А.Ю. Щеглов[1]

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Введение

Рассмотрим для функции двух аргументов $u(x,t)$ задачу, моделирующую динамику популяции с учётом возрастной структуры:

$$u_t(x,t) + u_x(x,t) = -\,\mu(x)\,u(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T^{\Delta}, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \int_0^l \rho(s)u(s,t)\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 < x \leqslant l, \tag{3}$$

где t – время; x – возраст особи в популяции биологического вида; $u(x,t)$ – количество особей возраста x в момент времени t в популяции, или плотность особей возраста x в момент времени t; $\mu(x)$ – коэффициент смертности, зависящий от возраста x особи; $\rho(x)$ – интенсивность (плотность) рождаемости особей нулевого возраста, зависящая от возраста x родителя; $Q_T^{\Delta} = \{(x,t){:}\, x \neq t,\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Линейное уравнение переноса (1) в частных производных первого порядка моделирует старение (взросление) особей в популяции. Граничное нелокальное условие (2) моделирует рождение особей нулевого возраста: $x = 0$. Условие (3) – начальное.

Задача определения функции $u(x,t)$ по заданным функциям $\varphi(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$ рассматривается в качестве прямой задачи.

Пусть обратная задача состоит в определении функций $\varphi(x)$, $\rho(x)$, $u(x,t)$, $0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих уравнению (1) и условиям (2), (3), по заданной функции $\mu(x)$ и дополнительно заданным функциям $g_0(t)$ и $g_l(t)$, таким, что

$$g_0(t) = u(0,t), \qquad g_l(t) = u(l,t), \qquad 0 \leqslant\ t <\ l. \tag{4}$$

Модели динамики популяций, учитывающие зависимости от возраста особей, составляют отдельную широко востребованную область [1-4]. Обратные задачи для таких моделей развития популяций рассматривались в работах [5-8]. В то же время исследования разнохарактерных постановок обратных задач и методов их решений находят всё большее развитие для самых разных типов моделей и уравнений [9-12].

[1] Доцент кафедры математической физики факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, shcheg@cs.msu.ru

Прямая задача

Рассмотрим условия существования и единственности решения прямой задачи (1) – (3) на множестве Q_T^{Δ}.

Теорема 1. Пусть заданы значения $T > 0$ и $l > 0$ и функции $\varphi(x)$, $\mu(x)$, $\rho(x)$, такие, что

$$\varphi(x) \in C^1[0,l], \qquad \mu(x) \in C[0,l], \qquad \rho(x) \in C[0,l], \tag{5}$$

$$\varphi(x) > 0, \qquad \mu(x) \geqslant 0, \qquad \rho(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,l], \tag{6}$$

$$\varphi(0) \neq \int_0^l \rho(s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{7}$$

Тогда у задачи (1) - (3) существует единственное решение $u(x,t) \in C^1\big(Q_T^{\Delta}\big)$, причём на множестве $\Delta = \big\{(x,t)\colon\ 0 \leqslant x = t \leqslant \min\{l,T\}\big\}$ у решения $u(x,t)$ отсутствует непрерывность.

Доказательство. Решение уравнения (1) можно связать с решениями характеристической системы дифференциальных уравнений

$$dt = dx = \frac{du}{-\mu(x)u},$$

имеющей первые интегралы:

$$x - t = c, \qquad u = C\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}\mu(\xi)\,d\xi\right\}.$$

С учётом условия (3) в области определения решения $u(x,t)$ для точек $(x,t) \in Q_T^- = \{(x,t)\colon 0 \leqslant t < x \leqslant l;\ t \leqslant T\}$ имеется решение задачи (1) – (3), задаваемое прямой формулой

$$u(x,t) = \hat{u}(x,t) = \varphi(x-t)\exp\left\{-\int_{x-t}^{x}\mu(\xi)\,d\xi\right\}, \qquad (x,t) \in Q_T^-. \tag{8}$$

Из условий (5) следует, что $\hat{u}(x,t) \in C^1(Q_T^-)$. Для остальных точек области определения решение уравнения (1) также строится на характеристиках. Для точек $(x,t) \in Q_T^+ = \{(x,t)\colon 0 \le x \le t \le T;\ x \le l\}$ справедливо

$$u(x,t) = u(0,t-x)\exp\left\{-\int_0^x\mu(\xi)\,d\xi\right\} \qquad \forall (x,t) \in Q_T^+. \tag{9}$$

Пусть $\psi(t) = u(0,t)\ \ \forall t \in [0,T_1]$, где $T_1 = \min\{l,T\}$. Тогда

$$\psi(t) = \int_0^l \rho(s)u(s,t)\,ds = \int_0^t \rho(s)u(s,t)\,ds + \int_t^l \rho(s)u(s,t)\,ds, t \in [0,T_1].$$

В интеграл по отрезку $[0,t]$ подставляются значения $u(s,t)$ из формулы (9), в интеграл по $[t,l]$ – из (8). Тогда $\forall t \in [0,T_1]$

$$\psi(t) = \int_0^t \rho(s)\left(\psi(t-s)\exp\left\{-\int_0^s\mu(\xi)\,d\xi\right\}\right)ds + \int_t^l \rho(s)\hat{u}(s,t)\,ds. \tag{10}$$

Последний интеграл в правой части уравнения (10) известен, так как функция $\rho(s)$ задаётся в постановке задачи (1) – (3), а функция $\hat{u}(s,t)$

рассчитывается по формуле (8). Замена аргумента в первом интеграле равенства (10): $s = t - \tau$, даёт $\forall t \in [0, T_1]$

$$\psi(t) = \int_0^t \rho(t-\tau)\exp\left\{-\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right\}\psi(\tau)\,d\tau + \int_t^l \rho(s)\hat{u}(s,t)\,ds. \quad (11)$$

Это линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода имеет единственное решение $\hat{\psi}(t) \in C[0, T_1]$ при получаемой из формулы (8) функции $\hat{u}(x,t)$ и заданных функциях $\rho(x)$, $\mu(x) \in C[0, l]$. Если теперь продифференцировать равенство (10), то получаем

$$\psi'(t) = \int_0^t \rho(s)\psi'(t-s)\exp\left\{-\int_0^s \mu(\xi)\,d\xi\right\}ds + \int_t^l \rho(s)\hat{u}_t(s,t)\,ds +$$
$$+\rho(t)\psi(0)\exp\left\{-\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right\} - \rho(t)\hat{u}(t+0,t) \quad \forall t \in [0, T_1],$$

где $\hat{u}(t+0,t) = \lim\limits_{s\to t+0} \hat{u}(s,t)$. Заменяя в первом интеграле равенства подынтегральный аргумент: $s = t - \tau$, с учётом условия (2) при $t = 0$ имеем

$$\psi'(t) = \int_0^t \rho(t-\tau)\exp\left\{-\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right\}\psi'(\tau)\,d\tau + \int_t^l \rho(s)\hat{u}_t(s,t)\,ds +$$
$$+\rho(t)\exp\left\{-\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right\}\int_0^l \rho(s)\varphi(s)\,ds - \rho(t)\hat{u}(t+0,t) \quad \forall t \in [0, T_1],$$

— линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода относительно функции $\psi'(t)$, которое имеет единственное непрерывное решение на отрезке $[0, T_1]$ при условиях (5). Следовательно, $\hat{\psi}(t) \in C^1[0, T_1]$.

Если $T \leqslant l$, то с использованием решения $\hat{\psi}(t)$ уравнения (11) на отрезке $[0, T]$ и формулы (9) решение задачи (1) – (3) завершается получением функции $u(x,t)$ в области Q_T^+:

$$\hat{u}(x,t) = \hat{\psi}(t-x)\exp\left\{-\int_0^x \mu(\xi)\,d\xi\right\} \quad \forall (x,t) \in Q_T^+. \quad (12)$$

Если исходные значения l и T таковы, что $T > l$, то начальное условие с отрезка $[0, l]$, на котором при $t = 0$ изменяется аргумент x, переносим на отрезок $[0, l]$ при $t = l$ с заданием при $t = l$ начального условия в виде $u(x, l) = \varphi_1(x) = \hat{u}(x, l)$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Затем задача (1), (2) решается уже на множестве $0 \leqslant x \leqslant l,\ l \leqslant t \leqslant T_2$, с начальным условием $u(x, l) = \varphi_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, при $T_2 = \min\{2l, T\}$, начиная с выписывания решения в виде (9) с уравнением (11) для $t \in [l, T_2]$. Так можем увеличивать временной отрезок на величину l несколько раз до исчерпания всего отрезка $[0, T]$.

Итак, решение задачи (1) – (3) на области определения Q_T^Δ задаётся сначала в области Q_T^- формулой (8). Затем в области Q_T^+ решение задаёт формула (9) в областях $Q_{T_j}^{j+} = \{(x,t)\colon x + (j-1)l \leqslant t \leqslant T_j;\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$ при

$j = 1, 2, \ldots, n$, где $n = \max\limits_{jl \le T} j$ и $T_j = \min\{jl, T\}$, с использованием решений $\hat{\psi}(t)$ уравнения (11) на отрезках $[0, T_1]$, $[T_1, T_2]$, …, $[T_{n-1}, T_n]$, $T_n = T$, последовательно для $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом каждый раз при очередном решении уравнения (11) на очередном отрезке $[T_j, T_{j+1}]$ в правую часть уравнения (11) подставляется найденное по формуле (9) после решении уравнения (11) на предыдущем отрезке $[T_{j-1}, T_j]$ решение $\hat{u}(x,t)$ задачи (1) – (3) в области $Q_{T_{j+1}}^{j-} = \{(x,t): 0 \leqslant t - T_j \leqslant x \leqslant l;\ T_j \leqslant t \leqslant T_{j+1}\}$.

Существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения задачи (1) – (3) в области Q_T^- при выполнении условий (5) – (7) теоремы на функцию $\varphi(x)$ следует из формулы (8), так как правая часть формулы (8) непрерывно дифференцируема в области Q_T^-. Значение решения $u(x,t)$ в точке $(0,0)$ удовлетворяет условию (2) и условию (7):

$$\hat{u}(0,0) = \hat{\psi}(0) = \int_0^l \rho(s)\,\varphi(s)ds \ \neq \varphi\,(0) = \hat{u}(0, 0+0) = \lim_{x \to 0+0} \varphi(x)\,. \quad (13)$$

Решение $u(x,t)$ в области Q_T^+, в том числе и в точках $(t,t) \in Q_T^+$, непрерывно дифференцируемо в силу непрерывной дифференцируемости правых частей формулы (9) и уравнения (11) с непрерывно дифференцируемым решением $\hat{\psi}(t)$ $\forall t \in [0, T]$. При этом $\forall t \in (0, T_1]$

$$\hat{u}(t,t) = \hat{u}(t-0,t) = \lim_{x \to t-0} \hat{u}(x,t) = \hat{\psi}(0) \exp\left\{-\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right\},$$

на множестве Δ, и также из области Q_T^+:

$$\hat{u}(0,0) = \hat{\psi}(0) = \lim_{t \to 0+0} \hat{\psi}(t) = \hat{u}(0, 0+0).$$

Аналогично и при предельном переходе справа к Δ из области $Q_{T_1}^-$ имеем

$$\hat{u}(t+0,t) = \lim_{x \to t+0} \hat{u}(x,t) = \varphi(0+0) \exp\left\{-\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right\} \quad \forall t \in [0, T_1)\,,$$

$$\hat{u}(T_1, T_1 - 0) = \lim_{t \to T_1 - 0} \hat{u}(T_1, t) = \varphi(0+0)\exp\left\{-\int_0^{T_1} \mu(\xi)\,d\xi\right\}.$$

В силу неравенства $\hat{\psi}(0) \neq \varphi(0)$ в соотношениях (13) значения $\hat{u}(t-0,t)$ и $\hat{u}(t+0,t)$ не совпадают. Следовательно, решение $u(x,t)$ задачи (1) – (3) является разрывным на множестве Δ.

Решение $u(x,t)$ задачи (1) – (3) имеет область определения Q_T^Δ, состоящую из двух подобластей: Q_T^- и $Q_T^+ \setminus \Delta$, так, что $Q_T^\Delta = Q_T^- \cup (Q_T^+ \setminus \Delta)$. При этом множество Δ является общей границей областей Q_T^- и Q_T^+. Так как $u(x,t)$ в области Q_T^- однозначно определяется формулой (8) с непрерывно дифференцируемой в области Q_T^- правой частью, то $u(x,t) \in C^1(Q_T^-)$. Аналогично, в области Q_T^+ решение $u(x,t) \in C^1(Q_T^+)$, так как однозначно определяется формулой (9) с непрерывно дифференцируемой правой частью в области Q_T^+, в которой используется решение $\hat{\psi}(t) \in C^1[0,T]$ уравнения

(11) на $[0,T]$. Других областей нарушения непрерывности, кроме множества Δ, у решения $u(x,t)$ задачи (1) – (3) на всей области его определения $Q_T^{\Delta} = Q_T^- \cup (Q_T^+ \setminus \Delta)$ не имеется. Теорема 1 доказана.

Обратная задача

Установим условия единственности решения обратной задачи.

Пусть заданы значения $T > 0$ и $l > 0$, такие, что $l \leqslant T$, и задана функция $\mu(x)$, такая, что выполнены условия

$$\mu(x) \in C[0,l], \qquad \mu(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [0,l],$$

и заданы функции $g_0(t), g_l(t) \in C^1[0,l]$, такие, что выполнены условия (4) на полуинтервале $[0,l)$, и $g_0(l) = \lim\limits_{t\to l-0} g_0(t)$, и $g_l(l) = \lim\limits_{t\to l-0} g_l(t)$.

Определение. Тройка функций $\varphi(x)$, $\rho(x)$, $u(x,t)$ пусть называется решением обратной задачи (1) - (4), если при известных значениях $T > 0$ и $l \in (0,T]$, и заданных функциях $\mu(x)$ $\forall x \in [0,l]$, $g_0(t)$, $g_l(t)$ $\forall\, t \in [0,l]$, функции $\varphi(x)$, $\rho(x)$, $u(x,t)$ таковы, что $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\rho(x) \in C[0,l]$, $u(x,t) \in C^1\left(Q_T^{\Delta}\right)$ при выполнении условий $\varphi(x) > 0$, $\rho(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [0,l]$, а также функции $\varphi(x)$, $\rho(x)$, $u(x,t)$ удовлетворяют уравнению (1) и условиям (2) - (4).

Теорема 2. Пусть при заданных значениях $T > 0$ и $l \in (0,T]$, и заданных функциях $\mu(x) \in C[0,l]$, $g_0(t)$, $g_l(t) \in C^1[0,l]$, таких, что

$$\mu(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,l], \qquad g_0(t) > 0, \qquad g_l(t) > 0 \qquad \forall\, t \in [0,l], \tag{14}$$

$$\|g_0'(t)\|_{C[0,t]} \leqslant g_1(t), \qquad \|g_l'(t)\|_{C[t,l]} \leqslant g_2(t) \qquad \forall\, t \in [0,l], \tag{15}$$

существует число $q \in (0,1)$, с которым выполняется неравенство

$$\left| g_0(0) - g_l(l)\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\, d\xi\right\}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{q}\left(g_1(t)t + g_2(\mathrm{t})\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\, d\xi\right\}(l-t)\right), \ \ t \in [0,l]. \tag{16}$$

Тогда, если существуют тройки функций $\varphi_1(x)$, $\rho_1(x)$, $u_1(x,t)$ и $\varphi_2(x)$, $\rho_2(x)$, $u_2(x,t)$ — решения обратной задачи (1) – (4), то $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, $\rho_1(x) = \rho_2(x)$ $\forall x \in [0,l]$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q_T^{\Delta}$.

Доказательство. Рассмотрим $\varphi(x)$, $\rho(x)$, $u(x,t)$ — решение обратной задачи (1) – (4). Из формулы (8) при $x = l$ следует, что

$$g_l(t) = \varphi(l-t)\exp\left\{-\int_{l-t}^l \mu(\xi)\, d\xi\right\} \qquad \forall\, t \in [0,l].$$

Разрешая это равенство относительно $\varphi(x)$, получаем

$$\varphi(x) = g_l(l-x)\, \exp\left\{\int_x^l \mu(\xi)\, d\xi\right\} \qquad \forall x \in [0,l]. \tag{17}$$

Формула (17) однозначно определяет искомую функцию $\varphi(x)$ по известным $g_l(t)$ и $\mu(x)$. При этом однозначно определяется число

$$\varphi(0) = g_l(l) \exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\, d\xi\right\}. \tag{18}$$

С учётом равенства $\psi(t) = u(0,t) = g_0(t)$ из уравнения (11) имеем $\forall t \in [0,l]$

$$g_0(t) = \int_0^t \rho(t-\tau)\exp\left\{-\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\, d\xi\right\} g_0(\tau)\, d\tau + \int_t^l \rho(s)\hat{u}(s,t)\, ds,$$

где функции $\mu(\xi), 0 \leqslant \xi \leqslant l, g_o(t), 0 \leqslant t \leqslant l,$ заданы; $\hat{u}(x,t)$ — решение задачи (1), (3) в области $Q_l^- = \{(x,t): 0 \leqslant t < x \leqslant l\}$, имеющее вид (8) с начальным условием (3) с найденной функцией $\varphi(x)$, определяемой формулой (17). С заменой подынтегрального аргумента имеем

$$g_0(t) = \int_0^t \rho(s)\exp\left\{-\int_0^s \mu(\xi)\, d\xi\right\} g_0(t-s)\, ds + \int_t^l \rho(s)\hat{u}(s,t)\, ds. \tag{19}$$

Дифференцируя равенство (19), получаем $\forall t \in [0,l]$

$$g_0'(t) = \rho(t)\left(g_0(0)\exp\left\{-\int_0^t \mu(\xi)\, d\xi\right\} - \hat{u}(t+0,t)\right) +$$

$$+ \int_0^t \rho(s) \exp\left\{-\int_0^s \mu(\xi)\, d\xi\right\} g_0'(t-s) ds + \int_t^l \rho(s)\hat{u}_t(s,t)\, ds \tag{20}$$

— линейное интегральное уравнение Фредгольма II рода относительно функции $\rho(t), t \in [0,l]$.

Оба решения $\varphi_1(x), \rho_1(x), u_1(x,t)$ и $\varphi_2(x), \rho_2(x), u_2(x,t)$ обратной задачи по условию теоремы удовлетворяют условиям обратной задачи при одних и тех же функциях $\mu(x)$, $g_0(t)$, $g_l(t)$. Выше установлено, что $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ $\forall x \in [0,l]$, с представлением $\varphi_{1,2}(x) = \varphi(x)$ формулой (17). Отсюда, и функция $\rho_1(x)$, и функция $\rho_2(x)$, обе удовлетворяют уравнениям (19) и (20). Для разности $\rho(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x)$ с учётом продифференцированной по аргументу t формулы (8) имеем линейное однородное уравнение

$$\rho(x)[\varphi(0) - g_0(0)]\exp\left\{-\int_0^x \mu(\xi)\, d\xi\right\} =$$

$$= \int_0^x \rho(s) \exp\left\{-\int_0^s \mu(\xi)\, d\xi\right\} g_0'(x-s) ds -$$

$$-\int_x^l \rho(s)\, [\varphi(s-x)\mu(s-x) + \varphi'(s-x)]\exp\left\{-\int_{s-x}^s \mu(\xi)\, d\xi\right\} ds. \tag{21}$$

Из формулы (17) получаем, что с учётом условий (6) и (14) $\forall x \in [0,l]$

$$\exp\left\{\int_x^l \mu(\xi)\, d\xi\right\} = \frac{\varphi(x)}{g_l(l-x)}, \qquad \int_x^l \mu(\xi)\, d\xi = \ln\frac{\varphi(x)}{g_l(l-x)},$$

$$\mu(x) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{g_l'(l-x)}{g_l(l-x)} \quad \forall x \in [0,l],$$

$$\exp\left\{\int_0^x \mu(\xi)\,d\xi\right\} = \exp\left\{[\ln g_l(l-\xi) - \ln\varphi(\xi)]\Big|_{\xi=0}^{\xi=x}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\ln\frac{g_l(l-x)}{\varphi(x)} - \ln\frac{g_l(l)}{\varphi(0)}\right\} = \exp\left\{\ln\frac{g_l(l-x)\varphi(0)}{\varphi(x)g_l(l)}\right\} = \frac{g_l(l-x)\varphi(0)}{\varphi(x)g_l(l)},$$
$$\exp\left\{\int_s^x \mu(\xi)\,d\xi\right\} = \exp\left\{[\ln g_l(l-\xi) - \ln\varphi(\xi)]\Big|_{\xi=s}^{\xi=x}\right\} = \frac{g_l(l-x)\varphi(s)}{\varphi(x)g_l(l-s)},$$
$$\exp\left\{-\int_{s-x}^s \mu(\xi)\,d\xi\right\} = \frac{g_l(l-s+x)\varphi(s)}{\varphi(s-x)g_l(l-s)}.$$
С учётом четырёх последних равенств из уравнения (21) имеем
$$\frac{\varphi(x)\rho(x)}{g_l(l-x)} = \frac{1}{\varphi(0)-g_0(0)}\left\{\int_0^x g_0'(x-s)\left(\frac{\varphi(s)\rho(s)}{g_l(l-s)}\right)ds + \right.$$
$$+\frac{\varphi(0)}{g_l(l)}\int_x^l \left[\varphi(s-x)\left(\frac{\varphi'(s-x)}{\varphi(s-x)} + \frac{g_l'(l-s+x)}{g_l(l-s+x)}\right) - \varphi'(s-x)\right] \times$$
$$\left.\times\frac{g_l(l-s+x)}{\varphi(s-x)}\left(\frac{\varphi(s)\rho(s)}{g_l(l-s)}\right)ds\right\} \quad \forall x\in[0,l]\,.$$
Сокращая подобные слагаемые и вводя функцию
$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{g_l(l-x)}\rho(x) = \exp\left\{\int_x^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}\rho(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l,$$
получаем с учётом равенства (19) $\forall x\in[0,l]$
$$f(x) = \frac{1}{g_l(l)\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\} - g_o(0)}\left[\int_0^x g_0'(x-s)\,f(s)ds + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}\int_x^l g_l'(l-s+x)\,f(s)ds\right]$$
— линейное однородное интегральное уравнение Фредгольма II рода, представимое в виде операторного уравнения:
$$f(x) = F[f(s)]\colon\ C[0,l]\to C[0,l], \qquad (22)$$
где
$$F[f] = \frac{1}{\varphi(0)-g_o(0)}\left\{\int_0^x g_0'(x-s)\,f(s)ds + \frac{\varphi(0)}{g_l(l)}\int_x^l g_l'(l-s+x)\,f(s)ds\right\}.$$
Из условий (15), (16) теоремы, учитывая для числа $\varphi(0)$ формулу (18), имеем $\forall t\in[0,l]$
$$\|F\|_{C\to C} \leqslant \frac{l}{\varphi(0)-g_o(0)}\left[g_1(t)t + \exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}g_2(t)(l-t)\right] \leqslant q < 1.$$
Отсюда следует, что оператор F является сжимающим, и уравнение (22) имеет единственное решение $f(x)\equiv 0$ $\forall x\in[0,l]$. Следовательно, уравнение (21) также имеет единственное тождественно нулевое решение

$$\rho(x) = f(x)\exp\left\{-\int_x^l \mu(\xi)\,d\xi\right\} \equiv 0,$$

и $\rho_1(x) \equiv \rho_2(x)$ $\forall x \in [0, l]$. Из равенств $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ и $\rho_1(x) = \rho_2(x)$ $\forall x \in [0, l]$ по теореме 1 получаем совпадение двух решений прямой задачи (1) – (3): $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q_T^\Delta$. Таким образом, два решения обратной задачи совпадают. Теорема 2 доказана.

Заключение

В завершении можно отметить, что формулы (8), (12) и уравнение (11) могут быть использованы для построения итерационного алгоритма при численном решении прямой задачи (1) – (3) с использованием уравнения (11) в виде рекуррентной формулы для введения приближающей решения уравнения (11) функциональной последовательности. Формула (17) и линейное интегральное уравнение Фредгольма II рода относительно функции $f(x) = \exp\left\{\int_x^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}\rho(x)$

$$f(x) = \frac{1}{g_l(l)\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\} - g_o(0)}\left[\int_0^x g_0'(x-s)\,f(s)ds + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}\int_x^l g_l'(l-s+x)\,f(s)ds\right] -$$
$$-\frac{g_0'(x)}{g_l(l)\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\} - g_o(0)}\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad (23)$$

получаемое из уравнения (20), могут служить основой для построения итерационного алгоритма приближённого решения обратной задачи (1) – (4) с использованием формулы (17) для приближённого определения функции $\varphi(x)$ и использованием уравнения (23) в качестве рекуррентной формулы при построения для вспомогательной функции $f(x)$ приближающей решение уравнения (23) последовательности $\{f_n(x)\}$: при $n = 1,2,\ldots$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{g_l(l)\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\} - g_o(0)}\left[\int_0^x g_0'(x-s)\,f_n(s)ds + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}\int_x^l g_l'(l-s+x)\,f_n(s)ds\right] -$$
$$-\frac{g_0'(x)}{g_l(l)\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\} - g_o(0)}\exp\left\{\int_0^l \mu(\xi)\,d\xi\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$f_1(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

с последующим переходом к последовательности искомых функций $\rho_n(x) = \exp\left\{-\int_x^l \mu(\xi)\,d\xi\right\} f_n(x)$. При этом приближённое численное решение обратной задачи требует учёта её некорректности.

Литература

1. *Angulo O., López-Marcos J.C., Milner F.A.* The application of an age-structured model with unbounded mortality to demography // Math. Biosci., 2007, Vol.208, no.2, P.495–512.
2. *Gandolf, A., Iannelli M., Marinoschi G.* An age-structured model of epidermis growth // J. Math. Biol., 2011, Vol.62, no.1, P.111–141.
3. *Martcheva, M.* An introduction to mathematical epidemiology // Texts in Applied Mathematics (Springer, New York), Vol.61, 2015, 453 p.
4. *Kuniya T.* Stability analysis of an age-structured sir epidemic model with a reduction method to ODEs // Mathematics, 2018, Vol.6, no.9, P.147–156.
5. *Denisov A.M., Makeev A.S.* Iterative methods for solving an inverse problem for a population model // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics (Pleiades Publishing), 2004, Vol.44, no.8, P.1404–1413.
6. *Denisov A.M., Makeev A.S.* Numerical method for solving an inverse problem for a population model // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics (Pleiades Publishing), 2006, Vol.46, no.3, P.470–480.
7. *Makeev A.S.* Application of Tikhonov's regularization method to solve inverse problems for two population models // Computational Mathematics and Modeling (Consultants Bureau), 2007, Vol.18, no.1, P.1–9
8. *Churbanov D.V.* Uniqueness of finding the coefficient of the derivative in a first order nonlinear equation // J. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics (Allerton Press Inc.), 2013, Vol.37, no.1, P.8–13.
9. *Denisov A.M., Solov'eva S.I.* Numerical determination of the initial condition in Cauchy problems for a hyperbolic equation with a small parameter // J. Computational Mathematics and Modeling (Consultants Bureau), 2018, Vol.29, no.1, P.1–9.
10. *Baev A.V., Gavrilov S.V.* An iterative way of solving the inverse scattering problem for an acoustic system of equations in an absorptive layered nonhomogeneous medium // J. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics (Allerton Press Inc.), 2018, Vol.42, no.2, P.55–62.
11. *Tikhonov I.V.*, *Vu Nguyen Son Tung*. Solvability of a nonlocal problem for an evolution equation with a superstable semigroup // J. Differential Equations (Pleiades Publishing), 2020, Vol.56, no.4, P.478–498.
12. *Golovina S.G., Zakharov E.V.* A numerical method for a system of integral equations determining the boundaries of local nonhomogeneities // J. Computational Mathematics and Modeling (Consultants Bureau), 2020, Vol.31, no.1, P.8–12.