

Об одной задаче асимптотического отслеживания заданной кривой

Никольский М. С.^{1*}

^{1*}МИАН, РАН имени В.А.Стеклова, ул. Губкина, 8 Москва,
119991, Россия.

Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s):
mni@mi-ras.ru;

Аннотация

В современной теории управления техническими объектами большую роль играют различные задачи отслеживания заданного движения с помощью управляемого объекта. Заданное движение (или заданная параметрическая кривая) играет роль некоторого идеала, которого желательно достигнуть за счет подходящего выбора управления объектом. Отметим, что в теории управления существует несколько понятий "хорошего" отслеживания движения. Например, можно стремиться к уменьшению некоторого интегрального функционала, который оценивает отличие фиксированной проекции траектории управляемого объекта от заданной параметрической кривой. В настоящей работе мы рассматриваем задачу асимптотического отслеживания заданной параметрической кривой в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$ ($k \geq 1$) с помощью проекции траектории управляемого объекта весьма общего вида, движение которого происходит в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{2k}$. Получены достаточные условия, при которых такое отслеживание осуществимо.

Ключевые слова: управляемый объект, задачи слежения, асимптотическое отслеживание кривой.

Получено редакцией 31.01.2025; внесены авторские правки 27.02.2025; принята к публикации 25.03.2025

1 Введение

Рассматривается управляемый объект вида (см., например, [1, 2])

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g(x, t) + u,\end{aligned}\tag{2}$$

где векторы x_1, x_2, u из R^k ($k \geq 1$), вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ из R^{2k} , k -мерная функция $g(x, t)$ определена и непрерывна на $R^{2k} \times [0, \infty)$.

Обозначения. Условимся через R^r ($r \geq 1$) обозначать арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются столбцы из r чисел, а скалярное произведение и длина вектора $|\cdot|$ определяются стандартным образом.

Отметим, что управляемые объекты вида (1) представляют, в частности, интерес для механики, где обычно используют запись вида

$$\ddot{x} - g(x, \dot{x}, t) - u = 0.$$

Здесь $\dot{x}(t)$ означает первую производную по t , $\ddot{x}(t)$ означает вторую производную по t и векторы $x, \dot{x}, \ddot{x}, u$ принадлежат R^k .

В дальнейшем предполагается, что k -мерная векторная функция $g(x, t)$ из (1) удовлетворяет на $R^{2k} \times [0, \infty)$ неравенству

$$|g(x, t)| \leq c_1(1 + |x|), \quad (2)$$

где $c_1 \geq 0$ — константа.

Управления $u = u(x, t)$ в (1) будем рассматривать в классе $\mathcal{U}$ функций вида

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(t), \quad (3)$$

где функция $v(x, t)$ непрерывна на $R^{2k} \times [0, \infty)$ и допускает там оценку вида:

$$|v(x, t)| \leq c_2(1 + |x|), \quad (4)$$

где $c_2 \geq 0$ — некоторая константа, зависящая от $v(x, t)$. Относительно функций $\omega(t)$ в (3) предполагается, что при $t \geq 0$

$$|\omega(t)| \leq c_3, \quad (5)$$

где $c_3 \geq 0$ — некоторая константа, зависящая от $\omega(\cdot)$, и что $\omega(t)$ — кусочно непрерывная функция с конечным числом точек разрыва на полуоси $t \geq 0$.

Пусть для управляемого объекта (1) фиксировано начальное условие

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \in R^{2k}, \quad (6)$$

а при $t \geq 0$ фиксирована дважды непрерывно дифференцируемая функция $a(t) \in R^k$, причём $|\ddot{a}(t)|$ ограничен на $[0, \infty)$.

2 Основная часть

Мы будем рассматривать следующую задачу отслеживания кривой $a(t)$.

Задача. Построить управление $u(x, t) \in \mathcal{U}$ для управляемого объекта (1) и начального условия (6) такое, что для соответствующего решения $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in R^{2k}$ (возможно, неединственного) при $t \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$|x_1(t) - a(t)| \rightarrow 0. \quad (7)$$

Отметим, что, если векторная функция $a(t)$ при всех $t \geq 0$ принимает постоянное значение $a_0 \in R^k$, то соотношение (7) имеет вид:

$$|x_1(t) - a_0| \rightarrow 0 \quad (8)$$

при $t \rightarrow \infty$. В случае, когда вектор $b = \begin{pmatrix} a_0 \\ \theta \end{pmatrix}$, где θ — нулевой вектор из R^k , удовлетворяет условию

$$g(b) = \theta,$$

задачу асимптотического отслеживания вида

$$|x(t) - b| \rightarrow 0 \quad (9)$$

при $t \rightarrow \infty$ можно изучать в рамках теории управляемой стабилизации движения (см., например, [3, 4]). Если получены некоторые достаточные условия, гарантирующие выполнение условия (9) при $t \rightarrow \infty$, то эти условия одновременно гарантируют выполнение условия (8).

Замечание 1. В современной теории управления рассматриваются также и другие задачи слежения (см., например, [5–7]).

Замечание 2. Отметим, что условия роста (2), (4) и условие ограниченности (5) используются для обоснования продолжимости на $[0, \infty)$ решений задачи Коши (1), (3), (6) и заимствованы из [8].

Приступим к решению нашей задачи асимптотического отслеживания кривой $a(t)$ при $t \geq 0$.

Фиксируем допустимое управление $u(x, t) \in \mathcal{U}$ и рассмотрим соответствующее ему (возможно, неединственное) решение $x(t)$ задачи Коши (1), (6). Обозначим при $t \geq 0$

$$e(t) = x_1(t) - a(t).$$

Для первой и второй производных по времени от $e(t)$ получаем при $t \geq 0$ соотношения:

$$\dot{e}(t) = x_2(t) - \dot{a}(t), \quad (10)$$

$$\ddot{e}(t) = g(x(t), t) - \ddot{a}(t) + u(x(t), t). \quad (11)$$

Отметим, что

$$e(0) = x_{10} - a(0), \quad \dot{e}(0) = x_{20} - \dot{a}(0), \quad (12)$$

где x_{10}, x_{20} — k -мерные компоненты начального вектора x_0 .

Формулы (10), (11) наводят на мысль использовать для решения нашей задачи отслеживания управление $\hat{u}(x, t)$ вида:

$$\hat{u}(x, t) = -g(x, t) + \ddot{a}(t) + \omega(t), \quad (13)$$

где кусочно непрерывное управление $\omega(t)$ удовлетворяет геометрическому ограничению $\omega \in W$, здесь W — куб в пространстве R^k , состоящий из векторов ω , для компонент ω_i которых выполняются неравенства

$$|\omega_i| \leq \frac{l}{k}, \quad i = 1, \dots, k,$$

где $l > 0$ — константа. Отметим, что для точек $\omega \in W$ выполняется неравенство $|\omega| \leq l$ и что функция $|\ddot{a}(t)|$ равномерно ограничена на $[0, \infty)$.

Из формул (11), (13) при $u(x, t) = \hat{u}(x, t)$ мы получаем управляемую систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \omega(t) \end{aligned} \quad (14)$$

где $e_1(t) = e(t)$, $e_2(t) = \dot{e}(t)$, с начальными условиями (см. (12))

$$e_1(0) = x_{10} - a(0), \quad e_2(0) = x_{20} - \dot{a}(0). \quad (15)$$

Для управляемого объекта (14) с начальными условиями (15) рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия с нулевой терминальной точкой из R^{2k} . Оказывается, эту задачу можно решить конструктивным образом. Для этого рассмотрим k управляемых процессов в R^2 с динамикой

$$\begin{aligned} \dot{y}_{1i} &= y_{2i} \\ \dot{y}_{2i} &= \omega_i, \end{aligned}$$

где y_{1i} — i -тая компонента вектора $y_1 \in R^k$, y_{2i} — i -тая компонента вектора $y_2 \in R^k$, ω_i — i -тая компонента вектора $\omega \in R^k$, $i = 1, \dots, k$, причём $|\omega_i| \leq \frac{l}{k}$, с начальными условиями (см. (15))

$$y_{1i}(0) = x_{10i} - a_i(0), \quad y_{2i}(0) = x_{20i} - \dot{a}_i(0) \quad (16)$$

и конечными условиями

$$m_i = 0 \in R^2,$$

где $i = 1, \dots, k$. В (16) x_{10i} означает i -тую компоненту вектора x_{10} , а x_{20i} означает i -тую компоненту вектора x_{20} .

Хорошо известно (см., например, [1]), что в рассматриваемой i -той задаче оптимального быстродействия определено оптимальное управление $\tilde{\omega}_i(t)$, $t \in [0, \tau_i]$, где τ_i — время оптимального управления. Отметим, что управление $\tilde{\omega}_i(t)$ конструктивно вычислимо и является кусочно-постоянной функцией на $[0, \tau_i]$, имеющей на $[0, \tau_i]$ не более одной точки разрыва. Доопределим функцию $\tilde{\omega}_i(t)$ при $t > \tau_i$ нулём. Для доопределённой на полуось $[0, \infty)$ функции $\tilde{\omega}_i(t)$ число точек разрыва не превышает двух. Обозначим через $\tilde{\omega}(t)$ на $[0, \infty)$ k -мерное управление с компонентами $\tilde{\omega}_i(t)$, $i = 1, \dots, k$. Отметим, что $\tilde{\omega}(t) = 0 \in R^k$ при $t > \tau$, где $\tau = \max\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ и является временем оптимального быстродействия для управляемого объекта (14) с начальными условиями (15) и нулевой терминальной точкой из R^{2k} . Вставим $\omega(t) = \tilde{\omega}(t)$ в систему дифференциальных уравнений (14) и решим её с начальными условиями (15). Соответствующее решение обозначим

$$z(t) = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1(t) \\ \tilde{e}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при $t \geq \tau$ выполняется равенство

$$z(t) \equiv 0 \in R^{2k}. \quad (17)$$

Обозначим (см. (13))

$$\tilde{u}(x, t) = -g(x, t) + \ddot{a}(t) + \tilde{\omega}(t). \quad (18)$$

Подставим в (1) $u = \tilde{u}(x, t)$ и рассмотрим решение $\tilde{x}(t) \in R^{2k}$, $t \geq 0$ полученной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{a}(t) + \tilde{\omega}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

с начальным условием (6). Отметим, что $|\tilde{\omega}(t)| \leq l$. Из (17) вытекает, что

$$\tilde{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} a(t) \\ \dot{a}(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

при $t \geq \tau = \max_{i=1, \dots, k} \tau_i$. Таким образом, управление $\tilde{u}(x, t)$ (см. (18)) точно

отслеживает кривую $\begin{pmatrix} a(t) \\ \dot{a}(t) \end{pmatrix}$ при $t \geq \tau$ и поэтому решает поставленную задачу асимптотического отслеживания кривой $a(t)$ при $t \geq 0$.

Отметим, что в наших построениях константа l может быть любым фиксированным положительным числом. При этом уменьшение константы $l > 0$ приводит к увеличению величины τ .

С точки зрения приложений важно, чтобы управление $\tilde{u}(\tilde{x}(t), t)$ при $t \geq 0$ было равномерно ограниченным по модулю некоторой константой. Чтобы гарантировать это свойство, предположим, что при $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$|a(t)| \leq c_4, \quad |\dot{a}(t)| \leq c_5, \quad |\ddot{a}(t)| \leq c_6, \quad (21)$$

где c_4, c_5, c_6 — некоторые неотрицательные константы. Напомним, что ограниченность функции $|\ddot{a}(t)|$ при $t \geq 0$ ранее уже требовалась. Из формул (20), (21) при $t \geq \tau$ следует, что

$$|\tilde{x}(t)| \leq c_4 + c_5. \quad (22)$$

Теперь займёмся оценкой функции $|\tilde{x}(t)|$ при $t \in [0, \tau]$. Напомним, что функция $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (19) с начальным условием (6). Поэтому при $t \geq 0$ получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= x_{01} + tx_{02} + \int_0^t (t-s)(\ddot{a}(s) + \tilde{\omega}(s)) ds, \\ \tilde{x}_2(t) &= x_{02} + \int_0^t (\ddot{a}(s) + \tilde{\omega}(s)) ds. \end{aligned}$$

Отсюда при $t \in [0, \tau]$ получаем неравенства (см. (21))

$$|\tilde{x}_1(t)| \leq |x_{01}| + \tau|x_{02}| + \frac{\tau^2}{2}(c_6 + l), \quad (23)$$

$$|\tilde{x}_2(t)| \leq |x_{02}| + \tau(c_6 + l), \quad (24)$$

$$|\tilde{x}(t)| \leq c_7 = |x_{01}| + |x_{02}| + \tau(|x_{02}| + c_6 + l) + \frac{\tau^2}{2}(c_6 + l). \quad (25)$$

Из неравенств (22), (25) вытекает при $t \geq 0$ оценка

$$|\tilde{x}(t)| \leq \max\{c_4 + c_5, c_7\}, \quad (26)$$

где константа c_7 определена в соотношении (25). Из соотношений (2), (18), (21), (26) и неравенства $|\tilde{\omega}(t)| \leq l$ для $t \geq 0$, получаем при $t \geq 0$ оценку вида

$$|\tilde{u}(\tilde{x}(t), t)| \leq c_1(1 + \max\{c_4 + c_5, c_7\}) + c_6 + l.$$

Такая оценка полезна в практических приложениях наших результатов, так как обеспечивает равномерную ограниченность управления $\tilde{u}(\tilde{x}(t), t)$

по модулю при $t \geq 0$. Заметим, что при выводе неравенства (25) было использовано неравенство вида $|x| \leq |x_1| + |x_2|$, где $x \in R^{2k}$, а $x_1, x_2 \in R^k$ и являются векторными компонентами вектора x . Также ранее было использовано неравенство вида $|\omega| \leq \sum_{i=1}^k |\omega_i|$, где $\omega \in R^k$, а ω_i — скалярные компоненты вектора ω .

3 Заключение

В статье рассмотрена одна задача асимптотического отслеживания проекцией траектории нелинейного управляемого объекта заданной гладкой параметрической кривой. Обосновывается, что при широких предположениях такое отслеживание можно успешно осуществить. Рассматриваемые в статье нелинейные управляемые объекты представляют интерес, например, для механических приложений теории управления.

Благодарности

Приношу благодарности профессору Н.Л.Григоренко и С.А.Шаткову за интересные обсуждения моей работы.

Конфликт интересов

Отсутствует

Вклад авторов

М.С.Никольский - вывод формул, написание текста статьи.

Список литературы

- [1] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1983.
- [2] *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1976.
- [3] *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Теория устойчивости движения / Под ред. И.Г. Малкин. — М.: Наука, 1966. — С. 475–515. — Дополнение 4.
- [4] *Перегудова О.А.* Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движением механических систем. — Ульяновск, 2009.
- [5] *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.

- [6] *Егоров А.И.* Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004.
- [7] *Максимов В.И.* Обратная связь в задаче слежения при измерении в дискретные моменты времени части координат фазового вектора // *Известия РАН. Теория и системы управления.* — 2021. — № 4. — С. 46–56.
- [8] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.