

А. М. Денисов¹, В. С. Матвеевко²

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ДЕИОНИЗАЦИИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ

Введение

Исследование и решение экологических проблем, связанных с дефицитом питьевой воды, представляют важное направление применения методов математического моделирования. Одним из эффективных методов очистки воды от вредных примесей является применение различных фильтров, основанных на использовании сорбционных эффектов. Применение методов математического моделирования для исследования сорбционных процессов началось с фундаментальной работы А.Н.Тихонова, А.А.Жуховицкого, Я.Л.Забезинского [1].

Другое направление получения чистой питьевой воды связано с использованием технологий ее опреснения. Наиболее популярные методы для получения пресной воды - это метод обратного осмоса и дистилляции. Однако существуют менее энергоемкие и экономичные методы опреснения, например метод емкостной деионизации или метод мембранной емкостной деионизации. Сравнение метода емкостной деионизации и обратного осмоса приведено в работе [2]. Различным аспектам метода емкостной деионизации посвящены работы [3], [4]. Теоретический подход сводится к представлению аэрогелных электродов, как поверхности конденсатора большой емкости [5] собирающего ионы из промежутка между электродами, по которому происходит движение раствора. В работе [6] изучается динамика деионизации раствора электролита с помощью сорбции на аэрогелных электродах на основе математического моделирования.

В данной работе рассматривается обратная задача для математической модели процесса деионизации и численный метод ее решения.

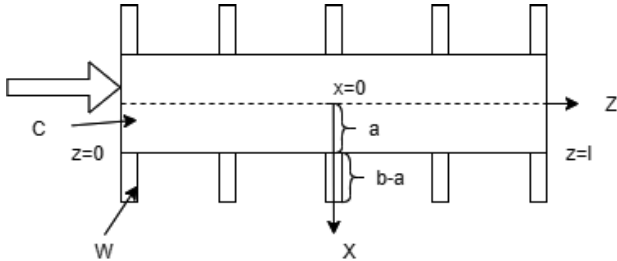
¹Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: den@cs.msu.ru.

²Студент магистратуры факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: valmat07@yandex.ru.

Математическая модель процесса деионизации

Опишем процесс деионизации. Водный раствор, содержащий ионы которые необходимо удалить, пропускается по каналу, образованному двумя параллельными пластинами. На внутренней поверхности пластин имеются поры на поверхность которых подается напряжение. В результате этого происходит перемещение ионов из канала в поры и последующее оседание их на стенках пор. Так как пластины параллельны, то все характеристики симметричны относительно середины канала, которая принимается за $x = 0$.

Рассмотрим математическую модель процесса деионизации, полученную в результате некоторых упрощений математической модели, описанной в [6]. Выберем ось z за направление вдоль канала, $z = 0$ - начало канала $z = l$ - его конец. Ось x перпендикулярна оси z . Расстояние между пластинами равно $2a$, а значит $0 \leq x \leq a$. Глубина пор $b - a$. Приведем схематическое изображение установки:



Процесс изменения концентрации ионов в канале $c(z, x, t)$ и порах $w(z, x, t)$ будем описывать следующей начально-краевой задачей для функций $c(z, x, t)$ и $w(z, x, t)$

$$vc_z + c_t = D_1 c_{xx}, \quad 0 < z < l, \quad 0 < x < a, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$c(z, x, 0) = c_0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (2)$$

$$c(0, x, t) = c_0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$c_x(z, 0, t) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$c(z, a, t) = w(z, a, t), \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$D_1 c_x(z, a, t) = D_2 v_0 w_x(z, a, t), \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$w_t + f(t) = D_2 w_{xx}, \quad 0 < z < l, \quad a < x < b, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$w(z, x, 0) = c_0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad a \leq x \leq b, \quad (8)$$

$$w_x(z, b, t) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Здесь v - скорость переноса ионов вдоль оси z , D_1 и D_2 - коэффициенты диффузии вдоль оси x в канале и порах соответственно, постоянная c_0 - начальная концентрация ионов в канале и порах, которая также подается на вход канала (условие (3)), коэффициент $v_0 \in (0, 1)$ в условии (6) характеризует количество пор.

Функция $f(t)$ в уравнении (7) описывает убывание ионов за счет их оседания на поверхности пор. Эта функция определяется кинетикой процесса, который может моделироваться различными способами. В данной работе рассматривается простая модель кинетики, в которой $f(t) = q_t(t)$, а функция $q(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} q_t &= \beta(A(t) - q), \quad t > 0, \\ q(0) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнении (10) $\beta > 0$ - кинетический коэффициент, а функция $A(t)$ характеризует интенсивность оседания ионов. Взаимно однозначная связь между $f(t)$ и $A(t)$ определяется формулой

$$f(t) = \beta A(t) - \beta^2 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} A(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$

В более сложных вариантах описания процесса кинетики [6] функция q зависит не только от времени, но и от концентрации $w(z, x, t)$ ионов в порах.

Рассмотрим вопрос о единственности решения задачи (1)-(9). Введем множества

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{(z, x, t) : 0 < z < l, \quad 0 < x < a, \quad t \geq 0\}, \\ \Pi_2 &= \{(z, x, t) : 0 < z < l, \quad a < x < b, \quad t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Через $C^{n,m,k}(\Pi)$ будем обозначать множество функций $u(z, x, t)$, имеющих на множестве Π непрерывные частные производные $\frac{\partial^n u}{\partial z^n}$, $\frac{\partial^m u}{\partial x^m}$ и $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ (индекс равный нулю означает непрерывность $u(z, x, t)$ по этой переменной).

Докажем единственность решения задачи (1)-(9).

Теорема 1. Пусть функции $c_i(z, x, t)$, $w_i(z, x, t)$, $i = 1, 2$ таковы, что $c_i \in C^{0,1,0}(\bar{\Pi}_1) \cap C^{1,2,1}(\Pi_1)$, $w_i \in C^{0,1,0}(\bar{\Pi}_2) \cap C^{0,2,1}(\Pi_2)$ и удовлетворяют (1)-(9). Тогда $c_1(z, x, t) = c_2(z, x, t)$, $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_1$ и $w_1(z, x, t) = w_2(z, x, t)$, $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_2$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$c(z, x, t) = c_1(z, x, t) - c_2(z, x, t), \quad w(z, x, t) = w_1(z, x, t) - w_2(z, x, t),$$

являющиеся решением задачи

$$vc_z + c_t = D_1 c_{xx}, \quad 0 < z < l, \quad 0 < x < a, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$c(z, x, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (13)$$

$$c(0, x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

$$c_x(z, 0, t) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0, \quad (15)$$

$$c(z, a, t) = w(z, a, t), \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0, \quad (16)$$

$$D_1 c_x(z, a, t) = D_2 v_0 w_x(z, a, t), \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

$$w_t = D_2 w_{xx}, \quad 0 < z < l, \quad a < x < b, \quad t \geq 0, \quad (18)$$

$$w(z, x, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad a \leq x \leq b, \quad (19)$$

$$w_x(z, b, t) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad t \geq 0, \quad (20)$$

Умножив уравнение (12) на $2c(z, x, t)$, проинтегрировав по z, x, t и используя условия (13)-(15), получим

$$\begin{aligned} & \nu \int_0^t \int_0^a c^2(z, x, \tau) dx d\tau + \int_0^a \int_0^z c^2(s, x, t) ds dx + \\ & + 2D_1 \int_0^z \int_0^t \int_0^a (c_x(s, x, \tau))^2 dx d\tau dz = \\ & = 2D_1 \int_0^z \int_0^t c(s, a, \tau) c_x(s, a, \tau) d\tau ds, \quad 0 \leq z \leq l, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Умножив уравнение (18) на $2w(z, x, t)$, проинтегрировав по z, x, t и используя условия (19),(20), имеем

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_0^z w^2(s, x, t) ds dx + 2D_2 \int_0^z \int_0^t \int_a^b (w_x(s, x, \tau))^2 dx d\tau dz = \\ & = -2D_2 \int_0^z \int_0^t w(s, a, \tau) w_x(s, a, \tau) d\tau ds \end{aligned}$$

Из условий (16),(17) следует, что

$$\begin{aligned} & 2D_1 \int_0^z \int_0^t c(s, a, \tau) c_x(s, a, \tau) d\tau ds = \\ & = 2\nu_0 D_2 \int_0^z \int_0^t w(s, a, \tau) w_x(s, a, \tau) d\tau ds = \\ & = -\nu_0 \int_a^b \int_0^z w^2(s, x, t) ds dx - 2\nu_0 D_2 \int_0^z \int_0^t \int_a^b (w_x(s, x, \tau))^2 dx d\tau dz \end{aligned}$$

Подставив это выражение в уравнение (21), получим

$$\begin{aligned} & \nu \int_0^t \int_0^a c^2(z, x, \tau) dx d\tau + \int_0^a \int_0^z c^2(s, x, t) ds dx + \\ & + 2D_1 \int_0^z \int_0^t \int_0^a (c_x(s, x, \tau))^2 dx d\tau dz + \nu_0 \int_a^b \int_0^z w^2(s, x, t) ds dx + \\ & + 2\nu_0 D_2 \int_0^z \int_0^t \int_a^b (w_x(s, x, \tau))^2 dx d\tau dz = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что $c(z, x, t) = 0$, $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_1$, $w(z, x, t) = 0$, $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_2$ и теорема доказана.

Обратная задача для модели деионизации

Одним из направлений исследования процессов деионизации, является разработка методов решения обратных задач, позволяющих определять характеристики математической модели, по измерениям выходной концентрации ионов. Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть все числовые параметры, входящие в модель (1)-(10) известны, а функция $A(t)$ неизвестна. Требуется определить $A(t)$, по интегральной выходной концентрации

$$g(t) = \int_0^a c(l, x, t) dx, \quad t \geq 0, \quad (22)$$

где $g(t)$ - заданная функция.

Рассмотрим вопрос о единственности решения этой обратной задачи.

Так как функция $A(t)$ однозначно определяется функцией $f(t)$, то достаточно доказать единственность определения функции $f(t)$. Поэтому далее будем считать, что обратная задача состоит в определении $f(t)$.

Введем вспомогательное определение

Определение Функция $u(z, x, t)$ удовлетворяет Условию 1 если

$$|u(z, x, t)| \leq \gamma e^{\alpha t}, \quad \forall (z, x, t),$$

где γ и α - положительные постоянные.

При неизвестной $f(t)$ функции $c(z, x, t)$ и $w(z, x, t)$ также неизвестны. Поэтому решением обратной задачи будем называть тройку функций $\{f(t), c(z, x, t), w(z, x, t)\}$ таких, что: $f \in C[0, \infty)$ $|f(t)| \leq const$, $\forall t \geq 0$; $c \in C^{0,1,0}(\bar{\Pi}_1) \cap C^{1,2,1}(\Pi_1)$, $w \in C^{0,1,0}(\bar{\Pi}_2) \cap C^{0,2,1}(\Pi_2)$; для функций $c(z, x, t)$ и $w(z, x, t)$ и их производных, входящих в задачу (1)-(9), выполнено условие 1 при $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_1$ и при $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_2$ соответственно; функции $f(t), c(z, x, t), w(z, x, t)$ удовлетворяют (1)-(9), (22).

Сформулируем и докажем теорему единственности решения обратной задачи.

Теорема 2. Пусть тройки функций $\{f_i(t), c_i(z, x, t), w_i(z, x, t)\}$, $i = 1, 2$ являются решением обратной задачи. Тогда $f_1(t) = f_2(t)$ для $t \geq 0$, $c_1(z, x, t) = c_2(z, x, t)$ для $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_1$, $w_1(z, x, t) = w_2(z, x, t)$ для $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_2$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\bar{f}(t) = f_1(t) - f_2(t)$$

$$\bar{c}(z, x, t) = c_1(z, x, t) - c_2(z, x, t),$$

$$\bar{w}(z, x, t) = w_1(z, x, t) - w_2(z, x, t)$$

являющиеся решением задачи

$$v\bar{c}_z + \bar{c}_t = D_1\bar{c}_{xx}, \quad 0 < z < l, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}(z, x, 0) &= 0, & 0 \leq z \leq l, & \quad 0 \leq x \leq a, \\
\bar{c}(0, x, t) &= 0, & 0 \leq x \leq a, & \quad t \geq 0, \\
\bar{c}_x(z, 0, t) &= 0, & 0 \leq z \leq l, & \quad t \geq 0, \\
\bar{c}(z, a, t) &= \bar{w}(z, a, t), & 0 \leq z \leq l, & \quad t \geq 0, \\
D_1 \bar{c}_x(z, a, t) &= D_2 v_0 \bar{w}_x(z, a, t), & 0 \leq z \leq l, & \quad t \geq 0, \\
\bar{w}_t + \bar{f}(t) &= D_2 \bar{w}_{xx}, & 0 < z < l, & \quad a < x < b, \quad t \geq 0, \\
\bar{w}(z, x, 0) &= 0, & 0 \leq z \leq l, & \quad a \leq x \leq b, \\
\bar{w}_x(z, b, t) &= 0, & 0 \leq z \leq l, & \quad t \geq 0, \\
\int_0^a \bar{c}(l, x, t) dx &= 0, & t \geq 0,
\end{aligned}$$

Введем для $p > \alpha$ функции

$$\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^\infty e^{-pt} \bar{f}(t) dt, & C(z, x, p) &= \int_0^\infty e^{-pt} \bar{c}(z, x, t) dt \\
W(z, x, p) &= \int_0^\infty e^{-pt} \bar{w}(z, x, t) dt.
\end{aligned}$$

Эти функции представляют собой решение следующей задачи

$$vC_z + pC = D_1 C_{xx}, \quad 0 < z < l, \quad 0 < x < a, \quad p > \alpha, \quad (23)$$

$$C(0, x, p) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad p > \alpha, \quad (24)$$

$$C_x(z, 0, p) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad p > \alpha, \quad (25)$$

$$C(z, a, p) = W(z, a, p), \quad 0 \leq z \leq l, \quad p > \alpha, \quad (26)$$

$$D_1 C_x(z, a, p) = D_2 v_0 W_x(z, a, p), \quad 0 \leq z \leq l, \quad p > \alpha, \quad (27)$$

$$pW + F(p) = D_2 W_{xx}, \quad 0 < z < l, \quad a < x < b, \quad p > \alpha, \quad (28)$$

$$W_x(z, b, p) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad p > \alpha, \quad (29)$$

$$\int_0^a C(l, x, p) dx = 0, \quad p \geq \alpha. \quad (30)$$

Уравнение (28) и условия (26), (29) определяют краевую задачу для функции $W(z, x, p)$. Решив эту задачу, получим

$$W(z, x, p) = \frac{F(p) + pC(z, a, p)}{pch(\sqrt{p(D_2)^{-1}}(b-a))} ch(\sqrt{p(D_2)^{-1}}(x-b)) - \frac{F(p)}{p}.$$

Подставив это представление в условие (27), имеем краевое условие для функции $C(z, x, p)$

$$\begin{aligned}
D_1 C_x(z, a, p) + v_0 \sqrt{(D_2)^{-1}} p C(z, a, p) th(\sqrt{p(D_2)^{-1}}(b-a)) &= \\
= -\sqrt{D_2 p^{-1}} v_0 F(p) th(\sqrt{p(D_2)^{-1}}(b-a))
\end{aligned}$$

Перепишем его так

$$C_x(z, a, p) + q\sqrt{p}\psi(p)C(z, a, p) = F_1(p), \quad (31)$$

где

$$q = \frac{v_0\sqrt{D_2}}{D_1} > 0, \quad \psi(p) = th(\sqrt{p(D_2)^{-1}(b-a)}) > 0$$

$$F_1(p) = -\frac{q}{\sqrt{p}}\psi(p)F(p).$$

Таким образом, функция $C(z, x, p)$ является решением начально-краевой задачи (23)-(25),(31) для параболического уравнения (23) и удовлетворяет условию (30).

Покажем, что функция $F_1(p)$ равна нулю для $p > \alpha$. Предположим, что это не так. Пусть для определенности $F_1(p) > 0$. Выберем положительное число λ такое, что

$$p - D_1\lambda^2 > 0, \quad q\sqrt{p}\psi(p) - \lambda > 0. \quad (32)$$

Функция $u(z, x, p) = C(z, x, p)e^{\lambda x}$ является решением задачи

$$vu_z = D_1u_{xx} - (p - D_1\lambda^2)u - 2D_1\lambda u_x, \quad 0 < z < l, \quad 0 < x < a, \quad p > \alpha,$$

$$u(0, x, p) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad p > \alpha,$$

$$u_x(z, 0, p) - \lambda u(z, 0, p) = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad p > \alpha,$$

$$u_x(z, a, p) + (q\sqrt{p}\psi(p) - \lambda)u(z, a, p) = F_1(p)e^{\lambda x}, \quad 0 \leq z \leq l, \quad p > \alpha.$$

Из положительности числа λ , неравенств (32) и положительности $F_1(p)$ следует, что $u(z, x, p)$ не может достигать отрицательного минимума при $0 \leq z \leq l, 0 \leq x \leq a$. Следовательно $u(z, x, p) \geq 0$, а значит и $C(z, x, p) \geq 0$ при $0 \leq z \leq l, 0 \leq x \leq a$. Но тогда используя условие (30), получим, что $C(l, x, p) = 0$ при $0 \leq x \leq a$. Однако это равенство противоречит условию (31) при $z = l$ и положительности функции $F_1(p)$.

Таким образом $F_1(p) = 0$, а значит и $F(p) = 0$ при $p > \alpha$. Так как преобразование Лапласа функции $\bar{f}(t)$ равно нулю при $p > \alpha$, то $\bar{f}(t) = 0$ при $t \geq 0$. Следовательно $f_1(t) = f_2(t)$ при $t \geq 0$. Тогда используя теорему 1 получим, что $c_1(z, x, t) = c_2(z, x, t)$, $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_1$ и $w_1(z, x, t) = w_2(z, x, t)$, $(z, x, t) \in \bar{\Pi}_2$. Теорема 2 доказана.

Начально-краевая задача (1)-(9) близка по своей постановке к начально-краевым задачам для параболических уравнений. Обратные задачи определения источника в параболических уравнениях рассматривались в целом ряде работ, см., например, [7]- [12]

Для численного решения обратной задачи применялся метод, основанный на представлении неизвестной функции $A(t)$ в виде заданной функции $A^*(t; \vec{p}_n)$, зависящей от неизвестного набора параметров $\vec{p}_n = (p_0, p_1, \dots, p_n)$. Решение задачи (1)-(9) для заданной функции $A^*(t; \vec{p}_n)$ обозначается так $c(z, x, t; \vec{p}_n)$. В качестве приближенного решения

обратной задачи для заданной выходной интегральной кривой $g(t)$ выбирается функция $A^*(t; \vec{p}_{n\delta})$ такая, что

$$\Phi(\vec{p}_{n\delta}) = \int_0^T \left[\int_0^a c(l, x, t; \vec{p}_{n\delta}) dx - g(t) \right]^2 dt \leq \delta^2,$$

где δ - некоторый требуемый уровень точности. Таким образом, задача сводится к минимизации функции $\Phi(\vec{p}_n)$. Размерность вектора неизвестных параметров зависит от величины δ и может быть увеличена с целью достижения необходимого уровня точности.

Схема вычислительных экспериментов по решению обратной задачи была такова. Задавалась некоторая функция $\bar{A}(t)$ с ней решалась задача (1)-(9) и находилась $\bar{c}(z, x, t)$. Затем вычислялась

$$\bar{g}(t) = \int_0^a \bar{c}(l, x, t) dx.$$

Далее в нее вносилась погрешность и получалась функция $g_\delta(t)$ такая, что $\|g_\delta - \bar{g}\|_{L_2[0, T]} \leq \delta$. Затем функция $g_\delta(t)$ использовалась как исходная информация для решения обратной задачи. Приближенным решением считалась функция $A^*(t; \vec{p}_{n\delta})$ такая, что

$$\int_0^T \left[\int_0^a c(l, x, t; \vec{p}_{n\delta}) dx - g_\delta(t) \right]^2 dt \leq \delta^2$$

Приведем примеры решения обратных задач. В них использовалось представление $A^*(t; \vec{p}_n)$ в виде многочлена

$$A^*(t; \vec{p}_n) = \sum_{k=0}^n p_k t^k.$$

Вычисления проводились при следующих параметрах математической модели (1)-(10):

$$T = 3 \quad l = 3 \quad a = 1 \quad b = 7$$

$$c_0 = 1 \quad D_1 = 0.3 \quad D_2 = 0.1 \quad v = 3 \quad \beta = 0.3 \quad v_0 = 0.9$$

При заданной функции $A(t)$ прямая задача (1)-(10) решалась с использованием разностных методов. Шаги сетки по z и x были равны $h_z = h_x = 0.1$, а шаг по времени $\tau = 0.01$.

В первом вычислительном эксперименте функция $\bar{A}(t) = \sin t + 1$. Величина погрешности $\delta = 0.01$. На рис.1 приведены графики функции $\bar{A}(t)$ и приближенного решения обратной задачи $A^*(t; p_{2\delta})$.

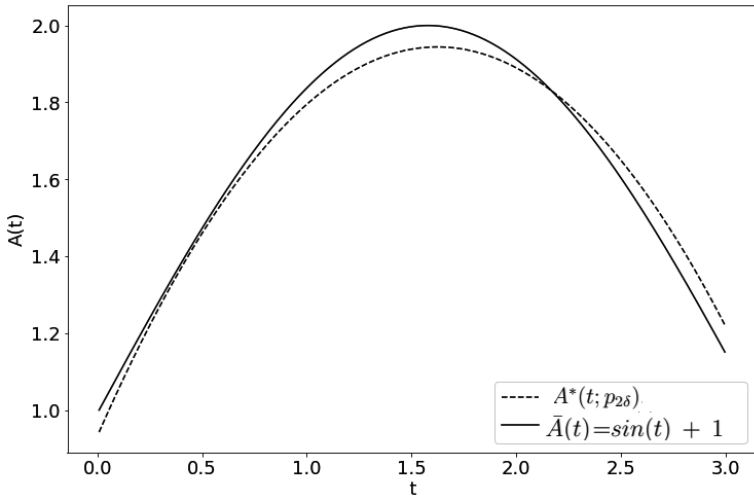


Рис. 1

Во втором вычислительном эксперименте функция $\bar{A}(t) = \sin(2t)/3 + 2$. Величина погрешности $\delta = 0.01$. Очевидно, что в этом случае приближенное решение обратной задачи нельзя получить в классе многочленов второй степени. На рис.2 приведены графики функции $\bar{A}(t)$ и приближенного решения обратной задачи $A^*(t; p_{3\delta})$.

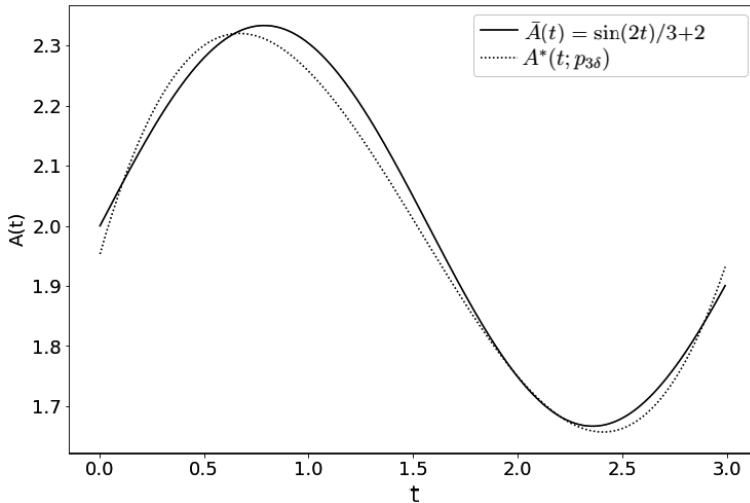


Рис. 2

Приведенные результаты показывают возможность приближенного решения обратной задачи в рамках предложенного подхода. Уменьшение величины ошибки δ и расширение класса неизвестных функций $A(t)$ естественно потребуют либо рассмотрения более высоких порядков многочленов в представлении $A^*(t; p_n)$, либо выбора другого варианта параметризации приближенного решения.

Авторы благодарны профессору Н.А.Тихонову, привлечшему их внимание к проблематике обратных задач для математических моделей процессов деионизации.

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л.* Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. // Журнал физической химии 1946 т 20 в.10. с.1113-1126
2. *Welgemoed T.J., Schutte C.F.* Capacitive Deionization Technology™: an alternative desalination solution, // Desalination 183 (1–3) (2005) 327–340.
3. *Al Marzooqi F.A., Al Ghaferi A. A., Saadat I., Hilal N.* // Desalination. 2014. Vol. 342.pp. 3-15
4. *Zhao R.; Biesheuvel P.M.; van der Wal A.* // Energy & Environmental Science. 2012. Vol. 5. No 11. pp. 9520-9527. doi:10.1039/c2ee21737f.
5. *Iozzo D. A. B., Tong M., Wu G., Furlani E. P.*// J. Phys. Chem. C. 2015. Vol. 119. No 45. pp. 25235-25242.
6. *Тихонов Н. А., Токмачев М. Г.* Исследование процесса деионизации растворов электросорбцией на аэрогелевых электродах посредством математического моделирования //Сорбционные и хроматографические процессы. – 2017. – Т. 17. – №. 6. – С. 893-906.
7. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука,1969.
8. *Приленко А.И., Костин А.Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Математический сборник. 1992. Т.183. № 4. С.49-68.
9. *Cannon J. R., Du Chateau P.* Structural identification of an unknown source term in a heat equation // Inverse Problems. 1998 V.14. N 3. pp.535-551.
10. *Денисов А. М.* Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Журнал

вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55. № 5. С.830-835.

11. *Денисов А. М.* Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т.56. № 10. С.1737-1742.
12. *Соловьев В. В.* Об определении источников с компактными носителями в ограниченной области на плоскости для уравнения теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т.58. № 5. С.778-789.