

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Студенческая олимпиада по математике  
17 апреля 2010 года

## 2 курс

1. Найти  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (x^2 + a^2)^{-1} \sin(x^{-1}) dx$ .
2. Вычислить определитель матрицы  $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $q_{ij} = (a_i + b_j)^{-1} + c$ , где  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c$  — заданные числа.
3. Функция  $f(x) \in C[0, +\infty)$  такова, что при  $\forall a > 0$  выполняется  $f(na) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Доказать, что  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .
4. Доказать, что для любого решения  $y = y(x)$  дифференциального уравнения  $y'' + \sin y = 0$  существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$ .
5. Пусть  $C_n$  — куб  $[-1, 1]^n$ , случайные величины  $\chi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , равномерно распределены по  $C_n$ . Найти математическое ожидание наибольшей стороны параллелепипеда, образованного пересечением всех кубов  $\chi_i + C_n$ .
6. Доказать, что по любому простому модулю одно из чисел 2, 3 или 6 есть полный квадрат.
7. Найти граф с как можно меньшим числом вершин, не имеющий треугольников, но имеющий хроматическое число не меньше четырёх.
8. В черном ящике реализуется неизвестная монотонная функция трёх переменных. Запрос адресуется к любому подкубу области определения. Ответ — сумма по модулю два числа единиц. Какое минимальное число запросов требуется для расшифровки функции (последующий запрос может зависеть от предыдущих)?