

*И.С. Барашков<sup>1</sup>*

## **АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ Е-ПОЛЯРИЗАЦИИ**

### **Введение**

В прикладной электродинамике часто необходимо проводить математическое моделирование электромагнитных полей в проводящих неоднородных средах. В работах [1]–[13] рассмотрены различные подходы к такому моделированию в двумерном и трёхмерном случаях с помощью метода интегральных уравнений и конечно разностного метода.

В настоящей работе рассмотрен алгоритм решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования Земли (МТЗ), в которой по известным измеренным на поверхности Земли значениям импеданса надо определить распределение проводимости Земли.

Обратная задача магнитотеллурического зондирования заключается в изучении электромагнитных свойств земной коры и мантии с помощью измерения изменения импеданса в результате прохождения через земную кору и мантию низкочастотных сигналов, возбуждаемых плоской вертикально падающей на земную поверхность электромагнитной волной естественного электромагнитного поля земли. Измеренный на поверхности Земли импеданс играет важную роль в задаче МТЗ. Импеданс зависит от электромагнитных свойств среды, через которую проходит электромагнитное поле. В земной коре и мантии импеданс может изменяться в зависимости от таких параметров как электропроводимость и магнитная проницаемость. Его изменения позволяют оценить эти параметры и определить структуры коры и мантии. Основные идеи решения обратной задачи МТЗ изложены в работе [3] и заключаются в следующем. Поскольку обратная задача МТЗ является некорректной, то находить её решение следует с помощью минимизации регуляризирующего функционала.

В работе [3] не приводится конкретного примера алгоритма, реализующего решение двумерной обратной задачи. Такие алгоритмы могут быть очень разнообразны и зависят от многих факторов. Вид регуляризирующего функционала зависит от физики решаемой задачи. Методы минимизации регуляризирующего функционала также могут быть разными. Алгоритм решения обратной задачи также существенно

---

<sup>1</sup> МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, e-mail: baraskov@cs.msu.ru

зависит от конкретного метода решения прямой задачи, которую неоднократно приходится решать при итерационном методе минимизации регуляризирующего функционала.

В настоящей работе построен конкретный пример алгоритма решения двумерной обратной задачи для случая  $E$ -поляризации, основанный на конкретном методе минимизации регуляризирующего функционала. Для решения прямой задачи в работе используется метод интегральных уравнений, который позволяет решать задачу в небольшой ограниченной области, что является преимуществом метода. При решении обратной задачи в разработанном алгоритме необходимо решать серию похожих однотипных интегральных уравнений, которые отличаются только правыми частями, что позволяет решать обратную задачу более эффективно.

### Постановка прямой задачи для $E$ -поляризованного поля в слоистой среде

Рассмотрим двумерную проводящую среду (рис. 1), в которой зона неоднородности  $S_H$  с электропроводностью  $\sigma_H$  находится в трёхслойной горизонтально однородной слоистой среде. Причём второй слой, в котором находится неоднородность, имеет проводимость

$$\sigma_2 \ll \sigma_1 \text{ и } \sigma_2 \ll \sigma_H.$$

Для этой среды будем решать задачу расчёта электромагнитного поля, возбуждаемого плоской волной, вертикально падающей на земную поверхность. Задача с таким возбуждением поля называется задачей магнитотеллурического зондирования.

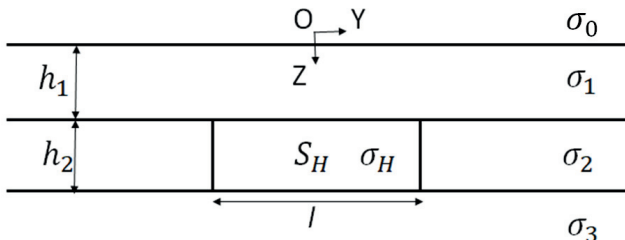


Рис.1. Модель строения неоднородной среды

В двумерном случае электромагнитное поле распадается на две независимых поляризации. Пусть среда и источники поля не зависят от координаты  $x$ . Тогда в уравнениях Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} \quad (1)$$

положим  $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ .

Подробно рассмотрим случай  $E$ -поляризации, когда

$$H_x = 0, \quad E = (E_x, 0, 0), \quad H = (0, H_y, H_z) \quad (2)$$

и получим для этого случая:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z. \quad (4)$$

Из уравнений (4) найдём:  $H_y$  и  $H_z$ :

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (5)$$

Эти выражения для  $H_y$  и  $H_z$  оставим в уравнение (3) и получим уравнение для электрического поля

$$-\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \sigma E_x,$$

откуда

$$\Delta E_x + k^2(z) E_x = 0, \quad (6)$$

где

$$k^2(z) = i\omega\mu \sigma(z), \quad \operatorname{Re} k > 0, \quad k - \text{волновое число,}$$

с краевыми условиями в задаче магнитотеллурического зондирования, в которой поле возбуждается плоской волной, вертикально падающей на земную поверхность

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E_x(y, z) = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} E_x(y, z) = E_x^0(z), \quad (8)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} (E_x(y, z) - E_x^0(z)) = 0 \quad (9)$$

и условиями непрерывности тангенциальных компонент поля на границах разрыва проводимости  $\sigma(y, z)$

$$[E_x] = 0, \quad \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] = 0, \quad (10)$$

на горизонтальных границах разрыва проводимости  $\sigma(y, z)$

$$[E_x] = 0, \quad \left[ \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] = 0 \quad (11)$$

на вертикальных границах разрыва проводимости  $\sigma(y, z)$ , где  $E_x^0(z)$  – поле в горизонтально однородной слоистой среде стандартной модели, а квадратными скобками обозначен разрыв функции.

В прямой задаче МТЗ требуется найти импеданс  $Z(y, z = 0)$  на поверхности Земли

$$Z(y, z = 0) = \frac{E_x(y, z=0)}{H_y(y, z=0)} = \frac{E_x(y, z=0)}{\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}} = i\omega\mu \frac{E_x(y, z=0)}{\frac{\partial E_x}{\partial z}} \quad (12)$$

### Метод интегральных уравнений решения прямой задачи для E-поляризованного поля в слоистой среде

Интегральное уравнение для решения поставленной задачи в случае E- поляризации по конечной прямоугольной области  $S_H$  получено в работе [2] и имеет вид:

$$E_x(M) - \int_{S_H} G[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)]E_x(M^0)ds_{M^0} = E_x^0(z), \quad (13)$$

где  $G(y - y^0, z, z^0)$  является функцией Грина для горизонтально однородной слоистой среды стандартной модели с проводимостью

$$\sigma_c(z) = \begin{cases} \sigma_0, & z < 0, \\ \sigma_1, & 0 < z < h_1, \\ \sigma_2, & h_1 < z < h_1 + h_2, \\ \sigma_3, & z > h_1 + h_2, \end{cases} \quad (14)$$

а  $E_x^0(z)$  является одномерным нормальным электрическим полем в стандартной горизонтально однородной слоистой среде с этой проводимостью, нормированным таким образом, что это одномерное электрическое поле равно единице на поверхности земли

$$E_x^0(z = 0) = 1. \quad (15)$$

Функция Грина для случая E – поляризации построена в работе [2] и имеет вид:

$$G(y - y^0, z, z^0) = \frac{1}{2\pi} F_c(V(\lambda, z, z^0)), \quad (16)$$

где  $F_c$  – косинус-преобразование Фурье

$$F_c(f) = \int_0^\infty \cos\lambda(y - y^0) \cdot f(\lambda) d\lambda, \quad (17)$$

а функция  $V$  является решением следующей задачи:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{dV}{dz} \right) - \eta^2 V = 0, \quad (z \neq z^0), \quad (18)$$

где

$$\eta^2 = \lambda^2 - k^2(z), \quad \text{Re } \eta > 0, \quad (19)$$

$$[V] = 0, \quad (20)$$

$$\left[ \frac{dV}{dz} \right] = -2\Delta(z - z^0), \quad (21)$$

$$V \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$$\Delta(z - z^0) = \begin{cases} 1, & z = z^0, \\ 0, & z \neq z^0. \end{cases}$$

Функция  $V(z)$  представима в виде:

$$\begin{aligned} V(z) &= C_0 e^{\eta_0 z} \quad \text{при } z < 0, \\ V(z) &= C_1 e^{\eta_1 z} + D_1 e^{-\eta_1 z} \quad \text{при } 0 < z < h_1, \\ V(z) &= \frac{1}{\eta_2} e^{-\eta_2 |z-z^0|} + C_2 e^{\eta_2 z} + D_2 e^{-\eta_2 z} \quad \text{при } h_1 < z < h_1 + h_2, \\ V(z) &= D_3 e^{-\eta_3 z} \quad \text{при } z > h_1 + h_2. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $C_0, C_1, D_1, C_2, D_2, D_3$  находятся из граничных условий (20) – (21). Слагаемые с этими коэффициентами дают гладкий вклад в функцию Грина. Для численного решения интегрального уравнения (13) область неоднородности  $S_H$  разбивается на прямоугольные ячейки  $S_j$  с постоянной проводимостью  $\sigma_j$  внутри ячейки и со сторонами  $h_y$  по горизонтали и  $h_z$  по вертикали.

Из уравнения (13) получим формулу пересчёта поля на поверхность Земли:

$$E_x(M) = \int_{S_H} G[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] E_x(M^0) ds_{M^0} + E_x^0(z). \quad (23)$$

Импеданс на поверхности Земли согласно формуле (12) равен:

$$\begin{aligned} Z(y, z = 0) &= \frac{E_x(y, z = 0)}{H_y(y, z = 0)} = \frac{E_x(y, z = 0)}{\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}} = i\omega\mu \frac{E_x(y, z = 0)}{\frac{\partial E_x}{\partial z}} = \\ &= i\omega\mu \frac{\int_{S_H} G[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] E_x(M^0) ds_{M^0} + E_x^0(z)}{\int_{S_H} \frac{\partial G}{\partial z} [\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] E_x(M^0) ds_{M^0} + \frac{dE_x^0(z)}{dz}} = i\omega\mu \frac{P}{R}, \end{aligned}$$

где числитель  $P$  равен

$$P = \int_{S_H} G[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] E_x(M^0) ds_{M^0} + E_x^0(z),$$

а знаменатель  $R$  равен

$$R = \int_{S_H} \frac{\partial G}{\partial z} [\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] E_x(M^0) ds_{M^0} + \frac{dE_x^0(z)}{dz}.$$

Обратная задача для  $E$ -поляризованного поля в слоистой среде

Обратная задача МТЗ заключается в нахождении проводимости неоднородности  $\sigma = \sigma_H$  по измеренным на поверхности Земли значениям импеданса  $Z^{measured}(y, z = 0, \lambda)$  при различных значениях длины волны  $\lambda$  в первом слое. Обратная задача некорректна. Её решение, согласно работе (3), будем искать с помощью минимизации регуляризирующего функционала

$$\Phi_\alpha = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \|Z - Z^{measured}\|^2 dy d\lambda + \alpha \Omega(\sigma), \quad (24)$$

включающего наряду с функционалом невязки

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \|Z - Z^{measured}\|^2 dy d\lambda$$

ещё и стабилизирующий функционал  $\Omega(\sigma)$  при известном гипотетическом решении обратной задачи, где  $\alpha$  – параметр регуляризации. Предполагается, что у нас для решения некорректной обратной задачи имеется дополнительная априорная информация в виде гипотезы о строении изучаемого района и распределении проводимости среды при данной гипотезе  $\sigma^{(g)}(y, z)$ . Тогда стабилизатор обратной задачи можно задать в виде близости решения к гипотетическому решению:

$$\Omega(\sigma) = \int_{S_H} (\sigma - \sigma^{(g)})^2 ds = h_y h_z \sum_j (\sigma_j - \sigma_j^{(g)}) \cdot (\sigma_j - \sigma_j^{(g)}) . \quad (25)$$

Метод решения с таким стабилизатором называют методом проверки гипотез. Фактически мы находим из множества эквивалентных решений такое решение обратной задачи, которое наиболее близко к гипотетическому решению. Таким образом, надо минимизировать функционал

$$\Phi_\alpha = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \|Z - Z^{measured}\|^2 dy d\lambda + \alpha \sum_j (\sigma_j - \sigma_j^{(g)})^2 \quad (26)$$

с некоторым значением параметра регуляризации  $\alpha$ .

Для построения итерационного алгоритма минимизации регуляризирующего функционала (26) рассмотрим частную производную по  $\sigma_j$  от импеданса  $Z$ :

$$\frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} = \frac{i\omega\mu}{R^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \sigma_j} \cdot R - P \cdot \frac{\partial R}{\partial \sigma_j} \right), \quad (27)$$

где

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma_j} = \int_{S_j} G E_x(M^0) ds_{M^0} + \int_{S_H} G [\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] \frac{\partial E_x(M^0)}{\partial \sigma_j} ds_{M^0}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma_j} = \int_{S_j} \frac{\partial G}{\partial z} E_x(M^0) ds_{M^0} + \int_{S_H} \frac{\partial G}{\partial z} [\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] \frac{\partial E_x(M^0)}{\partial \sigma_j} ds_{M^0}. \quad (29)$$

Дифференцируя уравнение (13) по  $\sigma_j$ , получим уравнение для определения частной производной  $\frac{\partial E_x(M^0)}{\partial \sigma_j}$ :

$$\frac{\partial E_x(M)}{\partial \sigma_j} - \int_{S_H} G [\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)] \frac{\partial E_x(M^0)}{\partial \sigma_j} ds_{M^0} = \int_{S_H} G E_x(M^0) ds_{M^0} \quad (30)$$

Уравнение (30) очень похоже на уравнение (13). Эти два уравнения отличаются правыми частями. Для решения уравнения (30) выгодно использовать метод решения системы линейных алгебраических уравнений с несколькими правыми частями. Для экономного расчёта

нескольких правых частей заранее рассчитываются и затем хранятся интегралы

$$\int_{S_j} G(M, M^0) ds_{M^0}.$$

После определения в итерационном алгоритме новых значений  $E_x(M^0)$  на очередной итерации надо эти интегралы умножить на соответствующие новые значения  $E_x(M^0)$ .

Рассмотрим, как выбрать приращение  $\Delta\sigma_j$ , чтобы улучшить приближение  $\sigma_j^{(n)}$  проводимости неоднородности, полученное после  $n$  шагов итерационного процесса минимизации регуляризирующего функционала по формуле

$$\sigma_j^{(n+1)} = \sigma_j^{(n)} + \Delta\sigma_j.$$

Пусть  $Z^{(n)}$  – значение импеданса, соответствующее приближению  $\sigma_j^{(n)}$  проводимости неоднородности, полученное после  $n$  шагов итерационного процесса. Тогда учитывая только линейную часть приращения импеданса значение регуляризирующего функционала при проводимости неоднородности  $\sigma_j^{(n)} + \Delta\sigma_j$  можно приближённо представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\alpha &= \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\| Z^{(n)} + \sum_j \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \Delta\sigma_j - Z^{measured} \right\|^2 dyd\lambda + \\ &\quad + \alpha \sum_j \left( \sigma_j^{(n)} + \Delta\sigma_j - \sigma_j^{(g)} \right)^2 = \\ &= \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\| \sum_j \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \Delta\sigma_j - (Z^{measured} - Z^{(n)}) \right\|^2 dyd\lambda + \\ &\quad + \alpha \sum_j \left( \Delta\sigma_j - (\sigma_j^{(g)} - \sigma_j^{(n)}) \right)^2 = \\ &= \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\| \sum_j \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \Delta\sigma_j - F \right\|^2 dyd\lambda + \\ &\quad + \alpha \sum_j \left( \Delta\sigma_j - f_j \right)^2, \end{aligned}$$

где

$$F = Z^{measured} - Z^{(n)},$$

$$f_j = \sigma_j^{(g)} - \sigma_j^{(n)}.$$

Теперь значение функционала  $\tilde{\Phi}_\alpha$  можно представить в виде:

$$\tilde{\Phi}_\alpha = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left( \sum_j \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \Delta \sigma_j - F \right) \cdot \overline{\left( \sum_j \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \Delta \sigma_j - F \right)} dy d\lambda +$$

$$+ \alpha \sum_j (\Delta \sigma_j - f_j) \cdot (\Delta \sigma_j - f_j).$$

Тогда учитывая только линейную часть приращения функционала  $\tilde{\Phi}_\alpha$ , получим для него упрощённое приближённое выражение  $\tilde{\Psi}_\alpha$ :

$$\tilde{\Psi}_\alpha = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left( - \sum_j \bar{F} \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \Delta \sigma_j - \sum_j F \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma_j} \Delta \sigma_j + F \cdot \bar{F} \right) dy d\lambda +$$

$$+ \alpha \left( - \sum_j f_j \Delta \sigma_j - \sum_j f_j \Delta \sigma_j + \sum_j f_j \cdot f_j \right) =$$

$$= -2 \sum_j \Delta \sigma_j \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \operatorname{Re} \left( \bar{F} \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \right) dy d\lambda - 2\alpha \sum_j f_j \Delta \sigma_j + \Phi_\alpha^{(0)} =$$

$$= -2 \sum_j \Delta \sigma_j \left( \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \operatorname{Re} \left( \bar{F} \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \right) dy d\lambda + \alpha f_j \right) + \Phi_\alpha^{(0)},$$

где

$$\Phi_\alpha^{(0)} = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} (F \cdot \bar{F}) dy d\lambda + \alpha \sum_j f_j \cdot f_j.$$

Выбор приращения  $\Delta \sigma_j$  по формуле

$$\Delta \sigma_j = t \left( \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \operatorname{Re} \left( \bar{F} \frac{\partial Z}{\partial \sigma_j} \right) dy d\lambda + \alpha f_j \right)$$

обеспечивает изменение  $\sigma_j^{(n)}$  в направлении антиградиента регуляризирующего функционала.

Рассмотрим, как оптимально выбрать величину шага в этом направлении антиградиента. Для этого сравним три значения регуляризирующего функционала  $\Phi_\alpha$  при  $t = 0$ ,  $t = h_n$  и  $t = 2h_n$ :

$$\Phi_\alpha(t = 0) = \Phi_\alpha^{(0)}, \quad \Phi_\alpha(t = h_n), \quad \Phi_\alpha(t = 2h_n),$$



где  $h_n$  – значение шага по  $t$ , использованное на предыдущем  $n$ -ом шаге итерационного алгоритма.

Если

$$\Phi_\alpha(t = h_n) \geq \Phi_\alpha(t = 0)$$

то

$$h_{n+1} = 0,5h_n.$$

Если же

$$\Phi_\alpha(t = h_n) < \Phi_\alpha(t = 0),$$

то по трём точкам строим квадратичную функцию

$$y = at^2 + bt + c$$

такую, что

$$y(0) = \Phi_\alpha^{(0)},$$

$$y(h_n) = \Phi_\alpha(t = h_n),$$

$$y(2h_n) = \Phi_\alpha(t = 2h_n).$$

Затем находим точку минимума  $t_0$  этой квадратичной функции на отрезке  $[0, 2h_n]$  и вычисляем  $h_{n+1} = t_0$ .

Согласно этому алгоритму, шаг, с которым опускаемся к минимуму регуляризирующего функционала, может по мере надобности и увеличиваться и уменьшаться.

## Заключение

В настоящей работе рассмотрен алгоритм решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования Земли для случая  $E$ -поляризации. В этой обратной задаче по известным измеренным на поверхности Земли при разных частотах значениям импеданса  $Z^{measured}$  надо определить распределение проводимости Земли  $\sigma_H(y, z)$  в области неоднородности  $S_H$ .

Поскольку эта обратная задача является некорректной, то алгоритм её решения основан на минимизации регуляризирующего функционала, включающего наряду с функционалом невязки ещё и стабилизирующий функционал  $\Omega(\sigma)$ .

Предполагается, что у нас имеется дополнительная априорная информация для решения обратной задачи в виде гипотезы о строении изучаемого района и распределение проводимости среды при данной гипотезе  $\sigma^{(g)}(y, z)$ . Тогда стабилизатор обратной задачи можно задать в виде близости решения к гипотетическому решению. Метод решения с таким стабилизатором называют методом проверки гипотез. Фактически мы находим из множества эквивалентных решений некорректной задачи

такое решение обратной задачи, которое наиболее близко к гипотетическому решению.

Для минимизации регуляризирующего функционала используется итерационный градиентный метод, в котором на каждой итерации заново решается прямая задача МТЗ и заново рассчитывается градиент регуляризирующего функционала. И при решении прямой задачи и при расчёте градиента регуляризирующего функционала используется метод интегральных уравнений, в котором интегрировать надо только по области неоднородности, что является преимуществом метода. Кроме того, при решении обратной задачи в разработанном алгоритме необходимо решать серию похожих однотипных интегральных уравнений, которые отличаются только правыми частями.

Для численного решения таких уравнений выгодно использовать метод решения системы линейных алгебраических уравнений с несколькими правыми частями, что позволяет решать обратную задачу более эффективно.

#### Литература

1. *Dmitriev, V.I.* The Integral-Equation Method in Low-Frequency Electrodynamics of Nonhomogeneous Contrast//Computational Mathematics and Modeling, 2018, Vol. 29, pp 42–47.
2. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике.- М. МАКС Пресс, 2008,-316с.
3. *Дмитриев В.И.* Обратные задачи геофизики — М.: МАКС Пресс, 2012. — 340 с.
4. *Дмитриев В.И.* Морские электромагнитные зондирования. –М. АРГАМАК МЕДИА, 2004,-192с.
5. *Dmitriev V.I., Belkin P.S., Mershchikova N.A.* Integral Equation Method for Modeling of Two-Dimensional Geoelectricity Problems//Computational Mathematics and Modeling, 2005, Vol. 16, pp. 289–300.
6. *Martin Čumaabc, Alexander Gribenkoab, Michael S. Zhdanov.* Inversion of magnetotelluric data using integral equation approach with variable sensitivity domain: Application to EarthScope MT data//Physics of the Earth and Planetary Interiors, September 2017, Vol. 270, pp. 113-127.
7. *Musa A. Bello, Rongwen Guo, Jianxin Liu.* Forward plane-wave electromagnetic model in three dimensions using hybrid finite volume–integral equation scheme//Geophysical Prospecting, 2019, Vol. 67, pp. 2213–2226.
8. *Dmitriev V.I., Barashkov I.S.* Mathematical modeling of marine electromagnetic sounding of a three-dimensional nonhomogeneous

- medium//Computational Mathematics and Modeling, July 2012, Vol. 23, Issue 3, pp. 239-253.
9. *Barashkov I. S., Dmitriev V. I.* Modeling marine electromagnetic soundings by the reciprocity principle//Computational Mathematics and Modeling, January 2013, Vol. 24, Issue 1, pp. 1-13.
  10. *Dmitriev V. I., Barashkov I.S.* Mathematical modeling of mobile marine electromagnetic soundings//Computational Mathematics and Modeling, 2014, Vol. 25, No. 3, July, pp. 342-350.
  11. *Dmitriev V.I., Barashkov I.S.* Finite-Difference-Integral Method for Computing Low-Frequency Electromagnetic Fields in a Nonhomogeneous Medium//Computational Mathematics and Modeling, 2016, Vol. 27, № 2, pp. 145-161.
  12. *Barashkov I.S., Dmitriev V.I.* A Numerical Method for Low-Frequency Electromagnetic Fields in a Nonhomogeneous Medium in the Case of H-Polarization//Computational Mathematics and Modeling, 2017, Vol. 28, № 2, pp. 254-266.
  13. *Dmitriev V.I., Barashkov I.S.* Numerical Analysis of the Integral Equation Method for the Computation of the Electromagnetic Field in a Nonhomogeneous Medium//Computational Mathematics and Modeling, 2019, Vol. 30, № 1, pp. 55-67.