

Уравнения динамики квадрокоптера

Горьков В. П.^{1*}, Григоренко Н. Л.¹

^{1*} Факультет, ВМК МГУ, Москва, 100190, Россия.

*Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s):

v-p-gorkov@yandex.ru;

Соавторы: grigor@cs.msu.ru;

Аннотация

Задачи управления коптерами (беспилотными летательными аппаратами) рассматриваются в литературе для математических моделей с различными вариантами фазовых переменных и управляющих параметров, для различных классов управлений. В статье приведен вывод модели динамики квадрокоптера с углами Эйлера и Крылова в неподвижной системе координат.

Ключевые слова: модель движения квадрокоптера, терминальное управление

Получено редакцией 23.12.2024; внесены авторские правки 21.01.2025; принята к публикации 17.02.2025

1 Введение

Полет квадрокоптера обеспечивается одновременным вращением четырех его винтов. Винты закреплены на двух пересекающихся балках. Винты 1 и 3 вращаются (вид сверху) против часовой стрелки, а 2 и 4 — по часовой (Рис. 1).

Подъемная сила, как и на несущем винте обычного вертолета, создается за счет вращения лопастей, расположенных под некоторым углом к плоскости вращения.

При движении лопасть сталкивается с неподвижным воздухом, действует на него с силой, направленной перпендикулярно плоскости лопасти. Воздух, по третьему закону Ньютона, действует на лопасть с силой, равной по величине и противоположной по направлению F_a (Рис. 2).

Сила, действующая на лопасть, направлена перпендикулярно лопасти и равна

$$F_a = k\nu^2,$$

где k — постоянная, ν — угловая скорость.

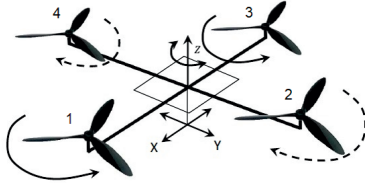


Рис. 1: Общий вид квадрокоптера

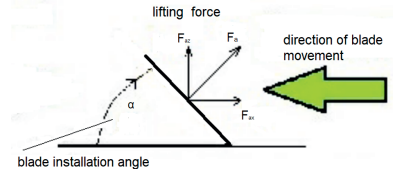


Рис. 2: Лопасть винта

Сила F_a имеет составляющие:

$$F_{ax} = kv^2 \sin(\alpha), \quad F_{az} = kv^2 \cos(\alpha),$$

где α - угол установки лопасти. Сила F_{az} обеспечивает создание подъемной силы, а сила F_{ax} - вращающего момента, вокруг вертикальной оси. Суммарную по всем лопастям квадрокоптера проекцию $u = \sum_{i=1}^4 (F_{az})_i = \sum_{i=1}^4 kv_i^2$ будем называть подъемной силой. Равнодействующая проекций сил по горизонтали будет равна 0, однако суммарный момент их может отличаться от 0. Именно для уравнивания моментов вращения вокруг вертикали винты, находящиеся на разных балках, вращаются в противоположных направлениях.

2 Описание движения тела

Движение тела - это изменение положения рассматриваемого тела относительно какого-то другого тела, с которым связывают систему координат. Движение квадрокоптера можно представить в виде суммы двух движений - поступательного движения центра масс и вращательного вокруг центра масс [1].

Зададим рабочие системы координат (Рис. 3). Будем считать Землю плоской и пренебрежем ее движением в пространстве. Тогда система координат O_nxyz с триэдром $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, связанная с Землей, будет инерциальной. Система $Ox'y'z'$ с триэдром $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, связанная с квадрокоптером, будет подвижная. Ее начало совместим с центром масс квадрокоптера. Положение точки О квадрокоптера в инерциальной системе определяется радиусом-вектором $\vec{R} = (x, y, z)$. Будем считать квадрокоптер твердым телом. Тогда вектор $\vec{\rho}$ постоянный. Вектор $\vec{\rho}$, записанный в системе O_nxyz , обозначим $\vec{r}$. Имеет место равенство $\vec{r} = S\vec{\rho}$, где S — матрица перехода от подвижной системы к неподвижной [2].

Сумму сил тяги винтов удобно записать в системе координат, связанной с квадрокоптером, она имеет вид:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^4 \vec{f}_i = \sum_{i=1}^4 k_i \nu_i^2 \vec{k}',$$

где $\vec{k}'$ - единичный вектор, направленный вдоль Oz' (неинерциальная система координат), k_i некоторые положительные константы, ν_i - угловые скорости винтов, $i = \overline{1,4}$. Запишем закон поступательного движения центра масс квадрокоптера в неподвижной системе:

$$m\vec{a} = -mg\vec{k} + S(t)\vec{u}, \quad (1)$$

где m - общая масса тела. $\vec{u}$ - сумма сил тяги винтов. Остальными силами, действующими на квадрокоптер, пренебрежем.

3 Матрица перехода

Подвижная система координат $Ox'y'z'$ служит для описания ориентации квадрокоптера в инерциальной системе. Для удобства введем дополнительную систему $Oxyz$, начало которой совмещено с началом подвижной системы, а направление осей совпадает с осями неподвижной системы O_nxyz . Любое положение подвижной системы координат можно получить, совершив три поворота дополнительной системы вокруг соответствующих осей. Первый поворот выполняется на угол ψ вокруг оси Oz . Оси Ox и Oy занимают положения Ox_1 и Oy_1 . Второй поворот - вокруг оси Ox_1 на угол θ . Оси Oy_1 и Oz занимают положения Oy_2 и Oz' . Третий поворот - вокруг оси Oz' на угол ϕ . Оси Ox_1 и Oy_2 занимают положения Ox' и Oy' . Результирующий поворот удобно характеризовать тройкой углов (ψ, θ, ϕ) вокруг соответствующих осей. В литературе углы поворотов носят имя Эйлера (Рис. 4) [3],[4],[5].

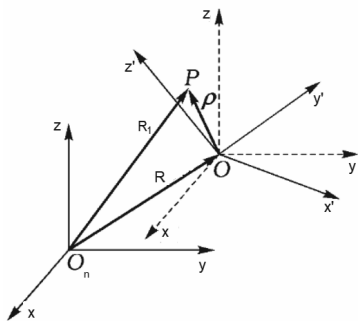


Рис. 3: Оси систем координат

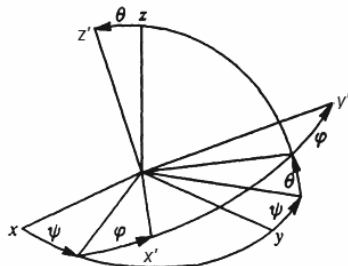


Рис. 4: Углы Эйлера

Результирующей матрицей будет произведение матриц поворотов, участвующих в рассматриваемом процессе:

$$S(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$S(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} -s_\psi c_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & -s_\psi c_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta \\ c_\psi c_\theta s_\phi + s_\psi c_\phi & c_\psi c_\theta c_\phi - s_\psi s_\phi & -c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & s_\theta c_\phi & c_\theta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь использованы сокращения $\sin \psi = s_\psi$, $\cos \theta = c_\theta$.

4 Уравнения поступательного движения квадрокоптера

Системы координат, используемые в механике, могут быть инерциальными и неинерциальными. Законы Ньютона работают в инерциальных системах координат. Критерием разделения систем координат является первый закон Ньютона. Инерциальная система не может двигаться с ускорением.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для поступательного движения центра масс квадрокоптера (в системе O_nxyz - так как она инерциальная):

$$m\vec{a} = -mg\vec{k} + S\vec{u} \quad (3)$$

где m - общая масса системы. $S(t)$ - матрица перехода из подвижной в неподвижную систему (2), $\vec{u}$ - сумма сил винтов:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^4 \vec{f}_i = \sum_{i=1}^4 k_i \nu_i^2 \vec{k}',$$

где $\vec{k}'$ - единичный вектор, направленный вдоль Oz' (неинерциальная система координат), k_i некоторые положительные константы, ν_i - угловые скорости винтов. В координатной форме имеем:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = us_\phi s_\theta, \\ m\ddot{y} = -uc_\phi s_\theta, \\ m\ddot{z} = uc_\theta - mg. \end{cases}$$

В этих формулах m —масса квадрокоптера, $\vec{a}$ — его ускорение, g — ускорение свободного падения. u —суммарная сила всех четырех роторов квадрокоптера. Сила i -го ротора пропорциональна квадрату частоты вращения $f_i = k\nu_i^2, i = \overline{1, 4}$. Здесь k — некая физическая константа.

5 Угловая скорость вращательного движения

Вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ можно записать в виде

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{i}_1 + \dot{\phi}\vec{k}',$$

где $\vec{k}, \vec{i}_1, \vec{k}'$ — орты осей вращения. Запишем $\vec{\omega}$ в подвижной системе координат. Из Рис. 4 видно, что

$$\dot{\psi}\vec{k} = \dot{\psi}(\sin\theta\sin\phi\vec{i}' + \sin\theta\cos\phi\vec{j}' + \cos\theta\vec{k}'), \quad \dot{\theta}\vec{i}_1 = \dot{\theta}(\cos\phi\vec{i}' - \sin\phi\vec{j}').$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}\omega'_x &= \dot{\psi}s_\phi s_\theta + \dot{\theta}c_\phi, \\ \omega'_y &= \dot{\psi}c_\phi s_\theta - \dot{\theta}s_\phi, \\ \omega'_z &= \dot{\psi}c_\theta + \dot{\phi}.\end{aligned}$$

По предложению Эйлера $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$ обозначают p, q, r .

Если ввести векторы $\vec{\eta} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})^T$ и $\vec{\omega} = (p, q, r)^T$, то эту систему можно записать в виде:

$$\vec{\omega} = W_1(\eta)\vec{\eta},$$

где

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\phi s_\theta & c_\phi & 0 \\ c_\phi s_\theta & -s_\phi & 0 \\ c_\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Обратная связь между вектором $\vec{\eta} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ и $\vec{\omega} = (p, q, r)$ дается выражением:

$$\vec{\eta} = W_1^{-1}(\eta)\vec{\omega}, \quad (5)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_\phi}{s_\theta} & \frac{c_\phi}{s_\theta} & 0 \\ c_\phi & -s_\phi & 0 \\ -\frac{s_\phi}{tg\theta} & -\frac{c_\phi}{tg\theta} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (6)$$

6 Вращательное движение

Вращательное движение имеет свою специфику. Вместо линейной скорости появляется угловая скорость. Вместо силы появляется момент силы, импульса тела — угловой момент. Угловой момент тела L относительно неподвижной точки выражается интегралом

$$L = \int_V \rho \vec{r}' \times \vec{v} dV, \quad (7)$$

где V — объем тела, ρ — плотность тела, $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ — радиус-вектор элементарного объема dV и v — его линейная скорость. В системе

координат, связанной с телом, скорость $\vec{v}$ возникает вследствие вращения тела вокруг начала координат и равна

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (8)$$

$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$. Подставляя (8) в (7), получим

$$\vec{L} = \int_V \rho \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') dV. \quad (9)$$

Угловой момент можно представить с помощью линейного преобразования [5]

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (10)$$

где I -матрица инерции квадрокоптера.

Симметрия квадрокоптера относительно плоскостей $O_1x'z'$ и $O_1y'z'$ позволяет сделать утверждение, что $I_{x'y'} = I_{y'x'} = I_{x'z'} = I_{z'x'} = 0$. Выражение углового момента принимает вид

$$L = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

Уравнение вращательного движения квадрокоптера [3]

$$\frac{dI\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega} = \vec{T}_{ext}, \quad (11)$$

где момент внешних сил, действующий в подвижной системе координат, определяется выражением

$$\vec{T}_{ext} = \tau_{x'}\vec{i} + \tau_{y'}\vec{j} + \tau_{z'}\vec{k}, \quad (12)$$

в котором

$$\begin{aligned} \tau_{x'} &= lk(f_2 - f_4) = lk(\nu_2^2 - \nu_4^2), \\ \tau_{y'} &= lk(f_3 - f_1) = lk(\nu_3^2 - \nu_1^2), \\ \tau_{z'} &= bk(f_1 - f_2 + f_3 - f_4) = bk(\nu_1^2 + \nu_3^2 - \nu_2^2 - \nu_4^2), \end{aligned}$$

где k — некая физическая константа, l, b —величины, определяемые размерами квадрокоптера, $\nu_i, i = \overline{1, 4}$, — частоты вращения роторов квадрокоптера. Расписывая левую часть уравнения (11), получим:

$$\begin{aligned} I_{x'x'}\dot{p} + (I_{z'z'} - I_{y'y'})qr &= \tau_{x'}, \\ I_{y'y'}\dot{q} + (I_{x'x'} - I_{z'z'})pr &= \tau_{y'}, \\ I_{z'z'}\dot{r} + (I_{y'y'} - I_{x'x'})pq &= \tau_{z'}. \end{aligned} \quad (13)$$

Все уравнения движения квадрокоптера собираем в единую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= u s_\phi s_\theta, & m\ddot{y} &= -u c_\phi s_\theta, & m\ddot{z} &= u c_\theta - mg, \\
\dot{\psi} &= \frac{s_\phi}{s_\theta} p + \frac{c_\phi}{s_\theta} q, & \dot{\theta} &= c_\phi p - s_\phi q, & \dot{\phi} &= -\frac{s_\phi}{tg_\theta} p - \frac{c_\phi}{tg_\theta} q + r, \\
\dot{p} &= \frac{\tau_{x'}}{I_{x'x'}} + \frac{(I_{y'y'} - I_{z'z'})}{I_{x'x'}} r q, & \dot{q} &= \frac{\tau_{y'}}{I_{y'y'}} + \frac{(I_{z'z'} - I_{x'x'})}{I_{y'y'}} p r, \\
\dot{r} &= \frac{\tau_{z'}}{I_{z'z'}} + \frac{(I_{x'x'} - I_{y'y'})}{I_{z'z'}} p q.
\end{aligned} \tag{14}$$

Эта система уравнений требует задания начальных величин всех фазовых переменных задачи. Параметрами управления в этой системе являются $u, \tau_{x'}, \tau_{y'}, \tau_{z'}$.

7 Задача терминального управления квадрокоптером

Система уравнений содержит физические параметры, характеризующие тело (массу, его размеры), силы, действующие на тело (гравитацию, сопротивление среды), функцию траектории ($\vec{r}(t)$), по которой движется тело и его скорость $\dot{\vec{r}}(t)$. Среди множества задач о движении тела выделим задачи управления, где требуется определить силу управления телом $\vec{u}(t)$, которая перемещает тело из начального положения $\vec{r}(t_0)$ в конечное $\vec{r}(t_1)$ за заданный интервал $T = t_1 - t_0$. Такие задачи относятся к классу задач „терминального управления“. Методам решения терминальных задач посвящена работа [6]. Один из подходов к решению задач терминального управления - поиск управления среди полиномов по времени. Поскольку управление телом порождает его ускорение, а ускорение равно второй производной траектории, то траектория является тоже полиномом от времени. Неизвестные коэффициенты полиномов находятся из граничных значений. Для простейшей модели квадрокоптера (пренебрегаем сопротивлением воздуха, гравитационная постоянная не зависит от положения тела и др.) уравнения движения будут иметь вид (6) с краевыми условиями

$$\begin{array}{llll}
x(0) = x_0, & \dot{x}(0) = \dot{x}_0, & x(T) = x_1, & \dot{x}(T) = \dot{x}_1, \\
y(0) = y_0, & \dot{y}(0) = \dot{y}_0, & y(T) = y_1, & \dot{y}(T) = \dot{y}_1, \\
z(0) = z_0, & \dot{z}(0) = \dot{z}_0, & z(T) = z_1, & \dot{z}(T) = \dot{z}_1, \\
\phi(0) = \phi_0, & \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0, & \phi(T) = \phi_1, & \dot{\phi}(T) = \dot{\phi}_1, \\
\theta(0) = \theta_0, & \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, & \theta(T) = \theta_1, & \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_1, \\
\psi(0) = \psi_0, & \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0, & \psi(T) = \psi_1, & \dot{\psi}(T) = \dot{\psi}_1.
\end{array}$$

Параметры квадрокоптера для конкретной модели взяты из работы [7] $m=0.468 \text{ kg}$, $l=0.225 \text{ m}$, $k = 2.98010^{-6}$, $b = 1.14010^7$, $I_{xx} = 4.85610^{-3} \text{ kg m}^2$, $I_{yy} = 4.85610^{-3} \text{ kg m}^2$, $I_{zz} = 8.80110^{-3} \text{ kg m}^2$.

Разберем некоторые терминальные задачи.

8 Вывод квадрокоптера по вертикали в заданное положение

Рассмотрим вариант поступательного движения квадрокоптера, т.е. случай, когда все точки тела описывают одинаковые траектории. Эти задачи являются простейшими задачами терминального управления. Будем рассматривать движение центра масс квадрокоптера.

Рассмотрим задачу 1. Требуется найти функцию управления, которая обеспечит вывод квадрокоптера по вертикали из начального состояния $z_0, \dot{z}_0$ в конечное $z_1, \dot{z}_1$ за промежуток времени $[0, T]$. Для этой задачи из (6) остается одно уравнение:

$$\ddot{z} = -g + f, \quad (15)$$

с краевыми условиями $z(0) = z_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0, z(T) = z_1, \dot{z}(T) = \dot{z}_1$. Два остальных уравнения дают постоянные значения $x = x_0, y = y_0$. Поскольку мы имеем 4 дополнительных величины, то искомая траектория в классе полиномов будет полиномом 3 степени:

$$z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3.$$

Из уравнения (15) следует, что искомое управление f может быть выбрано в виде полинома 1 степени:

$$f = g + 2 c_2 + 6 c_3 t. \quad (16)$$

Уравнение для $z(t)$ принимает вид:

$$\ddot{z} = 2 c_2 + 6 c_3 t.$$

Проинтегрировав дважды предыдущее уравнение и используя начальное и конечное состояния квадрокоптера, получим:

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_0 + 2 c_2 T + 3 c_3 T^2, \quad z_1 = z_0 + \dot{z}_0 T + c_2 T^2 + c_3 T^3. \quad (17)$$

Из системы (17) найдем коэффициенты c_2, c_3 :

$$c_2 = \frac{3(z_1 - z_0)}{T^2} - \frac{(\dot{z}_1 + 2\dot{z}_0)}{T}, \quad c_3 = -\frac{2(z_1 - z_0)}{T^3} + \frac{(\dot{z}_1 + \dot{z}_0)}{T^2}. \quad (18)$$

При начальных и конечных значениях фазовых переменных $z_0 = 0 \text{ m}$, $\dot{z}_0 = 0 \text{ m/s}$, $z_1 = 100 \text{ m}$, $\dot{z}_1 = 0 \text{ m/s}$, $T = 20 \text{ s}$, функция управления имеет вид $f = c_2 + c_3 t$, где $c_2 = 0.75 \text{ m/s}^2$, $c_3 = -0.025 \text{ m/s}^3$.

Она обеспечивает перемещение квадрокоптера из начального в конечное состояние.

Рассмотрим задачу 2. Пусть в начальном состоянии управляемая сила квадрокоптера уравнивает силу тяжести $f(0) = g$, что приводит к дополнительному условию $\ddot{z}(0) = 0$. Искомую траекторию можно искать среди полиномов 4-ой степени:

$$z(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + e_4 t^4.$$

Тогда из уравнения (15) следует, что искомое управление может быть выбрано в виде полинома 2 степени

$$f = g + 2 e_2 + 6 e_3 t + 12 e_4 t^2. \quad (19)$$

Учитывая, что $e_2 = 0$, уравнение для $z(t)$ принимает вид:

$$\ddot{z} = 6 e_3 t + 12 e_4 t^2.$$

Проинтегрируем дважды это уравнение.

$$\dot{z}(t) - \dot{z}(0) = 3 e_3 t^2 + 4 e_4 t^3,$$

$$z(t) - z(0) - \dot{z}(0) t = e_3 t^3 + e_4 t^4.$$

Запишем эти уравнения для момента $t = T$ и получим систему для определения e_3, e_4 :

$$\begin{aligned} e_3 T^3 + e_4 T^4 &= z_1 - z_0 - \dot{z}_0 T, \\ 3 e_3 T^2 + 4 e_4 T^3 &= \dot{z}_1 - \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Ее решение имеет вид:

$$e_3 = \frac{4 (z_1 - z_0)}{T^3} - \frac{\dot{z}_1 + 3\dot{z}_0}{T^2}, \quad e_4 = -\frac{3 (z_1 - z_0)}{T^4} + \frac{(\dot{z}_1 + 2 \dot{z}_0)}{T^3}.$$

При начальных и конечных значениях фазовых переменных $z_0 = 0 \text{ m}$, $\dot{z}_0 = 0 \text{ m/s}$, $\ddot{z}_0 = 0$, $z_1 = 100 \text{ m}$, $\dot{z}_1 = 0 \text{ m/s}$, $T = 20 \text{ s}$, функция управления будет $f = g + 6 e_3 t + 12 e_4 t^2$, где $e_3 = 15.81 \text{ m/s}^2$, $e_4 = -1.2 \text{ m/s}^3$. Она обеспечивает перемещение квадрокоптера из начального в конечное состояние.

Рассмотрим задачу 3. Потребуем, чтобы квадрокоптер в конечной точке смог зависнуть. Для этого его скорость не должна меняться в этой точке. Следовательно, в конечной точке появляется условие $\dot{z}_1 = 0$. Уравнением траектории будет полином 4 степени:

$$z(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + d_4 t^4.$$

Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} = 2d_2 + 6 d_3 t + 12 d_4 t^2.$$

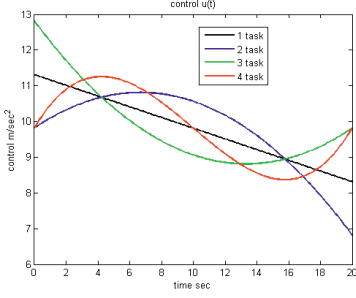


Рис. 5: Функция управления

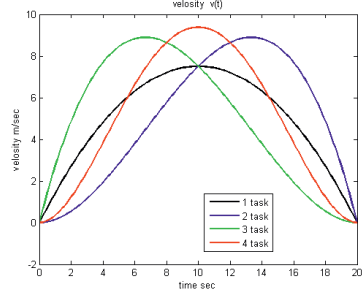


Рис. 6: Скорости квадрокоптера

Для решения этой задачи управление будем искать в виде полинома второй степени

$$f = g + 2 d_2 + 6 d_3 t + 12 d_4 t^2. \quad (21)$$

Проинтегрируем уравнение движения (15). Получим систему уравнений для коэффициентов d_2, d_3, d_4 :

$$\begin{aligned} d_2 + 3 d_3 T + 6 d_4 T^2 &= 0, \\ 2d_2T + 3d_3T^2 + 4d_4T^3 &= \dot{z}_1 - \dot{z}_0, \\ d_2 T^2 + d_3 T^3 + d_4 T^4 &= z_1 - z_0 - \dot{z}_0 T. \end{aligned}$$

Ее решением будет $d_4 = \frac{\dot{z}_1 - \dot{z}_0}{T^3} + \frac{3(z_1 - z_0)}{T^4}$, $d_3 = -\frac{(3\dot{z}_1 - \dot{z}_0)}{T^2} - \frac{8(z_1 - z_0)}{T^3}$, $d_2 = -3 d_3 T - 6 d_4 T^2$. При тех же начальных и конечных значениях фазовых переменных и при $\dot{z}_1 = 0$ расчеты функции управления, скорости тела и его траектории представлены на (Рис. 5)-(Рис. 7). Рассмотрим задачу 4, когда квадрокоптер в начальной и конечной точках может зависать, т. е. скорость не должна меняться в этих точках. Следовательно, в начальной и в конечной точках появляются условия $\ddot{z}_0 = 0, \ddot{z}_1 = 0$. Уравнением траектории будет полином 5 степени:

$$z(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + p_4 t^4 + p_5 t^5.$$

При $t = 0$ получим коэффициенты:

$$p_0 = z(0), p_1 = \dot{z}(0), p_2 = \ddot{z}(0).$$

Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} = 2p_2 + 6p_3 t + 12p_4 t^2 + 20p_5 t^3.$$

Для решения задачи 4 управление будем искать в виде полинома третьей степени

$$f = g + 2p_2 + 6p_3 t + 12p_4 t^2 + 20p_5 t^3. \quad (22)$$

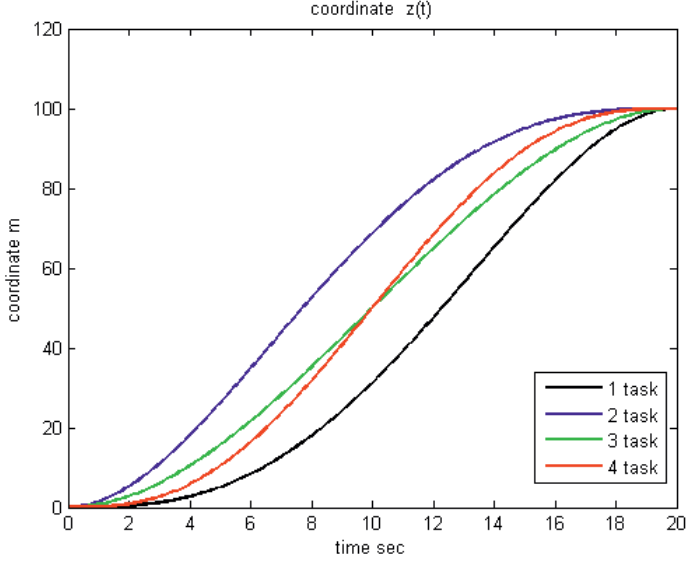


Рис. 7: Траектории квадрокоптера

Проинтегрируем уравнение движения (15). Получим систему уравнений для коэффициентов p_3, p_4, p_5 . Для коэффициентов p_3, p_4, p_5 получим систему при выполнении условий при $t = T$:

$$\begin{aligned} p_3 T^3 + p_4 T^4 + p_5 T^5 &= z_1 - z_0 - (\dot{z}_1 - \dot{z}_0)T, \\ 3p_3 T^2 + 4p_4 T^3 + 5p_5 T^4 &= \dot{z}_1 - \dot{z}_0, \\ 6p_3 T + 12p_4 T^2 + 20p_5 T^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ее решением будет:

$$\begin{aligned} p_3 &= -\frac{(4\dot{z}_1 + 6\dot{z}_0)}{T^2} + \frac{10(z_1 - z_0)}{T^3}, \\ p_4 &= \frac{7\dot{z}_1 + 8\dot{z}_0}{T^3} - \frac{15(z_1 - z_0)}{T^4}, \\ p_5 &= -\frac{3(\dot{z}_1 + \dot{z}_0)}{T^4} + \frac{6(z_1 - z_0)}{T^5}, \end{aligned} \tag{23}$$

При тех же начальных и конечных значениях фазовых переменных расчеты функции управления, скорости тела и его траектории представлены на (Рис. 5)-(Рис. 7).

Отметим, что значения управления зависят от краевых условий.

9 Углы Крылова в динамике квадрокоптера

В научной литературе часто встречаются работы, в которых матрица перехода составляется из матриц последовательных вращений вокруг различных осей координат. В этом случае преобразование координат называют преобразованием углами Крылова. Рассмотрим поворот дополнительной системы относительно оси Oz в плоскости $Ox'y'$ на угол ϕ . Второй поворот на угол θ выполняют вокруг оси, которое занимает координатная ось Oy' после первого поворота. Третий поворот на угол ψ выполняют вокруг оси, которое занимает ось Ox' после двух предыдущих поворотов. Результирующий поворот удобно характеризовать тройкой углов поворотов (ϕ, θ, ψ) вокруг соответствующих осей, которые дают тройку 3 : 2 : 1. [8].

Матрицей перехода результирующего поворота будет произведение матриц переходов углов, участвующих в рассматриваемом процессе.

Матрица перехода от подвижной системы к дополнительной:

$$S(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$S(\psi, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta & s_\psi c_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Связь между векторами $\vec{\eta} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})^T$ и $\vec{\omega} = (p, q, r)^T$, можно записать в виде:

$$\vec{\omega} = W_2(\eta)\vec{\eta},$$

где

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Обратная связь между вектором $\vec{\eta} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ и $\vec{\omega} = (p, q, r)$ дается выражением:

$$\vec{\eta} = W_2^{-1}(\eta)\vec{\omega}, \quad (26)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi tg\theta & c_\phi tg\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & \frac{s_\phi}{c_\theta} & \frac{c_\phi}{c_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Система уравнений движения при использовании углов Крылова будет иметь вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -us_\theta, \\ m\ddot{y} &= us_\phi c_\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{z} &= uc_\phi c_\theta - mg, \\
\dot{\phi} &= p + s_\phi tg_\theta q + c_\phi tg_\theta r, \\
\dot{\theta} &= c_\phi q - s_\phi r, \\
\dot{\psi} &= \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r, \\
\dot{p} &= \frac{\tau_{x'}}{I_{x'x'}} + \frac{(I_{y'y'} - I_{z'z'})}{I_{x'x'}} r q, \\
\dot{q} &= \frac{\tau_{y'}}{I_{y'y'}} + \frac{(I_{z'z'} - I_{x'x'})}{I_{y'y'}} p r, \\
\dot{r} &= \frac{\tau_{z'}}{I_{z'z'}} + \frac{(I_{x'x'} - I_{y'y'})}{I_{z'z'}} p q.
\end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим задачу 5. Квадрокоптер движется в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью V_0 , его траекторией является окружность радиуса R_0 . Найти управление, которое обеспечивает такую траекторию [9].

При изучении поступательного движения, рассматриваем квадрокоптер как материальную точку массой m , помещенную в центр тяжести тела. Силы, действующие на нее, есть сила тяжести mg и сила тяги u . Для горизонтального движения управление квадрокоптера должно иметь вертикальную компоненту, уравнивающую силу тяжести, а горизонтальная компонента — должна обеспечить центростремительную силу при движении по окружности. Эти компоненты определяют управление квадрокоптером:

$$u = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mV_0^2}{R_0}\right)^2}.$$

Компоненты u определяют угол поворота квадрокоптера ϕ вокруг оси Ox :

$$\tan \phi = \frac{V_0^2}{gR_0}.$$

Вращательное движение квадрокоптера будет характеризоваться скоростью изменения угла ψ . Обход окружности квадрокоптер выполнит за время $t = \frac{2\pi}{V_0}$. Следовательно, скорость изменения угла ψ будет равна $\dot{\psi} = \frac{2\pi}{t}$. Из условия задачи следует, что $\dot{\phi} = \dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$. При этих значениях углов (25) упрощается и принимает вид:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Эта система дает значения угловых скоростей квадрокоптера $q = \dot{\psi} \sin \phi$ и $r = \dot{\psi} \cos \phi$. Следует не забывать, что угловые скорости найдены в подвижной системе координат.

10 Заключение

Уравнения движения квадрокоптера записаны в неподвижной системе координат. Из выражений (6) и (28) следует, что матрицы перехода векторных величин разнятся для углов Эйлера и Крылова. Так же существуют различия для связи между величинами $\vec{\eta} = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ и $\vec{\omega} = (p, q, r)$.

Список литературы

- [1] *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. — М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1978. — 575 с.
- [2] *Ильин В. А., Ким Г. Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1998. — 320 с.
- [3] *Поляхов Н. Н., Зегджа С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. — М.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 538 с.
- [4] *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. — М.: ЧОРО, 1999. — 572 с.
- [5] *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
- [6] *Батенко А. П.* Системы терминального управления. — М.: Радио и Связь, 1984.
- [7] *Luukkonen T.* Modelling and control of quadcopter: Tech. Rep. Mat-2.4108. — Espoo, Finland: Aalto University, School of Science, 2011. — aug. — Independent research project in applied mathematics. URL: https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf.
- [8] *Alderete T. S.* Simulator Aero Model Implementation. — 1997. — NASA AMES Research Center, Moffett Field, California. URL: <https://aviationsystems.arc.nasa.gov/publications/hitl/rtsim/Toms.pdf>.
- [9] *Cook M. V.* Flight Dynamics Principles. — 2nd edition. — Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2007. — 491 p.