

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

V

СБОРНИК РАБОТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией

А. Д. Горбунова, В. И. Дмитриева, Е. А. Жоголева

Под общим руководством И. С. Березина

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1966

Из содержания Т.5, 1966г.,

- В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров.*** Дифракция плоского электромагнитного поля на идеально проводящей полуплоскости, погруженной в однородное полупространство. **187**
- В. И. Дмитриев.*** Дифракция произвольного электромагнитного поля на цилиндрических телах. **253**

$$= \sum_{\mu=1}^m \sum_{i=1}^n e_i \Phi(z_{\mu}) \Delta_{\text{кон}}^{\mu} (x_i, z_j) X_s(x_i), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_v(-\tau) = a_v(0), \quad a_v(h + \tau) = a_v(h).$$

Из уравнений (25) при подходящем выборе параметра $\alpha > 0$ можно определить приближенное решение задачи расчета арочной плотины. Заметим, что

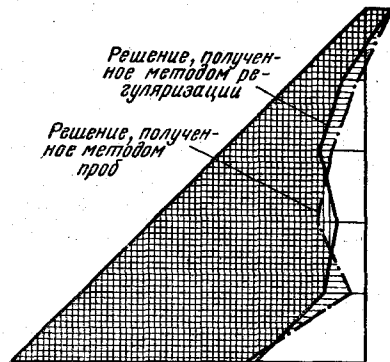


Рис. 6

если в уравнениях (25) положить $\alpha = 0$, то получим систему алгебраических уравнений, эквивалентную уравнениям (15).

На рис. 6 приводятся результаты расчета модельной задачи по применяемому в инженерной практике методу арок—консолей и на основе схемы данного параграфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Westergaard Н. М. Principles of analysis of Arch Dams by Trial Loads. «Proc. of the 3rd Intern. Congress of Applied Mechanics», v. II. Stockholm, 1930.
2. Bureau Of Reclamation U. S. Dept. of Interior, Treatise on Dams, Chapter 10, Arch Dams, Denver, 1948.
3. Розин Л. А. Метод расчленения в теории оболочек. «Прикл. матем. и мех.», 1961, т. 25, вып. 5.
4. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3.
5. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1.
6. Рабинович И. М. Основы строительной механики стержневых систем. М., 1956.
7. Гримзе Л. Б. и Розин Л. А. Новый способ расчета арочных плотин по методу арок—консолей. «Информационный сборник Ленгидэпа», 1960, № 16.
8. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. ДАН СССР, 1943, т. 35, № 5.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1955.

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ПОГРУЖЕННОЙ В ОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В работах [1] и [2] дано строгое решение задачи на идеально проводящей полуплоскости, вертикально расположенной в однородном проводящем полупространстве. Эта задача — одна из основных в теории индукционного метода электро-разведки. В [1], [2] показано также, что решение задачи сводится к решению некоторого интегрального уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов и их суммы, и предлагается метод нахождения аналитической формы решения этого уравнения.

В статье рассматривается общая постановка задачи дифракции плоского электромагнитного поля на идеально проводящей полуплоскости, расположенной под углом к вертикали в однородном проводящем полупространстве. Задача также сводится к решению интегрального уравнения на полупрямой, но с ядром более сложного вида. Методом работы [1] получено решение этого интегрального уравнения и проведена оценка точности решения в зависимости от угла наклона полуплоскости и глубины ее залегания.

Пусть имеется двухслойная среда. При $z > 0$ — воздух с волновым числом k_0 , при $z < 0$ — однородное пространство (проводящее) с волновым числом k . В проводящей среде, пренебрегая токами смещения, имеем волновое число

$$k = (1 + i)\kappa;$$

зависимость от времени $e^{-i\omega t}$.

В проводящем полупространстве на глубине h расположена идеально проводящая полуплоскость под углом α к вертикали (рис. 1). Первичное поле не зависит от координаты x , следовательно и полное поле не зависит от x и состоит из суммы полей 2-х типов:

1) электрического — $\vec{E} \{E_x, 0, 0\}$, $\vec{H} \{0, H_y, H_z\}$

$$H_y = -\frac{i}{k_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}; \quad H_z = \frac{i}{k_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}; \quad (1)$$

2) магнитного — $\vec{E} \{0, E_y, E_z\}$, $\vec{H} \{H_x, 0, 0\}$,

$$E_y = \frac{ik_0}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial z}; \quad E_z = -\frac{ik_0}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (2)$$

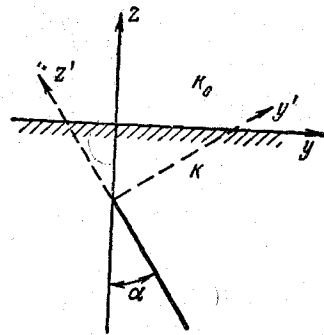


Рис. 1

Функции $E_x(y, z)$ и $H_x(y, z)$ — решения следующих краевых задач:

$$1. \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) E_x(y, z) = -2\pi f_e(y, z) \text{ при } z > 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x(y, z) = 0 \text{ при } z < 0, \quad (3)$$

при $z=0$ функции E_x и $\frac{\partial E_x}{\partial z}$ непрерывны. На полуплоскости $E_x=0$.

$$2. \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) H_x(y, z) = -2\pi f_m(y, z) \text{ при } z > 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_x(y, z) = 0 \text{ при } z < 0, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_x(y, z) = 0 \quad \text{при } z < 0.$$

При $z=0$ непрерывны H_x и $\frac{1}{k^2} \frac{\partial H_x}{\partial z}$, а на полуплоскости $\frac{\partial H_x}{\partial n} = 0$ (\vec{n} — нормаль к полуплоскости). Функции f_e и f_m определяются распределением источников, создающих первичное поле.

Для упрощения задачи выберем прямоугольную систему координат, связанную с полуплоскостью (полуплоскость лежит на линии $y'=0$):

$$y = y' \cos \alpha - z' \sin \alpha, \\ z = y' \sin \alpha + z' \cos \alpha - h$$

(в дальнейшем штрихи для упрощения записи опускаются).

Решение задач будем искать в виде потенциалов простого и двойного слоев соответственно:

$$E_x(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^0 v(z) G_e(y_0, z_0, y=0, z) dz + E_x^0(y_0, z_0), \quad (5a)$$

$$H_x(y_0, z_0) = \int_{-\infty}^0 \mu(z) \frac{\partial G_m}{\partial y}(y_0, z_0, y=0, z) dz + H_x^0(y_0, z_0), \quad (5b)$$

где $v(z)$ и $\mu(z)$ — плотности потенциалов простого и двойного слоев, пропорциональные токам, наводимым падающим полем на полуплоскости.

Функции $G_e(y, z, y_0, z_0)$ и $G_m(y, z, y_0, z_0)$ есть функции источника соответствующих краевых задач в новых переменных (y, z, y_0, z_0) . Для интересующих нас случаев они имеют вид:

при $z_0 > 0, z < 0$ (z, z_0 — старые координаты)

$$G_{e,m} = 2 \int_0^{\infty} \exp \{ -\mu_0 (y_0 \sin \alpha + z_0 \cos \alpha) + \\ + \mu (y \sin \alpha + z \cos \alpha) - h(\mu - \mu_0) \} \times \cos \{ \lambda [(y - y_0) \cos \alpha - \\ - (z - z_0) \sin \alpha] \} \psi_{e,m} d\lambda, \quad (6a)$$

где $\psi_e = \frac{1}{\mu + \mu_0}$; $\psi_m = \frac{k^2}{\mu k_0^2 + \mu_0 k^2}$;

при $z_0 < 0$, $z < 0$ (z, z_0 — старые координаты)

$$G_{e,m} = K_0 [-ikr] + \int_0^{\infty} \exp \{ (y + y_0) \sin \alpha + (z + z_0) \cos \alpha - 2h\mu \} \times \\ \times \cos \{ \lambda [(y - y_0) \cos \alpha - (z - z_0) \sin \alpha] \} \varphi_{e,m}(\lambda) \frac{d\lambda}{\mu}; \quad (66)$$

$$\varphi_e = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0}; \quad \varphi_m = \frac{\mu k_0^2 - \mu_0 k^2}{\mu k_0^2 + \mu_0 k^2};$$

$$r = \sqrt{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2},$$

$$\operatorname{Re} \mu > 0, \quad \mu_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}.$$

Таким образом, задача сведена к нахождению функций $v(z)$ и $\mu(z)$ — токов, наводимых на полуплоскости падающим полем. Для этих функций можно получить интегральные уравнения, если опустить точку (x_0, y_0) на полуплоскость и удовлетворить граничным условиям. Обычным способом получим

$$\int_{-\infty}^0 v(z) \{ K_0 [-ik|z - z_0|] + P_1(z_0, z) \} dz = -E_x^0(y_0 = 0, z_0), \quad (7a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^0 \mu(z) K_0 [-ik|z - z_0|] dz + \int_{-\infty}^0 P_2(z, z_0) \mu(z) dz = \\ = -\frac{\partial H_x^0}{\partial y_0}(y_0 = 0, z_0), \quad (76)$$

где

$$P_{1,2}(z, z_0) = \int_0^{\infty} e^{\mu(z+z_0)\cos\alpha} \cos \{ \lambda [(z - z_0) \sin \alpha] \} f_{1,2}(\lambda) \frac{d\lambda}{\mu},$$

$$f_1(\lambda) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} e^{-2h\mu}; \quad f_2(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - k^2 \sin^2 \alpha)(\mu k_0^2 - \mu_0 k^2)}{\mu k_0^2 + \mu_0 k^2} e^{-2h\mu}.$$

Решение интегральных уравнений (7a) и (76) можно получить при достаточно общих правых частях. Здесь же мы рассмотрим падение плоской электромагнитной волны

$$E_x^0(y_0, z_0) = E_{x0}^0 \exp \{ -iky_0 \sin \alpha - ikz_0 \cos \alpha - ikh \},$$

$$H_x^0(y_0, z_0) = H_{x0}^0 \exp \{ -iky_0 \sin \alpha - ikz_0 \cos \alpha - ikh \},$$

(волна падает нормально на поверхность раздела сред). При этом уравнения (7a) и (76) (если сделать соответствующую замену переменных и функций) принимают вид

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\xi) \{ K_0 [-ik|\tau - \xi|] + \int_0^{\infty} e^{-\mu(\xi+\tau)\cos\alpha} \cos \{ \lambda(\xi - \tau) \sin \alpha \} f_1 \frac{d\lambda}{\mu} \} d\xi = \\ = e^{-ikt\cos\alpha}, \quad (8a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + k^2 \right) \int_0^{\infty} K_0 [-ik|\tau - \xi|] \varphi_2(\xi) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} \varphi_2(\xi) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\mu(\tau+\xi)\cos\alpha} \cos \{ \lambda(\xi - \tau) \sin \alpha \} f_2(\lambda) \frac{d\lambda}{\mu} \right\} = \\ = ik \sin \alpha e^{-ikt\cos\alpha}. \quad (86)$$

Для решения уравнений (8a) и (86) воспользуемся методом, предложенным в работах [1] и [2], основой которого является метод Винера—Хопфа, разработанный для решения интегральных уравнений на полуоси, с ядром, зависящим от разности аргументов. Эта методика основана, как известно, на факторизации функции, голоморфной в полосе. В нашем случае метод Винера—Хопфа позволяет перейти от исходного интегрального уравнения первого рода к интегральному уравнению второго рода, но не для самой функции, а для преобразования Фурье—Лапласа от нее. Получаемое при этом интегральное уравнение решается методом последовательных приближений, что позволяет получить окончательный результат. Электромагнитные поля могут быть выражены через преобразование Лапласа от функций φ . Решение интегральных уравнений (8a) и (86) существует и единственно, если существует (и единственно) решение интегральных уравнений

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(\xi) K_0 [-ik|\xi - \tau|] d\xi = g_1(\tau), \quad (9a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + k^2 \right) \int_0^{\infty} \varphi_2(\xi) K_0 [-ik|\xi - \tau|] d\xi = g_2(\tau), \quad (96)$$

а функция $P_{1,2}(\tau, \xi)$ такова, что норма интегрального оператора, порожденного этой функцией, достаточно мала в пространстве C . Уравнения (9а) и (9б) имеют единственное решение, если наложить дополнительное условие вида (условия «на ребре»)

$$\varphi_1(\xi) \rightarrow \frac{c_1}{\sqrt{\xi}} \text{ при } \xi \rightarrow 0,$$

$$\varphi_2(\xi) \rightarrow C_2 \sqrt{\xi} \text{ при } \xi \rightarrow 0, \quad \varphi_2(0) = 0.$$

Перейдем к решению уравнений (7а) и (7б). Для этого функции $P(\tau, \xi)$ удобно представить в виде

$$P_{1,2}(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu_1 \xi - \mu_2 \tau} F_{1,2}(\lambda) d\lambda,$$

где

$$\mu_1 \equiv \mu \cos \alpha - i\lambda \sin \alpha, \quad \operatorname{Re} \mu_1 > 0,$$

$$\mu_2 \equiv \mu \cos \alpha + i\lambda \sin \alpha, \quad \operatorname{Re} \mu_2 > 0,$$

$$F_1(\lambda) = \frac{e^{-2h\mu}}{2\mu} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0},$$

$$F_2(\lambda) = \frac{e^{-2h\mu}}{2\mu} \frac{\mu k_0^2 - \mu_0 k^2}{\mu k_0^2 + \mu_0 k^2} (\lambda^2 - k^2 \sin^2 \alpha).$$

При этом

$$\int_0^{\infty} \varphi_{1,2}(\xi) P_{1,2}(\xi, \tau) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{1,2}(\mu_1) e^{-\mu_2 \tau} F_{1,2}(\lambda) d\lambda,$$

$$\Phi_{1,2}(\mu_1) = \int_0^{\infty} e^{-\mu_1 \xi} \varphi_{1,2}(\xi) d\xi.$$

Кроме того,

$$\int_0^{\infty} K_0[-ik|\tau - \xi|] \varphi_{1,2}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\tau s} \Phi_{1,2}(s) K(s) ds,$$

$$K(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K_0[-ik|x|] e^{-xs} = \frac{i\pi}{\sqrt{k^2 + s^2}}.$$

Переходя в уравнениях (8а) и (8б) к преобразованию Лапласа, получим

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{ds}{p-s} \left\{ \Phi_1(s) K(s) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\mu_1) \frac{F_1(\lambda)}{s + \mu_2} d\lambda - \frac{1}{s - ik \cos \alpha} \right\} = 0, \quad (10a)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{ds}{p-s} \left\{ (k^2 + s^2) \Phi_2(s) K(s) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\mu_1) \frac{F_2(\lambda)}{s + \mu_2} d\lambda - \frac{ik \sin \alpha}{s - ik \cos \alpha} \right\} = 0. \quad (10б)$$

Применяя к уравнениям (10а) и (10б) метод Винера—Хопфа, приходим к функциональным соотношениям

$$\Phi_1(s) = \frac{\sqrt{k+is}}{i\pi} H_1^{(e)}(s), \quad \operatorname{Res} > 0, \quad (11a)$$

$$\Phi_2(s) = \frac{(\sqrt{k+is})^{-1}}{i\pi} H_1^{(m)}(s), \quad \operatorname{Res} > 0, \quad (11б)$$

где

$$H_1^{(e)}(s) = \frac{\sqrt{2k} \cos \frac{\alpha}{2}}{s - ik \cos \alpha} - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\mu_1) \frac{\sqrt{k+i\mu_2}}{s + \mu_2} F_1(\lambda) d\lambda,$$

$$H_1^{(m)}(s) = \frac{\sqrt{2k} \sin \frac{\alpha}{2}}{s - ik \cos \alpha} - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\mu_1) \frac{1}{\sqrt{k+i\mu_2}(s + \mu_2)} F_2(\lambda) d\lambda,$$

или, иначе,

$$\Phi_1(s) = \frac{\sqrt{2k} \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{k+is}}{\pi i (s - ik \cos \alpha)} - \frac{\sqrt{k+is}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\mu_1) \frac{\sqrt{k+i\mu_2}}{s + \mu_2} F_1(\lambda) d\lambda, \quad (12a)$$

$$\Phi_2(s) = \frac{\sqrt{2k} \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi i (s - ik \cos \alpha) \sqrt{k+is}} -$$

$$- \frac{1}{\pi i \sqrt{k+is}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\mu_1) \frac{F_2(\lambda) d\lambda}{(s + \mu_2) \sqrt{k+i\mu_2}}. \quad (12б)$$

Если теперь положить $s = \sqrt{(t^2 - k^2)} \cos \alpha - it \sin \alpha \equiv \eta_1$, то будем иметь два интегральных уравнения для функций Φ_1 и Φ_2 соответственно:

$$N_1(\eta_1) = \frac{\sqrt{2k} \cos \frac{\alpha}{2}}{\pi i (\eta_1 - ik \cos \alpha)} - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} N_1(\mu_1) \frac{\sqrt{(k+i\mu_2)(k+i\mu_2)}}{(\eta_1 + \mu_2)} F_1(\lambda) d\lambda, \quad (13a)$$

$$N_2(\eta_1) = \frac{\sqrt{2k} \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi (\eta_1 - ik \cos \alpha)} - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_2(\mu_1) F_2(\lambda) d\lambda}{(\eta_1 + \mu_2) \sqrt{(k+i\mu_2)(k+i\mu_1)}}, \quad (13b)$$

где

$$N_1(\eta_1) = \frac{\Phi_1(\eta_1)}{\sqrt{k+i\eta_1}}; \quad N_2(\eta_1) = \Phi_2(\eta_1) \sqrt{k+i\eta_1}.$$

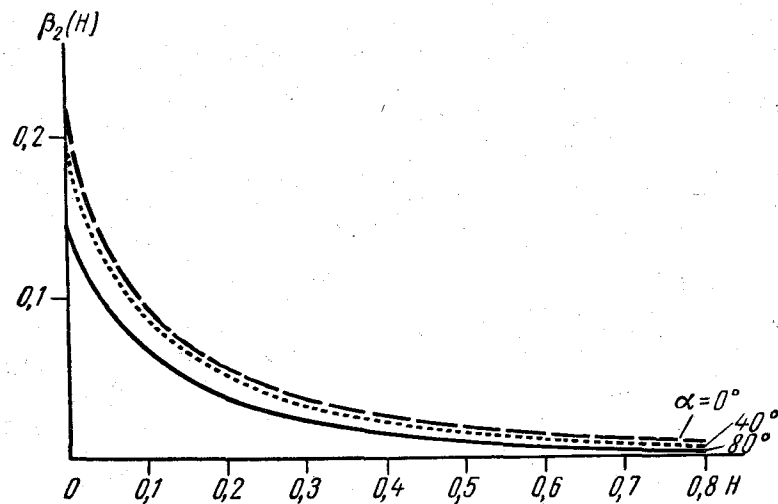


Рис. 2

Уравнения (13a) и (13b) есть уравнение Фредгольма второго рода. Их можно решать методом последовательных приближений, для чего необходимо оценить нормы соответствующих интегральных операторов (в пространстве C):

$$\|k_1\| \leq \max_t \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{(k+i\mu_1)(k+i\mu_2)}}{\eta_1 + \mu_2} F_1(\lambda) \right| d\lambda, \quad (14a)$$

$$\|k_2\| \leq \max_t \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F_2(\lambda)}{(\eta_1 + \mu_2) \sqrt{(k+i\mu_1)(k+i\mu_2)}} \right| d\lambda. \quad (14b)$$

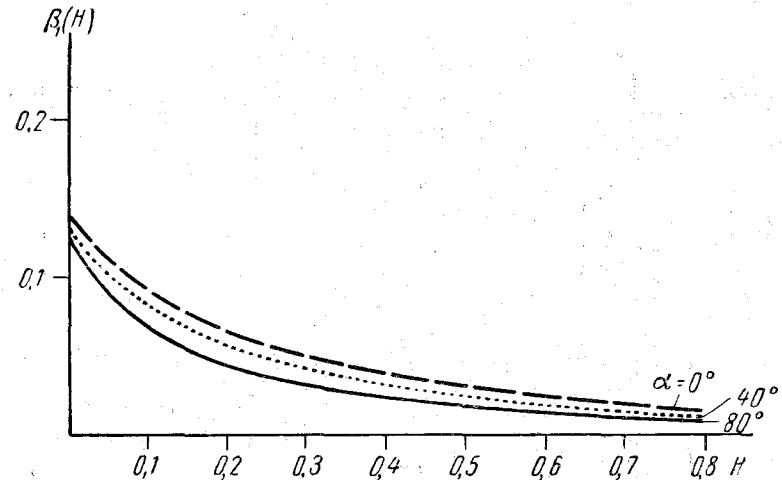


Рис. 3

Сделаем это для случая $k_0 = 0$ (квазистационарный случай). Прежде всего нетрудно показать, что справедлива оценка

$$\max_{t, \lambda} \left| \frac{1}{\eta_1 + \mu_2} \right| \leq \frac{1}{2\kappa \cos \alpha} \quad (0 \leq \alpha < 90^\circ). \quad (15)$$

Действительно,

$$|\eta_1 + \mu_2| = \kappa \cos \alpha \left| (a+b) - i \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + t\beta - \lambda\beta \right) \right| =$$

$$= \kappa \cos \alpha \left\{ (a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + t\beta - \lambda\beta \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\min_{t, \lambda} |\eta_1 + \mu_2| \leq \kappa \cos \alpha \min_{t, \lambda} (a+b) = 2\kappa \cos \alpha.$$

где $a = \operatorname{Re} \eta_1$, $b = \operatorname{Re} \mu$, $a \geq 1$, $b \geq 1$, $\beta = \operatorname{tg} \alpha$, что и доказывает оценку (15). Поэтому оценки (14а) и (14б) окончательно принимают вид

$$\|k_1\| \leq \frac{1}{\cos \alpha} \beta_1(\alpha, H),$$

$$\|k_2\| \leq \frac{1}{\cos \alpha} \beta_2(\alpha, H),$$

где

$$\beta_1(\alpha, H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{\left(q^2 + \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(q-a)^2 + \frac{1}{a^2}}{(q+a)^2 + \frac{1}{a^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2Ha} dq,$$

$$\beta_2(\alpha, H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{q^4 + 4\sin^2 \alpha}{d} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2Ha}}{\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{dq}{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$a = \left\{ \frac{q^2 + \sqrt{q^4 + 4}}{2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$b = \left\{ \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 4}}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}, c^2 = \frac{q^2 + 2\left(a - \frac{1}{a}\right) \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha + \left(a + \frac{1}{a}\right) \cos \alpha},$$

$$d = 1 + \cos^2 \alpha + \left(a + \frac{1}{a}\right) \cos \alpha, H = \kappa h, q = \kappa \lambda.$$

На рис. 2 и 3 приведены зависимости $\beta_1(\alpha, H)$ и $\beta_2(\alpha, H)$ для различных значений параметров α и H . Как видно из графиков, максимум функций β_1 и β_2 не превосходит 0,2 для всех значений параметров α и $H > 0,1$, быстро убывают с возрастанием H и слабо уменьшаются с возрастанием угла α . Следовательно, уравнения (13) можно решать методом последовательных приближений для достаточно широкого диапазона углов (порядка 70°). При этом для требуемой точности (5%) достаточно 2-х приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Решение основной задачи теории индукционного метода электроразведки. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., 1960, № 8.
2. Дмитриев В. И. Экранирующее влияние наносов на аномальное поле. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., 1961, № 1.

В. П. МОДЕНОВ

РАСЧЕТ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДОВ С ГИРОТРОПНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

В работе [1] изложены основные идеи метода расчета волноводов с локальным гиротропным заполнением. В частности, метод позволяет изучать явление отражения электромагнитных волн от гиротропного тела вращения произвольной формы, расположенного аксиально-симметрично в цилиндрическом волноводе круглого поперечного сечения (волноводный фазовращатель).

Цель этой работы — обобщение данного метода на случай волноводов с гиротропным заполнением и нерегулярной боковой поверхностью. Изложенная ниже общая схема расчета таких нерегулярных волноводов дает возможность, например, решить важную задачу о согласовании двух круглых волноводов разного диаметра симметричным переходным устройством. Можно изучать взаимное влияние двух нерегулярностей — боковой поверхности волновода и заполнения. Расчетная схема с успехом может быть реализована на современных быстродействующих электронных вычислительных машинах.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассматривается нерегулярный волновод, представляющий два цилиндрических волновода разного поперечного сечения, соединенные переходным устройством. Внутри волновода на участке его нерегулярности имеется гиротропное заполнение, свойства которого описываются тензорами диэлектрической проницаемости

В заключение автор благодарит профессора А. Г. Свешникова, под руководством которого выполнялась эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г. Методы исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах. Докт. дис., МГУ, 1963.
2. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. Мороз Ф. М. и Фейшбах Г. Методы теоретической физики. М., Физматгиз, 1960.
4. Свешников А. Г., Ильинский А. С. Расчет волноводных переходов. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 3.

В. И. ДМИТРИЕВ

ДИФРАКЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Рассмотрим дифракцию электромагнитного поля в квазитрехмерном случае, когда параметры среды не зависят от одной координаты, которую примем за координату z , а поля произвольны, т. е. произвольное распределение их источников. Таким образом, квазитрехмерная задача двумерна с точки зрения электромагнитного поля.

Так как параметры задачи не зависят от одной координаты, то логично взять преобразование Фурье по координате z и таким образом прийти к двумерной задаче. Так обычно поступают при решении скалярных задач. Задача для дифракции электромагнитных волн в этом случае несколько усложняется, поскольку является векторной. В связи с этим возникает вопрос о наиболее удобном выборе тех скалярных функций, через которые выражается электромагнитное поле. Обычное выражение электромагнитного поля через векторный и скалярный потенциалы неудобно, так как необходимо выбирать разные компоненты векторного потенциала в зависимости от характера источника электромагнитного поля, причем интегральные уравнения для компонент векторного потенциала получаются довольно громоздкие.

Наиболее удобно, как будет показано ниже, в квазитрехмерном случае выражается электромагнитное поле через компоненты электрической и магнитной напряженности полей E_z и H_z , взятые вдоль избранной координаты z , от которой не зависят параметры среды.

Для преобразования Фурье функций E_z и H_z , взятых по координате z , получаются обычные двумерные внешние за-

дачи Дирихле или Неймана в случае идеально проводящих цилиндрических тел или общая скалярная задача математической дифракции в случае цилиндрических тел любой проводимости. Как известно, все эти задачи легко сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, что позволяет решать по единому достаточно простому алгоритму любую квазитрехмерную задачу.

1. Постановка задачи и метод решения. Пусть гармоническое во времени электромагнитное поле (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) распространяется в пространстве, параметры которого зависят от двух координат x и y , т. е. диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \epsilon(x, y)$, магнитная проницаемость $\mu = \mu(x, y)$ и проводимость среды $\sigma = \sigma(x, y)$. Электромагнитное поле в этом случае удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= (\sigma - i\omega\epsilon) \vec{E} + \vec{j}; \quad \operatorname{div} (\mu \vec{H}) = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= i\omega\mu \vec{H}; \quad \operatorname{div} (\epsilon \vec{E}) = \rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{E} и \vec{H} — соответственно векторы электрической и магнитной напряженностей поля, \vec{j} и ρ — заданные плотности сторонних токов и зарядов. Для простоты мы будем полагать $\sigma \neq 0$, тогда условия на бесконечности имеют наиболее простую форму:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \vec{E} = 0; \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \vec{H} = 0. \quad (2)$$

Параметры ϵ , μ , σ будем считать кусочно-постоянными функциями, на поверхностях их разрыва должны выполняться условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей.

Покажем, что любое квазитрехмерное электромагнитное поле можно выразить через z -тые компоненты напряженности полей E_z и H_z . Для этого однородные уравнения (1) распишем по компонентам:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = (\sigma - i\omega\epsilon) E_x, \quad (3) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = (\sigma - i\omega\epsilon) E_y, \quad (5) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = (\sigma - i\omega\epsilon) E_z, \quad (7) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu H_z, \quad (8)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (9) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Из уравнения (3) и (6) найдем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} - (\sigma - i\omega\epsilon) \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (12)$$

где $k = i\omega\mu (\sigma - i\omega\epsilon)$ — волновое число среды; $\operatorname{Im} k > 0$. Соответственно из уравнений (4) и (5) получим

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} - i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} + (\sigma - i\omega\epsilon) \frac{\partial E_z}{\partial y}. \quad (14)$$

Так как k не зависит от z , то, используя функцию источника

$$N(z - \zeta) = \frac{1}{2ik} e^{ik|z - \zeta|}, \quad (15)$$

получим решение уравнений (11 — 14) в виде

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 E_z(\zeta)}{\partial x \partial \zeta} N(z - \zeta) d\zeta + i\omega\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_z(\zeta)}{\partial y} N(z - \zeta) d\zeta, \quad (16)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 E_z(\zeta)}{\partial y \partial \zeta} N(z - \zeta) d\zeta - i\omega\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_z(\zeta)}{\partial x} N(z - \zeta) d\zeta, \quad (17)$$

$$H_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 H_z(\zeta)}{\partial x \partial \zeta} N(z - \zeta) d\zeta + (\sigma - i\omega\epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_z(\zeta)}{\partial y} N(z - \zeta) d\zeta, \quad (18)$$

$$H_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 H_z(\zeta)}{\partial y \partial \zeta} N(z - \zeta) d\zeta - (\sigma - i\omega\epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_z(\zeta)}{\partial x} N(z - \zeta) d\zeta. \quad (19)$$

Таким образом, все компоненты электромагнитного поля выражены через E_z и H_z .

Уравнения Максвелла (7—10) удовлетворяются автоматически, так как E_z и H_z являются решениями уравнений

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0, \quad (20)$$

$$\Delta H_z + k^2 H_z = 0 \quad (21)$$

в точках, где отсутствуют сторонние токи, и

$$\Delta E_z + k^2 E_z = -\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{j}) - i\omega\mu j_z, \quad (22)$$

$$\Delta H_z + k^2 H_z = -(\operatorname{rot} \vec{j})_z \quad (23)$$

в области присутствия источников.

На границах разрыва ϵ , μ , σ должны быть непрерывны H_z , E_z , H_τ , и E_τ , где H_τ и E_τ выражаются через E_z и H_z в виде

$$E_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \tau \partial \zeta} N(z - \zeta) d\zeta - i\omega\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_z}{\partial n} N(z - \zeta) d\zeta, \quad (24)$$

$$H_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \tau \partial \zeta} N(z - \zeta) d\zeta - (\sigma - i\omega\epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_z}{\partial n} N(z - \zeta) d\zeta. \quad (25)$$

Полученная краевая задача для E_z и H_z на первый взгляд кажется неудобной из-за сложности граничных условий непрерывности E_τ и H_τ , имеющих интегральный вид, но после преобразования Фурье, взятого по координате z , мы получим обычную двумерную задачу дифракции.

Обозначим

$$\tilde{E}_z = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(\zeta) e^{i\zeta\lambda} d\lambda, \quad (26)$$

$$\tilde{H}_z = \int_{-\infty}^{\infty} H_z(\zeta) e^{i\zeta\lambda} d\lambda, \quad (27)$$

$$\tilde{k} = \sqrt{k^2 - \lambda^2}, \quad (28)$$

$$\tilde{j} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j} e^{i\zeta\lambda} d\zeta, \quad (29)$$

тогда для \tilde{E}_z и \tilde{H}_z найдем краевую задачу

$$\Delta_z \tilde{E}_z + \tilde{k}^2 \tilde{E}_z = -\frac{\tilde{k}^2}{\sigma - i\omega\epsilon} \tilde{j}_z + \frac{i\lambda}{\sigma - i\omega\epsilon} \left\{ \frac{\partial \tilde{j}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{j}_y}{\partial y} \right\}, \quad (30)$$

$$\Delta_z \tilde{H}_z + \tilde{k}^2 \tilde{H}_z = \frac{\partial \tilde{j}_x}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{j}_y}{\partial x} \quad (31)$$

в области, где присутствуют сторонние токи. Если вместо сторонних токов ввести в рассмотрение распределения плотности электрических \vec{p} и магнитных \vec{m} дипольных моментов, то уравнения (22—23) запишутся соответственно в виде

$$\Delta E_z + k^2 E_z = -\frac{1}{\epsilon'} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{p}) - \omega^2 \mu p_z - i\omega\mu (\operatorname{rot} \vec{m})_z, \quad (32)$$

$$\Delta H_z + k^2 H_z = i\omega (\operatorname{rot} \vec{p})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{m}) - \mu \epsilon' \omega^2 m_z, \quad (33)$$

где $\epsilon' = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая постоянная.

Тогда уравнения (30—31) для \tilde{E}_z и \tilde{H}_z запишутся в виде

$$\Delta_z \tilde{E}_z + \tilde{k}^2 \tilde{E}_z = -\frac{\tilde{k}^2}{\epsilon'} \tilde{p}_z + \frac{i\lambda}{\epsilon'} \left[\frac{\partial \tilde{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}_y}{\partial y} \right] - i\omega\mu \left[\frac{\partial \tilde{m}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{m}_x}{\partial y} \right], \quad (34)$$

$$\Delta_z \tilde{H}_z + \tilde{k}^2 \tilde{H}_z = i\omega \left[\frac{\partial \tilde{p}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{p}_x}{\partial y} \right] - \tilde{k}^2 \tilde{m}_z + i\lambda \left[\frac{\partial \tilde{m}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{m}_y}{\partial y} \right], \quad (35)$$

где

$$\tilde{p} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{p} e^{i\zeta\lambda} d\zeta; \quad \tilde{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{m} e^{i\zeta\lambda} d\zeta; \quad (36)$$

на границе разрыва ϵ , μ , σ должны выполняться условия непрерывности \tilde{E}_z , \tilde{H}_z , \tilde{E}_τ и \tilde{H}_τ , которые выражаются через \tilde{E}_z и \tilde{H}_z в виде

$$\tilde{E}_\tau = \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \tau} - \frac{i\omega\mu}{\tilde{k}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n}, \quad (37)$$

$$\tilde{H}_\tau = \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \tau} + \frac{i\omega\epsilon'}{\tilde{k}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n}. \quad (38)$$

Таким образом, задачу дифракции произвольного поля на цилиндрических телах можно свести к нахождению двух скалярных функций, являющихся решением двумерного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + \tilde{k}^2 u = -2\pi\delta(M, M_0),$$

$$\Delta v + \tilde{k}^2 v = -2\pi\delta(M, M_0),$$

которые в общем случае удовлетворяют на границе разрыва \tilde{k}^2 граничным условиям непрерывности функций $u, v, \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{i\omega\mu}{\tilde{k}^2} \frac{\partial v}{\partial n}, \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{i\omega\epsilon'}{\tilde{k}^2} \frac{\partial u}{\partial n}$. В случае идеально проводящего тела граничные условия будут $u = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0$.

При этом образ Фурье компонент поля \tilde{E}_z, \tilde{H}_z будет выражаться через функции u, v в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z = & \frac{\tilde{k}^2}{\epsilon'} \iint_S \tilde{p}_z u(M, M_0) ds_M - \frac{i\lambda}{\epsilon'} \iint_S \left[\frac{\partial \tilde{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}_y}{\partial y} \right] u(M, M_0) ds_M + \\ & + i\omega\mu \iint_{S_1} \left[\frac{\partial \tilde{m}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{m}_x}{\partial y} \right] u(M, M_0) ds_M, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_z = & -i\omega \iint_S \left[\frac{\partial \tilde{p}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{p}_x}{\partial y} \right] v(M, M_0) ds_M + \tilde{k}^2 \iint_{S_1} \tilde{m}_z v(M, M_0) ds_M - \\ & - i\lambda \iint_{S_1} \left[\frac{\partial \tilde{m}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{m}_y}{\partial y} \right] v(M, M_0) ds_M, \end{aligned} \quad (40)$$

где S и S_1 — области распределения электрических и магнитных диполей.

Для случая точечных источников электрического диполя $\vec{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$ и магнитного диполя $\vec{m} = \{m_x, m_y, m_z\}$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z = & \frac{\tilde{k}^2}{\epsilon'} \tilde{p}_z u + \frac{i\lambda}{\epsilon'} \left[\tilde{p}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{p}_y \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \\ & + i\omega\mu \left[\tilde{m}_x \frac{\partial u}{\partial y} - \tilde{m}_y \frac{\partial u}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$\tilde{H}_z = \tilde{k}^2 \tilde{m}_z v + i\lambda \left[\tilde{m}_x \frac{\partial v}{\partial x} + \tilde{m}_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] + i\omega \left[\tilde{p}_y \frac{\partial v}{\partial x} - \tilde{p}_x \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \quad (42)$$

Зная \tilde{E}_z и \tilde{H}_z , согласно (16—19) мы можем определить все компоненты электромагнитного поля:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left\{ \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} + \frac{i\omega\mu}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} \right\} d\lambda, \quad (43)$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left\{ \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} - \frac{i\omega\mu}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} \right\} d\lambda, \quad (44)$$

$$H_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left\{ \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} - \frac{i\omega\epsilon'}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} \right\} d\lambda, \quad (45)$$

$$H_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left\{ \frac{i\lambda}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + \frac{i\omega\epsilon'}{\tilde{k}^2} \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} \right\} d\lambda. \quad (46)$$

Таким образом, квазитрехмерная задача сводится к решению скалярной двумерной задачи, которая, как известно, легко сводится к интегральным уравнениям Фредгольма.