

А.В. Баев¹

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТОРНАДО*

Введение

Попыткам доказать существование и единственность решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости и газа посвящено множество работ. Подавляющее большинство этих работ использует систему уравнений гидродинамики в эйлеровых координатах [1], рассматривая при этом вопросы существования и единственности обобщенных решений в пространствах типа L^p , H^s в \mathbb{R}^n , [2–7]. К настоящему времени установлена корректность обобщенных решений уравнения Навье–Стокса в малом и целом для начальных условий различной гладкости и поведения на бесконечности, а также корректность стационарных решений [8–14].

Однако до сих пор остаются открытыми вопросы существования и единственности классического решения уравнения Навье–Стокса в \mathbb{R}^n и T^n , а также в ограниченной области с гладкой границей. Более того, до настоящего времени остается открытым вопрос: есть ли предельное конечное время существования классического решения для произвольного начального условия. Эта ситуация явилась причиной включения уравнения Навье–Стокса в список важнейших нерешенных математических проблем столетия, [15,16].

Целью настоящей работы является попытка дать ответ на поставленные вопросы для установившихся решений. В отличие от стационарных, эти решения определяются неизменным пространственным полем скоростей, экспоненциальным убыванием их во времени и постоянным давлением. Векторное поле скоростей таких решений является собственной функцией краевой задачи для уравнения Навье–Стокса и представляет собой вихревое поле. К числу подобных собственных состояний относятся такие физические явления как вихри Тейлора, водовороты и природный смерч торнадо.

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, drbaev@mail.ru.

*Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Существует значительное число работ о торнадо, посвященных как физическому объяснению этого явления, так и попыткам построения его замкнутой математической модели или численного решения, [17–22]. Тем не менее, в известной автору литературе отсутствует доказательство существования решения системы уравнений, описывающей этот вихревой процесс. В работе показано, что основным уравнением, моделирующим торнадо, является стационарное уравнение Навье–Стокса. Более того, мы доказываем, что торнадо является собственным решением соответствующей задачи и получаем ее решение.

Предложенная модель торнадо не только адекватно отражает известные свойства этого природного смерча, но открывает новые стороны явления. Так, наряду с обоснованием движения воздуха вниз в приосевой части смерча (воронке) подтверждено, что вращение в воронке происходит в направлении противоположном вращению во внешней части торнадо (фулъяре). Такая структура движения газа позволяет сбалансировать гигантские моменты внутренней и внешней части смерча.

Обозначения и основные уравнения.

Модель (геометрия)

\mathbb{R}^n — евклидово пространство с нормой $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$, $n \geq 2$,

$D \subset \mathbb{R}^n$ — открытая ограниченная область с замыканием \bar{D} в \mathbb{R}^n ,

$S = \partial D$ — граница D класса $C^{2+\alpha}$, N — внутренняя нормаль к S , $|N| = 1$,

$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = T^n$ — n -мерный тор,

$(x) = (x^i)$ — неподвижные декартовы координаты Эйлера в \mathbb{R}^n ,

$\nabla \equiv \text{grad}$, div , rot , $\Delta \equiv \text{div grad}$ — инвариантные дифференциальные операторы в скалярных, векторных и тензорных полях.

Модель (среда)

ε — коэффициент кинематической вязкости,

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ — векторное поле скоростей частиц газа,

$$|\nabla \mathbf{v}|^2 = \sum_{i,k} |\partial v_i / \partial x^k|^2,$$

$p = p(x, t)$ — гидродинамическое давление в газе,

$u = u(x, t)$ — потенциал внешнего поля сил,

$\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, t)$ — плотность внешних соленоидальных сил, $\text{div } \mathbf{j} = 0$,

$\rho = \rho(x, t)$ — плотность газа, c — скорость звука.

Основные уравнения в эйлеровых координатах

$$\rho = \text{const} \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

— условие несжимаемости, далее $\rho = 1$,

$$v_t + (\nabla, \mathbf{v})\mathbf{v} = \varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \nabla(p + u) + \mathbf{j} \quad (2)$$

— уравнение Навье–Стокса.

Считаем, что уравнения (1),(2) справедливы в \bar{D} , т. е. вплоть до границы.

1. О движении жидкости и газа

1.1. *Об условии несжимаемости.* Как известно, условие несжимаемости жидкости равносильно равенству $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Это, в свою очередь, равносильно бесконечной скорости звука, т. е. это чисто механическое условие, связанное с распространением возмущений в среде. В реальном газе скорость звука конечна, но она во много раз превосходит скорость макроскопического движения частиц газа в рамках уравнения движения, коим является уравнение Навье–Стокса. Таким образом, если принять, что механизмы установления давления в жидкости и газе имеют одну природу, то в газе, как и в жидкости, при выполнении условий $|\mathbf{v}| \ll c$ и $|\mathbf{v}_t| \ll c |\nabla \mathbf{v}|$, см. [1], справедливо равенство $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. В настоящей работе мы считаем, что последнее условие выполнено, что позволяет рассматривать вязкий газ как несжимаемый.

В связи со сказанным докажем некоторые утверждения о движении вязкой несжимаемой жидкости. В первую очередь это касается дополнительного граничного условия

$$\partial(p + u)/\partial N|_S = 0. \quad (3)$$

Такое условие имеет место в различных физических явлениях, в частности, на неподвижной внутренней границе раздела между движущейся и покоящейся частями однофазной жидкости или газа, [1].

Справедливо следующее утверждение для движущейся жидкости, скорость которой на S равна нулю, т. е. $\mathbf{v}|_S = 0$.

Лемма 1. Пусть $\bar{D} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и выполнено условие (3). Тогда в \bar{D} справедливо

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow p + u = \Phi(t). \quad (4)$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, то из (2) получаем $\Delta(p + u) = 0$. Так как, кроме того, выполняется условие (3) то приходим к задаче Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta(p + u) = 0, \quad \partial(p + u)/\partial N|_S = 0 \Rightarrow p + u = \Phi(t).$$

Без ограничения общности можно полагать $\Phi(t) = \operatorname{const}$.

1.2. *Установившийся режим.* Краевая задача для системы (1),(2) состоит в нахождении при $t > 0$ достаточно гладких функций \mathbf{v} , p , удовлетворяющих в \bar{D} уравнениям (1),(2) и следующим краевым условиям

$$\mathbf{v}|_S = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \bar{D}.$$

Функции u и \mathbf{j} считаются известными и достаточно гладкими.

Рассмотрим уравнение Навье–Стокса в эйлеровых координатах (x) с режимом в правой части

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \varepsilon \Delta \mathbf{v} + \nabla(p + u) + \mathbf{j}_0 e^{\lambda t}, \quad (5)$$

здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ — скорость частицы в эйлеровых координатах, $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j}_0(x)$ — плотность соленоидальных сил в точке с координатами (x) . Важный и часто встречающийся в приложениях класс решений уравнения Навье–Стокса составляют установившиеся решения, т. е. решения вида $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{V}(x) e^{\lambda t}$, $p + u = \text{const}$. Имеет место лемма, ключевая для решения задач с установившимся режимом.

Лемма 2. Пусть установившееся решение уравнения (5) существует. Тогда в декартовой системе координат (x) имеет место уравнение

$$\lambda \mathbf{V} = \varepsilon \Delta \mathbf{V} + \mathbf{j}_0,$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x)$ установившаяся скорость в точке x .

Доказательство. Подставим установившееся решение $\mathbf{v} = \mathbf{V}(x) e^{\lambda t}$ в уравнение (5). Очевидно, что полученное уравнение разрешимо лишь при $(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V} = 0$, что и доказывает лемму.

Замечание 1. В качестве эйлеровых координат в (5) может быть использована любая стационарная система координат.

2. Решение прикладных задач

2.1. *Вихри Тэйлора.* Рассмотрим задачу об установившемся вращательном движении жидкости или газа в топологическом слое внутри тора T^2 с круговым поперечным сечением. Такое движение получило название вихрей Тэйлора. Их происхождение приписывалось неустойчивости вращательного движения и они рассматривались как возмущение регулярного режима, [1]. На самом деле это движение является проявлением неединственности решения краевой задачи.

Приведем решение, воспользовавшись леммой 2. Введем внутри поверхности T^2 в \mathbb{R}^3 цилиндрические координаты (r, θ, ρ) . Тогда задача при $\mathbf{j}_0 = 0$ для полоидальной компоненты v_θ скорости $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta, v_\rho\} = v_\theta(r, \theta, \rho)\{0, 1, 0\}$ с периодическими условиями по переменным θ, ρ в области $\Omega = [r_0, r_1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi R]$, склеенной при $\theta = 0$ и 2π , и $\rho = 0$ и $2\pi R$ принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda v_\theta - \varepsilon \Delta v_\theta + \varepsilon \frac{v_\theta}{r^2} &= 0, & v_\theta(r_0, \theta, \rho) &= 0, & v_\theta(r_1, \theta, \rho) &= 0, \\ v_\theta(r, \theta, \rho) &= v_\theta(r, \theta + 2\pi, \rho), & \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, \rho) &= \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}(r, \theta + 2\pi, \rho), & & (6) \\ v_\theta(\rho, \theta, 0) &= v_\theta(\rho, \theta, 2\pi R), & \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho}(r, \theta, 0) &= \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho}(r, \theta, 2\pi R), & & \end{aligned}$$

где λ — свободный параметр, определяющий изменение решения во времени, $\Delta = \Delta_r + 1/r^2 \partial^2 / \partial \theta^2 + \partial^2 / \partial \rho^2$, $\Delta_r = \partial^2 / \partial r^2 + 1/r \partial / \partial r$

Рассмотрим в области $T_1^2 = \{x, y, z \mid [0, x_0] \times [0, 1] \times [0, 1]\}$ вспомогательную задачу с периодическими условиями по переменным y, z . Эта область гомеоморфна торовому слою Ω , введенному выше. Сформулируем краевую задачу для уравнения Навье–Стокса в переменных (x, y, z) :

$$\lambda \mathbf{v} = \varepsilon \Delta \mathbf{v}, \quad (x, y, z) \in T_1^2, \quad v_y(0, z) = v_y(x_0, z) = 0,$$

$$v_y(x, 0) = v_y(x, 1), \quad \frac{\partial v_y}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial v_y}{\partial z}(x, 1),$$

где $\mathbf{v} = \{0, v_y(x, z), 0\}$ — векторное поле скорости в декартовых координатах (x, y, z) . Очевидно, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = 0$. Нетрудно убедиться, что решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{v} = V(x) \{0, e^{i2\pi k z}, 0\}, \quad V(x) = \sin \frac{\pi n x}{x_0}, \quad \lambda = -\varepsilon (\pi n / x_0)^2 - \varepsilon (2\pi k)^2.$$

Рассмотрим решение, соответствующее наблюдаемому физическому явлению, а именно, при

$$V(x) = \sin \frac{\pi x}{x_0}.$$

В этом случае искомое решение в T_1^2 имеет вид

$$\mathbf{v} = \sin \frac{\pi x}{x_0} \{0, e^{i2\pi k z}, 0\}, \quad \lambda = -\varepsilon (\pi / x_0)^2 - \varepsilon (2\pi k)^2.$$

Чтобы представить себе, как выглядят реальные вихри Тэйлора в переменных (r, θ, ρ) при $\lambda r_0 \gg |v_\theta|$, совершим гомеоморфное отображение $T_1^2 \rightarrow \Omega$, [23]. Будем искать решение в виде $v_\theta = A(r)B(r)$. Получим, разделяя переменные в (6),

$$\frac{\lambda A - \varepsilon \Delta_r A + \varepsilon A / r^2}{A} = \varepsilon \frac{B''}{B} = -\varepsilon \mu^2.$$

Из условия периодичности по переменной ρ имеем $\mu = \mu_k = k/R$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда

$$\lambda r^2 A - \varepsilon r (rA')' + \varepsilon A = -\varepsilon \mu_k^2 r^2 A, \quad A(r_0) = 0, \quad A(r_1) = 0, \quad B = e^{ik\rho/R}.$$

Будем искать допустимые λ в виде $\lambda = -\varepsilon \mu_k^2 - \varepsilon \alpha^2$. Тогда для $A(r)$ получаем задачу

$$A'' + \frac{A'}{r} + \alpha^2 A - \frac{A}{r^2} = 0, \quad A(r_0) = 0, \quad A(r_1) = 0.$$

Решение этой задачи дается линейной комбинацией функций Бесселя первого и второго рода порядка 1:

$$A(r) = J_1(\alpha r) + \kappa N_1(\alpha r),$$

где $\alpha = \alpha_l, l \in \mathbb{N}$, является корнем характеристического уравнения

$$J_1(\alpha r_0)N_1(\alpha r_1) = J_1(\alpha r_1)N_1(\alpha r_0)$$

таким, что $|A(r)| > 0$ при $r \in (r_0, r_1)$.

Окончательно находим, что установившиеся собственные функции скорости \mathbf{v} , удовлетворяющие равенствам $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = 0$ существуют и в компонентах цилиндрической системы координат имеют вид

$$\mathbf{v}_{kl}(r, \rho, t) = (J_1(\alpha_l r) + \kappa N_1(\alpha_l r)) e^{ik\rho/R - \varepsilon(\alpha_l^2 + \mu_k^2)t} \{0, c_\theta, 0\}, \quad k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}, \\ r_0 \leq r \leq r_1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad t \geq 0.$$

Каждый такой вектор направлен вдоль образующих тора, что соответствует замкнутости линий тока жидкости. Найденное векторное поле скоростей в вихрях Тейлора модулировано вдоль направляющей тора, что полностью согласуется с физическим экспериментом, [1]. Поскольку $\alpha_l > 0$, то любая мода решения асимптотически устойчива.

2.2. *Торнадо*. Существует значительное число работ, посвященных как физическому объяснению этого природного явления, так попыткам построения его математической модели и численного решения, [17–22]. Тем не менее, в известной автору литературе отсутствует не только доказательство существования решения уравнений, описывающей этот процесс, но и сама математическая модель торнадо. Мы покажем, что уравнением, моделирующим торнадо, является стационарное уравнение Навье–Стокса. Более того, мы докажем, что торнадо является собственным решением соответствующей краевой задачи и получим ее решение.

Прежде чем переходить к точной математической постановке задачи, дадим краткое описание этого уникального физического явления. Торнадо, или смерч, представляет собой гигантский природный вихрь с внешней поверхностью T^2 и вертикально направленной осью симметрии. Внутри этого тора коаксиально вложена внутренняя поверхность торнадо также вида T^2 . Именно эту поверхность, точнее, рог тора, и видит наземный наблюдатель, рис. 1, находящийся внутри внутреннего тора. Описанный торовый слой и являющийся, собственно, торнадо, разделен коаксиально на два торовых слоя. Внешний (по отношению к наблюдателю, находящемуся внутри тора) слой называется футляром (dust shroud). В нем смесь воздуха и пыли вращается как вдоль образующей, так и вдоль направляющей тора. Во внутреннем слое оба вращения происходят в противоположном направлении. Этот торовый слой называется воронкой (funnel). Вместе футляр и воронка образуют отчетливо наблюдаемый столб, так называемый, хобот тора. Подобный вихрь можно наблюдать, например, в виде вращающейся воронки водоворота на поверхности жидкости. Такое устройство смерча позволяет сбалансировать огромные

моменты внешнего и внутреннего торового слоя. В противном случае невозможно было бы представить себе каким образом могли спонтанно возникнуть и существовать такие сгустки момента.

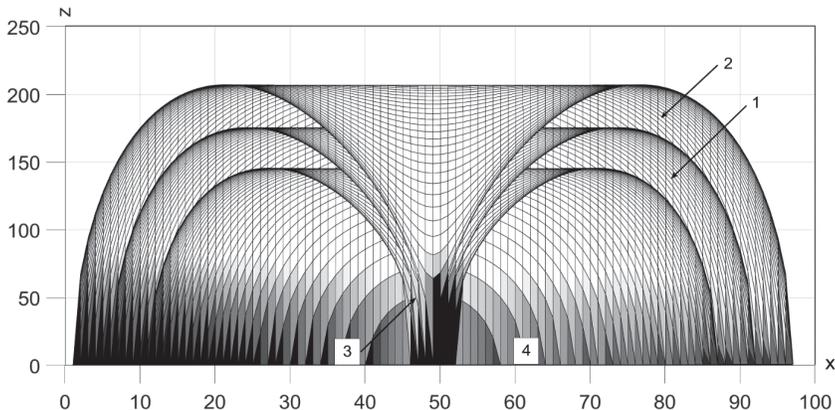


Рис 1. Схема торнадо. Изображена верхняя часть тороида. 1: восходящий поток, 2: нисходящий поток — воронка, 3: хобот торнадо, 4: положение наблюдателя.

Перейдем к точной математической постановке задачи о вязком движении газа в смерче. Областью движения определим топологический торовый слой Ω в цилиндрических координатах (r, θ, ρ) : $\Omega = [r_0, r_2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi R]$, склеенный при $\theta = 0$ и 2π , и $\rho = 0$ и $2\pi R$. Представим векторное поле скорости \mathbf{v} в цилиндрической системе координат, положив $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta, v_\rho\} = \{0, v_\theta(r, \rho), v_\rho(r, \theta)\}$, что обеспечивает выполнение условия $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Задача для установившегося решения уравнения Навье–Стокса в обозначениях п. 2.1 имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \lambda v &= \varepsilon \Delta v - \frac{\varepsilon}{r^2} \{0, v_\theta, 0\} = 0, \quad r, \theta, \rho \in \Omega, \\ v_\theta(r_0, \rho) &= v_\theta(r_2, \rho) = 0, \quad v_\rho(r_0, \theta) = v_\rho(r_2, \theta) = 0, \\ v_\theta(r, 0) &= v_\theta(r, 2\pi R), \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho}(r, 0) = \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho}(r, 2\pi R), \\ v_\rho(r, 0) &= v_\rho(r, 2\pi), \quad \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}(r, 2\pi), \end{aligned}$$

где λ — свободный параметр, R — радиус направляющей окружности, r_0, r_2 — внутренний и внешний радиусы объемлющего торового слоя. Подчеркнем, что геометрические параметры задачи r_0, r_2 не фиксированы, а определяются условиями разрешимости задачи и физическими параметрами явления.

Рассмотрим, следуя п. 2.1, в области $T_1^2 = \{x, y, z \mid [0, x_0] \times [0, 1] \times [0, 1]\}$ вспомогательную задачу с периодическими условиями по переменным y, z . Эта область гомеоморфна торовому слою Ω , введенному выше. Сформулируем исходную задачу в переменных (x, y, z)

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{v} &= \varepsilon \Delta \mathbf{v}, \quad (x, y, z) \in T_1^2, \\ v_y(0, z) &= v_y(x_0, z) = 0, \quad v_z(0, y) = v_z(x_0, y) = 0, \\ v_y(x, 0) &= v_y(x, 1), \quad \frac{\partial v_y}{\partial z}(x, 0) = \frac{\partial v_y}{\partial z}(x, 1), \\ v_z(x, 0) &= v_z(x, 1), \quad \frac{\partial v_z}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial v_z}{\partial y}(x, 1), \end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = \{0, v_y(x, z), v_z(x, y)\}$ — векторное поле скорости в декартовых координатах (x, y, z) . Очевидно, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Нетрудно убедиться, что решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{v} = V(x) \{0, c_y e^{i2\pi kz}, c_z e^{i2\pi ly}\}, \quad V(x) = \sin \frac{\pi x}{x_0}.$$

Далее будем рассматривать решение, обращающееся в ноль лишь в одной промежуточной точке $x = x_0/2$, а именно,

$$V(x) = \sin \frac{2\pi x}{x_0}.$$

Поскольку искомое решение удовлетворяет условию $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = 0$, то

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0,$$

откуда следует

$$\mathbf{v} = \sin \frac{2\pi x}{x_0} \{0, c_y, c_z\}, \quad \lambda = -\varepsilon (2\pi/x_0)^2.$$

Чтобы представить себе, как выглядит реальное торнадо в \mathbb{R}^3 в переменных (r, θ, ρ) при $\lambda r_0 \gg |v_\theta|$, совершим гомеоморфное отображение $T_1^2 \rightarrow \Omega$. Найдем такое представление для компоненты v_z . Положим, учитывая соответствие переменных, $v_\rho = A(r)$. Получаем

$$\lambda A - \varepsilon \Delta_r A + \varepsilon A/r^2 = 0.$$

Будем искать допустимые λ в виде $\lambda = -\varepsilon \alpha^2$. Тогда для $A(r)$ получаем задачу

$$A'' + \frac{A'}{r} + \alpha^2 A = 0, \quad A(r_0) = A(r_2) = 0.$$

Решение этой задачи дается линейной комбинацией функций Бесселя первого и второго рода нулевого порядка

$$A(r) = J_0(\alpha r) + \kappa N_0(\alpha r),$$

где $\alpha = \alpha_1$ является наименьшим корнем характеристического уравнения

$$J_0(\alpha r_0)N_0(\alpha r_2) = J_0(\alpha r_2)N_0(\alpha r_0), \quad (7)$$

таким, что существует единственная точка $r_1 \in (r_0, r_2)$, такая, что $A(r_1) = 0$. Нетрудно видеть, что такая точка существует, поскольку нули функции $A(r)$ простые. Более того, ясно, что, r_0, r_1, r_2 — это три соседних (первых) нуля функции $A(r)$. Число κ определяется параметрами α_1, r_0, r_2 из крайних условий.

Аналогичное рассмотрение имеет место для компоненты $v_\theta = B(r)$. В результате находим, что $B(r) = A(r)$ при $\lambda r_0 \gg |v_\theta|$. Осталось определить два свободных параметра r_0, r_2 . Как уже отмечалось, они определяются моментами M_1, M_2 , сообщенными торнадо при его возникновении:

$$\int_{r_0}^{r_1} A(r)r^2 dr = M_1, \quad \int_{r_1}^{r_2} A(r)r^2 dr = M_2.$$

Окончательно получаем, что установившееся решение задачи, удовлетворяющее условиям $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и $(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = 0$, имеет вид

$$\mathbf{v} = (J_0(\alpha_1 r) + \kappa N_0(\alpha_1 r)) e^{-\varepsilon \alpha_1^2 t} \{0, c_\theta, c_\rho\},$$

$$r_0 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad t \geq 0,$$

причем знак c_θ выбирается так, что во внутреннем слое тора движение газа происходит вверх, если расположить тор горизонтально, рис. 1. Знак c_ρ зависит от полушария. Как правило, в северном полушарии знак c_ρ , таков, что вращение футляра происходит как в циклоне.

Поскольку α_1 , то любое решение асимптотически устойчиво. Возможные решения при $\alpha_n > \alpha_1$, где α_n — корни характеристического уравнения (7), затухают заметно быстрее. По всей видимости, мы всегда наблюдаем торнадо при $\alpha = \alpha_1$, однако может существовать другой набор параметров α, r_0, r_2 , соответствующий другому расположению точек r_0, r_2 . Что касается коэффициентов c_θ, c_ρ и параметров α, r_0, r_2 , то именно они создают то разнообразие форм торнадо, которое мы наблюдаем в природе.

Заключение

Полученные выше результаты показывают, что скорость установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости или газа носит вихревой характер и давлением не определяется. При этом давление p в газе, по аналогии с жидкостью, лишь компенсирует внешнее потенциальное поле u в форме

$$p + u = \Phi(t), \quad (8)$$

что позволяет газу осуществлять чисто вихревое движение. При отсутствии внешних полей такое движение является свободным, а давление постоянным.

Физическим обоснованием равенства (8) и условием его применения является выполнение неравенства $|\mathbf{v}| \ll c$ для скорости звука c в газе и скорости движения \mathbf{v} самого газа.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Курс теоретической физики. Т. VI // М.: Наука, 1959.
2. Caffarelli L., Kohn R. and Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1982, 35, p. 771–837.
3. Amann H. On the strong solvability of the Navier–Stokes equations // *J. Math. Fluid Mech.*, 2000, 2, p. 16–98.
4. Koch H. and Tataru D. Well-posedness for the Navier–Stokes equations // *Adv. Math.*, 2001, 157, № 1, p. 22–35.
5. Gallagher I. Critical Function Spaces for the Well-Posedness of the Navier–Stokes Initial Value Problem // *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*. Eds.: Y. Giga, A. Novotny, Springer Cham., 2016.
6. Argenziano A., Cannone M., Sammartino M. Navier–Stokes equations in the half space with noncompatible data // arXiv preprint arXiv:2202.09415, 2022.
7. Cannone M. Harmonic Analysis Tools for Solving the Incompressible Navier–Stokes Equations // *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*. Eds.: S.J. Friedlander and D. Serre, Elsevier B.V. 2004, Vol. III, p. 161–235.
8. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости // М.: Наука, 1970.
9. Nazarov S.A. & Pileckas K. On steady Stokes and Navier–Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimensional exterior domain // *J. of Math. of Kyoto Univ.*, 2000, 40, p. 475–492.
10. Sverak V. On Landau’s solutions of the Navier–Stokes equations // *J. of Math. Sciences*, 2011, 179, № 1, p. 208–228.
11. Bjorland C., Brandolese L., Ifimie D. and Schondek M. L_p -Solutions of the Steady-State Navier–Stokes Equations with Rough External Forces // *Comm. in P. Diff. Eqs.*, 2011, 36, p. 216–246.
12. Guillod J. Steady solutions of the Navier–Stokes equations in the plane // arXiv:1511.03938v1 [math.AP], 12, Nov. 2015.
13. Баев А.В. О решении уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в n -мерной ограниченной области и всем пространстве \mathbb{R}^n // *Прикл. матем. и информатика*, вып. 71, М.: МАКС Пресс, 2022, с. 4–23.

14. *Баев А.В.* О периодических решениях уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости и газа в пространстве \mathbb{R}^n // Вестник Моск. ун-та, сер. 15, 2023, № 1, с. 1–12.
15. *Smale S.* Mathematical problems for the next century // Math. Intelligencer, 1998, 20, № 2, p. 7–15.
16. *Fefferman C.L.* Existence and uniqueness of the Navier–Stokes equation // <http://www.claymath.org/millennium/Navier–Stokes Equations>, 2002.
17. *Денисов А.М., Попов А.А.* Двумерная задача доплеровской томографии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996, 36, № 11, с. 126–133.
18. *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса // Новосибирск: Наука, 2008.
19. *Вараксин А.Ю., Роман М.Э., Конейцев В.Н.* Торнадо // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
20. *Мазуров М.Е.* Торнадо — его физические механизмы и свойства // Изв. РАН, сер. физ., 2019, 83, № 1, с. 113–120.
21. *Gavrikov M.B., Taiurskii A.A.* Mathematical Model of Tornado // J. Phys.: Conf. Ser., 2019, 1336, 012001.
22. *Гавриков М.Б., Таурский А.А.* Простая математическая модель торнадо // Препр. ИПМ им. М. В. Келдыша, 2019, № 42, https://keldysh.ru/papers/2019/prep2019_42.pdf.
23. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии // М.: Изд-во МГУ, 1980.