

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ)

XXXVI

СБОРНИК РАБОТ  
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией  
В. И. ДМИТРИЕВА, А. С. ИЛЬИНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1982

*Из содержания Т.36, 1982г.,*

- Г. В. Аккуратов, В. И. Дмитриев.* О расчете частотных характеристик поля упругих установившихся колебаний в слоистых средах. **3**
- И. С. Барашков, В. И. Дмитриев.* Метод двумерных интегральных уравнений расчета магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. **14**
- В. И. Дмитриев, В. Ю. Плешко.* К расчету электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью. **27**
- Е. В. Захаров, И. В. Ильин, Я. Я. Несмеянова.* Алгоритм расчета низкочастотного электромагнитного поля в неоднородных средах. **36**
- Е. Н. Соловьева.* О решении одномерной задачи Стефана в градиентной среде. **44**

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

Г. В. АККУРАТОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

### О РАСЧЕТЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯ УПРУГИХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В последние годы в сейсморазведке широко внедряются методы, основанные на периодическом возбуждении упругих колебаний. При этом используются источники с постоянной или плавно меняющейся во времени частотой. Поле упругих колебаний, создаваемое такими источниками, обладает на интервале излучения  $\Delta T$  свойством стационарности. В связи с этим представляет интерес применение к задачам сейсмоки методов, используемых при расчете других установившихся или медленно меняющихся во времени физических полей, в частности импедансного метода.

Импедансный подход к расчету физических полей в слоистых средах, предложенный А. Н. Тихоновым, является хорошо разработанным аппаратом решения задач электродинамики [1—3]. Численная реализация импедансных методов на ЭВМ позволяет получить быстрые и устойчивые к вычислительным погрешностям алгоритмы расчета полей или их частотных характеристик для любого, сколь угодно большого числа слоев.

В настоящей работе предлагается метод расчета частотных характеристик поля упругих установившихся колебаний в слоистых средах с кусочно-непрерывным или кусочно-постоянным распределением упругих параметров с глубиной. В последнем случае алгоритм вычисления импедансов на поверхности  $i$ -го слоя представляется в виде рекуррентных формул.

#### 1. Кусочно-непрерывная слоистая среда

Пусть нам дана произвольная слоистая среда, в которой упругие характеристики Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$  и плотность  $\rho$  являются кусочно-непрерывными функциями координаты  $z$ . В подстилающем полупространстве  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  будем считать постоянными (см. рисунок).

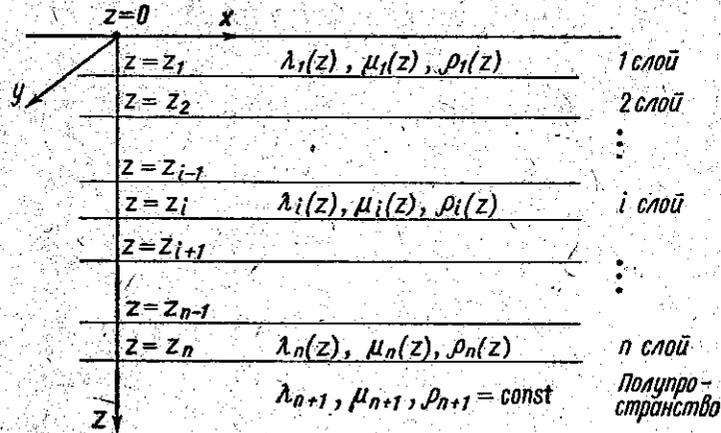
Пусть также на поверхности  $z=0$  расположен источник периодических колебаний частоты  $\omega$ . Тогда вектор перемещений  $U$

может быть найден из уравнений динамической теории упругости

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{U} - \mu \text{rot rot } \mathbf{U} + \text{div } \mathbf{U} \text{grad } \lambda + 2E \text{grad } \mu + \rho \omega^2 \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  — симметричный тензор деформаций, и соответствующих граничных условий.

Ограничимся рассмотрением точечного источника типа  $f(r, t) = \rho_0 \delta(r) e^{i\omega t} / 2\pi r$ , действующего вдоль оси  $z$ . Тогда задача стано-



Модель слоистой среды

вится осесимметричной и в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  вектор перемещений  $\mathbf{U}$  не зависит от угла  $\varphi$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(r, z) = \{U_r(r, z), 0, U_z(r, z)\}. \quad (2)$$

Учитывая (2), получим для компонент вектора перемещений  $U_r$  и  $U_z$  следующую задачу:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \right] + 2\mu' \frac{\partial U_z}{\partial r} + \rho \omega^2 U_r = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] \right\} - \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial U_z}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \right] - 2\mu' \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \rho \omega^2 U_z = 0,$$

с граничными условиями

$$2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = f(r), \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0, \quad \text{для } z=0,$$

$$\left[ 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right] = 0, \quad \left[ \mu \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \right] = 0, \quad (5)$$

$$[U_z] = 0,$$

$$[U_r] = 0, \quad \text{для } z > 0,$$

которые следуют из требований непрерывности нормальной и касательной компонент тензора напряжений  $\delta_{zz}$  и  $\delta_{rz}$  и непрерывности компонент  $U_r$  и  $U_z$  вектора перемещений.

Представляя решения  $U_r$  и  $U_z$  через преобразования Ханкеля в виде

$$U_r(r, z) = \int_0^\infty J_1(\alpha r) P(\alpha, z) \alpha d\alpha, \quad (6)$$

$$U_z(r, z) = \int_0^\infty J_0(\alpha r) S(\alpha, z) \alpha d\alpha,$$

получим вместо (3) систему обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для частотных характеристик  $P(\alpha, z)$  и  $S(\alpha, z)$ :

$$(\mu P' - \mu \alpha S)' - \lambda \alpha S' - (\lambda + 2\mu) \eta^2 P = 0, \quad (7)$$

$$[(\lambda + 2\mu) S' + \lambda \alpha P]' + \mu \alpha P' - \mu \xi^2 S = 0,$$

где  $\eta^2 = \alpha^2 - K_1^2$ ,  $\xi^2 = \alpha^2 - K_2^2$ ,  $K_1^2 = \rho \omega^2 / (\lambda + 2\mu)$ ,  $K_2^2 = \rho \omega^2 / \mu$ , и граничные условия:

$$(\lambda + 2\mu) S' + \lambda \alpha P = f_0, \quad P' - \alpha S = 0, \quad \text{для } z=0, \quad (8)$$

$$[(\lambda + 2\mu) S' + \lambda \alpha P] = 0,$$

$$[\mu P' - \mu \alpha S] = 0,$$

$$[P] = 0,$$

$$[S] = 0,$$

$$\text{для } z > 0, \quad (9)$$

где  $f_0(\alpha) = \int_0^\infty J_0(\alpha r) f(r) dr$ .

Здесь и далее дифференцирование функций  $P(\alpha, z)$  и  $S(\alpha, z)$  ведется только по переменной  $z$ .

Граничную задачу (7) с условиями (8) — (9) далее будем решать импедансным способом. Введем в рассмотрение тензор импедансов

$$Z(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

связывающий частотные характеристики  $P$  и  $S$  и их первые производные следующим образом:

$$\begin{aligned} AP + BS &= \mu P' - \mu \alpha S, \\ CP + DS &= (\lambda + 2\mu) S' + \lambda \alpha P. \end{aligned} \quad (11)$$

После подстановки (11) в (7) получим систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка для функций  $A, B, C, D$

$$\begin{aligned} A' + \frac{1}{\mu} A^2 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} (C - \lambda \alpha) (B - \lambda \alpha) &= (\lambda + 2\mu) \eta^2, \\ D' + \frac{1}{\lambda + 2\mu} D^2 + \frac{1}{\mu} (C + \mu \alpha) (B + \mu \alpha) &= \mu \xi^2, \\ B' + \left( \frac{1}{\mu} A + \frac{1}{\lambda + 2\mu} D \right) B + \alpha \left( A - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} D \right) &= 0, \\ C' + \left( \frac{1}{\mu} A + \frac{1}{\lambda + 2\mu} D \right) C + \alpha \left( A - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} D \right) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Как показано в [5], импедансы  $A, B, C, D$  являются непрерывными функциями координаты  $z$ , т. е.  $[A] = 0, [B] = 0, [C] = 0, [D] = 0$  для всех  $z > 0$ . Следовательно, вместо краевой задачи (7) с условиями (8) — (9) для функций  $P$  и  $S$  можно решать задачу Коши для импедансов  $A, B, C, D$ , а затем, пользуясь (11), нетрудно определить характеристики  $P$  и  $S$ . Начальные условия для уравнений (12) получены в [5] и равны:

$$\begin{aligned} A|_{z \gg z_n} = A_0 &= \frac{(\alpha^2 - \xi_{n+1}^2) \mu_{n+1} \eta_{n+1}}{(\eta_{n+1} \xi_{n+1} - \alpha^2)}, \\ D|_{z \gg z_n} = D_0 &= \frac{(\alpha^2 - \eta_{n+1}^2) (\lambda_{n+1} + 2\mu_{n+1}) \xi_{n+1}}{(\eta_{n+1} \xi_{n+1} - \alpha^2)}, \\ B|_{z \gg z_n} = C|_{z \gg z_n} = B_0 &= \frac{(\eta_{n+1} - \xi_{n+1})^2 + K_1^2}{(\eta_{n+1} \xi_{n+1} - \alpha^2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Задачу Коши (12) — (13) можно упростить. Вычитая из третьего уравнения системы (12) четвертое, получим

$$(B - C)' + (A/\mu + D/(\lambda + 2\mu))(B - C) = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно записать

в виде

$$(B - C) = (B_0 - C_0) e^{-\int_{\xi}^z a(t) dt},$$

где  $a(z) = A/\mu + D/(\lambda + 2\mu)$ ,  $B_0 = B(\xi)$ ,  $C_0 = C(\xi)$ , откуда следует, что  $B(z) = C(z)$  для всех  $z > 0$ , если в некоторой произвольной точке слоистой среды  $z = \xi$  имеет место равенство  $B(\xi) = C(\xi)$ . Положим  $\xi = z_n$ , тогда, учитывая (13), получим импедансную систему из трех уравнений:

$$A' + \frac{1}{\mu} A^2 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} (B - \lambda \alpha)^2 = (\lambda + 2\mu) \eta^2, \quad (14)$$

$$D' + \frac{1}{\lambda + 2\mu} D^2 + \frac{1}{\mu} (B + \mu \alpha)^2 = \mu \xi^2,$$

$$B' + \left( \frac{1}{\mu} A + \frac{1}{\lambda + 2\mu} D \right) B + \alpha \left( A - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} D \right) = 0.$$

Общее решение для функции  $B(z)$  можно записать в виде

$$B = B_0 e^{-\int_{z_n}^z a(t) dt} + \int_{z_n}^z b(\eta) e^{-\int_{z_n}^z a(t) dt} d\eta, \quad (15)$$

где  $b(z) = \alpha(A - \lambda D/(\lambda + 2\mu))$ ,  $B_0 = B(z_n)$ .

Тогда после подстановки (15) в (14) оставшиеся два уравнения системы (14)

$$A' = F_A(z, A, D), \quad (16)$$

$$D' = F_D(z, A, D)$$

с начальными условиями

$$A(z = z_n) = A_0, D(z = z_n) = D_0 \quad (17)$$

могут быть проинтегрированы обычным численным методом, например методом Рунге — Кутты.

После вычисления импедансов  $A, B, C, D$  не представляет труда найти искомые решения  $P(\alpha, z), S(\alpha, z)$ . Для этого из (11) получим однородную систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций  $P$  и  $S$ :

$$P' - A(z)P/\mu(z) - (B(z) + \mu(z)\alpha)S/\mu(z) = 0, \quad (18)$$

$$S' - (B(z) - \lambda(z)\alpha)P/(\lambda(z) + 2\mu(z)) - D(z)S/(\lambda(z) + 2\mu(z)) = 0.$$

На поверхности  $z=0$  из граничных условий (8), учитывая (11), найдем

$$\begin{aligned} P(z=0) &= -f_0 B(0) / (A(0)D(0) - B^2(0)), \\ S(z=0) &= f_0 A(0) / (A(0)D(0) - B^2(0)). \end{aligned} \quad (19)$$

Ввиду непрерывности функций  $P$  и  $S$  (9) имеем задачу Коши (18) с начальными условиями (19), решая которую можно определить частотные характеристики  $P(\alpha, z)$  и  $S(\alpha, z)$  в любой точке слоистой среды.

Таким образом, алгоритм расчета частотных характеристик поля установившихся упругих колебаний в кусочно-непрерывной слоистой среде состоит из двух этапов:

1) определения тензора импедансов  $Z(z)$  численным решением задачи Коши (16) с начальными условиями (17),

2) вычисления функций  $P(\alpha, z)$  и  $S(\alpha, z)$  решением задачи Коши (18) с начальными условиями (19), либо, если частотные характеристики ищутся только на поверхности  $z=0$ , применением формул (19).

## 2. Кусочно-постоянная слоистая среда

Пусть теперь в рассматриваемой модели среды в каждом  $i$ -м слое параметры Ламэ  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотность  $\rho$  являются постоянными величинами. В этом случае с помощью импедансного метода может быть получено аналитическое решение задачи определения частотных характеристик на поверхности  $z=0$ .

В случае кусочно-постоянной среды система дифференциальных уравнений (7) для определения характеристик  $P(\alpha, z)$  и  $S(\alpha, z)$  примет вид:

$$P'' - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \alpha S' - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \eta^2 P = 0, \quad (20)$$

$$S'' + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \alpha P' + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \xi^2 S = 0.$$

Граничные условия (8) — (9) останутся без изменений. Введем в рассмотрение функции  $\bar{P}(\alpha, z)$  и  $\bar{S}(\alpha, z)$  такие, что:

$$P = -\alpha^2 (\bar{P} + \bar{S}'), \quad (21)$$

$$S = \alpha (\bar{P}' + \alpha^2 \bar{S}).$$

Легко проверить, что система уравнений (20) при подстановке в нее (21) распадается на два отдельных уравнения для функций  $\bar{P}$  и  $\bar{S}$ :

$$\bar{P}'' - \eta^2 \bar{P} = 0, \quad \bar{S}'' - \xi^2 \bar{S} = 0. \quad (22)$$

Граничные условия (8) — (9) для  $\bar{P}$  и  $\bar{S}$  остаются смешанными и имеют вид

$$\mu \beta \bar{P} + 2\mu \alpha^2 \bar{S}' = f_0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \beta \bar{S} + 2\bar{P}' &= 0, \\ \text{для } z=0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$[\mu \beta \bar{P} + 2\mu \alpha^2 \bar{S}'] = 0,$$

$$[\mu \beta \bar{S} + 2\mu \bar{P}'] = 0,$$

$$[\bar{P} + \bar{S}'] = 0,$$

$$[\alpha^2 \bar{S} + \bar{P}'] = 0,$$

для  $z > 0$ , где  $\beta = 2\alpha^2 - K^2$ .

Далее, как и в случае кусочно-непрерывной среды, введем в рассмотрение тензор импедансов

$$Z(z) = \begin{pmatrix} Z_{pp}(z) & Z_{ps}(z) \\ Z_{sp}(z) & Z_{ss}(z) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

связывающий функции  $\bar{P}$ ,  $\bar{S}$  и их первые производные по  $z$  следующим образом:

$$Z_{pp} \bar{P}' + Z_{ps} \bar{S} = \bar{P}', \quad (26)$$

$$Z_{sp} \bar{P}' + Z_{ss} \bar{S} = \bar{S}'.$$

После подстановки (26) в (22) получим систему из четырех дифференциальных уравнений первого порядка для импедансов в слое

$$\begin{aligned} Z'_{pp} + Z^2_{pp} + Z_{ps} Z_{sp} &= \eta^2, \\ Z'_{ss} + Z^2_{ss} + Z_{ps} Z_{sp} &= \xi^2, \end{aligned} \quad (27)$$

$$Z'_{ps} + (Z_{pp} + Z_{ss}) Z_{ps} = 0,$$

$$Z'_{sp} + (Z_{pp} + Z_{ss}) Z_{sp} = 0.$$

В отличие от импедансов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  кусочно-непрерывной модели импедансы  $Z_{pp}$ ,  $Z_{ps}$ ,  $Z_{sp}$ ,  $Z_{ss}$  являются разрывными функциями и меняются скачкообразно в точках  $z=z_i$ . В [4] приводятся решения системы (27) внутри  $i$ -го слоя ( $i=1, 2, \dots, n$ ), выраженные через граничные значения импедансов на подошве слоя:

$$\begin{aligned} Z_{pp}^{(i)}(z) &= (-\eta/\Delta) [(Z_{pp}^i Z_{ss}^i - Z_{sp}^i Z_{ps}^i) t_1 t_4 - \eta Z_{ss}^i t_2 t_4 - \xi Z_{pp}^i t_1 t_3 + \eta \xi t_2 t_3], \\ Z_{ss}^{(i)}(z) &= (-\xi/\Delta) [(Z_{pp}^i Z_{ss}^i - Z_{sp}^i Z_{ps}^i) t_2 t_3 - \eta Z_{ss}^i t_1 t_3 - \xi Z_{pp}^i t_2 t_4 + \eta \xi t_1 t_4], \end{aligned} \quad (28)$$

$$Z_{ps}^{(i)}(z) = (1/\Delta) (4\eta \xi Z_{ps}^i e^{-\eta h} e^{-\xi h}),$$

$$Z_{sp}^{(i)}(z) = (1/\Delta) (4\eta \xi Z_{sp}^i e^{-\eta h} e^{-\xi h}),$$

где  $Z_{pp}^i = Z_{pp}^{(i)}(z_i)$ ,  $Z_{ss}^i = Z_{ss}^{(i)}(z_i)$ ,  $Z_{ps}^i = Z_{ps}^{(i)}(z_i)$ ,  $Z_{sp}^i = Z_{sp}^{(i)}(z_i)$ ,

$$\Delta = (Z_{pp}^i Z_{ss}^i - Z_{sp}^i Z_{ps}^i) t_2 t_4 - \eta Z_{ss}^i t_1 t_4 - \xi Z_{pp}^i t_2 t_3 + \eta \xi t_1 t_3,$$

$$t_1 = (1 + e^{-2\eta h}), t_2 = (1 - e^{-2\eta h}), t_3 = (1 + e^{-2\xi h}), t_4 = (1 - e^{-2\xi h}),$$

$$h = z_i - z, z_{i-1} \leq z < z_i.$$

Импедансы в полупространстве можно получить сразу, исходя из условий излучения на бесконечности и определения тензора (26):

$$\begin{aligned} Z_{pp}^{(n+1)}(z) &= -\eta_{n+1}, \\ Z_{ss}^{(n+1)}(z) &= -\xi_{n+1}, \\ Z_{ps}^{(n+1)}(z) &= Z_{sp}^{(n+1)}(z) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что для определения тензора импедансов  $Z$  в  $i$ -м слое необходимо знать граничные значения  $Z_{pp}^{(j)}(z_j)$ ,  $Z_{ss}^{(j)}(z_j)$ ,  $Z_{ps}^{(j)}(z_j)$ ,  $Z_{sp}^{(j)}(z_j)$  для  $j=n, n-1, \dots, i$ . Формулы пересчета граничных импедансов из  $(i+1)$ -го слоя в  $i$ -й слой ( $i=n, n-1, \dots, 1$ ) получены в [4] и имеют вид:

$$\begin{aligned} Z_{pp}^+ &= (1/\delta) g Z_{pp}^-, \\ Z_{ss}^+ &= (1/\delta) g Z_{ss}^-, \end{aligned} \quad (30)$$

$$Z_{ps}^+ = (1/\delta) [2\alpha^2 ac (Z_{sp}^- Z_{ps}^- - Z_{pp}^- Z_{ss}^-) + bc Z_{ps}^- + 2\alpha^2 ad Z_{sp}^- + \alpha^2 bd],$$

$$Z_{sp}^+ = (1/\delta) [2ac (Z_{sp}^- Z_{ps}^- - Z_{pp}^- Z_{ss}^-) + 2ad Z_{ps}^- + bc Z_{sp}^- + bd],$$

где  $Z^+ = Z^{(i)}(z_i)$ ,  $Z^- = Z^{(i+1)}(z_i)$ ,

$$\delta = 4\alpha^2 a^2 (Z_{sp}^- Z_{ps}^- - Z_{pp}^- Z_{ss}^-) + 2ab Z_{ps}^- + 2\alpha^2 ab Z_{sp}^- + b^2,$$

$$a = \mu_i - \mu_{i+1}, b = \mu_i \beta_i - 2\mu_{i+1} \alpha^2,$$

$$c = \mu_{i+1} \beta_{i+1} - 2\mu_i \alpha^2, d = \mu_{i+1} \beta_{i+1} - \mu_i \beta_i,$$

$$g = \mu_i \mu_{i+1} (\beta_i - 2\alpha^2) (\beta_{i+1} - 2\alpha^2).$$

Таким образом, по формулам (30) граничные значения импедансов в полупространстве (29) можно пересчитать в  $n$ -й слой, а затем по формулам (28) определить импедансы на верхней границе  $n$ -го слоя. Повторяя эту операцию от слоя к слою снизу вверх, легко определить тензор  $Z$  в любой точке слоистой среды в частности на поверхности  $z=0$ . Тогда для определения характеристик  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{S}$  на поверхности  $z=0$  достаточно подставить (26) в граничные условия (23), в результате чего получим:

$$\tilde{P}^{(1)}(0) = (f_0/\delta_0) [\beta_1 + 2\alpha^2 Z_{sp}^{(1)}(0)], \quad (31)$$

$$\tilde{S}^{(1)}(0) = (-2f_0/\delta_0) Z_{pp}^{(1)}(0),$$

где  $\delta_0 = 4\mu_1 \alpha^2 [\alpha^2 Z_{sp}^{(1)2}(0) - Z_{pp}^{(1)}(0) Z_{ss}^{(1)}(0)] + 4\mu_1 \beta_1 \alpha^2 Z_{sp}^{(1)}(0) + \mu_1 \beta_1^2$ .

Заметим, что из двух последних уравнений системы (27) следует, что

$$Z_{ps}/Z_{sp} = \text{const.}$$

Более того, пользуясь формулами (29), (30) и (28), нетрудно убедиться, что для любого  $z \geq 0$

$$Z_{ps}/Z_{sp} = \alpha^2. \quad (32)$$

Итак, решение задачи (20) с граничными условиями (8) — (9) состоит из следующих этапов:

1) вычисления  $Z^{(i)}$  на поверхности  $z=0$  последовательным пересчетом импедансов снизу вверх по алгоритму (28) — (30),

2) вычисления функций  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{S}$  на поверхности  $z=0$  по формулам (31),

3) перехода от функций  $\tilde{P}$  и  $\tilde{S}$  к искомым частотным характеристикам  $P$ ,  $S$  по формулам (21) и (26).

### 3. Векторная запись алгоритма вычисления тензора импедансов

Алгоритм вычисления тензора импедансов  $Z$  для кусочно-постоянной слоистой среды (28) — (30) может быть записан в векторном виде. Такая запись облегчает программирование алгоритма на ЭВМ и устанавливает в явном виде рекуррентную связь между тензорами  $Z^{(i)}(z_i) = Z^+$  и  $Z^{(i+1)}(z_i) = Z^-$  в формулах (30), а также между значениями тензора  $Z^{(i)}$  на границе  $z=z_i$  и внутри  $i$ -го слоя в формулах (28).

Обозначим:

$$Z^{(i)}(z_i) = Z^+ = (p^+, s^+), \quad p^+ = \begin{pmatrix} Z_{pp}^+ \\ Z_{ps}^+ \end{pmatrix}, \quad s^+ = \begin{pmatrix} Z_{sp}^+ \\ Z_{ss}^+ \end{pmatrix},$$

$$Z^{(i+1)}(z_i) = Z^- = (p^-, s^-), \quad p^- = \begin{pmatrix} Z_{pp}^- \\ Z_{ps}^- \end{pmatrix}, \quad s^- = \begin{pmatrix} Z_{sp}^- \\ Z_{ss}^- \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы пересчета (30) можно записать в виде

$$p^+ = Cc, \quad s^+ = Dd, \quad (33)$$

где матрица  $C$  и вектор  $c$  равны:

$$C = \frac{-2\alpha a^2}{\delta} \begin{pmatrix} 2a Z_{pp}^- & -\frac{1}{\alpha^2} \left( Z_{ps}^- + \frac{b}{2a} \right) \\ -2a \left( Z_{ps}^- + \frac{b}{2a} \right) & Z_{ss}^- \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \frac{c}{2a} \left( Z_{sp}^- + \frac{d}{c} \right) \\ c Z_{pp}^- \end{pmatrix}.$$

Матрица  $D$  и вектор  $d$  определяются по формулам

$$D = CH, \quad d = Vc, \quad (34)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} 1/2a\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & Z_{ss}^-/Z_{pp}^- \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что матрица  $C$  и вектор  $c$  могут быть получены следующим преобразованием тензора  $Z^-$  и вектора  $p^-$ :

$$C = (2a\alpha^2/\delta) [bL - E(Z^-)^T EK], \quad c = cLq + g. \quad (35)$$

Здесь диагональные матрицы  $E$ ,  $K$ ,  $L$  и вектор  $g$  имеют весьма простой вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1/2a\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} d/2a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторные формулы (33)–(35) полностью определяют искомый тензор импедансов  $Z^+$  через тензор  $Z^-$  и его компоненты.

Выражения (28), определяющие импедансы внутри слоя через их граничные значения, также могут быть записаны в векторном виде. Обозначим тензор импедансов в  $i$ -м слое на  $i$ -й границе раздела через

$$Z^{(i)}(z_i) = Z_i = (p_i, s_i), \quad p_i = \begin{pmatrix} Z_{pp}^i \\ Z_{ps}^i \end{pmatrix}, \quad s_i = \begin{pmatrix} Z_{sp}^i \\ Z_{ss}^i \end{pmatrix},$$

а тензор внутри  $i$ -го слоя через

$$Z^i(z) = Z = (p, s), \quad p = \begin{pmatrix} Z_{pp}(z) \\ Z_{ps}(z) \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} Z_{sp}(z) \\ Z_{ss}(z) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить подстановкой, что формулы (28) можно записать в виде

$$p = Aa, \quad s = Bb, \quad (36)$$

где матрица  $A$  и вектор  $a$  равны:

$$A = \frac{1}{\eta\xi\Delta} \begin{pmatrix} \eta t_4 \left( Z_{ss}^i - \xi \frac{t_3}{t_4} \right) e^{-\eta h} & -\eta t_4 Z_{sp}^i e^{\xi h} \\ -\xi t_2 Z_{ps}^i e^{-\xi h} & \xi t_2 \left( Z_{pp}^i - \eta \frac{t_1}{t_2} \right) e^{\eta h} \end{pmatrix},$$

$$a = -\eta \xi t_1 \begin{pmatrix} \left( Z_{pp}^i - \eta \frac{t_2}{t_1} \right) e^{\eta h} \\ Z_{ps}^i e^{-\xi h} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $B$  и вектор  $b$  определяются по формулам:

$$B = AR, \quad b = Wa, \quad (37)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} e^h (\eta + \xi) & 0 \\ 0 & e^{-h} (\eta + \xi) \end{pmatrix}, \quad W = \frac{t_3}{t_1} e^{-h} (\eta - \xi) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha^2} \\ Z_{ss}^i - \xi \frac{t_4}{t_3} & 0 \\ Z_{pp}^i - \eta \frac{t_2}{t_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, очевидно, что матрицу  $A$  и вектор  $a$  можно получить из следующего простого преобразования тензора  $Z_i$  и вектора  $p_i$ :

$$A = (1/\eta\xi\Delta) (\eta\xi T_2 E_1 E_2 - T E_1 Z_i E_2), \quad a = \eta \xi t_1 E_3 (t - p_i). \quad (38)$$

Диагональные матрицы  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  и вектор  $t$  здесь имеют вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{h}{2}(\eta - \xi)} \\ -e^{-\frac{h}{2}(\eta - \xi)} & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{h}{2}(\eta + \xi)} \\ -e^{-\frac{h}{2}(\eta + \xi)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} e^{\eta h} & 0 \\ 0 & e^{-\xi h} \end{pmatrix},$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} \eta t_4 & 0 \\ 0 & \xi t_2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} t_3 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} \eta \frac{t_2}{t_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторные формулы (36)–(38) полностью определяют тензор импедансов  $Z(z)$  внутри  $i$ -го слоя ( $z_{i-1} \leq z < z_i$ ) через его граничное значение  $Z(z_i)$ .

В заключение отметим, что формулы (31) и (21) также можно записать в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{S} \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f_0/2\mu\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} P \\ S \end{pmatrix} = \alpha [aM_1 - M_2 Z^{(i)}(0)] \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{S} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где  $N = Z^{(i)}(0) + (\beta/2a^2)Q$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда выражения (39)–(40) вместе с (33)–(38) составят полную векторную запись алгоритма вычисления частотных характеристик  $P$  и  $S$  на поверхности  $z=0$  кусочно-постоянной среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах. — Изв. АН СССР. Геогр. и геофиз., 1956, 20, № 3, с. 245–251.
2. Дмитриев В. И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 10. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968, с. 55–65.

3. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.

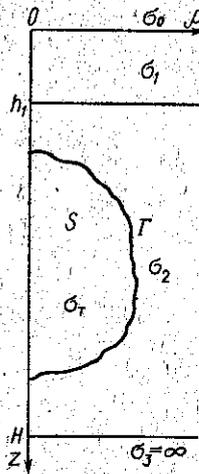
4. Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде.— В кн.: Численные методы в геофизике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 3—12.

5. Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в произвольной слоистой среде.— В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 64—73.

И. С. БАРАШКОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

## МЕТОД ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАСЧЕТА МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Во многих задачах геофизики возникает необходимость исследования влияния на электромагнитное поле трехмерных неоднородностей, расположенных в слоистых средах. В частности, такие задачи представляют большой интерес для теории магнитотеллурического зондирования. Фундаментальной моделью в этих задачах является модель, состоящая из тела, расположенного в кристаллическом фундаменте, который лежит на идеально проводящем основании и перекрыт слоем наносов.



Таким образом, мы имеем трехслойную среду, состоящую из слоя с проводимостью  $\sigma_1$  и мощностью  $h_1$ , под которым находится высокоомный слой с проводимостью  $\sigma_2$  и мощностью  $H-h_1$ , а при  $Z>H$  залегает подстилающее основание с проводимостью  $\sigma_3$ . Над этой средой имеется пространство (воздух) с очень малой проводимостью  $\sigma_0$  (см. рисунок), т. е. проводимость слоистой среды  $\sigma(z)$  равна

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z < 0, \\ \sigma_1 & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \sigma_2 & \text{при } h_1 < z < H, \\ \sigma_3 & \text{при } z > H. \end{cases}$$

В слое с проводимостью  $\sigma_2$  имеется локальное проводящее тело  $T$ . Среду считаем магнитооднородной, т. е. магнитная проницаемость среды постоянна и равна магнитной проницаемости ваку-

ума ( $\mu = \mu_0$ ). Пусть в этой среде возбуждено квазистационарное электромагнитное поле, имеющее зависимость от времени в виде  $e^{-i\omega t}$ . В проводниках токи проводимости много больше токов смещения.

Решение задач дифракции на телах произвольной формы сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому для выяснения основных физических закономерностей поведения электромагнитных полей в присутствии неоднородностей целесообразно исследовать задачи дифракции на телах простейшей геометрической формы. В работе [4] был рассмотрен предложенный В. И. Дмитриевым метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем бесконечно тонком диске, погруженном в слоистую среду соосно с ней. В настоящей статье рассматривается метод расчета магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии локальной осесимметричной неоднородности  $T$  (см. рисунок) с конечной постоянной проводимостью  $\sigma_2 = \text{const}$

$$T = \{(\rho, \varphi, z) : (\rho, z) \in S, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

где  $S$  — область полуплоскости  $\Pi = \{(\rho, z) : \rho > 0, -\infty < z < \infty\}$ , ограниченная достаточно гладким контуром  $\Gamma$ .

Рассмотрим поле, возбуждаемое в горизонтально-однородной слоистой среде с проводимостью  $\sigma(z)$  сторонним током  $I$ , распределенным в некоторой осесимметричной области  $V = \{(\rho, \varphi, z) : (\rho, z) \in \Omega, 0 < \varphi < 2\pi\}$ , где  $\Omega$  — область полуплоскости  $\Pi$ . Система уравнений Максвелла для такого поля имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + I, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}. \quad (1)$$

Это поле удовлетворяет условиям сопряжения (непрерывность касательных компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) на границах разрыва  $\sigma(z)$ , а также условию излучения на бесконечности.

В работе [2] был предложен метод решения задач электродинамики неоднородных сред, возникающих при распространении произвольного электромагнитного поля в структурах с симметрией вращения. Следуя методу работы [2], представим компоненты векторов  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде рядов Фурье по функциям  $e^{in\varphi}$ :

$$I_{\rho, \varphi, z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{\rho, \varphi, z}^{(n)} e^{in\varphi}, \quad E_{\rho, \varphi, z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\rho, \varphi, z}^{(n)} e^{in\varphi}, \quad (2)$$

$$H_{\rho, \varphi, z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\rho, \varphi, z}^{(n)} e^{in\varphi}.$$

Подставив разложения (2) в уравнения (1), будем иметь следующие соотношения для гармоник:

$$\frac{in}{\rho} H_z^{(n)} - \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial z} = \sigma E_\rho^{(n)} + I_\rho^{(n)}, \quad (3)$$

3. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.

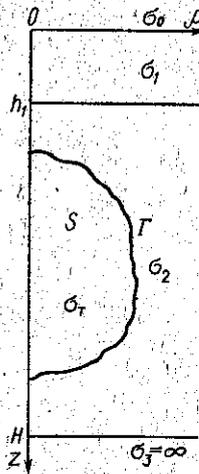
4. Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде.— В кн.: Численные методы в геофизике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 3—12.

5. Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в произвольной слоистой среде.— В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 64—73.

И. С. БАРАШКОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

## МЕТОД ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАСЧЕТА МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Во многих задачах геофизики возникает необходимость исследования влияния на электромагнитное поле трехмерных неоднородностей, расположенных в слоистых средах. В частности, такие задачи представляют большой интерес для теории магнитотеллурического зондирования. Фундаментальной моделью в этих задачах является модель, состоящая из тела, расположенного в кристаллическом фундаменте, который лежит на идеально проводящем основании и перекрыт слоем наносов.



Таким образом, мы имеем трехслойную среду, состоящую из слоя с проводимостью  $\sigma_1$  и мощностью  $h_1$ , под которым находится высокоомный слой с проводимостью  $\sigma_2$  и мощностью  $H-h_1$ , а при  $Z>H$  залегает подстилающее основание с проводимостью  $\sigma_3$ . Над этой средой имеется пространство (воздух) с очень малой проводимостью  $\sigma_0$  (см. рисунок), т. е. проводимость слоистой среды  $\sigma(z)$  равна

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z < 0, \\ \sigma_1 & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \sigma_2 & \text{при } h_1 < z < H, \\ \sigma_3 & \text{при } z > H. \end{cases}$$

В слое с проводимостью  $\sigma_2$  имеется локальное проводящее тело  $T$ . Среду считаем магнитооднородной, т. е. магнитная проницаемость среды постоянна и равна магнитной проницаемости ваку-

ума ( $\mu = \mu_0$ ). Пусть в этой среде возбуждено квазистационарное электромагнитное поле, имеющее зависимость от времени в виде  $e^{-i\omega t}$ . В проводниках токи проводимости много больше токов смещения.

Решение задач дифракции на телах произвольной формы сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому для выяснения основных физических закономерностей поведения электромагнитных полей в присутствии неоднородностей целесообразно исследовать задачи дифракции на телах простейшей геометрической формы. В работе [4] был рассмотрен предложенный В. И. Дмитриевым метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящем бесконечно тонком диске, погруженном в слоистую среду соосно с ней. В настоящей статье рассматривается метод расчета магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии локальной осесимметричной неоднородности  $T$  (см. рисунок) с конечной постоянной проводимостью  $\sigma_2 = \text{const}$

$$T = \{(\rho, \varphi, z) : (\rho, z) \in S, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

где  $S$  — область полуплоскости  $\Pi = \{(\rho, z) : \rho > 0, -\infty < z < \infty\}$ , ограниченная достаточно гладким контуром  $\Gamma$ .

Рассмотрим поле, возбуждаемое в горизонтально-однородной слоистой среде с проводимостью  $\sigma(z)$  сторонним током  $I$ , распределенным в некоторой осесимметричной области  $V = \{(\rho, \varphi, z) : (\rho, z) \in \Omega, 0 < \varphi < 2\pi\}$ , где  $\Omega$  — область полуплоскости  $\Pi$ . Система уравнений Максвелла для такого поля имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + I, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}. \quad (1)$$

Это поле удовлетворяет условиям сопряжения (непрерывность касательных компонент  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) на границах разрыва  $\sigma(z)$ , а также условию излучения на бесконечности.

В работе [2] был предложен метод решения задач электродинамики неоднородных сред, возникающих при распространении произвольного электромагнитного поля в структурах с симметрией вращения. Следуя методу работы [2], представим компоненты векторов  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде рядов Фурье по функциям  $e^{in\varphi}$ :

$$I_{\rho, \varphi, z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{\rho, \varphi, z}^{(n)} e^{in\varphi}, \quad E_{\rho, \varphi, z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\rho, \varphi, z}^{(n)} e^{in\varphi}, \quad (2)$$

$$H_{\rho, \varphi, z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\rho, \varphi, z}^{(n)} e^{in\varphi}.$$

Подставив разложения (2) в уравнения (1), будем иметь следующие соотношения для гармоник:

$$\frac{in}{\rho} H_z^{(n)} - \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial z} = \sigma E_\rho^{(n)} + I_\rho^{(n)}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_p^{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial \rho} = \sigma E_\varphi^{(n)} + I_\varphi^{(n)}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} H_\varphi^{(n)} + \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} H_p^{(n)} = \sigma E_z^{(n)} + I_z^{(n)}, \quad (5)$$

$$\frac{in}{\rho} E_z^{(n)} - \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial z} = i\omega\mu H_p^{(n)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_p^{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi^{(n)}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} E_\varphi^{(n)} + \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} E_p^{(n)} = i\omega\mu H_z^{(n)}. \quad (8)$$

Из этих соотношений можно выразить все гармонические компоненты  $E_p^{(n)}$ ,  $E_z^{(n)}$ ,  $H_p^{(n)}$ ,  $H_z^{(n)}$  с помощью соответствующих гармонических компонент  $u = E_\varphi^{(n)}$ ,  $v = H_\varphi^{(n)}$  и тока следующим образом:

$$\begin{aligned} E_z^{(n)} &= \frac{ip}{\alpha} \left[ n \frac{\partial u}{\partial z} + \omega\mu \left( v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} - \rho I_z^{(n)} \right) \right], \\ E_p^{(n)} &= \frac{i}{\alpha} \left[ n \left( u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \omega\mu \rho^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + I_p^{(n)} \right) \right], \\ H_z^{(n)} &= -\frac{ip}{\alpha} \left[ i\sigma \left( u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - n \left( \frac{\partial v}{\partial z} + I_p^{(n)} \right) \right], \\ H_p^{(n)} &= \frac{i}{\alpha} \left[ i\sigma \rho^2 \frac{\partial u}{\partial z} + n \left( v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} - \rho I_z^{(n)} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\alpha = k^2 \rho^2 - n^2$ ,  $k = (i\omega\mu\sigma)^{1/2}$ ,  $\text{Im } k > 0$ . Используя соотношения (4) и (7), получим уравнения относительно  $u$ ,  $v$

$$\text{div} \left( \frac{\sigma}{\alpha} \text{grad } u \right) + \frac{3\sigma}{\alpha\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \left( 1 - \frac{\alpha^*}{\alpha^2} \right) \frac{\sigma u}{\rho^2} + \frac{2n\omega\mu\sigma}{\alpha^2} \frac{\partial v}{\partial z} = f_e, \quad (10)$$

$$\text{div} \left( \frac{1}{\alpha} \text{grad } v \right) + \frac{3}{\alpha\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \left( 1 - \frac{\alpha^*}{\alpha^2} \right) \frac{v}{\rho^2} - \frac{2in\sigma}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial z} = f_m,$$

где  $\alpha^* = k^2 \rho^2 + n^2$ , а  $f_e$  и  $f_m$  определяются плотностью сторонних источников соответственно электрического и магнитного типа и выражаются через ток следующим образом:

$$f_e = -\frac{1}{\rho^2} I_\varphi^{(n)} - \frac{in}{\alpha\rho} \frac{\partial I_p^{(n)}}{\partial \rho} + \frac{in\alpha^*}{\alpha^2 \rho^2} I_p^{(n)} - \frac{in}{\alpha\rho} \frac{\partial I_z^{(n)}}{\partial z}, \quad (11)$$

$$f_m = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial I_p^{(n)}}{\partial z} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial I_z^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{2n^2}{\alpha^2 \rho} I_p^{(n)}.$$

На границах разрыва параметра  $\sigma$  выполнены условия, которые следуют из непрерывности касательных компонент  $E$  и  $H$ :

$$\left[ \frac{\sigma}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \frac{ni}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{v}{\rho} \right) \left[ \frac{1}{\alpha} \right] - \frac{ni}{\rho} \left[ \frac{1}{\alpha} I_z^{(n)} \right], \quad [u] = 0, \quad (12)$$

$$\left[ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \frac{n}{\omega\mu\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{u}{\rho} \right) \left[ \frac{1}{\alpha} \right] - \left[ \frac{1}{\alpha} I_p^{(n)} \right], \quad [v] = 0.$$

Так как считается, что параметр  $k$  удовлетворяет условию  $\text{Im } k > 0$ , то на бесконечности наложим на функции  $u(P)$  и  $v(P)$  условия убывания

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ru(P) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} rv(P) = 0, \quad r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}, \quad (13)$$

где  $P = (\rho, z)$  — точка полуплоскости  $\Pi$ .

В случае, когда  $n=0$ , система уравнений (10) распадается на два отдельных уравнения, условия (12) на границах разрыва параметра  $\sigma$  также распадаются, благодаря чему задача расчета функций  $u(P)$  и  $v(P)$  упрощается, так как их можно находить независимо друг от друга. Этот случай исследован в работах [2, 3]. Рассмотрим подробнее случай, когда  $n \neq 0$  и, следовательно, система уравнений (10) для функций  $u(P)$  и  $v(P)$  не распадается на два отдельных уравнения, условия (12) на границах разрыва параметра  $\sigma$  также не распадаются.

Запишем систему уравнений (10) в операторной форме

$$\mathcal{L}U(P) = F(P), \quad (14)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_e \\ f_m \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$L_{11}u = \text{div} \left( \frac{\sigma}{\alpha} \text{grad } u \right) + \frac{3\sigma}{\alpha\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \left( 1 - \frac{\alpha^*}{\alpha^2} \right) \frac{\sigma u}{\rho^2},$$

$$L_{22}u = \text{div} \left( \frac{1}{\alpha} \text{grad } u \right) + \frac{3}{\alpha\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \left( 1 - \frac{\alpha^*}{\alpha^2} \right) \frac{u}{\rho^2}, \quad (16)$$

$$L_{12}u = \frac{2n\omega\mu\sigma}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad L_{21}u = -\frac{2in\sigma}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Функция  $F$  согласно (14), представлена как результат линейной операции над неизвестной функцией  $U$ . Покажем возможность записать соответствующую обратную операцию в форме линейного интегрального преобразования

$$U(P) = \iint_{\Omega} \hat{G}(P, P_0) F(P_0) ds_{P_0}, \quad (17)$$

где  $G(P, P_0)$  — матрица фундаментальных решений системы уравнений (10) с условиями (12) на границах разрыва параметра  $\sigma$ :

$$\widehat{G}(P, P_0) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

элементы которой экспоненциально убывают при  $r \rightarrow \infty$ ,  $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ . Проведем построение элементов матрицы фундаментальных решений для горизонтально-однородной слоистой среды.

Решение системы уравнений Максвелла (1) можно выразить через векторный потенциал  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E} = (1/\sigma) \{k^2 \mathbf{A} + \text{grad}[\text{div} \mathbf{A}]\}, \quad \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (18)$$

Векторный потенциал выражается через компоненты тока  $I_x, I_y, I_z$  в виде:

$$A_{x,y}(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V I_{x,y}(M_0) G(M, M_0) dv_{M_0}, \quad (19)$$

$$A_z(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\{ I_x(M_0) \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial x} + I_y(M_0) \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial y} + I_z(M_0) Q(M, M_0) \right\} dv_{M_0}.$$

Функции  $G(M, M_0)$ ,  $g(M, M_0)$  и  $Q(M, M_0)$ , как хорошо известно [1], представляются с помощью преобразования Ханкеля

$$G(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda R_{MM_0}) V(z, z_0, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (20)$$

$$g(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda R_{MM_0}) v(z, z_0, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (21)$$

$$Q(M, M_0) = \frac{1}{\sigma(z_0)} \int_0^\infty J_0(\lambda R_{MM_0}) V_1(z, z_0, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (22)$$

$$R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

где подынтегральные функции  $V(z, z_0, \lambda)$ ,  $v(z, z_0, \lambda)$  и  $V_1(z, z_0, \lambda)$  являются решениями следующих задач:

1.  $d^2V/dz^2 - \eta^2 V = 0$  при  $z \in (-\infty, \infty)$ ,  $z \neq z_0$  с граничными условиями  $[V] = 0$ ,  $[dV/dz] = -2\Delta(z - z_0)$ . Здесь  $\eta = (\lambda^2 - k^2)^{1/2}$ , причем  $\text{Re} \eta > 0$  и

$$\Delta(z - z_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } z = z_0, \\ 0 & \text{при } z \neq z_0. \end{cases}$$

При  $|z| \rightarrow \infty$  функция стремится к нулю.

$$2. v(z, z_0, \lambda) = \{w(z, z_0, \lambda) - dV/dz\} / \lambda^2,$$

$$\sigma \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{dw}{dz} \right) - \eta^2 w = 0 \text{ при } z \in (-\infty, \infty), z \neq z_0,$$

граничными условиями  $[w] = -2\Delta(z - z_0)$ ,  $\left[ \frac{1}{\sigma} \frac{dw}{dz} \right] = 0$  и усло-

вием убывания  $w$  при  $|z| \rightarrow \infty$ .

$$3. \sigma \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{dV_1}{dz} \right) - \eta^2 V_1 = 0 \text{ при } z \in (-\infty, \infty), z \neq z_0 \text{ с граничными}$$

условиями  $[V_1] = 0$ ,  $\left[ \frac{1}{\sigma} \frac{dV_1}{dz} \right] = -2\Delta(z - z_0)$  и условием убывания

при  $|z| \rightarrow \infty$ . Функции  $V(z, z_0, \lambda)$ ,  $w(z, z_0, \lambda)$  и  $V_1(z, z_0, \lambda)$  легко находятся численно [1].

Так как наша задача осесимметрична, то удобно искать решение в цилиндрической системе координат. Используя соотношения

$$A_\rho = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \quad A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi,$$

$$I_x = I_\rho \cos \varphi - I_\varphi \sin \varphi, \quad I_y = I_\rho \sin \varphi + I_\varphi \cos \varphi,$$

то вместо (19) будем иметь

$$A_\rho(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V [I_\rho(M_0) L_1(M, M_0) - I_\varphi(M_0) L_2(M, M_0)] dv_{M_0},$$

$$A_\varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V [I_\rho(M_0) L_2(M, M_0) + I_\varphi(M_0) L_1(M, M_0)] dv_{M_0}, \quad (23)$$

$$A_z(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V [I_\rho(M_0) L_3(M, M_0) + I_\varphi(M_0) L_4(M, M_0) + I_z(M_0) Q(M, M_0)] dv_{M_0},$$

где

$$L_1 = G(M, M_0) \cos(\varphi - \varphi_0), \quad L_2 = -G(M, M_0) \sin(\varphi - \varphi_0), \quad (24)$$

$$L_3 = \frac{\partial g}{\partial \rho} \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad L_4 = \frac{\partial g}{\partial \rho} \sin(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Легко показать, что ядра (24) представимы в виде

$$L_m(M, M_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_m^{(n)}(P, P_0) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad m = 1, 2, 3, 4. \quad (25)$$

Выведем разложения (25). Для этого разложим в выражении (20) для  $G(M, M_0)$  функцию Бесселя первого рода  $J_0(\lambda R_{MM_0})$  в ряд в соответствии с теоремой сложения. Тогда

$$G(M, M_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G^{(n)}(P, P_0) e^{in(\varphi - \varphi_0)},$$

где

$$G^{(n)}(P, P_0) = \int_0^{\infty} J_n(\lambda \rho) J_n(\lambda \rho_0) V(z, z_0, \lambda) \lambda d\lambda.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G(M, M_0) \cos(\varphi - \varphi_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [G^{(n-1)}(P, P_0) + \\ &+ G^{(n+1)}(P, P_0)] e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \\ -G(M, M_0) \sin(\varphi - \varphi_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} [G^{(n-1)}(P, P_0) - \\ &- G^{(n+1)}(P, P_0)] e^{in(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь разложения для  $L_3(M, M_0)$  и  $L_4(M, M_0)$ , которые определяются, согласно (24), через функцию  $g(M, M_0)$ . Используя (21), получим

$$g(M, M_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^{(n)}(P, P_0) e^{in(\varphi - \varphi_0)},$$

где

$$g^{(n)}(P, P_0) = \int_0^{\infty} J_n(\lambda \rho) J_n(\lambda \rho_0) v(z, z_0, \lambda) \lambda d\lambda.$$

Откуда находим разложения для  $L_3$  и  $L_4$  в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \rho} \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \sin(\varphi - \varphi_0) &= \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(g^{(n-1)} + g^{(n+1)})}{\partial \rho} - \frac{n-1}{\rho} g^{(n-1)} + \frac{n+1}{\rho} g^{(n+1)} \right] e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \\ \frac{\partial g}{\partial \rho} \sin(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \cos(\varphi - \varphi_0) &= \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} \left[ \frac{\partial(g^{(n+1)} - g^{(n-1)})}{\partial \rho} + \frac{n-1}{\rho} g^{(n-1)} + \frac{n+1}{\rho} g^{(n+1)} \right] e^{in(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что ядра (24) представимы в виде (25), причем

$$\begin{aligned} L_1^{(n)} &= \frac{1}{2} G^{(n-1)} + \frac{1}{2} G^{(n+1)}, \quad L_2^{(n)} = \frac{i}{2} G^{(n-1)} - \frac{i}{2} G^{(n+1)}, \\ L_3^{(n)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(g^{(n-1)} + g^{(n+1)})}{\partial \rho} - \frac{n-1}{2\rho} g^{(n-1)} + \frac{n+1}{2\rho} g^{(n+1)}, \\ L_4^{(n)} &= \frac{i}{2} \frac{\partial(g^{(n+1)} - g^{(n-1)})}{\partial \rho} + \frac{n-1}{2\rho} i g^{(n-1)} + \frac{n+1}{2\rho} i g^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь разложение для  $Q(M, M_0)$ . Используя (22), получим

$$Q(M, M_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q^{(n)}(P, P_0) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, \quad (26)$$

где

$$Q^{(n)}(P, P_0) = \frac{1}{\sigma(z_0)} \int_0^{\infty} J_n(\lambda \rho) J_n(\lambda \rho_0) V_1(z, z_0, \lambda) \lambda d\lambda.$$

Представимость ядер (24) в виде (25), а ядра  $Q(M, M_0)$  в виде (26) показывает, что если искать компоненты векторного потенциала  $A$  в виде рядов Фурье по функциям  $e^{in\varphi}$

$$A_{\rho, \varphi, z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{\rho, \varphi, z}^{(n)} e^{in\varphi},$$

то все гармоники компонент  $A_{\rho}^{(n)}$ ,  $A_{\varphi}^{(n)}$  и  $A_z^{(n)}$  можно выразить с помощью соответствующих гармоник компонент  $I_{\rho}^{(n)}$ ,  $I_{\varphi}^{(n)}$ ,  $I_z^{(n)}$ , точнее

$$\begin{aligned} A_{\rho}^{(n)}(P) &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} [I_{\rho}^{(n)}(P_0) L_1^{(n)}(P, P_0) - I_{\varphi}^{(n)}(P_0) L_2^{(n)}(P, P_0)] \rho_0 ds_{P_0}, \\ A_{\varphi}^{(n)}(P) &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} [I_{\rho}^{(n)}(P_0) L_2^{(n)}(P, P_0) + I_{\varphi}^{(n)}(P_0) L_1^{(n)}(P, P_0)] \rho_0 ds_{P_0}, \\ A_z^{(n)}(P) &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} [I_{\rho}^{(n)}(P_0) L_3^{(n)}(P, P_0) + I_{\varphi}^{(n)}(P_0) L_4^{(n)}(P, P_0) + \\ &+ I_z^{(n)}(P_0) Q^{(n)}(P, P_0)] \rho_0 ds_{P_0}. \end{aligned} \quad (27)$$

Согласно формулам (18) азимутальные компоненты полей выражаются с помощью векторного потенциала следующим образом:

$$E_{\varphi}(M) = \frac{1}{\sigma} \left\{ k^2 A_{\varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\operatorname{div} A] \right\}, \quad H_{\varphi}(M) = \frac{\partial A_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}.$$

Используя соотношения (27), выразим  $n$ -е гармоники азимутальных компонент  $E_\varphi^{(n)}$  и  $H_\varphi^{(n)}$  через  $n$ -е гармоники компонент тока:

$$E_\varphi^{(n)}(P) = \iint_S [I_\rho^{(n)}(P_0) K_1^{(n)}(P, P_0) + I_\varphi^{(n)}(P_0) K_2^{(n)}(P, P_0) + I_z^{(n)}(P_0) K_3^{(n)}(P, P_0)] ds_{P_0},$$

$$H_\varphi^{(n)}(P) = \iint_S [I_\rho^{(n)}(P_0) K_4^{(n)}(P, P_0) + I_\varphi^{(n)}(P_0) K_5^{(n)}(P, P_0) + I_z^{(n)}(P_0) K_6^{(n)}(P, P_0)] ds_{P_0}, \quad (28)$$

где

$$K_1^{(n)}(P, P_0) = \frac{\rho_0}{2\alpha(z)} \left\{ \frac{\alpha(P)}{\rho^2} L_2^{(n)}(P, P_0) + \frac{in}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho L_1^{(n)}(P, P_0)] + \frac{in}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} L_3^{(n)}(P, P_0) \right\},$$

$$K_2^{(n)}(P, P_0) = \frac{\rho_0}{2\sigma(z)} \left\{ \frac{\alpha(P)}{\rho^2} L_1^{(n)}(P, P_0) - \frac{in}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho L_2^{(n)}(P, P_0)] + \frac{in}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} L_4^{(n)}(P, P_0) \right\},$$

$$K_3^{(n)}(P, P_0) = \frac{in\rho_0}{2\sigma(z)\rho} \frac{\partial}{\partial z} Q^{(n)}(P, P_0),$$

$$K_4^{(n)}(P, P_0) = \frac{\rho_0}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} L_1^{(n)}(P, P_0) - \frac{\partial}{\partial \rho} L_3^{(n)}(P, P_0) \right],$$

$$K_5^{(n)}(P, P_0) = -\frac{\rho_0}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} L_2^{(n)}(P, P_0) + \frac{\partial}{\partial \rho} L_4^{(n)}(P, P_0) \right],$$

$$K_6^{(n)}(P, P_0) = -\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} Q^{(n)}(P, P_0).$$

С другой стороны, запишем  $n$ -е гармоники азимутальных компонент поля, не вводя векторных потенциалов в виде (17):

$$u(P) = \iint_S [G_{11}(P, P_0) j_e(P_0) + G_{12}(P, P_0) j_m(P_0)] ds_{P_0},$$

$$v(P) = \iint_S [G_{21}(P, P_0) j_e(P_0) + G_{22}(P, P_0) j_m(P_0)] ds_{P_0}. \quad (29)$$

Чтобы определить элементы  $G_{11}(P, P_1)$  и  $G_{21}(P, P_1)$  матрицы фундаментальных решений, выберем ток следующим образом:

$$I_\rho^{(n)}(P_0) = 0, \quad I_\varphi^{(n)}(P_0) = -\rho_0^2 \delta(\rho_0 - \rho_1) \delta(z_0 - z_1), \quad I_z^{(n)}(P_0) = 0,$$

где  $\delta(\rho_0)$  есть дельта-функция Дирака. Тогда, в соответствии с формулами (11), найдем

$$j_e(P_0) = \delta(\rho_0 - \rho_1) \delta(z_0 - z_1), \quad j_m(P_0) = 0,$$

т. е. источник электрического типа расположен в точке  $P_1 = (\rho_1, z_1)$ , а источников магнитного типа нет. Приравнявая выражения для  $n$ -х гармоник азимутальных компонент поля, полученных по формулам (28) и (29), найдем элементы  $G_{11}(P, P_1)$  и  $G_{21}(P, P_1)$  матрицы фундаментальных решений:

$$G_{11}(P, P_1) = -\rho_1^2 K_1^{(n)}(P, P_1), \quad G_{21}(P, P_1) = -\rho_1^2 K_5^{(n)}(P, P_1).$$

Чтобы определить элементы  $G_{12}(P, P_1)$  и  $G_{22}(P, P_1)$  при  $z < z_1$ , зададим ток следующим образом

$$I_\rho^{(n)}(P_0) = -\alpha(P_0) \delta(\rho_0 - \rho_1) \chi(z_0 - z_1), \quad I_z^{(n)}(P_0) = 0, \quad (30)$$

где  $\chi(z_0)$  — функция Хевисайда:

$$\chi(z_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } z_0 > 0, \\ 0 & \text{при } z_0 \leq 0. \end{cases}$$

В соответствии с формулами (11) находим

$$j_m(P_0) = \delta(\rho_0 - \rho_1) \delta(z_0 - z_1),$$

т. е. источник магнитного типа находится в точке  $P_1$ . Из условия равенства нулю плотности источников электрического типа

$$j_e(P_0) = 0 \quad (31)$$

найдем компоненту тока  $I_\varphi^{(n)}(P_0)$ :

$$I_\varphi^{(n)}(P_0) = in \chi(z_0 - z_1) \frac{\partial}{\partial \rho_0} [\rho_0 \delta(\rho_0 - \rho_1)]. \quad (32)$$

Аналогично предыдущему получим выражения для элементов  $G_{12}(P, P_1)$  и  $G_{22}(P, P_1)$  матрицы фундаментальных решений при  $z < z_1$ :

$$G_{12}(P, P_1) = - \int_{z_1}^{\infty} \left[ \alpha(P_0) K_1^{(n)}(P, P_0) + in \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} K_2^{(n)}(P, P_0) \right] \Big|_{\rho_0=\rho_1} dz_0,$$

$$G_{22}(P, P_1) = - \int_{z_1}^{\infty} \left[ \alpha(P_0) K_5^{(n)}(P, P_0) + in \rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} K_6^{(n)}(P, P_0) \right] \Big|_{\rho_0=\rho_1} dz_0.$$

Эти формулы справедливы лишь при  $z < z_1$ , так как распределение тока (30, 32) при  $z_0 \rightarrow \infty$  не обращается в ноль, поэтому соответствующее ему электромагнитное поле не удовлетворяет условию экспоненциального убывания на бесконечности. При  $z > z_1$

зададим ток следующим образом:

$$I_p^{(n)}(P_0) = \alpha(P_0) \delta(\rho_0 - \rho_1) \chi(z_1 - z_0), \quad I_z^{(n)}(P_0) = 0.$$

В соответствии с формулами (11) получим

$$I_m(P_0) = \delta(\rho_0 - \rho_1) \delta(z_1 - z_0).$$

Из уравнения (31) найдем компоненту тока  $I_\varphi^{(n)}(P_0)$ :

$$I_\varphi^{(n)}(P_0) = -in\chi(z_1 - z_0) \frac{\partial}{\partial \rho_0} [\rho_0 \delta(\rho_0 - \rho_1)].$$

Для элементов  $G_{12}(P, P_1)$  и  $G_{22}(P, P_1)$  матрицы фундаментальных решений при  $z > z_1$  будем иметь следующие выражения:

$$G_{12}(P, P_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \left[ \alpha(P_0) K_1^{(n)}(P, P_0) + in\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} K_2^{(n)}(P, P_0) \right] \Big|_{\rho_0=\rho_1} dz_0,$$

$$G_{22}(P, P_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \left[ \alpha(P_0) K_4^{(n)}(P, P_0) + in\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0} K_5^{(n)}(P, P_0) \right] \Big|_{\rho_0=\rho_1} dz_0.$$

Нетрудно доказать, что недиагональные элементы  $G_{12}(P, P_1)$  и  $G_{21}(P, P_1)$  полученной матрицы фундаментальных решений регулярны, а диагональные имеют логарифмическую особенность при

$$r_{PP_1} \rightarrow 0, \quad r_{PP_1} = [(\rho - \rho_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}:$$

$$G_{11}(P, P_1) = -\frac{\alpha(P)}{2\pi\sigma(z)} \ln \frac{1}{r_{PP_1}} + O(1), \quad G_{22}(P, P_1) = -\frac{\alpha(P)}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PP_1}} + O(1). \quad (33)$$

При  $\rho_1 \rightarrow 0$

$$G_{ij}(P, P_1) = O(\rho_1^2) \text{ при } |n| = 1, \quad (34)$$

$$G_{ij}(P, P_1) = O(\rho_1) \text{ при } |n| > 1.$$

Все элементы удовлетворяют условию экспоненциального убывания на бесконечности.

Таким образом, матрица фундаментальных решений для горизонтально-однородной слоистой среды построена и, значит, доказана возможность представления решения системы уравнений (10) с условиями (12) на границах разрыва параметра  $\sigma$  и условиями на бесконечности (13) в виде (17). При построении матрицы фундаментальных решений токи можно задавать по-разному. Выбирая токи иным образом, нетрудно найти некоторые другие выражения для элементов матрицы фундаментальных решений.

С помощью построенной матрицы фундаментальных решений получим систему двух нагруженных двумерных интегральных уравнений Фредгольма II рода относительно  $n$ -х гармоник азимутальных компонент электрического и магнитного поля в горизон-

тально-однородной слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности конечной проводимости. Для этого понадобится матричный аналог формулы Грина для несамосопряженных операторов. Метод построения такого аналога предложен в работе [3].

Выделим в полуплоскости  $\Pi$  некоторую открытую область  $\Omega$ , целиком лежащую внутри слоя с постоянным значением  $\sigma$  и ограниченную достаточно гладким контуром  $\Gamma$ . Пусть  $U$  и  $W$  — дважды непрерывно-дифференцируемые функции внутри  $\Omega$  и непрерывно-дифференцируемые функции в замыкании  $\Omega + \Gamma$  области  $\Omega$ . Для оператора  $L$  матричный аналог формулы Грина имеет вид

$$\iint_{\Omega} (WLU - U\hat{M}W) ds = \oint_{\Gamma} \left\{ W\hat{A} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial}{\partial \nu} (\hat{A}W) + \left(1 - \frac{2n^2}{\alpha}\right) \frac{1}{\rho} (W\hat{A}U) \cos(\hat{\nu}\rho) + \frac{2n\sigma}{\alpha^2} (W\hat{B}U) \cos(\hat{\nu}z) \right\} dl, \quad (35)$$

где  $\hat{M}$  — оператор, сопряженный с оператором  $L$ ,  $\nu$  — нормаль, внешняя к области  $\Omega$ ,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\alpha} & 0 \\ \frac{\sigma}{\alpha} & 1 \\ 0 & \frac{\sigma}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & \omega\mu \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\hat{L}_{P_0}^S$  оператор, определяемый в соответствии с формулами (15—16) по функциям  $\sigma_S, \alpha_S = k^2 s \rho^2 - n^2, \alpha^*_S = k^2 s \rho^2 + n^2, k^2_S = i\omega\mu\sigma_S$  и действующий по переменной  $P_0$ , а через  $\hat{M}_{P_0}^S$  — оператор, сопряженный с оператором  $\hat{L}_{P_0}^S$ . Пусть  $\Gamma_p$  есть часть границы  $\Gamma$  области  $S$ , принадлежащая оси симметрии среды, а  $\Gamma_0$  — оставшаяся часть границы

$$\Gamma_p \subset \{\rho = 0, -\infty < z < \infty\}, \quad \Gamma = \Gamma_p + \Gamma_0$$

Выберем направление касательной  $\tau$  к границе  $\Gamma_0$  так, чтобы система  $\{\tau, \varphi, \nu\}$  была правой. Используя методику вывода интегрального представления электромагнитного поля в любой точке через значения поля внутри неоднородности, развитую в работе [1], а также матричный аналог формулы Грина (35) и свойства (33—34) элементов матрицы фундаментальных решений, получим интегральное представление электромагнитного поля  $U(P)$  в горизонтально-однородной слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности

$$\hat{C}(P)U(P) + \iint_S U(P_0) \{ \hat{M}_{P_0}^S - \hat{D}\hat{M}_{P_0}^S \} \hat{G}^T(P, P_0) ds_{P_0} - \int_{\Gamma_0} \hat{T}(P, P_0) U(P_0) dl_{P_0} = U^0(P). \quad (36)$$

Здесь интеграл с черточкой означает главное значение в смысле Коши. Если  $P \notin \Gamma_0$ , то оно равно обычному интегралу.  $U^0(P)$  — первичное поле (поле в отсутствии неоднородности).

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_S \alpha(P_0)}{\alpha_S(P_0) \sigma(z_0)} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(P_0)}{\alpha_S(P_0)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{G}^T = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

$$C_{11}(P) = \begin{cases} \frac{\sigma_S}{\alpha_S(P)} \frac{\alpha(P)}{\sigma(z)} & \text{при } P \in S, \\ \frac{\psi(P)}{2\pi} \frac{\sigma_S}{\alpha_S(P)} \frac{\alpha(P)}{\sigma(z)} + 1 - \frac{\psi(P)}{2\pi} & \text{при } P \in \Gamma_0, \\ 1 & \text{при } P \notin S + \Gamma_0, \end{cases}$$

$$C_{22}(P) = \begin{cases} \frac{\alpha(P)}{\alpha_S(P)} & \text{при } P \in S, \\ \frac{\psi(P)}{2\pi} \frac{\alpha(P)}{\alpha_S(P)} + 1 - \frac{\psi(P)}{2\pi} & \text{при } P \in \Gamma_0, \\ 1 & \text{при } P \notin S + \Gamma_0, \end{cases}$$

$\psi(P)$  — величина внутреннего по отношению к области  $S$  угла границы  $\Gamma_0$  в точке  $P$ ,

$$T_{11}(P, P_0) = -\frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ G_{11} \left[ \frac{\sigma}{\alpha} \right] \right\} - \frac{2n^2 G_{11}}{\rho_0} \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] \cos(\widehat{\nu_0 \rho}) -$$

$$- \frac{n}{\omega \mu} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ \frac{G_{12}}{\rho_0} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] \right\} + n G_{12} \left\{ \frac{1}{\omega \mu \rho_0^2} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] - 2i \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] \right\} \cos(\widehat{\nu_0 z}), \quad (37)$$

$$T_{12}(P, P_0) = -in \frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ \frac{G_{11}}{\rho_0} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] \right\} + n G_{11} \left\{ \frac{i}{\rho_0^2} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] + \right.$$

$$\left. + 2\omega \mu \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] \right\} \cos(\widehat{\nu_0 z}) - \frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ G_{12} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] \right\} - \frac{2n^2 G_{12}}{\rho_0} \left[ \frac{1}{\alpha^2} \right] \cos(\widehat{\nu_0 \rho}), \quad (38)$$

где квадратными скобками обозначен разрыв функции на границе  $\Gamma_0$ .

$$\left[ \frac{1}{\alpha} \right] = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_S}, \quad \left[ \frac{\sigma}{\alpha} \right] = \frac{\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma_S}{\alpha_S}, \quad \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] = \frac{\sigma}{\alpha^2} - \frac{\sigma_S}{\alpha_S^2}.$$

Чтобы получить выражение для  $T_{21}(P, P_0)$ , достаточно в выражении (37) для  $T_{11}(P, P_0)$  заменить  $G_{11}(P, P_0)$  на  $G_{21}(P, P_0)$ , а  $G_{12}(P, P_0)$  на  $G_{22}(P, P_0)$ . Аналогичным образом выражение для  $T_{22}(P, P_0)$  можно получить из выражения (38) для  $T_{12}(P, P_0)$ .

Соотношение (36) определяет нам поле  $u(P)$ ,  $v(P)$  в любой точке через поле внутри неоднородности, а следовательно, соглас-

но (9) мы можем определить все компоненты электромагнитного поля через значения  $u(P)$  и  $v(P)$  внутри неоднородности. Если точка  $P$  находится внутри неоднородности, то (36) дает нам систему двух нагруженных двумерных интегральных уравнений Фредгольма II рода относительно  $u(P)$  и  $v(P)$ .

Наиболее просто задача решается, если электромагнитное поле возбуждается плоской водной, нормально падающей на слоистую среду. В этом случае можно считать  $E_x^0 = E_0(z)$ , а  $E_y^0 = E_z^0 = 0$ . Следовательно,

$$E_x^0 = E_0 \cos \varphi = \frac{E_0}{2} e^{-i\varphi} + \frac{E_0}{2} e^{i\varphi}, \quad E_y^0 = -E_0 \sin \varphi =$$

$$= \frac{E_0}{2i} e^{-i\varphi} - \frac{E_0}{2i} e^{i\varphi}.$$

Используя формулу (7), найдем азимутальную компоненту  $H_\varphi^0$  первичного магнитного поля

$$H_\varphi^0 = \frac{1}{2i\omega \mu} \frac{\partial E^0}{\partial z} e^{-i\varphi} + \frac{1}{2i\omega \mu} \frac{\partial E^0}{\partial z} e^{i\varphi}.$$

Таким образом, первичное поле содержит только первые и минус первые гармоники, поэтому достаточно решить интегральное уравнение (36) с легко вычисляемой правой частью два раза: при  $n = -1$  и при  $n = 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
2. Захаров Е. В. Метод решения граничных задач электродинамики для неоднородных сред с осевой симметрией. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 28. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 232—238.
3. Еремин Ю. А., Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод фундаментальных решений в задачах дифракции электромагнитных волн на телах вращения. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 32. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 28—44.
4. Дмитриев В. И., Барашков И. С. Метод численного исследования магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. — В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 3—15.

В. И. ДМИТРИЕВ, В. Ю. ПЛЕШКО

#### К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В настоящее время в геофизике широко применяется метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ), основоположником которого является А. Н. Тихонов. Для интерпретации кривых МТЗ

Здесь интеграл с черточкой означает главное значение в смысле Коши. Если  $P \notin \Gamma_0$ , то оно равно обычному интегралу.  $U^0(P)$  — первичное поле (поле в отсутствии неоднородности).

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_S \alpha(P_0)}{\alpha_S(P_0) \sigma(z_0)} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(P_0)}{\alpha_S(P_0)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{G}^T = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

$$C_{11}(P) = \begin{cases} \frac{\sigma_S}{\alpha_S(P)} \frac{\alpha(P)}{\sigma(z)} & \text{при } P \in S, \\ \frac{\psi(P)}{2\pi} \frac{\sigma_S}{\alpha_S(P)} \frac{\alpha(P)}{\sigma(z)} + 1 - \frac{\psi(P)}{2\pi} & \text{при } P \in \Gamma_0, \\ 1 & \text{при } P \notin S + \Gamma_0, \end{cases}$$

$$C_{22}(P) = \begin{cases} \frac{\alpha(P)}{\alpha_S(P)} & \text{при } P \in S, \\ \frac{\psi(P)}{2\pi} \frac{\alpha(P)}{\alpha_S(P)} + 1 - \frac{\psi(P)}{2\pi} & \text{при } P \in \Gamma_0, \\ 1 & \text{при } P \notin S + \Gamma_0, \end{cases}$$

$\psi(P)$  — величина внутреннего по отношению к области  $S$  угла границы  $\Gamma_0$  в точке  $P$ ,

$$T_{11}(P, P_0) = -\frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ G_{11} \left[ \frac{\sigma}{\alpha} \right] \right\} - \frac{2n^2 G_{11}}{\rho_0} \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] \cos(\widehat{\nu_0 \rho}) -$$

$$- \frac{n}{\omega \rho} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ \frac{G_{12}}{\rho_0} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] \right\} + n G_{12} \left\{ \frac{1}{\omega \rho^2 \rho_0} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] - 2i \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] \right\} \cos(\widehat{\nu_0 z}), \quad (37)$$

$$T_{12}(P, P_0) = -in \frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ \frac{G_{11}}{\rho_0} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] \right\} + n G_{11} \left\{ \frac{i}{\rho_0^2} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] + \right.$$

$$\left. + 2\omega \rho \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] \right\} \cos(\widehat{\nu_0 z}) - \frac{\partial}{\partial \nu_0} \left\{ G_{12} \left[ \frac{1}{\alpha} \right] \right\} - \frac{2n^2 G_{12}}{\rho_0} \left[ \frac{1}{\alpha^2} \right] \cos(\widehat{\nu_0 \rho}), \quad (38)$$

где квадратными скобками обозначен разрыв функции на границе  $\Gamma_0$ .

$$\left[ \frac{1}{\alpha} \right] = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_S}, \quad \left[ \frac{\sigma}{\alpha} \right] = \frac{\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma_S}{\alpha_S}, \quad \left[ \frac{\sigma}{\alpha^2} \right] = \frac{\sigma}{\alpha^2} - \frac{\sigma_S}{\alpha_S^2}.$$

Чтобы получить выражение для  $T_{21}(P, P_0)$ , достаточно в выражении (37) для  $T_{11}(P, P_0)$  заменить  $G_{11}(P, P_0)$  на  $G_{21}(P, P_0)$ , а  $G_{12}(P, P_0)$  на  $G_{22}(P, P_0)$ . Аналогичным образом выражение для  $T_{22}(P, P_0)$  можно получить из выражения (38) для  $T_{12}(P, P_0)$ .

Соотношение (36) определяет нам поле  $u(P)$ ,  $v(P)$  в любой точке через поле внутри неоднородности, а следовательно, соглас-

но (9) мы можем определить все компоненты электромагнитного поля через значения  $u(P)$  и  $v(P)$  внутри неоднородности. Если точка  $P$  находится внутри неоднородности, то (36) дает нам систему двух нагруженных двумерных интегральных уравнений Фредгольма II рода относительно  $u(P)$  и  $v(P)$ .

Наиболее просто задача решается, если электромагнитное поле возбуждается плоской водной, нормально падающей на слоистую среду. В этом случае можно считать  $E_x^0 = E_0(z)$ , а  $E_y^0 = E_z^0 = 0$ . Следовательно,

$$E_\varphi^0 = E_0 \cos \varphi = \frac{E_0}{2} e^{-i\varphi} + \frac{E_0}{2} e^{i\varphi}, \quad E_\theta^0 = -E_0 \sin \varphi =$$

$$= \frac{E_0}{2i} e^{-i\varphi} - \frac{E_0}{2i} e^{i\varphi}.$$

Используя формулу (7), найдем азимутальную компоненту  $H_\varphi^0$  первичного магнитного поля

$$H_\varphi^0 = \frac{1}{2i\omega \rho} \frac{\partial E_\theta^0}{\partial z} e^{-i\varphi} + \frac{1}{2i\omega \rho} \frac{\partial E_\theta^0}{\partial z} e^{i\varphi}.$$

Таким образом, первичное поле содержит только первые и минус первые гармоники, поэтому достаточно решить интегральное уравнение (36) с легко вычисляемой правой частью два раза: при  $n = -1$  и при  $n = 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
2. Захаров Е. В. Метод решения граничных задач электродинамики для неоднородных сред с осевой симметрией. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 28. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 232—238.
3. Еремин Ю. А., Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод фундаментальных решений в задачах дифракции электромагнитных волн на телах вращения. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 32. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 28—44.
4. Дмитриев В. И., Барашков И. С. Метод численного исследования магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. — В кн.: Численные методы в геофизических исследованиях. М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 3—15.

В. И. ДМИТРИЕВ, В. Ю. ПЛЕШКО

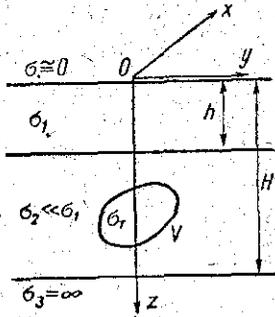
#### К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В настоящее время в геофизике широко применяется метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ), основоположником которого является А. Н. Тихонов. Для интерпретации кривых МТЗ

используются наиболее простые модели, такие как горизонтально-однородная, когда удельное сопротивление меняется по одной координате, и горизонтально-неоднородная двумерная модель, когда  $\rho$  меняется по двум координатам, например  $y$  и  $z$ , а внешнее поле представляет собой плоскую волну, нормально падающую на земную поверхность.

Тем не менее во многих случаях для интерпретации данных наблюдений необходимы трехмерные модели, в которых слоистая среда содержит включение конечных размеров.

В настоящей работе рассматривается постановка и метод решения задачи такого типа. При помощи метода, основанного на использовании векторного потенциала, задача сводится к векторному интегральному уравнению по объему включения относительно аномального тока.



Рассмотрим типичную для магнитотеллурического зондирования трехслойную среду с кусочно-постоянными параметрами, состоящую из двух слоев конечной толщины с проводимостью  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно и бесконечного слоя с проводимостью  $\sigma_3$ . Над этой средой имеется пространство (воздух) с очень малой проводимостью  $\sigma_0$  (см. рисунок). Во втором слое находится тело конечных размеров  $V$

с проводимостью  $\sigma_T$ . Магнитную проницаемость считаем всюду одинаковой и равной  $\mu$ . Проводимость среды определяется следующим образом:

$$\sigma(M) = \begin{cases} \sigma_T, & M \in V, \\ \sigma(z), & M \in \bar{V}, \end{cases}$$

где

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0, & z < 0, \\ \sigma_1, & 0 < z < h, \\ \sigma_2, & h < z < H, \\ \sigma_3, & z > H. \end{cases}$$

Система координат выбрана так, чтобы ось  $Oz$  совпадала с изменением параметров среды, а плоскость  $xOy$  — с первой границей разрыва параметров.

Пусть в данной среде электромагнитное поле возбуждается плоской электромагнитной волной  $E^0 = \{E_x^0, 0, 0\}$ ,  $H^0 = \{0, H_y^0, 0\}$ , нормально падающей на поверхность  $z=0$ . В проводниках пренебрегаем токами смещения. Зависимость от времени берем в виде  $e^{-i\omega t}$ .

Векторы напряженности электромагнитного поля  $E$  и  $H$  удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot } H(M) = \sigma(M) E(M), \quad (1)$$

$$\text{rot } E(M) = i\omega\mu H(M), \quad (2)$$

условиям непрерывности касательных компонент на границах разрыва параметров

$$[E_{\parallel}] = [H_{\parallel}] = 0 \quad (3)$$

условиям на бесконечности

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R(H - H^0) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R(E - E^0) = 0. \quad (4)$$

Представим электромагнитное поле в виде суммы нормального аномального полей

$$E = E^{\text{н}} + E^{\text{а}}, \quad H = H^{\text{н}} + H^{\text{а}}. \quad (5)$$

Нормальным будем называть поле, возбуждаемое в слоистой среде падающей плоской волной. Нормальное поле удовлетворяет уравнениям:

$$\text{rot } H^{\text{н}} = \sigma(z) E^{\text{н}}, \quad (6)$$

$$\text{rot } E^{\text{н}} = i\omega\mu H^{\text{н}}. \quad (7)$$

Учитывая (6) из (1) и (7) из (2), получаем

$$\text{rot}(H - H^{\text{н}}) = \sigma(M) E - \sigma(z) E^{\text{н}}, \quad (8)$$

$$\text{rot}(E - E^{\text{н}}) = i\omega\mu(H - H^{\text{н}}). \quad (9)$$

Отсюда с учетом (5) легко найти уравнения для аномального поля

$$\text{rot } H^{\text{а}} = \sigma(z) E^{\text{а}} + j^{\text{а}}, \quad (10)$$

$$\text{rot } E^{\text{а}} = i\omega\mu H^{\text{а}}. \quad (11)$$

Здесь  $j^{\text{а}}$  — аномальный ток, он равен

$$j^{\text{а}} = (\sigma(M) - \sigma(z)) E(M). \quad (12)$$

Аномальный ток существует только внутри тела

$$j^{\text{а}} = \begin{cases} (\sigma_T - \sigma(z)) E(M), & M \in V, \\ 0, & M \in \bar{V}. \end{cases} \quad (13)$$

Введение аномального тока позволяет свести задачу определения аномального поля, вызванного наличием тела  $V$ , к задаче определения поля в слоистой среде, возбуждаемого погруженным источником.

Известно [1], что поля в слоистой среде выражаются через векторный потенциал в виде:

$$\mathbf{H}^a = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E}^a = i\omega\mu \mathbf{A} + \text{grad}(1/\sigma \text{ div } \mathbf{A}), \quad (14)$$

где  $\mathbf{A}$  — есть векторный потенциал, удовлетворяющий уравнениям:

$$\Delta A_x + k^2(z) A_x = -j_x^a, \quad (15)$$

$$\Delta A_y + k^2(z) A_y = -j_y^a,$$

$$\sigma(z) \text{ div} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \text{ grad } A_z \right) + k^2(z) A_z = -j_z^a \sigma(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \right) \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right)$$

Уравнения (15) показывают, что если  $x$  и  $y$ -компоненты векторного потенциала возникают только при наличии соответствующей компоненты аномального тока, то  $A_z$  возникает как при наличии  $j_z^a$ , так и от  $j_x^a$  и  $j_y^a$ .

В соответствии с (15) мы можем записать

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \widehat{G}(M, M_0) \mathbf{j}^a(M_0) dV_{M_0}, \quad (16)$$

где  $\widehat{G}(M, M_0)$  — тензорная функция Грина, имеющая вид

$$\widehat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G(M, M_0) & 0 \\ \partial g(M, M_0)/\partial x & \partial g(M, M_0)/\partial y & G_1(M, M_0) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Функции  $G$ ,  $G_1$ ,  $g$  являются решениями следующих задач:

1)  $\Delta G + k^2(z) G = -\delta$   
с граничными условиями

$$[G] = \left[ \frac{\partial G}{\partial z} \right] = 0;$$

$$2) \sigma(z) \text{ div} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \text{ grad } G_1 \right) + k^2(z) G_1 = -\delta \quad (18)$$

с граничными условиями

$$[G_1] = \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G_1}{\partial z} \right] = 0;$$

$$3) \sigma(z) \text{ div} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \text{ grad } g \right) + k^2(z) g = -\sigma(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\sigma(z)} \right) G$$

с граничными условиями  $[g] = 0$ ,  $\left[ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial z} \right] = -\left[ \frac{1}{\sigma} \right] G$ . Для един-

ственности решения задач необходимо задать условия излучения на бесконечности. Эти условия удобно задавать в форме принципа предельного поглощения.

Используя соотношение (16) и пользуясь выражениями для напряженностей электрического и магнитного полей (14), находим аномальное поле в следующем виде:

$$\mathbf{H}^a = \text{rot} \iiint_V \widehat{G}(M, M_0) \mathbf{j}^a(M_0) dV_{M_0}, \quad (19)$$

$$\mathbf{E}^a = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \iiint_V \widehat{G}(M, M_0) \mathbf{j}^a(M_0) dV_{M_0} + \frac{1}{4\pi} \text{grad} \left[ \frac{1}{\sigma} \text{ div} \iiint_V \widehat{G} \mathbf{j}^a(M_0) dV_{M_0} \right]. \quad (20)$$

Таким образом, зная  $\mathbf{j}^a$ , легко найти  $\mathbf{E}^a$  и  $\mathbf{H}^a$ . Записывая (20) в области тела  $V$  и учитывая, что

$$\mathbf{j}^a = (\sigma_T - \sigma(z)) (\mathbf{E}^a + \mathbf{E}^n)$$

внутри тела, получим интегродифференциальное уравнение для определения аномального тока.

$$\mathbf{j}^a(M) = \frac{(k^2_T - k^2(z))}{4\pi} \iiint_V \widehat{G}(M, M_0) \mathbf{j}^a(M_0) dV_{M_0} + \frac{(\sigma_T - \sigma(z))}{4\pi} \text{grad} \left[ \frac{1}{\sigma(z)} \text{ div} \iiint_V \widehat{G}(M, M_0) \mathbf{j}^a(M_0) dV_{M_0} \right] - (\sigma_T - \sigma(z)) \mathbf{E}^n(M). \quad (21)$$

Необходимо выяснить вопрос о возможности внесения дифференциального оператора второго порядка под знак интеграла.

Представим диагональные элементы  $G$  и  $G_1$  в виде

$$G = e^{ikR}/R + \widetilde{G}, \quad (22)$$

$$G_1 = e^{ikR}/R + \widetilde{G}_1.$$

Здесь  $\widetilde{G}$  и  $\widetilde{G}_1$  бесконечно дифференцируемы, так же как и  $g$ . Запишем теперь тензорную функцию Грина в виде суммы

$$\widehat{G} = \widetilde{\widehat{G}} + \widehat{G}_0, \quad (23)$$

где

$$\widetilde{\widehat{G}} = \begin{pmatrix} \widetilde{G} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{G} & 0 \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & \widetilde{G}_1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{G}_0 = \begin{pmatrix} e^{ikR}/R & 0 & 0 \\ 0 & e^{ikR}/R & 0 \\ 0 & 0 & e^{ikR}/R \end{pmatrix}. \quad (24)$$

является тензором Грина для однородного пространства. Перепишем (21) с учетом сказанного выше

$$j^a(M) = \frac{(k^2_T - k^2_s)}{4\pi} \iiint_V \tilde{G}(M, M_0) j^a(M_0) dV_{M_0} + \\ + \frac{(\sigma_T - \sigma_s)}{4\pi\sigma_2} \left\{ \iiint_V \text{grad div } \tilde{G}(M, M_0) j^a(M_0) dV_{M_0} + \right. \\ \left. + \text{grad div} \iiint_V \tilde{G}_0(M, M_0) j^a(M_0) dV_{M_0} \right\} + (\sigma_2 - \sigma_T) E^a(M). \quad (25)$$

Второе слагаемое в фигурных скобках запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_x dV & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_y dV & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_z dV \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_x dV & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_y dV & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_z dV \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_x dV & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_y dV & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} j^a_z dV \end{pmatrix} \quad (26)$$

Учитывая, что особенность в подынтегральном выражении возникает при стремлении  $M_0$  к  $M$ , окружим точку  $M$  шаром радиуса  $a$ . Обозначим его  $V_a$ . Вторые производные от

$$\iiint_{V_a} \frac{e^{ikR}}{R} j^a dV_{M_0},$$

где  $u = x, y, z$  можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла, так как  $M$  принадлежит  $V_a$ . Очевидно, нам достаточно рассмотреть два случая:

$$1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iiint_{V_a} \frac{e^{ikR}}{R} j^a_x dV, \quad 2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iiint_{V_a} \frac{e^{ikR}}{R} j^a_y dV.$$

Введем следующие обозначения:

$$I = \iiint_{V_a} \frac{e^{ikR}}{R} j^a dV_{M_0},$$

$$I_1 = \iiint_{V_a} \frac{e^{ikR}}{R} j^a_x dV_{M_0},$$

$$I_2 = \iiint_{V_a} \frac{e^{ikR}}{R} j^a_y dV_{M_0}.$$

где  $j^a_u$  —  $u$ -я компонента вектора  $j^a$ .

Внутри тела ток  $j^a$  можно считать непрерывно дифференцируемой функцией.

Представим  $I_2$  в виде

$$I_2 = \iiint_{V_a} \frac{(e^{ikR} - 1)}{R} j^a_y(M_0) dV_{M_0} + \iiint_{V_a} \frac{j^a_y(M_0)}{R} dV_{M_0}, \quad (27)$$

каждый раз продифференцировав по  $x$ , получим

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2} = \iiint_{V_a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{ikR} - 1}{R} \right) j^a_y(M_0) dV_{M_0} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iiint_{V_a} \frac{j^a_y(M_0)}{R} dV_{M_0}. \quad (28)$$

Покажем, что мы имеем право внести оператор  $\partial^2/\partial x^2$  под знак интеграла в первом слагаемом. Обозначим  $u = (e^{ikR} - 1)/R$ , взяв первые три члена в разложении экспоненты, получим

$$u = ik - k^2 R,$$

тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{(x - x_0)^2}{R^3} \right).$$

В этом случае мажоранта для подынтегральной функции имеет вид  $C/R^a$  при  $a=2$ , т. е. интеграл существует как несобственный. Первая производная второго слагаемого по  $x$  равна:

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint_{V_a} \frac{1}{R} j^a_y dV_{M_0} = \iiint_{V_a} j^a_y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) dV_{M_0} = \\ = - \iiint_{V_a} j^a_y \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{R} \right) dV_{M_0}. \quad (29)$$

Преобразуем последний интеграл по формуле Гаусса — Остроградского:

$$- \iiint_{V_a} j^a_y \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{1}{R} \right) dV_{M_0} = - \iiint_{V_a} \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{j^a_y}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial j^a_y}{\partial x_0} \right] dV_{M_0} = \\ = \oint_{S_a} \frac{j^a_y}{R} \cos \alpha dS + \iiint_{V_a} \frac{1}{R} \frac{\partial j^a_y}{\partial x_0} dV_{M_0}. \quad (30)$$

Здесь  $S_a$  — поверхность сферы, ограничивающей объем  $V_a$ ,  $\alpha$  — угол между внешней нормалью к поверхности  $S_a$  и осью  $ox$ . Первое слагаемое дифференцируемо в точке  $M$ , так как  $M$  лежит вне  $S_a$ ; второе слагаемое дифференцируемо, так как  $j^a_u$  имеет производную в  $V_a$ . Следовательно, в точке  $M$  существует вторая производная [2]. Поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \iiint_{V_a} \frac{j^a_y(M_0)}{R} dV_{M_0} = - \oint_{S_a} j^a_y \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} dS + \iiint_{V_a} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \frac{\partial j^a_y}{\partial x_0} dV_{M_0}. \quad (31)$$

Оценим второе слагаемое:

$$\left| \iiint_{V_a} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \frac{\partial j_u^a}{\partial x_0} dV_{M_0} \right| < C_1, \quad \iiint_{V_a} \frac{dV_{M_0}}{R^2} = 4\pi a C_1, \quad (32)$$

если  $\left| \frac{\partial j_u^a}{\partial x_0} \right| < C_1$ .

Применяя к поверхностному интегралу в (31) теорему о среднем, получим

$$-\oint_{S_a} j_u^a \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} dS = -\frac{4}{3} \pi j_u^a, \quad (33)$$

где  $j_u^a$  — значение  $u$ -й компоненты тока в некоторой точке  $S_a$ .

Переходя к пределу при  $a \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \iiint_{V_a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{ikR} - 1}{R} \right) j_u^a dV_{M_0} + \right. \\ \left. + \iiint_{V_a} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) \frac{\partial j_u^a}{\partial x_0} dV_{M_0} - \oint_{S_a} j_u^a \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} dS \right] = -\frac{4}{3} \pi j_u^a(M). \quad (34)$$

Рассмотрим равенство

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_2}{\partial x^2}, \quad (35)$$

оно верно при любом  $a$  и левая часть не зависит от  $a$ , поэтому

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -\frac{4}{3} \pi j_u^a(M) + \lim_{a \rightarrow 0} \iiint_{V_a} j_u^a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dV_{M_0}. \quad (36)$$

Из существования второй производной  $\partial^2 I / \partial x^2$  следует существование предела

$$\lim_{a \rightarrow 0} \iiint_{V_a} j_u^a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dV_{M_0} = \iiint_{V} j_u^a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dV_{M_0}. \quad (37)$$

Этот предел можно рассматривать как главное значение интеграла.

Рассмотрим теперь вычисление смешанной производной

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 I_2}{\partial x \partial y}. \quad (38)$$

Рассуждая по аналогии с предыдущим случаем, запишем

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial x \partial y} = \iiint_{V_a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{ikR} - 1}{R} \right) j_u^a(M_0) dV_{M_0} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iiint_{V_a} \frac{j_u^a(M_0)}{R} dV_{M_0}. \quad (39)$$

Преобразуем второе слагаемое, используя формулу Гаусса — Остроградского:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iiint_{V_a} \frac{j_u^a(M_0)}{R} dV_{M_0} = - \oint_{S_a} j_u^a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) \cos \alpha dS + \\ + \iiint_{V_a} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) \frac{\partial j_u^a}{\partial x_0} dV_{M_0} = - \oint_{S_a} j_u^a \frac{\cos \alpha \cos \beta}{R^2} dS + \\ + \iiint_{V_a} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \right) \frac{\partial j_u^a}{\partial x_0} dV_{M_0}, \quad (40)$$

где  $\beta$  — угол между внешней нормалью к поверхности и осью  $OY$ .  
Переходя к пределу при  $a \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\partial^2 I_2}{\partial x \partial y} = 0.$$

Рассматривая равенство (38) и устремив  $a$  к 0, получим

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = \lim_{a \rightarrow 0} \iiint_{V_a} j_u^a(M_0) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dV_{M_0} = \iiint_{V} j_u^a \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dV_{M_0}. \quad (41)$$

Существование этого предела следует из существования второй производной  $\partial^2 I / \partial x \partial y$ .

Теперь мы можем записать (21) в виде

$$\alpha_1 j^a(M) = \frac{(k_1^2 - k_2^2)}{4\pi} \iiint_{V} \hat{G}(M, M_0) j^a(M_0) dV_{M_0} + \\ + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{4\pi\sigma_2} \iiint_{V} \text{grad div } \hat{G}(M, M_0) j^a(M_0) dV_{M_0} - (\sigma_1 - \sigma_2) E^H(M), \quad (42)$$

где  $\alpha_1 = 1 + (\sigma_1 - \sigma_2) / 3\sigma_2$ .

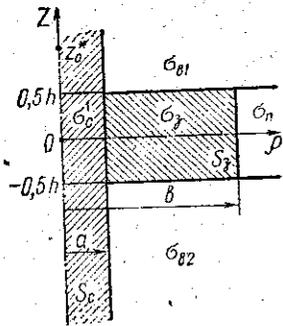
Сводя полученное векторное интегральное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений и решая ее, найдем аномальный ток. Подставляя значения тока в (19) и (20), найдем значения векторов  $E^a$  и  $H^a$  в любой точке слоистой среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах.— М.: Изд-во МГУ, 1969.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1972.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА НИЗКОЧАСТОТНОГО  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ  
СРЕДАХ

В работе исследуется математическая модель теории индукционного каротажа из класса двумерных осесимметричных математических моделей. Пласт конечной мощности  $h$  и проводимости  $\sigma_n$ , заключенный между двумя разнородными вмещающими полупространствами с проводимостями  $\sigma_{s1}$  и  $\sigma_{s2}$ , пересекается скважиной диаметра  $2a$  и проводимостью  $\sigma_c$ , ось которой нормальна к горизонтальным границам пласта. В пласте имеется однородная зона проникновения с внешним диаметром конечных размеров  $2b$  и проводимостью  $\sigma_3$ . В данной среде возбуждается гармоническое во времени ( $\exp(-i\omega t)$ ) электромагнитное поле вертикальным магнитным диполем (системой диполей), расположенным на оси скважины в точке  $M^*_0$ . Токами смещения по сравнению с токами проводимости пренебрегаем, а магнитную проницаемость  $\mu$  всюду считаем постоянной. Введем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$  таким образом, чтобы ось  $OZ$  совпадала с осью скважины, а плоскость  $z=0$  проходила через середину пласта (на рисунке изображено сечение рассматриваемой модели азимутальной плоскостью  $\varphi=0$ ).



В работе [1] показано, что для магнитного возбуждения в силу осевой симметрии электромагнитной задачи ненулевые компоненты поля  $E_\varphi, H_\rho, H_z$  связаны соотношениями

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi); \quad H_\rho = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}. \quad (1)$$

При этом компонента  $E_\varphi$  удовлетворяет в азимутальной полуплоскости  $\{\rho \geq 0, -\infty < z < \infty\}$  уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right] + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2 E_\varphi = -i\omega\mu j_\varphi, \quad (2)$$

где  $k^2(\rho, z) = i\omega\mu\sigma(\rho, z)$  — квадрат волнового числа среды,  $j_\varphi(\rho, z)$  — плотность сторонних токов. На поверхностях раздела сред непрерывны азимутальная компонента электрического поля  $E_\varphi$  и ее нормальная произвольная  $\partial E_\varphi / \partial n$ , на бесконечности выполнено условие убывания.

Граничная задача для уравнения (2) в работе [1] сведена к двумерному интегральному уравнению относительно азимутальной

компоненты электрического поля  $E_\varphi$  по области  $S_c \{0 < \rho < a, -\infty < z < \infty\}$  и  $S_3 \{0 < \rho < b, -0.5h < z < 0.5h\}$ :

$$E_\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} (k_c^2 - k_s^2) \iint_{S_c} G(M, M_0) E_\varphi(M) dS_M + \frac{1}{4\pi} (k_s^2 - k_r^2) \iint_{S_3} G(M, M_0) E_\varphi(M) dS_M + E_\varphi^0(M_0), \quad (3)$$

где ядро  $G(M, M_0)$  — фундаментальное решение для горизонтальной слоистой среды, внешней по отношению к области  $S = S_c \cup S_3$  с волновым числом  $(M_0 \in S)$

$$k_r = \begin{cases} k_{s1}, & \text{если } z > 0.5h; \\ k_n, & \text{если } |z| < 0.5h; \\ k_{s2}, & \text{если } z < -0.5h. \end{cases}$$

Функция  $G(M, M_0)$  построена в явном виде в [1] и может быть представлена в общем виде как

$$G(M, M_0) = S(M, M_0) + 2\pi\rho \int_0^\infty g(\lambda, z, z_0) J_1(\lambda\rho) J_1(\lambda\rho_0) \lambda d\lambda, \quad (4)$$

где

$$S(M, M_0) = \begin{cases} 0 & \text{— если } M \text{ и } M_0 \text{ в разных слоях;} \\ \rho \int_0^{2\pi} \exp(ikR) \cos\varphi / R d\varphi = 2\pi\rho \int_0^\infty e^{-l|z-z_0|} J_1(\lambda\rho) J_1(\lambda\rho_0) \lambda l^{-1} d\lambda & \text{— если } M \text{ и } M_0 \text{ в одном слое;} \end{cases} \quad (5)$$

здесь  $R = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi + (z-z_0)^2]^{1/2}$ ;  $l = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ ;  $J_1$  — функция Бесселя, а  $g(\lambda, z, z_0)$  — решение обыкновенного дифференциального уравнения  $g'' + (k^2 - \lambda^2)g = 0$  с условиями  $[g] = 0$ ;  $[g'] = \Delta$ ;

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{если } z \neq z_0; \\ 1, & \text{если } z = z_0. \end{cases}$$

В уравнении (3)  $E_\varphi^0(M_0)$  — поле вертикального магнитного диполя с моментом  $m_z$ , расположенного на оси  $OZ$  в точке  $M^*_0$  горизонтально-слоистой среды с волновым числом  $k_r$  в отсутствие скважины и зоны проникновения ( $\rho = \rho^*_0 = 0$ )

$$E_\varphi^0(M_0) = -\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (G(M, M_0)). \quad (6)$$

Используя выражение (4) для фундаментального решения

$G(M, M_0)$ , запишем  $E^0_\varphi$  в следующем виде:

$$E^0_\varphi(M_0) = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi} \left[ \rho_0 (1 - ikR^*) \exp(ikR^*) / (R^*)^2 + \int_0^\infty g(\eta, z^*_0, z_0) J_1(\eta\rho_0) \eta^2 d\eta \right], \quad (7)$$

где  $R^* = [\rho_0^2 + (z^*_0 - z_0)^2]^{1/2}$ ;  $z^*_0$  — вертикальная координата источника электромагнитного поля.

Для анализа рассматриваемой математической модели необходимо численно решать интегральное уравнение (3). Общий подход к решению состоит в замене интегралов в уравнении конечной суммой и сведению интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений. В силу неограниченности области  $S_c$  и размерности интегрального уравнения системы алгебраических уравнений получаются высокого порядка. При этом в результате численного решения получается достаточно обширная информация о поведении электромагнитного поля в большой пространственной области (при фиксированных электромагнитных характеристиках среды). Вместе с тем на практике при анализе разрешающей способности и глубинности реальных измерительных установок необходимо рассчитывать радикальные и вертикальные характеристики зондов, что эквивалентно расчету электромагнитного поля в достаточно малой пространственной области (обычно в одной точке), но в широком диапазоне изменения электромагнитных и геометрических параметров среды.

Создание алгоритмов, специально ориентированных на расчет радиальных и вертикальных характеристик измерительных установок, представляет собой весьма сложную проблему. Но в низкочастотном (индукционном) диапазоне создание таких алгоритмов можно осуществить на основе метода последовательных приближений. Настоящая работа посвящена развитию таких алгоритмов.

В основе применения метода последовательных приближений лежат оценки норм интегральных операторов и скорости сходимости итерационного процесса. В работах [1] и [2] выполнены оценки норм интегральных операторов для моделей скважина — пласт бесконечной мощности и пласт — зона проникновения. Эти оценки зависят от параметров модели. Из этих оценок следует, что норма интегрального оператора при фиксированных параметрах модели стремится к нулю, если частота  $\omega$  (или волновое число среды  $k$ ) стремится к нулю. Это доказывает принципиальную возможность применения метода последовательных приближений к решению уравнения (3) при достаточно низких частотах. Аналогичные оценки можно получить и для модели, представленной на рисунке. На основе оценок скорости сходимости возможно определить область изменения параметров модели, для которых в решении интегрального уравнения (3) достаточно лишь первого

приближения. В дальнейшем будем считать эти условия выполненными. Выпишем теперь первое приближение для азимутальной компоненты электрического поля  $E_\varphi$  (решение уравнения (3)):

$$E^1_\varphi(M_0) = E^0_\varphi(M_0) + \frac{1}{4\pi} (k_c^2 - k_r^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^a G(M, M_0) E^0_\varphi(M) d\rho dz + \frac{1}{4\pi} (k_a^2 - k_r^2) \int_{-0.5h}^{0.5h} \int_a^b G(M, M_0) E^0_\varphi(M) d\rho dz, \quad (8)$$

где азимутальная компонента электрического поля  $E^0_\varphi$  вычисляется в отсутствие скважины и зоны проникновения (7).

В индукционном каротаже основной выходной характеристикой является вертикальная составляющая напряженности магнитного поля  $H_z$ . Поэтому в дальнейшем получим расчетные формулы именно для величины  $H_z$ . Компоненты напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  ( $H_\rho, 0, H_z$ ) определяются из уравнений Максвелла (1) (для известного решения  $E_\varphi$ )

$$H_z(M_0) = \frac{1}{i\omega\mu\rho_0} \frac{\partial}{\partial\rho_0} (\rho_0 E^0_\varphi(M_0)) + \frac{1}{4\pi} (\sigma_c - \sigma_r) \iint_{S_c} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial\rho_0} (\rho_0 G(M, M_0)) E_\varphi(M) dS_M + \frac{1}{4\pi} (\sigma_a - \sigma_r) \iint_{S_a} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial\rho_0} (\rho_0 G(M, M_0)) E_\varphi(M) dS_M, \quad (9)$$

где  $\sigma_r$  — проводимость горизонтальной слоистой среды

$$\sigma_r = \begin{cases} \sigma_{a1}, & \text{если } z \geq 0.5h; \\ \sigma_n, & \text{если } |z| < 0.5h; \\ \sigma_{a2}, & \text{если } z < -0.5h. \end{cases}$$

Первое слагаемое справа в (9) есть вертикальная компонента напряженности магнитного поля в горизонтально-слоистой среде без скважины и зоны проникновения. Вычисляя дифференциальный оператор от  $E^0_\varphi$ , получим ( $\rho_0 = \rho^*_0 = 0$ )

$$H^0_z(M_0) = \frac{m_z}{4\pi} \left[ \frac{2(1 - ikR^*)}{(R^*)^3} e^{ikR^*} + \int_0^\infty g(\lambda, z^*_0, z_0) \lambda^3 d\lambda \right], \quad (10)$$

где  $R^* = |z_0 - z^*_0|$  — расстояние между источником и точкой наблюдения вдоль оси  $OZ$ .

Аналогичные вычисления дифференциального оператора в подынтегральном выражении (9) приводят (при  $\rho_0 = 0$ ) к

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial\rho_0} (\rho_0 G) = 2\pi\rho \int_0^\infty [g(\lambda, z, z_0) + \delta(z, z_0)] \lambda^2 J_1(\lambda\rho) d\lambda, \quad (11)$$

где

$$\delta(z, z_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \text{ и } z_0 \text{ в разных слоях;} \\ \frac{1}{l} e^{-l|z-z_0|}, & \text{если } z \text{ и } z_0 \text{ в одном слое.} \end{cases}$$

Получим первое приближение для  $H_z$  на оси скважины. Для этого в выражение (9) для вертикальной компоненты напряженности магнитного поля подставим значение азимутальной компоненты напряженности электрического поля  $E_\varphi^0$  (7) и фундаментальное решение (4) задачи в горизонтально-слоистой среде  $G(M, M_0)$ . В полученных многократных интегралах изменим порядок интегрирования и вычислим вначале интегралы по переменной  $\rho$  в области  $S_c$

$$I_{\rho c}(\lambda, \eta) = \int_0^a \rho J_1(\lambda \rho) J_1(\eta \rho) d\rho = \frac{a}{(\lambda^2 - \eta^2)} [\eta J_1(\lambda a) J_0(\eta a) - \lambda J_0(\lambda a) J_1(\eta a)] \quad (12)$$

и по области  $S_s$

$$I_{\rho s}(\lambda, \eta) = \int_a^b \rho J_1(\lambda \rho) J_1(\eta \rho) d\rho = \frac{b}{(\lambda^2 - \eta^2)} [\eta J_1(\lambda b) J_0(\eta b) - \lambda J_0(\lambda b) J_1(\eta b)] - I_{\rho c}(\lambda, \eta). \quad (13)$$

Таким образом, размерность многократного интеграла в (9) понижена на единицу. Далее выполним в явном виде интегрирование по переменной  $z$ . Для этого необходимо вычислить интегралы типа

$$I_{zc}(\lambda, \eta, z_0, z_0^*) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \eta, z, z_0, z_0^*) dz, \quad (14)$$

$$I_{zs}(\lambda, \eta, z_0, z_0^*) = \int_{-0.5h}^{0.5h} f(\lambda, \eta, z, z_0, z_0^*) dz, \quad (15)$$

где

$$f(\lambda, \eta, z, z_0, z_0^*) = \left[ \frac{1}{l} e^{-l|z-z_0|} + g(\lambda, z, z_0) \right] \times \left[ \frac{1}{m} e^{-m|z-z_0^*|} + g(\eta, z, z_0^*) \right].$$

При интегрировании по переменной  $z$  необходимо рассмотреть все случаи взаимного расположения точек источника  $z_0^*$  и наблюдения  $z_0$ . В частности, для вмещающей слоистой среды, состоящей из одиночного пласта конечной мощности и двух различных полупространств, получается девять случаев взаимного

расположения точек  $z_0$  и  $z_0^*$ . При интегрировании по  $z$  используются явные выражения для функций  $g$ , которые имеются в [1] и здесь не приводятся. Заметим, что зависимость от  $z$ ,  $z_0$  и  $z_0^*$  входит только в показатель соответствующей экспоненциальной функции и поэтому интегралы (14) и (15) легко вычисляются в явном виде. Окончательные результаты интегрирования  $I_{zc}$  и  $I_{zs}$  по переменной  $z$ , ввиду громоздких выражений, приведем лишь для одного возможного случая расположения точек  $z_0$  и  $z_0^*$  ( $z_0 > 0.5h$  и  $z_0^* < -0.5h$ ):

$$I_{zc} = (l_{n1} - m_{n1}) F_{11} \tilde{F}_{13} \exp(l_{n1}(0.5h - z_0) - hm_n + m_{n2}(0.5h + z_0^*)) + (l_{n2} - m_{n2}) F_{31} \tilde{F}_{33} \exp(l_{n1}(0.5h - z_0) - hl_n + m_{n2}(0.5h + z_0^*)) + I_{zs}; \quad (16)$$

$$I_{zs} = (l_n - m_n) (F_{21} \tilde{F}_{23} \exp(-hm_n) + M_{21} \tilde{M}_{23} \exp(-hl_n)) \times (1 - \exp(-h(l_n + m_n))) \exp(l_{n1}(0.5h - z_0) + m_{n2}(z_0^* + 0.5h)) + (l_n + m_n) (F_{21} \tilde{M}_{23} + M_{21} \tilde{F}_{23} \exp(-h(l_n + m_n))) (\exp(-hm_n) - \exp(-hl_n)) \exp(l_{n1}(0.5h - z_0) + m_{n2}(0.5h + z_0^*)); \quad (17)$$

где

$$F_{11} = \{2l_{n1}[(l_n + l_{n2}) + (l_n - l_{n2}) \exp(-2l_n h)] - Q\} (l_{n1} Q)^{-1};$$

$$F_{21} = 2(l_n + l_{n2}) Q^{-1}; \quad M_{21} = 2(l_n - l_{n2}) Q^{-1};$$

$$F_{31} = 4l_n Q^{-1}; \quad \tilde{F}_{13} = 4m_n \tilde{Q}^{-1};$$

$$\tilde{F}_{23} = 2(m_n - m_{n1}) \tilde{Q}^{-1}; \quad \tilde{M}_{23} = 2(m_{n1} + m_n) \tilde{Q}^{-1};$$

$$\tilde{F}_{33} = \{2m_{n2}[(m_n - m_{n1}) \exp(-2hm_n) + (m_{n1} + m_n)] - \tilde{Q}\} (\tilde{Q} m_{n2})^{-1};$$

$$Q = (l_{n1} + l_n)(l_n + l_{n2}) + (l_{n1} - l_n)(l_n - l_{n2}) \exp(-2l_n h);$$

$$\tilde{Q} = (m_{n1} + m_n)(m_n + m_{n2}) + (m_{n1} - m_n)(m_n - m_{n2}) \exp(-2m_n h).$$

Окончательно в (9) остался двойной интеграл по спектральным параметрам  $\lambda$  и  $\eta$  ( $0 \leq \lambda < \infty$ ;  $0 \leq \eta < \infty$ ). Преобразуем оставшийся двойной интеграл к виду удобному для вычислений заменой переменных  $\lambda = \xi \cos \alpha$ ,  $\eta = \xi \sin \alpha$ . В результате этой замены переменных интегрирование по переменной  $\alpha$  в двойном интеграле выполняется на конечном отрезке  $0 \leq \alpha < 0.5\pi$ .

Окончательный результат представим в виде безразмерной функции  $H(M) = a^3 H_z(M) / m_z$ , причем геометрические размеры модели пронормируем на радиус скважины  $a$ , проводимости каждого участка среды — на проводимость скважины  $\sigma_c$ . Тогда первое приближение для напряженности магнитного поля на оси скважины принимает вид

$$H^1(M_0) = H_0(M_0) + I_1 + I_2, \quad (18)$$

где двойной интеграл по области  $S_c$

$$I_1 = \frac{1}{8} (\tilde{k}_c^2 - \tilde{k}_r^2) \int_0^{\infty} \int_0^{0.5\pi} \tilde{a} \xi^2 \operatorname{tg}^2 2\alpha \tilde{I}_{pc}(\xi, \alpha) \tilde{I}_{zc}(\xi, \alpha) d\alpha d\xi, \quad (19)$$

а интеграл по области  $S_3$

$$I_2 = \frac{1}{8} (\tilde{k}_3^2 - \tilde{k}_r^2) \int_{-0.5h}^{0.5h} \int_0^{0.5\pi} \xi^2 \operatorname{tg}^2 2\alpha \tilde{I}_{p3}(\xi, \alpha) \tilde{I}_{z3}(\xi, \alpha) d\alpha d\xi. \quad (20)$$

Здесь символом «тильда» обозначены безразмерные величины, а  $\tilde{I}_{pc}$ ,  $\tilde{I}_{zc}$ ,  $\tilde{I}_{p3}$ ,  $\tilde{I}_{z3}$  — функции, получившиеся в результате интегрирования по переменным  $\rho$  и  $z$  для области  $S_c$  и  $S_3$ .

Выпишем результаты интегрирования по переменной  $\rho$  после замены переменных

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{pc} &= \tilde{a} [\sin \alpha J_1(\tilde{a}\xi \cos \alpha) J_0(\tilde{a}\xi \sin \alpha) - \cos \alpha J_0(\tilde{a}\xi \cos \alpha) J_1(\tilde{a}\xi \sin \alpha)]; \\ \tilde{I}_{p3} &= \tilde{b} [\sin \alpha J_1(\tilde{b}\xi \cos \alpha) J_0(\tilde{b}\xi \sin \alpha) - \cos \alpha J_0(\tilde{b}\xi \cos \alpha) \times \\ &\quad \times J_1(\tilde{b}\xi \sin \alpha)] - \tilde{I}_{pc}. \end{aligned} \quad (21)$$

Знаменатели подынтегральных выражений (19) и (20) при  $\alpha = \pi/4$  обращаются в нуль. Поэтому необходимо вычислить предельные значения подынтегральных выражений при  $\alpha \rightarrow \pi/4$ . При этом предварительно удобно вычислить следующие пределы:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/4} \tilde{I}_{zc} / \cos 2\alpha; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi/4} \tilde{I}_{z3} / \cos 2\alpha;$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/4} (\tilde{I}_{pc} / \cos 2\alpha) = u(\tilde{a}); \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi/4} (\tilde{I}_{p3} / \cos 2\alpha) = \tilde{b}u(\tilde{b}) - \tilde{a}u(\tilde{a}); \quad (22)$$

$$u(\tilde{a}) = \left\{ \frac{1}{2} \tilde{a}\xi \left[ J_0^2 \left( \frac{\tilde{a}\xi}{\sqrt{2}} \right) + J_1^2 \left( \frac{\tilde{a}\xi}{\sqrt{2}} \right) \right] - \sqrt{2} J_0 \left( \frac{\tilde{a}\xi}{\sqrt{2}} \right) J_1 \left( \frac{\tilde{a}\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\}; \quad (23)$$

$$u(\tilde{b}) = \left\{ \frac{1}{2} \tilde{b}\xi \left[ J_0^2 \left( \frac{\tilde{b}\xi}{\sqrt{2}} \right) + J_1^2 \left( \frac{\tilde{b}\xi}{\sqrt{2}} \right) \right] - \sqrt{2} J_0 \left( \frac{\tilde{b}\xi}{\sqrt{2}} \right) J_1 \left( \frac{\tilde{b}\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\}. \quad (24)$$

Значения двух первых пределов (22) выписывать не будем ввиду громоздких выражений. После вычисления пределов (22) — (24) можно найти окончательные предельные значения подынтегральных выражений при  $\alpha \rightarrow \pi/4$ .

При численной реализации двойные интегралы (19) и (20) вычислялись с заданной абсолютной погрешностью как повторные по квадратурным формулам Гаусса (с фиксированным числом узлов и с автоматическим выбором длины отрезка интегрирования). При этом интеграл по переменной  $\alpha$  на отрезке  $0 \leq \alpha \leq 0.5\pi$  разбивался на сумму двух интегралов для  $0 \leq \alpha < 0.25\pi - \varepsilon$ ;  $0.25\pi + \varepsilon <$

$\alpha < 0.5\pi$  и предельного значения при  $\alpha \rightarrow 0.25\pi$ . Интегрирование по Гауссу проводилось с помощью специально написанной программы для комплексной функции действительного переменного. Окончательный результат нормировался на магнитное поле в воздухе в точке наблюдения.

Описанный алгоритм реализован на языке «ФОРТРАН» в виде программы для ЭВМ БЭСМ-6. В целях экономии машинной памяти программа разбита на блоки. Каждый блок соответствует одному фиксированному положению точек источника и наблюдения на оси скважины. При задании координат этих точек происходит выбор соответствующего блока, его трансляция и вычисление напряженности магнитного поля на оси скважины.

Необходимо отметить существенное достоинство реализованного алгоритма, заключающееся в том, что искомые поля получаются сразу же без промежуточных вычислений полей на некоторых поверхностях или линиях. По существу вычисление двойных интегралов в (18) дает ответ — искомое поле  $H_z$  на оси скважины либо азимутальную компоненту  $E_\phi$  в любой точке среды (8). Этим достигается существенная экономия машинного времени и памяти, так как отпадает необходимость в вычислении и хранении большого числа элементов матрицы.

Помимо этого, структура выражения (18) чрезвычайно удобна для исследования раздельного влияния параметров скважины и зоны проникновения. Их отдельные вклады в результирующее электромагнитное поле можно вычислить независимо друг от друга, сравнить по величине и по влиянию на измеряемые параметры электромагнитного поля.

Основной вариант программы позволяет получать в низкочастотной области радиальные и вертикальные характеристики измерительных установок при фиксированном положении зонда. Другой вариант программы считает профильные кривые движущейся измерительной установки.

В заключение отметим, что выполненные исследования показали хорошее совпадение с результатами прямых методов расчета электромагнитного поля на оси скважины в низкочастотной области.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В. Математическое моделирование в электромагнитном каротаже.—Л.: Недра, 1979.
2. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. К оценке влияния промежуточной зоны на результаты индукционного каротажа.—В кн.: Численные методы в геофизике. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 25—30.

О РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА  
В ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЕ

Настоящая работа посвящена решению одномерной двухфазной задачи Стефана с некоторыми особенностями, приводящими к большим трудностям при численной реализации существующих ныне методов решения этой задачи. Особенности эти таковы: во-первых, это наличие градиентной среды, т. е. зависимость температуры фазового перехода от пространства; во-вторых, значительное изменение коэффициента теплопроводности с изменением фазового состояния, приводящее к большим градиентам температуры; в-третьих, многофронтность, а именно появление новой фазы в виде одного или нескольких слоев. Эти особенности являются причиной того, что известные вычислительные алгоритмы, применяемые при решении задачи Стефана, оказываются неустойчивыми. Такие задачи возникают, в частности, в геофизике. Так, при математическом моделировании процесса проплавления мантии Земли, обусловленного нагревом ее радиоактивными элементами, и выноса этих элементов из мантии в земную кору возникает именно такая задача. Действительно, температура плавления вещества Земли зависит от давления и тем самым от пространственной переменной, коэффициент теплопроводности претерпевает резкое изменение в слое расплава, так как возникающий слой оказывается механически неустойчивым, в нем начинается процесс конвективного перемешивания, который моделируется существенным увеличением этого коэффициента, и, наконец, изменение фазового состояния происходит на некоторой глубине сначала в одном слое, затем в другом, третьем и т. д. Задачи такого типа встречаются не только в геотермике, поэтому разработка методов их решения и анализ особенностей вычислительного алгоритма являются необходимыми.

Рассмотрим общую математическую постановку задачи, ограничиваясь для простоты случаем одной зоны расплава, так как основной характерной особенностью задачи является появление слоя (а не одной фазовой границы). Задача состоит в определении нестационарного температурного поля  $u(r, t)$  и законов движения границ слоя расплава  $\xi_1(t) < \xi_2(t)$ . Искомые функции  $u(r, t)$  в  $Q_T = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$  и  $\xi_1(t), \xi_2(t), 0 \leq t \leq T$ , будем находить из условий:

$$Lu \equiv c(u, r) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} \right] = f(u, r, t), \quad (1)$$

$$(r, t) \in Q_T = \{0 < r < 1, 0 < t \leq T\}, (r, t): u(r, t) \neq U^*(r),$$

$$l_1(u) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \lambda \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$l_2(u) = \left( \lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma u \right) \Big|_{r=1} = q(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = U^0(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (4)$$

$$u|_{r=\xi_i(t)-0} = u|_{r=\xi_i(t)+0} = U^*(r)|_{r=\xi_i(t)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i=1, 2, \quad (4)$$

$$(-1)^i \kappa \frac{d\xi_i(t)}{dt} = \left( \lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=\xi_i(t)+0} - \left( \lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=\xi_i(t)-0}, \quad t > 0; \quad i=1, 2, \quad (5)$$

Здесь  $c(u, r) > 0, \lambda(u, r) > 0, f(u, r, t), U^0(r), U^*(r), q(t)$  — известные функции своих аргументов;  $\sigma, \kappa$  — заданные числа.

Заметим, что широко применяемые для решения многофронтных задач схемы с введением функции теплосодержания и со сглаживанием [1], [2] в данном случае неприменимы, так как выведены в предположении  $U^*(r) = \text{const}$ . Поэтому для решения поставленной задачи воспользуемся методом, изложенным в [3]. В предположении существования единственного гладкого решения задачи (1)–(5) система (1)–(5) эквивалентна для любой  $\eta(r, t) \in W^1_2(Q_T)$  выводимому ниже интегральному тождеству. Умножим обе части уравнения (1) на  $r^2 \eta(r, t)$  и проинтегрируем по  $r$  на отрезке  $[0, 1]$ . Разбив область интегрирования на три отрезка  $[0, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], [\xi_2, 1]$  и применив интегрирование по частям, мы получим соотношение

$$\int_0^1 r^2 c(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} \eta(r, t) dr + \int_0^1 r^2 \lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \eta(r, t)}{\partial r} dr -$$

$$- \xi_1^2(t) \lambda(u, \xi_1(t)) \eta(\xi_1(t), t) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\xi_1(t)-0} +$$

$$+ \xi_1^2(t) \lambda(u, \xi_1(t)) \eta(\xi_1(t), t) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\xi_1(t)+0} - \xi_2^2(t) \lambda(u, \xi_2(t)) \eta(\xi_2(t),$$

$$t) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\xi_2(t)-0} + \xi_2^2(t) \lambda(u, \xi_2(t)) \eta(\xi_2(t), t) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\xi_2(t)+0} -$$

$$- \lambda(u, r) \eta(r, t) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1-0} = \int_0^1 r^2 f(u, r, t) \eta(r, t) dr.$$

Воспользуемся условиями (2), (4), (5) и получим искомое интегральное тождество:

$$\int_0^1 r^2 c(u, r) \frac{\partial u}{\partial t} \eta(r, t) dr + \int_0^1 r^2 \lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \eta(r, t)}{\partial r} dr +$$

$$\begin{aligned}
 & + \xi_2^2(t) \eta(\xi_2(t), t) \times \frac{d\xi_2(t)}{dt} - \xi_1^2(t) \eta(\xi_1(t), t) \times \frac{d\xi_1(t)}{dt} - \\
 & - \eta(r, t) (q - \sigma u) |_{r=1} = \int_0^1 r^2 f(u, r, t) \eta(r, t) dr. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Следуя [3], используем соотношения, аппроксимирующие полученное интегральное тождество для получения однородной разностной схемы сквозного счета. Введем в  $Q_T$  сетку узлов, для простоты равномерную по  $r$  и  $t$ :

$$R_{ht} = \{(r_i, t_k) : r_i = ih, i = \overline{0, N}, Nh = 1; t_k = k\tau, k = \overline{0, K}, K\tau = T\},$$

где  $\overline{0, N}$  означает натуральный ряд чисел  $0, 1, \dots, N$ . Будем искать сеточные функции  $v_{ih}, \xi_{1k}, \xi_{2k}$  — приближенные значения  $u(r, t), \xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  в узлах  $(r_i, t_k)$  сетки  $R_{ht}$ . Введем в рассмотрение функции  $\bar{v}_{ih}, \bar{\eta}$  — восполнения от значений сеточных функций  $v_{ih}, \eta$  в узлах сетки, линейные по  $r$  и кусочно-постоянные по  $t$ . В интегральном тождестве (6), взятом при  $t=t_k$ , заменим производную  $\partial u / \partial t$  разностным отношением назад, производные по  $r$  — разностными отношениями вперед и разностные отношения кусочно-постоянно продолжим по  $r$ . В результате получим соотношение

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 r^2 \bar{c} \bar{v}_r \bar{\eta} dr + \int_0^1 r^2 \bar{\lambda} \bar{v}_r \bar{\eta} dr + \kappa \xi_{2k}^2 \bar{\eta} |_{r=\xi_2} - \kappa \xi_{1k}^2 \bar{\eta} |_{r=\xi_1} = \\
 & = \int_0^1 r^2 \bar{f} \bar{\eta} dr + \bar{\eta} (q - \sigma \bar{v}) |_{r=1} \quad (7)
 \end{aligned}$$

для любых  $\bar{\eta}$  из того же класса, что и  $\bar{v}$ . Здесь и ниже использованы безындексные обозначения:

$$\begin{aligned}
 v_r &= \tau^{-1} (v_{ih} - v_{ih-1}), \quad \zeta_r = \tau^{-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1}), \\
 v_r &= h^{-1} (v_{i+1k} - v_{ik}), \\
 \bar{v}_r &= v_r, \quad r_i \leq r < r_{i+1}, \quad \bar{v}_t = v_t, \quad r_i \leq r < r_{i+1}, \\
 \bar{\eta}_r &= h^{-1} (\eta_{i+1k} - \eta_{ik});
 \end{aligned}$$

$\bar{c}, \bar{\lambda}, \bar{f}$  — значения функций  $c, \lambda, f$  в узлах  $(r_i, t_k)$  сетки  $R_{ht}$ :

$$\bar{c} = c(\bar{v}_{ih}, r_i), \quad \bar{\lambda} = \lambda(\bar{v}_{ih}, r_i, l), \quad \bar{f} = f(v_{ih}, r_i, t_k), \quad r_i \leq r < r_{i+1}.$$

Из полученного соотношения, взятого для последовательно возрастающих номеров временного слоя  $k=1, 2, \dots$  (при  $t=0$  вместо (7) берутся начальные условия  $\bar{v}|_{t=0} = U^0(r)$ ), можно получить искомую однородную разностную схему (сквозного счета), если надлежащим образом выбрать пробную функцию  $\bar{\eta}(r, t)$ . В качестве  $\bar{\eta}$  возьмем «локальную» сеточную функцию, равную 1 в одном

из узлов сетки и нулю в остальных:

$$\bar{\eta}(r, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_{i-1}, \quad r_{i+1} \leq r \leq 1, \\ h^{-1}(r - r_{i-1}), & r_{i-1} < r \leq r_i, \\ 1 - h^{-1}(r - r_i), & r_i < r \leq r_{i+1}. \end{cases} \quad (8)$$

Предположим вначале, что  $\zeta_{1k}$  и  $\zeta_{2k}$  — приближенные значения  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  на слое  $t_k$  — известны,  $(r_{i1^*k}, t_k)$  — узел сетки, ближайший слева к точке  $(\zeta_{1k}, t_k)$ , а  $(r_{i2^*k}, t_k)$  — узел сетки, ближайший слева к точке  $(\zeta_{2k}, t_k)$ . Пусть пока также  $i1^*k \neq 0, i2^*k \neq N-1$ . Тогда, аппроксимируя (7) простейшими квадратными формулами и учитывая (8), для любого внутреннего узла  $(r_i, t_k), i \neq 0, N, i \neq i1^*k, i \neq i1^*k + 1, i \neq i2^*k, i \neq i2^*k + 1$  мы получим обычное неявное четырехточечное разностное уравнение:

$$\begin{aligned}
 \bar{c} \bar{v}_r - r^{-2} (\bar{\lambda} r^2 \bar{v}_r)_r &= \bar{f}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad i \neq i1^*k, \quad i \neq i1^*k + 1, \\
 & i \neq i2^*k, \quad i \neq i2^*k + 1. \quad (9)
 \end{aligned}$$

В узлах  $(r_{i1^*k}, t_k)$  и  $(r_{i1^*k+1}, t_k)$ , прилегающих к фронту  $\zeta_{1k}$ , имеем:

$$\bar{c} \bar{v}_r - r^{-2} (\bar{\lambda} r^2 \bar{v}_r)_r - \kappa r^{-2} \zeta_{1k}^2 \zeta_{1i}^{-1} (1 - \theta_{1k}) h^{-1} = \bar{f}, \quad i = i1^*k, \quad (9_2)$$

$$\bar{c} \bar{v}_r - r^{-2} (\bar{\lambda} r^2 \bar{v}_r)_r - \kappa r^{-2} \zeta_{1k}^2 \zeta_{1i}^{-1} \theta_{1k} h^{-1} = \bar{f}, \quad i = i1^*k + 1, \quad (9_3)$$

где  $\theta_{1k} = (\zeta_{1k} - h \{\zeta_{1k} h^{-1}\}) h^{-1}, \{\dots\}$  — целая часть.

В узлах  $(r_{i2^*k}, t_k)$  и  $(r_{i2^*k+1}, t_k)$ , прилегающих к фронту  $\zeta_{2k}$ , имеем:

$$\bar{c} \bar{v}_r - r^{-2} (\bar{\lambda} r^2 \bar{v}_r)_r + \kappa r^{-2} \zeta_{2k}^2 \zeta_{2i}^{-1} (1 - \theta_{2k}) h^{-1} = \bar{f}, \quad i = i2^*k, \quad (9_4)$$

$$\bar{c} \bar{v}_r - r^{-2} (\bar{\lambda} r^2 \bar{v}_r)_r + \kappa r^{-2} \zeta_{2k}^2 \zeta_{2i}^{-1} \theta_{2k} h^{-1} = \bar{f}, \quad i = i2^*k + 1, \quad (9_5)$$

где  $\theta_{2k} = (\zeta_{2k} - h \{\zeta_{2k} h^{-1}\}) h^{-1}$ .

К системе (9<sub>1</sub>) — (9<sub>5</sub>) нужно еще присоединить разностные аналоги граничных и начальных условий. Для  $i=0$  и  $i=N$ , взяв соответственно

$$\bar{\eta} = \begin{cases} 0, & r \geq h, \\ 1 - h^{-1}r, & 0 \leq r < h, \end{cases} \quad \bar{\eta} = \begin{cases} 0, & r \leq 1 - h, \\ 1 - (1 - r) h^{-1}, & 1 - h < r \leq 1, \end{cases}$$

получим из (7) следующие уравнения:

$$\bar{c} \bar{v}_r - 6 \bar{\lambda} \bar{v}_r h^{-1} = \bar{f}, \quad i = 0, \quad (10_1)$$

$$\bar{c} \bar{v}_r - 2 h^{-1} [-\bar{\lambda} \bar{v}_r + (q - \sigma \bar{v})] = \bar{f}, \quad i = N. \quad (10_2)$$

Поэтому в качестве следующей итерации  $\zeta_i$  мы берем  $\zeta_i^{s+1} > \zeta_i^s$ , например,

$$\zeta_i^{s+1} = \zeta_i^s + p(\bar{\zeta}_i^s - \zeta_i^s), \text{ где } 0 < p < 1. \quad (16)$$

Если на каком-то шаге итерирования окажется, что  $\bar{\zeta}_i^s < \zeta_i^s$ , то это означает, что  $\zeta_i^s$  было взято слишком большим и истинное значение фронта  $\zeta_i$  находится левее  $\zeta_i^s$ . Из всей последовательности итераций  $\{\zeta_i^s\}$ ,  $s=0, 1, 2, \dots$ , выделим две подпоследовательности: подпоследовательность  $\{\zeta_{i1}^{s1} : \zeta_i^s < \zeta_i^s\}$  и подпоследовательность  $\{\zeta_{i2}^{s2} : \zeta_i^s > \zeta_i^s\}$ , где  $\{s\} = \{s1\} \cup \{s2\}$ . Если  $\zeta_i^s \in \{\zeta_{i1}^{s1}\}$ , а ближайшая к ней по номеру итерация  $\zeta_i$  из  $\{\zeta_{i2}^{s2}\}$  есть  $\zeta_i^{s+q}$ , где  $q \geq 1$ , то  $\zeta_i^{s+q+1}$  нужно взять в промежутке  $(\zeta_i^s, \zeta_i^{s+q})$ , к примеру,

$$\zeta_i^{s+q+1} = (1/2)(\zeta_i^s + \zeta_i^{s+q}). \quad (17)$$

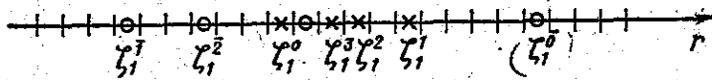


Рис. 1

Для улучшения скорости сходимости итераций можно вместо (17) использовать для выбора  $\zeta_i^{s+q+1}$  другое выражение, учитывающее расстояния  $[\zeta_i^s, \zeta_i^s]$  и  $[\zeta_i^{s+q}, \zeta_i^{s+q}]$ :

$$\zeta_i^{s+q+1} = \frac{\zeta_i^{s+q} \zeta_i^s - \zeta_i^s \zeta_i^{s+q}}{\zeta_i^{s+q} - \zeta_i^s + \zeta_i^s - \zeta_i^s}. \quad (18)$$

Аналогичным образом строится и последовательность итераций для  $\zeta_2$ . Как показали численные эксперименты, построенная таким образом последовательность итераций является сходящейся для задачи с одним слоем расплава. При решении задачи с несколькими слоями расплава выяснилось, что описанный итерационный метод нуждается в дополнительном изменении, так как в указанном случае не всегда удавалось добиться сходимости итераций. Это связано, по-видимому, с взаимным влиянием движения фронтов, что нарушает справедливость вышеизложенных рассуждений о связи  $\zeta_i^s$  и  $\zeta_i^{s+1}$ . В самом деле, если, например,  $\zeta_2^{s+1}$  следовало сдвинуть вправо относительно  $\zeta_2^s$  и тем самым опустить кривую температуры, а в то же самое время  $\zeta_3^{s+1}$  бралось правее  $\zeta_3^s$ , что поднимало эту кривую, то  $\zeta_2^{s+1}$  и  $\zeta_3^{s+1}$ , полученные при решении задачи (14) с  $\zeta_2^{s+1}$  и  $\zeta_3^{s+1}$ , могли оказаться такими, что нарушалась монотонная сходимость подпоследовательностей  $\{\zeta_{2n}^{s1}\}$ ,  $\{\zeta_{2n}^{s2}\}$ ,  $\{\zeta_{3n}^{s3}\}$ ,  $\{\zeta_{3n}^{s4}\}$  и алгоритм выбора следующих итераций оказывался

неопределенным. В связи с этим оказалось целесообразным строить для определения каждого фронта  $\zeta_i$  не две подпоследовательности итераций, а лишь одну «одностороннюю», т. е. дающую приближение искомого фронта с одной стороны. Это достигается исключением из рассмотрения тех итераций, которые дают резуль-

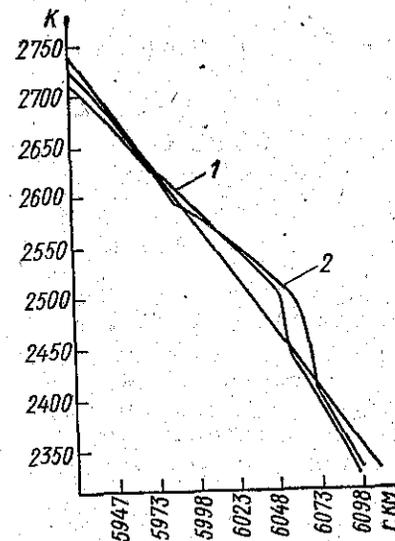


Рис. 2

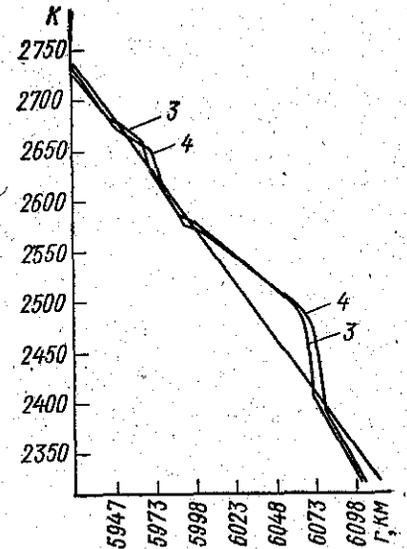


Рис. 3

тат по другую сторону от взятого фронта. Положительным моментом такого метода является исключение при итерировании случаев резкого изменения ширины слоев или расстояния между ними, что может привести к исчезновению слоя на итерации к слиянию отдельных слоев.

На рисунках 2, 3 приведены кривые распределения температур, полученные при решении задачи о проплавлении мантии Земли. Кривые 1 и 2 на рис. 2 показывают распределение температур с одной зоной расплава. Кривые 3, 4 имеют 2 зоны в жидкой среде.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Моисеев Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана.— ЖВМиМФ, 1965, т. 5, № 5, с. 816—827.
2. Будаков Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана.— ЖВМиМФ, 1965, т. 5, № 5, с. 828—840.
3. Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. Схемы сквозного счета численного решения задач для параболических уравнений.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 23. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974, с. 85—102.