \geqslant 0$ обосновать формулу

$$\beta_1(t) = \int\limits_0^t \min_{q \in Q} \langle \pi e^{rA} q, \varphi \rangle \, dr, \tag{26}$$

где подинтегральная функция непрерывна по $r \geqslant 0$, а интеграл (как и интеграл в формуле (23)) можно понимать в смысле Римана. Отметим, что функции $\gamma(t)$, $\beta_1(t)$ (см. (23), (26)) непрерывно дифференцируемы по t при $t \geqslant 0$. Это обстоятельство можно использовать при нахождении наименьшего корня $\tau > 0$ уравнения (25).

Что касается нахождения управления $\tilde{p}(t)$, $t \in [0, \tau_0]$ из нашей Теоремы, то в качестве такового подходит (см. (23)) любое допустимое управление $p(t)$, $t \in [0, \tau_0]$, удовлетворяющее почти всюду на $[0, \tau_0]$ условию максимума вида

$$\langle \pi e^{(\tau_0 - t)A} p(t), \varphi \rangle = \max_{p \in P} \langle \pi e^{(\tau_0 - t)A} p, \varphi \rangle.$$

В частности, такой функцией является функция $\overline{p}(s, \tau_0)$ (см. выше), которая строится с помощью Леммы 3А на с. 175, 176 из [1], и удовлетворяет соотношению

$$\gamma(\tau_0) = \int\limits_0^{\tau_0} \langle \pi e^{(\tau_0 - s)A} \overline{p}(s, \tau_0), \varphi \rangle \, ds.$$

Пример 1. *Рассмотрим двумерный линейный конфликтно управляемый объект вида (5), где*

$$A = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{pmatrix}, \quad P = \{p \in R^2 \colon p_1 = 0, p_2 \in [\mu_1, \mu_2]\},$$
$$Q = \{q \in R^2 \colon q_1 = 0, q_2 \in [\nu_1, \nu_2]\},$$

здесь μ_i, ν_i — концы отрезков, причём $\mu_1 \leqslant \mu_2$, $\nu_1 \leqslant \nu_2$. Положим $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$,

$$M = \{x \in R^2 \colon x_1 \geqslant \alpha\},$$

где $\alpha \in R^1$ — фиксированное число. В этом примере при $t \geqslant 0$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t, \sin t \\ -\sin t, \cos t \end{pmatrix},$$
$$\langle \pi e^{tA} x_0, \varphi \rangle = \cos t x_0^1 + \sin t x_0^2,$$
$$\gamma(t) = \int\limits_0^t \max_{p_2 \in [\mu_1, \mu_2]} \sin r \cdot p_2 \, dr,$$
$$\beta_1(t) = \int\limits_0^t \min_{q_2 \in [\nu_1, \nu_2]} \sin r \cdot q_2 \, dr.$$

Последние три формулы позволяют в этом примере конструктивно выписать соответствующее уравнение (25) для искомого времени $\tau > 0$ и получить, в частности, конструктивные оценки сверху для этого времени.

3 Заключение

В статье рассмотрена линейная конфликтно управляемая система с терминальным множеством M, имеющим вид замкнутого полупространства. Здесь первый игрок заинтересован в быстрейшем выведении фазовой точки на M при отсутствии информации о выборе управления второго игрока. Получены конструктивные достаточные условия, при которых первый игрок может гарантировать окончание процесса на M за конечное время. Изучены свойства гарантированного времени окончания процесса управления на M. Рассмотрен пример.

Благодарности

Хочу поблагодарить профессора. Н.Л.Григоренко за полезные для меня обсуждения этой работы.

Конфликт интересов

Отсутствует

Вклад авторов

М. С. Никольский – вывод формул , написание текста статьи.

Список литературы

[1] *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1976.

[2] *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. Линейная теория. — М.: Высшая школа, 2001.

[3] *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // *Математический сборник.* — 1980. — Т. 112, № 3. — С. 307–330.

[4] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М. Наука, 1974.

[5] *Петросян Л.А.and Зенкевич Н.А.and Шевкопляс Е.В.* Теория игр. — БХВ-Петербург., 2012.