А. Г. Перевозчиков[1], В.Ю. Решетов[2], И.Е. Яночкин[3]

МАКСИМИННАЯ ЗАДАЧА СИНТЕЗА СЕТИ СВЯЗИ

Введение

Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием построений в [2]. Классическая задача о максимальном потоке в ориентированной сети была определена и изученная в работе [1]. Она является обобщением модели Т.Е.Харриса и Ф.С.Росса [3]. Основной результат о максимальном потоке и минимальном разрезе был получен Л. Фордом и Д. Фалкерсоном [4]. Ими же был предложен базовый алгоритм процесса расстановки пометок для определения максимального потока и одновременно определяющего соответствующий минимальный разрез [1].

В [5] изучалась максимальная величина потока как функция пропускных способностей дуг, которую можно использовать для построения метода последовательного улучшения решения в поставленной ниже максиминной задаче синтеза сети связи по аналогии с методом покоординатного спуска. В [6] изучалась задача синтеза многополюсной сети при заданной нижней границе потоковой функции сети, показывающей величины максимальных потоков между всеми парами узлов в сети, по критерию взвешенной стоимости пропускной способности дуг. В [7] изучалась задача построения максимального динамического потока, который учитывает кроме пропускных способностей времена прохождения соответствующей дуги. Предложенный метод ее решения был позднее модифицирован (см. [1]) для решения задачи построения максимального потока минимальной стоимости из источников в стоки, которая обобщает классическую транспортную задачу на произвольные сети.

Приложение классической задачи о максимальном потоке может состоять в производной задаче максимизации потока в сети связи за счет увеличения пропускной способности дуг обороной в линейной постановке, поставленной и изученной в настоящей работе. Это приводит в общем случае к максиминной задаче, которая может быть решена методом субградиентного подъема. Приводятся числовые примеры.

---

[1] АО «НПО «РусБИТех-Тверь», с.н.с., д.ф.-м.н., e-mail: pere501@yandex.ru
[2] Факультет ВМК МГУ, доц., к.т.н., e-mail: kadry@cs.msu.ru
[3] АО «НПО «РусБИТех-Тверь», нач. отд., к.в.н., e-mail: i-yanochkin@yandex.ru

1. Двухполюсная модель наращивания сети связи

По аналогии с моделью «нападение-оборона» на сети, поставленную и изученную в [2], рассмотрим задачу синтеза системы связи обороны на ориентированном графе G, состоящем из множества вершин $N=\{i\}$ и множества ориентированных ребер $L=\{(i,j)\}$ без контуров с одним источником s и стоком t. Далее – орграфе G. Стратегия нападения u принадлежат множеству

$$Y=Y(U)=\left\{\left(u_{ij},(i,j)\in L\right)\middle|\sum_{(i,j)\in L}u_{ij}\leq U,u_{ij}\geq 0\right\}. \qquad (1)$$

Напомним, что сечением называется такое разбиение множества вершин $N=S\cup T, s\in S, t\in T$, что любой путь из s в t имеет дугу, ведущую из S в T. Обозначим множество таких дуг через $L(S,T)$. Пропускной способностью дуги (i,j) следуя [1] будем считать величину

$$c_{ij}(u_{ij})=c_{ij}+a_{ij}u_{ij}, \qquad (2)$$

где c_{ij} - исходная пропускная способность, u_{ij} - количество однородного бесконечно-делимого ресурса подавления связи назначенного нападением на дугу (i,j), a_{ij} - его эффективность. Пропускной способностью разреза назовем величину

$$c_{L(S,T)}(u)=\sum_{(i,j)\in L(S,T)}c_{ij}(u_{ij}). \qquad (3)$$

Минимальным разрезом называется разрез минимальной пропускной способности. Согласно утверждению теоремы Форда-Фалкерсона (см. [1-3], с.24) максимальный поток в сети из источника s в сток t равен пропускной способности минимального разреза

$$v(u)=\min_{S\subset N:s\in S,t\notin S}c_{L(S,N\backslash S)}(u), \qquad (4)$$

что можно взять за определение величины v в дальнейших построениях.

Рассмотрим задачу максимизации минимального разреза (4) на множестве (1). В силу представления (4) для максимального потока она сводится к задаче линейного программирования:

$$v\to\max, u\in Y(U), \qquad (5)$$

при ограничениях

$$c_{L(S,N\backslash S)}(u)\geq v, S\subset N: s\in S, t\notin S. \qquad (6)$$

Однако решение ее симплекс-методом не представляется возможным в практически значимых случаях из-за высокой размерности, определяемой числом ограничений в (6) равным $2^{|N|-2}$, где $|N|$ - число узлов исходного орграфа.

2. Субградиентный метод в задаче (1) - (4)

Лемма 1. Справедлива формула для субдифференциала $\partial v(u)$ вогнутой функции $v(u)$

$$\partial v(u) = conv\left\{ v^S = \nabla c_{L(S,N\backslash S)}(u), S \in \widetilde{\Omega}(u) \right\}, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{\Omega}(u) = Arg \min_{S \in \Omega} c_{L(S,N\backslash S)}(u), \Omega = \left\{ S \subset N \middle| s \in S, t \notin S \right\}.$$

Доказательство следует из формулы для субдифференциала функции максимума из [8].

Формула (7) позволяет решить максиминную задачу (1) - (4) методом субградиентного подъема. Введем функцию в ограничении $u \in Y$:

$$G(u) = U - \sum_{(i,j) \in L} u_{ij} \ .$$

Функция $G(u)$ будет линейной и ее градиент $\nabla G(u) = -(1,...,1)$ есть постоянный вектор. Имея градиент функции в ограничении $u \in Y$ для решения задачи вогнутого программирования (1) - (4) можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного подъема и проекции субградиентов (см. [9], с.259) с программным шагом:

$$u_{ij}(s+1) = \begin{cases} P_{ij}(u_{ij}(s) + h_s v_{ij}^s), G(u(s)) \geq 0; \\ P_{ij}(u_{ij}(s) + h_s r_{ij}^s); G(u(s)) < 0; \end{cases}; \tag{8}$$

$$(i,j) \in L, s = 1,2,...$$

где s – номер шага; $h_s = Ds^{-\alpha}$ – программный шаг метода, $0 < \alpha < 1$ – параметр, например $\alpha = 1/2$; D – характерный размер множества Y допустимых решений задачи, например оценка диаметра;
$r_s = \nabla G(u(s))$; $v^s \in \partial v(u(s))$ – любой субградиент,

$$P_{ij}(u_{ij}) = \begin{cases} 0, u_{ij} \leq 0, \\ u_{ij}, 0 < u_{ij} \leq U, \\ U, u_{ij} > U, \end{cases}$$

- оператор проектирования на отрезок $[0,U]$.

Очевидно, что множество Y допустимых решений задачи вогнутого программирования (1) - (5) имеет внутренние точки, тогда в силу теоремы 7 в работе ([9], с.259) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Все предельные точки последовательности $u(s)$ в методе (8) являются решениями задачи (1) - (4).

Пример 1. Рассмотрим граф G из [2], состоящий из множества вершин $N = \{1,2,3,4,5\}, s = 1, t = 5$ и множества ориентированных ребер $L = \{l^1 = (1,2), l^2 = (1,3), l^3 = (2,4), l^4 = (3,4), l^5 = (2,5), l^6 = (3,5), l^7 = (4,5)\}$, представленный на рис. 1. Предположим, что $c_{ij} \equiv c = 1, a_{ij} \equiv a = 1, U = 3$. Требуется решить максиминную задачу синтеза и определить максимальное значение минимального разреза.

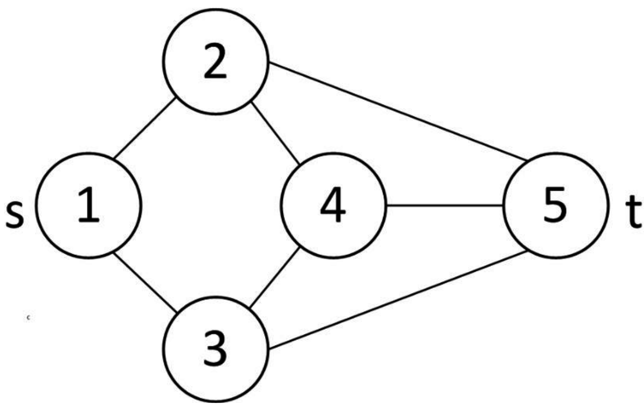

Рис. 1 Граф к примеру 1

Решение. Перенумеруем разрезы S, отождествляя их с множеством $\Omega' = \{S' \subset N | s \notin S', t \notin S'\}$, так что $S = S' \cup \{s\}$:

$\Omega' = \{S^0 = \Theta, S^1 = \{2\}, S^2 = \{3\}, S^3 = \{4\}, S^4 = \{2,3\}, S^5 = \{2,4\}, S^6 = \{3,4\}, S^7 = \{2,3,4\}\}$,

где Θ - пустое множество. Обозначим

$$c_i = c_{L(S^i \cup \{s\}, N \setminus (S^i \cup \{s\})}(0), i = 0,...,7 .$$

Матрица A инцидентности дуг разрезам представлена в таблице 1.

Таблица 1. Матрица A инцидентности дуг разрезам

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
l_1	1		1	1			1	
l_2	1	1		1		1		
l_3		1		1	1		1	
l_4			1	1	1	1		
l_5		1			1	1		1
l_6			1		1		1	1
l_7				1		1	1	1
c_i	2	3	3	5	4	4	4	3

Используя выделенный ресурс $U = 3$ можно последовательно нарастить пропускную способность минимальных разрезов пропускной способностью от 2 до 3 включительно до 4. Это можно сделать при помощи решения

$$u_j = \begin{cases} 1, j \in \{1,2,7)\}; \\ 0, j \notin \{1,2,7)\}. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $u_j = u_{l^j}, j = 1,...,7$. При этом косвенно вырастут пропускных способностей других разрезов, которые были не меньше 4. Таким образом, максимальный поток в наращенной сети по формуле (4) составит величину $v = v(u) = 4$. Можно показать, что это значение будет максимальным, среди всех допустимых решений из (1), откуда следует оптимальность (9).

Этот пример можно использовать для тестирования алгоритма (8) субградиентного подъема.

3. Верхние оценки в задаче (1) - (4)

Ресурсом разреза назовем величину

$$V^S = V_{L(S,T)}(u) = \sum_{(i,j)\in L(S,T)} u_{ij} \tag{10}$$

Лемма 2. Предположим, что $(s,t) \notin L$. Тогда при $|N| \geq 3$

справедливо тождество

$$\sum_{S\in\Omega} V^S = \sum_{S\in\Omega} \sum_{(i,j)\in L(S,T)} u_{ij} = \sum_{(i,j)\in L} \sum_{S:(i,j)\in L(S,T)} u_{ij} = 2^{|N|-3} \sum_{(i,j)\in L} u_{ij} \leq 2^{|N|-3} U. \tag{11}$$

Доказательство. Последнее равенство в (11) следует из тождества

$$\sum_{S:(i,j)\in L(S,T)} 1 = 2^{|N|-3} \tag{12}$$

.

Для доказательства (12) заметим, что $\Omega' = \{S' \subset N | s \notin S', t \notin S'\} = 2^{N \setminus \{s,t\}}$, так что $S = S' \cup \{s\}$. Рассмотрим два случая: 1) $i, j \neq s, t$, 2) $i = s$ или $j = t$. Рассмотрим их последовательно.

В первом случае возможно два подслучая 1-а) $i \in S'$, 1-б) $j \in S'$. Для подслучая 1-а) в S' кроме i может входить любое подмножество множества $S' \setminus \{i, j\}$ содержащего $2^{|N|-4}$ элементов. С учетом симметричного варианта 1-б) имеем всего $2^{|N|-3}$ варианта. Во втором случае, например, $i = s$ в S' может входить любое подмножество множества $S' \setminus \{j\}$ содержащего $2^{|N|-3}$ элемента. Лемма доказана.

Замечание 1. Условие $(s,t) \notin L$ не является ограничительным, поскольку ребро (s,t) всегда можно заменить на два ребра $(s,r),(r,t)$ той же пропускной способности, вводя дополнительную вершину r, которая не связан ребрами с другими вершинами.

Предположим, что $a_{ij} \equiv a > 0$. Обозначим $C^S = c_{L(S, N \setminus S)}(0)$ и рассмотрим вспомогательную задачу

$$w(U) = \max_{V \in \mathrm{A}(U)} \min_{S \in \Omega} (C^S + aV^S), \tag{13}$$

где

$$V = (V^S, S \in \Omega) \in \mathrm{A}(U) = \left\{ V \in E_+^{|\Omega|} \,\middle|\, \sum_{S \in \Omega} V^S \leq 2^{|N|-3} U \right\}. \tag{14}$$

Лемма 3. При сделанных предположениях величина (13) представляет верхнюю оценку критерия в задаче (1) - (4).

Доказательство следует из того, что для любого допустимого $u \in Y(U)$ в силу леммы 2 справедливо включение $V = V(u) \in \mathrm{A}(U)$, откуда следует включение $Y(U) \subset \mathrm{A}(U)$.

Задача (13), (14) в целочисленной постановке может быть решена на основе принципа уравнивания Гермейера [10]. Обозначим

$$f_S(V^S) = C^S + aV^S. \tag{15}$$

Тогда функции $f_S(V^S)$ возрастают по $V^S, S \in \Omega$. Мы собираемся воспользоваться условиями оптимальности в скалярной задаче

$$\max_{V \in \mathrm{A}(U)} \min_{S \in \Omega} f_S(V^S). \tag{16}$$

Положим $S = \{S^i, i \in I\}, I = \{1,\dots,n\}, V_i = V^{S^i}, i \in I$, и для $V \in \mathrm{A}(U)$ определим множество

$$I(V) = Arg \min_{i=1,\dots,n} f_i(V_i\ ).$$

Обозначим через $|I(V)|$ число элементов множества $I(V)$.

Теорема 2 ([11]). Пусть $V \in \mathrm{A}(U)$ такое решение задачи (16), при котором величина $|I(V)|$ минимальна. Тогда необходимым является условие

$$V_j\ > 0 \Rightarrow \min_{i=1,\dots,n} f_i(V_i\ ) \geq f_j(V_j\ -1). \qquad (17)$$

Кроме того, (17) является достаточным условием оптимальности. Это дискретный аналог принципа уравнивание Ю.Б. Гермейера.

Следуя [11], рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения во вспомогательной задаче (16). Пусть $V(1)$ – произвольное начальное распределение ресурса. Допустим, что алгоритм проработал до s-го шага и получено распределение $V(s)$. Если для $V(s)$ выполнено условие (17), то по теореме 2 оно будет оптимальным. Допустим, что условие (17) не выполнено. Тогда найдется такой номер j, что $V_j\ (s) > 0$ и

$$f_l(V_l\ (s)) = \min_{i=1,\dots,n} < f_j(V_j\ (s)-1).$$

Определим новое распределение $V(s+1)$:

$$V_i\ (s+1) = \begin{cases} V_j\ (s)-1, i=j; \\ V_l\ (s)+1, i=l; \\ V_i\ (s), i \neq j,l. \end{cases}$$

В [11], с.316, было показано, что на каждом шаге алгоритма либо уменьшается значение функции максимума, либо сокращается множество $I(V(s))$. Отсюда следует, что за конечное число шагов алгоритм построит решение, удовлетворяющее условию (17).

Аналогично можно сконструировать верхние оценки для решения задачи (1) - (4) в целочисленной постановке методом ветвей и границ.

Пример 2. Показать оптимальность решения (9).

Построим верхнюю оценку критерия в условиях примера 1. Объем ресурса $2^{|N|-3}U$ во вспомогательной задаче (13) равен $2^{5-3}3 = 12$. Величина $w(U) = 5$ и достигается при

$$V_i = \begin{cases} 3, i = 0; \\ 2, i \in \{1,2,7)\}; \\ 1, i \in \{4,5,6)\} \\ 0, i = 3. \end{cases} \qquad (18)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что решение (18) удовлетворяет достаточному условию оптимальности (17) вспомогательной задачи (15), (16).

Теперь для доказательства оптимальности решения (13) с учетом целочисленности достаточно показать, что ресурса $U = 3$ не хватит, чтобы сделать все сечения пропускной способностью не менее 5. Из таблицы 1 видно, что для того, чтобы сечение S^0 имело пропускную способность 5 нужно, чтобы $u_1 + u_2 = 3$, т.е. израсходовать все ресурсы. Но при этом сечение S^7 остается на уровне 3 по пропускной способности, что показывает, что пропускная способность 5 недостижима одновременно для всех сечений.

Одновременно рассмотренный пример показывает, что верхняя оценка леммы 3 является достаточно близкой к оптимальному значению в задаче (4), (5) в целочисленной постановке. В непрерывной постановке задачи (4), (5) для построения верхних оценок используется непрерывный принцип уравнивания. Предположим, что величины $f_i(0)$ упорядочены по возрастанию:

$$f_1(0) \le f_1(0) \le \ldots \le f_n(0). \qquad (19)$$

Теорема 3 [11]. Пусть $f_i(V_i\ )$ для $i = 1,\ldots,n$ строго убывают, непрерывны и выполняется условие (19). Тогда

$$\max_{V \in \mathrm{A}(U)} \min_{i=1,\ldots,n} f_i(V_i\ )$$

достигается в единственной точке V^* и для нее выполнено следующее необходимое и достаточное условие: существует такое натуральное $k \in I$, что

$$V_i^* > 0, f_i(V_i^*) = f_1(V_1^*), i = 1,\ldots,k,$$

и

$$V_j^* = 0, f_1(V_1^*) \ge f_j(V_j^*), j = k+1,\ldots,n.$$

Если дополнительно $f_1(0) = f_1(0) = \ldots = f_n(0)$, то $k = n$.

Замечание 2. В условиях примера 2 полученное решение (18) будет удовлетворять достаточным условиям теоремы 3 и, следовательно, являться оптимальным в непрерывной постановке задачи (13), (14).

4. Метод ветвей и границ

Перенумеруем ребра так же, как это было сделано в примере 1: $L = \{l^1, l^2, ..., l^m\}$.

Вершинами поискового дерева J_k уровня $k = 0,1,...,m$ являются наборы

$$J_k = (u_1, ..., u_k), \sum_{j=1}^{k} u_j \le U, u_j \ge 0, j = 1,...,k.$$

Терминальными (финальными) будут вершины, для которых

$$\sum_{j=1}^{k} u_j = U. \qquad (20)$$

Вершина $J_0 = \Theta$ (пусто) нулевого уровня является источником. Вершины соседних уровней J_k, J_{k+1} связаны ребром в том случае, когда соответствующие наборы отличаются одним элементом.

Верхняя оценка в нетерминальной вершине, для которой

$$\sum_{j=1}^{k} u_j < U,$$

получается следующим образом. Определяется ресурс оставшийся нераспределенным

$$U(J_k) = U - \sum_{j=1}^{k} u_j.$$

Обозначим $C^S(J_k) = c_{L(S,N\setminus S)}(J_k)$ и рассмотрим вспомогательную задачу

$$w(U) = \max_{V \in \mathrm{A}(U(J_k))} \min_{S \in \Omega} (C^S(J_k) + aV^S), \qquad (21)$$

где

$$V = (V^S, S \in \Omega) \in \mathrm{A}(U(J_k)) = \left\{ V \in E_+^{|\Omega|} \,\middle|\, \sum_{S \in \Omega} V^S \le 2^{|N|-3} U(J_k) \right\}. \qquad (22)$$

В терминальных вершинах J_k , для которых выполняется условие (20), верхняя оценка совпадает со значением дискретной функции (4)

$$v = v(J_k) = \min_{S \subset N: s \in S, t \notin S} c_{L(S,N\setminus S)}(J_k).$$

Алгоритм метода ветвей и границ имеет следующий вид:

1. Положить $\Xi = \{\Theta\}$.
2. Во множестве Ξ выбрать вершину J_k, обладающую максимальной верхней оценкой.

3. Если выбранная вершина финальна, то она дает решение задачи. Конец работы алгоритма.
4. В противном случае следуют раскрыть выбранную вершину, то есть заменить выбранную вершину J_k на все вершины J_{k+1}, непосредственно следующее за J_k. Перейти к шагу 2.

5. Более сложные ограничения, чем (1)

Можно рассмотреть более сложные ограничения, чем (1) по аналогии со статьей [12]. Тогда получив решение поставленной задачи и округлив до целого, можно поставить задачу его реализуемости при помощи $(0,1)-$ матриц из [1] (см. теорему 12.1, с.122, и последующий алгоритм построения). Строки будут соответствовать типу средства ЭМС, а столбцы – дугам. На одну дугу нельзя назначать более одного типа средств ЭМС по соображениям электро-магнитной совместимости. Этот подход обобщается до $(0,p)-$ матриц. Содержательно это означает, что у одного ЭМС есть p рабочих частот, так, что они могут всегда могут выбрать набор совместимых частот, если их будет не более p на одном интервале. Тогда условие будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{k} b_j \le \sum_{j=1}^{kp} a_j^*, k=1,...,n,$$

где обозначения выбраны так, что $b_1 \ge b_2 \ge .... \ge b_n$ и $a_j^* = \left|\{i | a_i \ge j\}\right|$.

А можно считать величину p зависящей от типа i ЭМС. Тогда условие будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{k} b_j \le \sum_{i=1}^{m} \min(a_i, p_i k), k=1,...,n,$$

где правая часть представляет собой вогнутую функцию от k.

Замечание 3. Можно написать общие ограничения, определяющие Y вместо (1) без учета $b_1 \ge b_2 \ge .... \ge b_n$. Тогда ограничения будут иметь вид

$$\sum_{l=1}^{k} b_{j_l} \le \sum_{i=1}^{m} \min(a_i, p_i k), k=1,...,n,$$

где $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ - любая выборка k неравных индексов из $\{1,2,...,n\}$. Тогда все ограничения определяют выпуклый многогранник Y, а полученная задача ЦЛП (5) может быть решена методом отсечений, использующим специальные отсечения, основанные на теореме отделимости $u \notin Y$ от Y, описанные на с.189 в книге [13].

Получаться ограничения такого же типа в дискретном варианте задачи, предполагающем использование метода ветвей и границ, правда, поисковое дерево усложняется из-за необходимости учета монотонности последовательности $u_t, t = 0,1,...,T$, при определенной перенумерации дуг.

5.1. Метод ветвей и границ

Перенумеруем ребра $L = \{l^1, l^2, ..., l^m\}$. Фиксируем какой-то полный порядок на множестве L заданный перестановкой номеров $j_1, j_2, ..., j_m$.

Замечание 4. Откуда брать порядок на L пока не ясно. Как вариант - из решения задачи в непрерывной постановке.

Вершинами поискового дерева J_k уровня $k = 0,1,...,m$ являются наборы

$$J_k = (u_{j_1}, ..., u_{j_k}),$$

$$\sum_{l=1}^{s} u_{j_l} \le \sum_{i=1}^{m} \min(U_i, m_i s) \le \sum_{i=1}^{m} U_i, s = 1,...,k,$$

$$u_{j_1} \ge ... \ge u_{j_k} \ge 0.$$

Терминальными (финальными) будут вершины, для которых

$$k = m, \tag{23}$$

или набор $J_k = (u_{j_1}, ..., u_{j_k})$ содержит нули, начиная с некоторого номера. Вершина $J_0 = \Theta$ (пусто) нулевого уровня является источником. Вершины соседних уровней J_k, J_{k+1} связаны ребром в том случае, когда соответствующие наборы отличаются одним элементом.

Верхняя оценка в нетерминальной вершине, для которой $k < m$, и не содержит нулей, получается следующим образом. Определяется ресурс оставшийся нераспределенным

$$U(J_k) = \sum_{i=1}^{m} U_i - \sum_{l=1}^{k} u_{j_l}.$$

Обозначим $C^S(J_k) = c_{L(S,N\setminus S)}(J_k)$ и рассмотрим вспомогательную задачу

$$w(U) = \max_{V \in \mathrm{A}(U(J_k))} \min_{S \in \Omega} (C^S(J_k) + aV^S), \tag{24}$$

где

$$V = (V^S, S \in \Omega) \in \mathrm{A}(U(J_k)) = \left\{ V \in E_+^{|\Omega|} \middle| \sum_{S \in \Omega} V^S \le 2^{|N|-3} U(J_k) \right\}. \tag{25}$$

В терминальных вершинах J_k, для которых выполняется условие (23), верхняя оценка совпадает со значением дискретной функции (4)

$$v = v(J_k) = \min_{S \subset N: s \in S, t \notin S} c_{L(S,N\setminus S)}(J_k).$$

5.2. Непрерывный вариант усложненных ограничений, совместимый с методом субградиентного подъема

Перенумеруем все дуги $u_t, t = 0,1,..., T$. Нетривиальной задачу делают другие более общие, чем (1), ограничения на управления, которые заменяют (1), например:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \delta_{it} v_{it} \le U_i, i = 0,1,..., k-1,$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} \delta_{it} v_{it} \ge u_t, t = 0,1,..., T-1. \tag{26}$$

Здесь δ_{it} - априорно известная экзогенная индикаторная функция, равная единице, если средство защиты $i-$ой подгруппы (общей группировки на заданном направлении) может действовать на $t-$м интервале, и нуль – в противном случае. Величины U_i задают общее количество средств защиты $i-$ой подгруппы, Переменные $v_{it} \ge 0$ означают количество средств защиты $i-$ой подгруппы, которым назначено действовать на $t-$м рубеже. Их набор будем обозначать через $[v_{it}]$. Совместные ограничения (26) на управление $[u_t]$ означают, что существуют такие $v_{it} \ge 0$, что справедливы неравенства (26).

Замечание 5. Поскольку ограничения (26) при $\delta_{it} \equiv 1$ совпадают с ограничениями соответствующей транспортной задачи (ТЗ) с неуравновешенным балансом, то возникает идея их проверки путем решения транспортной задачи с матрицей $\|c_{it}\| = \|1-\delta_{it}\|$. Оптимальное значение критерия покажет, на сколько единиц будет дефицитным суммарное количество средств защиты для данного целевого распределения $[u_t]$. В частности, ограничения (26) выполняются тогда и только тогда, когда минимальный дефицит равен нулю.

Для определения значения функции минимума в ТЗ, получим задачу

$$\overline{C}_i(S, V^i) = \min \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} c_{kj}^i x_{ij};$$
$$\sum_{j=1}^{l} x_{kj} \le V_k^i; \sum_{k=1}^{m} x_{kj} \ge S_j; x_{kj} \ge 0; \tag{27}$$
$$k = 1,2,..., m;\ j = 1,2,..., l.$$

Переходя к двойственной в задаче (27), получим после преобразований задачу [14]

$$\overline{C}_i(S,V^i)=\max\left(\sum_{j=1}^{l}v_jS_j-\sum_{k=1}^{m}u_kV_k^i\right);$$
$$v_j-u_k\le c_{kj}^i;u_k\ge 0;k=1,...,m;v_j\ge 0,\ j=1,2,...,l. \tag{28}$$

Ограничения задачи (28) можно представить в виде

$$u_k\ge v_j-c_{kj}^i;u_k\ge 0;k=1,...,m;v_j\ge 0,\ j=1,2,...,l$$

или

$$u_k\ge \max_{j=1,...,l}(v_j-c_{kj}^i);k=1,...,m.$$

С учетом целей максимизации задачу (28) можно представить в виде задачи безусловной негладкой максимизации:

$$\overline{C}_i(S,V^i)=\max_{v\ge 0}\left(\sum_{j=1}^{l}v_jS_j+\sum_{k=1}^{m}V_k^i\min_{j=1,...,l}(c_{kj}^i-v_j)\right). \tag{29}$$

Здесь v - $l-$мерный вектор столбец с координатами $v_j\ge 0,\ j=1,2,...,l$.

Функция (29) выпукла по S. Множество Ω допустимых $u=(u_t,t=0,1,...,T)$, удовлетворяющих условиям, определяется условием:

$$\overline{C}_i(S,V^i)=\max_{v\ge 0}\left(\sum_{j=1}^{l}v_jS_j+\sum_{k=1}^{m}V_k^i\min_{j=1,...,l}(c_{kj}^i-v_j)\right)=0, \tag{30}$$

откуда следует представление

$$\Omega(V^i)=Arg\min_{S\ge 0}\max_{v\ge 0}\left(\sum_{j=1}^{l}v_jS_j+\sum_{k=1}^{m}V_k^i\min_{j=1,...,l}(c_{kj}^i-v_j)\right). \tag{31}$$

Поскольку функция (30) выпукла по S, то Ω представляет собой выпуклое и замкнутое множество. Впрочем, это следует непосредственно из условия (30).

Замечание 6. Функция (30) является выпуклой штрафной для ограничений (26).

6. Задача рационального распределения нагрузки в существующей сети

Предлагается постановка, основанная на условиях допустимости ограничений спроса-предложения [1], теорема 1.1, с.62.

Пусть $[N,A]$- произвольная сеть с функцией пропускной способности c и предположим, что множество N разбито на источники S, промежуточные узлы R стоки T.

Теорема 4 [1]. Ограничения

$$f(x,N)-f(N,x)\le a(x), x\in S, \quad (32)$$

$$f(x,N)-f(N,x)=0, x\in R, \quad (33)$$

$$f(N,x)-f(x,N)\ge b(x), x\in T, \quad (34)$$

$$0\le f(x,y)\le c(x,y),(x,y)\in A, \quad (35)$$

где $a(x)\ge 0, b(x)\ge 0,$ допустимы в том и только в том случае, если для каждого множества $X\subseteq N$

$$b(T\cap\overline{X})-a(S\cap\overline{X})\le c(X,\overline{X}). \quad (36)$$

Если условие (36) не выполняется, то можно определить максимальную величину $\xi\in[0,1]$, для которой

$$\xi(b(T\cap\overline{X})-a(S\cap\overline{X}))\le c(X,\overline{X}), \forall X\subseteq N. \quad (37)$$

Эта величина имеет смысл доли всех сообщений, которая может быть передана по всем направлениям при условии одновременной работы всех ЭМС в час наибольшей нагрузки (ЧНН).

Величины $a(x)\ge 0, b(x)\ge 0,$ формируются суммированием предполагаемых потоков по всем направлениям и поэтому будут удовлетворять условию:

$$b(T)-a(S)=0,$$

гарантирующему существование требуемых потоков в случае бесконечных пропускных способностей.

Замечание 7. Такое $\xi\in[0,1]$ обязательно существует. В самом деле если (36) не выполняется, то не пусто множество E таких $X\subseteq N$, что не верно (36), т.е.

$$b(T\cap\overline{X})-a(S\cap\overline{X})>c(X,\overline{X}). \quad (38)$$

Отсюда следует, что

$$b(T\cap\overline{X})-a(S\cap\overline{X})>0, \quad (39)$$

и требуемое $\xi\in[0,1]$ дается формулой

$$\xi=\min_{X\in E}\frac{c(X,\overline{X})}{b(T\cap\overline{X})-a(S\cap\overline{X})} \quad (40)$$

Замечание 8. Минимум в (40) существует в силу конечности множества E и конечности $c(X,\overline{X})$ в силу (38) и (39).

Замечание 9. Функция множества $X \subseteq N$

$$F(X) = c(X, \bar{X}) - \xi[b(T \cap \bar{X}) - a(S \cap \bar{X})]. \qquad (41)$$

будет субмодулярной в силу того, что $c(X, \bar{X})$ субмодулярна, а $-\xi(b(T \cap \bar{X}) - a(S \cap \bar{X}))$ модулярна как дискретная мера.

Замечание 10. Требуемое ξ можно определить теперь, как наибольшую величину $\xi \in [0,1]$ для которой

$$\varphi(\xi) = \min_{X \subseteq N} \{c(X, \bar{X}) - \xi[b(T \cap \bar{X}) - a(S \cap \bar{X})]\} \geq 0. \qquad (42)$$

Замечание 11. Функция $\varphi(\xi)$ убывает, непрерывна, причем

$$\varphi(0) > 0, \varphi(1) < 0. \qquad (43)$$

Поэтому требуемое ξ можно найти методом деления отрезка пополам.

Замечание 12. Величину $\varphi(\xi)$ для каждого $\xi \in [0,1]$ можно найти методами субмодулярного программирования, используя нижние оценки приведенные в п. 3, основанные на субмодулярности функции $F(X)$. Это позволит уйти от прямого перебора всех подмножеств $X \subseteq N$.

Заключение

В первой части работы рассмотрена задача максимизации потока в двухполюсной ориентированной сети связи за счет увеличения пропускной способности дуг в линейной постановке. Показано, что это приводит в общем случае к задаче максимизации пропускной способности минимального разреза, которая может быть решена методом субградиентного подъема. В целочисленной постановке таким же образом получаются верхние оценки метода ветвей и границ. Приводятся числовые примеры их вычисления.

Во второй части работы изучаются задача синтеза сети связи с более общими ограничениями, в частности – непрерывными и совместимыми с методом ветвей и границ. На этот случай переносятся метод ветвей и границ, разработанный в первой части.

Наконец, в третьей части рассматривается производная задача распределения нагрузки в существующей сети. Предлагается постановка задачи, основанная на условиях допустимости ограничений спроса-предложения и метод ее решения.

Литература

1. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. М.:Мир, 1966.
2. *Hohzaki R., Tanaka V.* The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network //In

Abstract of 27th European conference on Operation Research 12-15 July 2015 University of Strathclyde. - EURO2015.
3. *Harris T.E, Ross F.S.* Fundamentals of a method for Evaluating rail net capacities. RAND Corporation. Research Memorandum RM-1573, October 24, 1956.
4. *Ford L.R., Fulkerson D.R.* Maximal flow through a network // Canad. J. Math. 8 (1956), 399-404.
5. *Shapley L. S.* On network flow functions. RAND Corporation. Research Memorandum RM-2338, March 16, 1959.
6. *Gomory R.E., Hu T.C.* Multi-terminal network flows. I.B.M. Research Report, 1960, J. Soc. Indust. Appl. Math.
7. *Ford L.R.* Constructing maximal dynamic flows from static flows. // Op. res. 6 (1958), 419-433.
8. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
9. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.
10. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
11. *Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В.* Исследование операций. – М.: Академия, 2008.
12. *Лесик И. А., Перевозчиков А. Г., Решетов В.Ю.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением с несколькими фазовыми ограничениями // Вестник МГУ. Сер. 15. – 2017. – № 1. – С. 26-32.
13. *Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
14. *Монтлевич В.М.* О субмодулярности функции прибыли в одной из задач планирования перевозок // Вестник СамГУ. – 2014. – № 10 (121). С. 48–54.