

Математическое моделирование задачи дифракции на волноводной решетке

Ильинский А. С.¹, Дмитриева И. В.^{1*}, Бережная И. В.¹

^{1*}ф-т ВМК, МГУ имени М.В.Ломоносова, Ленинские горы, 1-52,
Москва, 119991, Россия.

*Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s):

2027959@mail.ru;

Соавторы: celd@cs.msu.ru;

Аннотация

В статье рассмотрен метод решения задачи дифракции бесконечной периодической решетки в плоских волноводах с локальным возбуждением одного центрального волновода. С помощью интегрального преобразования задача сведена к решению задачи дифракции с условиями Флоке. Приведены численные результаты моделирования.

Ключевые слова: волноводная решетка, дифракция, математическое моделирование, условия Флоке.

Получено редакцией 05.01.2024; внесены авторские правки 19.09.2024;
принята к публикации 23.12.2024

1 Введение

Дифракционные решетки являются основными элементами оптических и квазиоптических интерферометров и волномеров, применяющихся в оптике, измерительной технике, голографии, ядерной физике и проч. [1–6].

Бурное развитие техники и теории, а также разнообразие применения квантовых генераторов привели к целому классу задач по использованию периодических структур, как элементов самого квантового генератора, так и разнообразных элементов оптических и квазиоптических трактов. Дифракционные решетки выполняют также роль возбудителей волоконно-оптических линий связи.

За последнее время опубликовано большое количество работ, посвященных этому вопросу, в частности, развитию и применению к

конкретным дифракционным задачам строгих методов решения и соответствующих вычислительных методов [7–9], основными из которых являются метод интегральных уравнений и метод разделения переменных.

В данной работе приведена подробная постановка и исследование задачи возбуждения периодической решетки плоских волноводов нормальной волной одного из регулярных плоских волноводов в случае H –поляризации методом проекционного сшивания.

2 Постановка задачи

Рассмотрим периодическую плоскую структуру, образованную системой плоских параллельных полубесконечных волноводов D_m . Период структуры a , ширина волноводов d . В плоскости $z = 0$ расположены идеально проводящие фланцы. Ось z направлена параллельно боковым стенкам волноводов. Обозначим через S_m – поверхность сланца, а C_m – боковая поверхность волновода с номером m (Рис. 1).

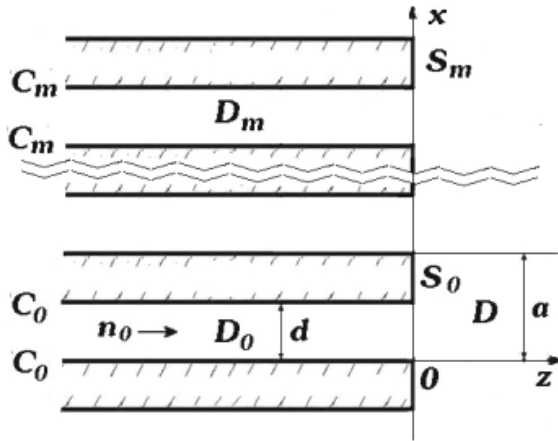


Рис. 1: Периодическая решётка из полубесконечных плоских волноводов.

Боковая поверхность волноводов C_m идеально проводящая, волноводы излучают в полупространство $z > 0$. Пусть из $-\infty$ по волноводу с номером $m = 0$ $D_0\{-\infty < z \leq 0, 0 \leq x \leq d\}$ распространяется нормальная волна номера n_0 . Будем рассматривать случай H –поляризации, когда возбуждается электромагнитное поле с компонентами E_x, E_z, H_y , которые не зависят от переменной y . Обозначим $H_y(x, z)$ через

$u(x, z)$. Характеристики среды, заполняющей волноводы, возьмем равными $\varepsilon = 1, \mu = 1$; внутри волноводов источники поля отсутствуют; поле зависит от времени периодически по закону $e^{-i\omega t}$.

В выбранной системе координат

$$\begin{aligned} C_m &= \{-\infty < z \leq 0; x = am, am + d; m = 0, \pm 1, \dots\}, \\ S_m &= \{z = 0; am + d \leq x \leq am + a; m = 0, \pm 1, \dots\}, \\ D_m &= \{-\infty < z \leq 0; am \leq x \leq am + d; m = 0, \pm 1, \dots\}. \end{aligned}$$

Математическая задача в этом случае состоит в определении решения $u(x, z)$ уравнения Гельмгольца в области, объединяющей волноводы D_m и полупространство $z > 0$ за исключением контуров C_m и S_m

$$\Delta u(x, z) + k_0^2 u(x, z) = 0, \quad k_0 - \text{волновое число.} \quad (1)$$

На контурах C_m и S_m решение $u(x, z)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к поверхностям. На бесконечности функция $u(x, z)$ должна удовлетворять условиям излучения [10], обеспечивающим отсутствие волн, приходящих из бесконечности, за исключением распространяющейся нормальной волны номера n_0 волновода D_0 .

Основной идеей предлагаемого метода является переход от решения задачи во всем пространстве к некоторой задаче в ограниченной области пространства, исследование которой позволяет получить необходимую информацию о решении поставленной задачи [11].

Переход осуществляется введением спектрального преобразования Фурье функции $u(x, z)$ и специальной формой условия излучения. Введем преобразование

$$v(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x + na, z) e^{-int}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

которое любой функции $u(x, z)$, определённой во всем пространстве и принадлежащей $L_2(-\infty, \infty)$ по x , при каждом фиксированном z ставит в соответствие функцию $v(t, x, z)$, удовлетворяющую условиям Флоке [12–14]

$$v(t, x + a, z) = e^{it} v(t, x, z). \quad (4)$$

Для восстановления функции $u(x, z)$ во всем пространстве в силу условия (3) достаточно определить ее образ $v(t, x, z)$ в полосе $\bar{D}\{0 \leq x \leq a, -\infty < z < +\infty\}; t \in [0, 2\pi]$. Тогда [12]

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t, x, z) dt. \quad (5)$$

В силу периодичности структуры образ $v(t, x, z)$ удовлетворяет в полосе $\bar{D}$ уравнению (1), граничными условиями (2) на контурах C_0, S_0 и условиям излучения при любом $t \in [0, 2\pi]$.

Таким образом, достаточно решить задачу в полосе $\bar{D}$ при всех $t \in [0, 2\pi]$. Функция $v(t, x, z)$ может быть представлена следующим образом:

$$D_0 : v(t, x, z) = Ae^{i\Gamma_{n_0}z}\varphi_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} R_k(t)e^{-i\Gamma_k z}\varphi_k(x); \quad z < 0, 0 \leq x \leq d, \quad (6)$$

$$D : v(t, x, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_j(t)e^{i\gamma_j z}\psi_j(t, x); \quad z > 0, 0 \leq x \leq a, \quad (7)$$

где A - заданная амплитуда распространяющейся волны номера n_0 ;

Γ_k - постоянная распространения плоского волновода

$$\Gamma_k = \sqrt{k_0^2 - \lambda_k^2}, \quad \lambda_k = \pi k/d, \quad (8)$$

λ_k - собственное значение поперечного сечения плоского волновода для волны k ;

$\varphi_k(x)$ - собственная функция поперечного сечения

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{d}} \cos \frac{\pi k}{d} x, \quad \delta_{0k} - \text{дельта функция}; \quad (9)$$

$$\gamma_j(t) = \sqrt{k_0^2 - \tilde{\lambda}_j^2(t)}, \quad \tilde{\lambda}_j(t) = (t + 2\pi j)/a; \quad (10)$$

$$\psi_j(t, x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\tilde{\lambda}_j(t)x}; \quad (11)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Im}\gamma > 0; \text{Im}\gamma = 0, \text{Re}\gamma > 0, \\ \text{Im}\Gamma > 0; \text{Im}\Gamma = 0, \text{Re}\Gamma > 0. \end{array} \right)$$

Система функций $\{\varphi_k(x)\}$ образует ортонормированную полную систему на любом отрезке длины d на действительной оси $-\infty < x < +\infty$, а система функций $\{\psi_j(x)\}$ при любом $t \in [0, 2\pi]$ образует ортонормированную полную систему на любом отрезке длиной a на оси $-\infty < x < +\infty$. Итак, представления (6), (7) обеспечивают выполнение условий излучения, граничных условий на боковой поверхности, условий Флоке и уравнения Гельмгольца в каждой области.

Представления (6), (7) дают нам разложение функции $v(t, x, z)$ по пространственным гармоникам но с неизвестными пока коэффициентами $R_k(t)$ и $T_j(t)$. Интегральные характеристики поля в дальней зоне определяются распространяющимися пространственными гармониками. Поэтому во многих задачах основной интерес представляет вычисление коэффициентов $R_k(t)$ и $T_j(t)$, соответствующих распространяющимся гармоникам.

3 Проекционный метод решения задачи дифракции

Перейдем к построению алгоритма решения поставленной задачи. Строим семейство функций, зависящее от параметра N . Каждая функция семейства определяется из требований выполнения некоторых условий ортогональности, справедливых и для точного решения [15]. В работе [13] показывается, что задача определения любой функции семейства разрешима, и при стремлении параметра N к бесконечности соответствующая последовательность функций сходится к точному решению исходной краевой задачи. Таким образом, суть проекционного метода состоит в том, что вместо системы парных функциональных уравнений, обеспечивающих выполнение условий непрерывности на дырке и граничных условий на поверхности фланца, формулируется система условий ортогональности, которая обеспечит выполнение условий в плоскости $z = 0$ в энергетическом смысле.

Определим приближенное решение в каждой из областей D_0 и D следующим образом

$$D_0 : \tilde{u}_1(t, x, z) = A e^{i\Gamma_{n_0} z} \varphi_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^N \tilde{R}_k(t) e^{-i\Gamma_k z} \varphi_k(x); \quad z < 0, 0 \leq x \leq d, \quad (12)$$

$$D : \tilde{u}_2(t, x, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j(t) e^{i\gamma_j(t)z} \psi_j(t, x); \quad z > 0, 0 \leq x \leq a. \quad (13)$$

Поскольку условия непрерывности на дырке и граничные условия на фланце для точного решения выполняются следующим образом

$$\begin{aligned} [u]|_{z=0} &= 0, & 0 \leq x \leq d, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} &= 0, & 0 \leq x \leq d, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0+0} &= 0, & d \leq x \leq a, \end{aligned}$$

то для точного решения справедливо соотношение

$$\int_0^d u \frac{\partial u^*}{\partial z} \Big|_{z=0-0} dx = \int_0^a u \frac{\partial u^*}{\partial z} \Big|_{z=0+0} dx.$$

Выберем условия сопряжения в плоскости $z = 0$ в виде

$$\int_0^d \tilde{u}_1 \varphi_k|_{z=0-0} dx = \int_0^d \tilde{u}_2 \varphi_k|_{z=0+0} dx, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (14)$$

$$\int_0^d \left. \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} \psi_j^* \right|_{z=0-0} dx = \int_0^a \left. \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} \psi_j^* \right|_{z=0+0} dx, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (15)$$

Умножив (14) на $i\Gamma_k R_k^*$, и просуммировав по k от 0 до N , получим

$$\int_0^d \left. \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1^*}{\partial z} \right|_{z=0-0} dx = \int_0^d \left. \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_1^*}{\partial z} \right|_{z=0+0} dx.$$

Умножив (15) на T_j^* , просуммировав по j от $-\infty$ до $+\infty$, и взяв комплексное сопряжение, получим

$$\int_0^d \left. \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_1^*}{\partial z} \right|_{z=0-0} dx = \int_0^a \left. \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2^*}{\partial z} \right|_{z=0+0} dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^d \left. \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_1^*}{\partial z} \right|_{z=0-0} dx = \int_0^a \left. \tilde{u}_2 \frac{\partial \tilde{u}_2^*}{\partial z} \right|_{z=0+0} dx.$$

Т.е. выбор условий сопряжения в виде (14), (15) обеспечил для приближенного решения выполнение интегрального соотношения, которое справедливо и для точного решения.

Коэффициенты $\widetilde{R}_k(t)$ и $\widetilde{T}_k(t)$ будем определять из соотношений (14) и (15). Учитывая ортогональность функций φ_n на $[0, d]$, распишем подробнее эти равенства

$$\begin{aligned} \int_0^d \tilde{u}_1 \varphi_n|_{z=0} dx &= \int_0^d \left[A \varphi_{n_0}(x) + \sum_{k=0}^N \widetilde{R}_k \varphi_k(x) \right] \varphi_n(x) dx = \\ &= A \delta_{n_0 n} + \sum_{k=0}^N \widetilde{R}_k \delta_{kn} = A \delta_{n_0 n} + \widetilde{R}_n, \\ \int_0^d \tilde{u}_2 \varphi_n|_{z=0} dx &= \int_0^d \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{T}_j \psi_j(x) \right] \varphi_n(x) dx = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{T}_j(t) \int_0^d \psi_j \varphi_n dx. \end{aligned}$$

Т.е. равенство (14) примет вид

$$A \delta_{n_0 n} + \widetilde{R}_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{T}_j \int_0^d \psi_j \varphi_n dx; \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\int_0^d \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \psi_j^* dx &= \int_0^d \left[i\Gamma_{n_0} A \varphi_{n_0} - \sum_{k=0}^N i\tilde{R}_k \Gamma_k \varphi_k \right] \psi_j^* dx = \\
&= i\Gamma_{n_0} A \int_0^d \varphi_{n_0} \psi_j^* dx - \sum_{k=0}^N i\tilde{R}_k \Gamma_k \int_0^d \varphi_k \psi_j^* dx, \\
\int_0^a \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \psi_j^* dx &= \int_0^a \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i\gamma_m \tilde{T}_m \psi_m \right] \psi_j^* dx = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i\gamma_m \tilde{T}_m \delta_{jm} = i\gamma_j \tilde{T}_j,
\end{aligned}$$

и равенство (15) принимает вид

$$i\Gamma_{n_0} A \int_0^d \varphi_{n_0} \psi_j^* dx - \sum_{k=0}^N i\tilde{R}_k \Gamma_k \int_0^d \varphi_k \psi_j^* dx = i\gamma_j \tilde{T}_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

Введём обозначение

$$\alpha_{jk} = \int_0^d \psi_j \varphi_k dx = \int_0^d \psi_j(t, x) \varphi_k(x) dx. \quad (16)$$

Тогда равенства (14) и (15) примут вид

$$A\delta_{n_0k} + \tilde{R}_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j \alpha_{jk}; \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (17)$$

$$i\Gamma_{n_0} A \alpha_{jn_0}^* - \sum_{k=0}^N i\tilde{R}_k \Gamma_k \alpha_{jk}^* = i\gamma_j \tilde{T}_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (18)$$

Обозначив

$$\tilde{\tilde{R}}_k = \tilde{R}_k + A\delta_{n_0k}, \quad (19)$$

окончательно получим

$$\tilde{\tilde{R}}_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{T}_j \alpha_{jk}; \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (20)$$

$$i\Gamma_{n_0} A \alpha_{jn_0}^* - \sum_{k=0}^N i\Gamma_k \left(\tilde{\tilde{R}}_k - A \delta_{n_0k} \right) \alpha_{jk}^* = i\gamma_j \tilde{T}_j, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (21)$$

Выразим из (21) $\tilde{T}_j$ и подставим его значение в (20)

$$\tilde{T}_j = \frac{\Gamma_{n_0} A \alpha_{jn_0}^*}{\gamma_j} - \sum_{k=0}^N \Gamma_k \left(\tilde{R}_k - A \delta_{n_0 k} \right) \frac{\alpha_{jk}^*}{\gamma_j}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_k &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Gamma_{n_0} A \alpha_{jn_0}^*}{\gamma_j} - \sum_{p=0}^N \Gamma_p \left(\tilde{R}_p - A \delta_{n_0 p} \right) \frac{\alpha_{jp}^*}{\gamma_j} \right] \alpha_{jk}, \\ \tilde{R}_k &= \Gamma_{n_0} A \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{jn_0}^* \alpha_{jk}}{\gamma_j} - \sum_{p=0}^N \Gamma_p \tilde{R}_p \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{jp}^* \alpha_{jk}}{\gamma_j} + \Gamma_{n_0} A \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{jn_0}^* \alpha_{jk}}{\gamma_j}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$A_{pk} = \Gamma_p \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{jp}^* \alpha_{jk}}{\gamma_j}. \quad (23)$$

Окончательно

$$\tilde{R}_k + \sum_{p=0}^N \tilde{R}_p A_{pk} = 2A A_{n_0 k} \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (24)$$

Получили систему $N + 1$ линейных алгебраических уравнений для $\tilde{R}_k$. Существование и единственность решения системы (24) обеспечивает энергетическое равенство для $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$. Действительно, из 2-ой формулы Грина для $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ с учетом проекционных соотношений (14) и (15) следует энергетическое равенство

$$\sum_k \Gamma_k \left| \tilde{R}_k \right|^2 + \sum_j \gamma_j \left| \tilde{T}_j \right|^2 = |A|^2 \Gamma_{n_0}, \quad (25)$$

где суммируются только распространяющиеся гармоники: т.к. $\Gamma_k \geq 0$ и $\gamma_j \geq 0$, то при $|A| = 0$, очевидно, $\left| \tilde{R}_k \right| \equiv 0$, $\left| \tilde{T}_j \right| \equiv 0$, т.е. однородная задача имеет лишь тривиальное решение, откуда и следует единственность и существование решения.

Распишем подробнее равенство (16)

$$\alpha_{jk} = \int_0^d \psi_j(t, x) \varphi_k(x) dx = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{ad}} \int_0^d \cos \lambda_k \cdot e^{i \tilde{\lambda}_j(t)x} dx.$$

Рассмотрим два случая

1) $\tilde{\lambda}_j^2(t) - \lambda_k^2 \neq 0$, тогда

$$\alpha_{jk} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{ad}} \int_0^d \left[\cos \lambda_k x \cdot \cos \tilde{\lambda}_j(t)x + i \cos \lambda_k x \cdot \sin \tilde{\lambda}_j(t)x \right] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{ad}} \frac{\tilde{\lambda}_j(t)}{\tilde{\lambda}_j^2(t) - \lambda_k^2} \times \\
&\times \left[(-1)^k \sin d\tilde{\lambda}_j(t) + i \left(1 - (-1)^k \cos d\tilde{\lambda}_j(t) \right) \right] = \\
&= \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{ad}} \frac{\tilde{\lambda}_j(t)}{\tilde{\lambda}_j^2(t) - \lambda_k^2} i \left[1 - (-1)^k e^{id\tilde{\lambda}_j(t)} \right];
\end{aligned}$$

2) $\tilde{\lambda}_j^2(t) - \lambda_k^2 = 0$,

цепочка получения значения j -катое и результат подстановки в лямбда тогда $j = -\frac{t}{2\pi} \pm \frac{ka}{2d}$

$$\begin{aligned}
\alpha_{jk} &= \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{ad}} \int_0^d \cos \lambda_k x e^{i \frac{t+2\pi(-\frac{t}{2\pi} \pm \frac{ka}{2d})}{a} x} dx = \\
&= \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{ad}} \int_0^d \cos \lambda_k x e^{\pm i \frac{ka}{2d} x} dx,
\end{aligned}$$

если $k = 0$, то $\alpha_{j0} = \sqrt{d/a}$,

если $k \neq 0$, то $\alpha_{jk} = \sqrt{2/ad} \int_0^d \cos \lambda_k x (\cos \lambda_k x \pm i \sin \lambda_k x) dx = \sqrt{d/2a}$.

Объединяя эти случаи, получим

$$\alpha_{jk} = \sqrt{\frac{(1 + \delta_{0k})d}{2a}}.$$

Таким образом, получили расчетные формулы для вычисления α_{jk} :

$$\alpha_{jk} = \sqrt{\frac{(1 + \delta_{0k})d}{2a}}, \quad \text{если } \tilde{\lambda}_j^2(t) - \lambda_k^2 = 0,$$

$$\alpha_{jk} = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0k}}{ad}} \frac{\tilde{\lambda}_j(t)}{\tilde{\lambda}_j^2(t) - \lambda_k^2} i \left[1 - (-1)^k e^{id\tilde{\lambda}_j(t)} \right], \quad \text{в противном случае.}$$

Аналитическое представление элементов матрицы α_{jk} дает возможность организовать процесс вычисления элементов матрицы в формуле (24) с гарантированной точностью, что позволяет решить уравнение (24) с заданной точностью.

4 Результаты расчетов

Для проверки предложенного алгоритма и оценки точности полученных результатов были проведены следующие расчёты:

- при фиксированных t ($t = 0$, $t = 0.9\pi$) и $eps = 10^{-5}$ изменялось N от 2 до 30 : R_0 , T_0 (Рис. 2 - 5): R_2 , R_4 , R_{10} (Рис. 6);

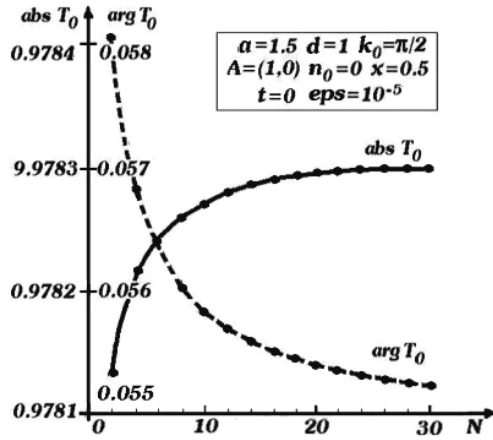


Рис. 2: Зависимость коэффициента прохождения $T_0(t)$ от N для $t = 0$.

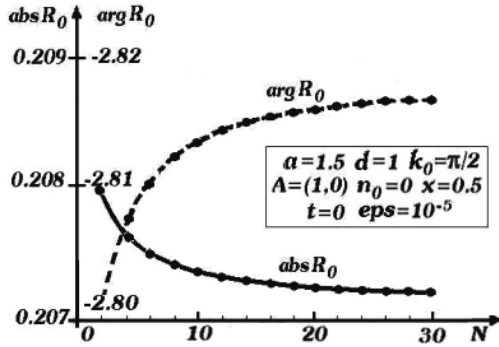


Рис. 3: Зависимость коэффициента отражения $R_0(t)$ от N для $t = 0$.

- при фиксированном $t = 0$, $N = 12$ изменялось eps от 10^{-1} до 10^{-7} и исследовалось поведение коэффициентов R_0 , T_0 , R_2 , R_4 , R_{10} .

Результаты расчётов показали, что уже для $N = 12$ и $eps = 10^{-5}$ достигается точность вычисления этих коэффициентов, как минимум, 10^{-4} . Поэтому для вычисления функции (5)

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t, x, z) dt$$

были выбраны следующие параметры: $N = 12$, $eps = 10^{-5}$. Точность вычисления интегралов была выбрана $eps = 10^{-3}$.

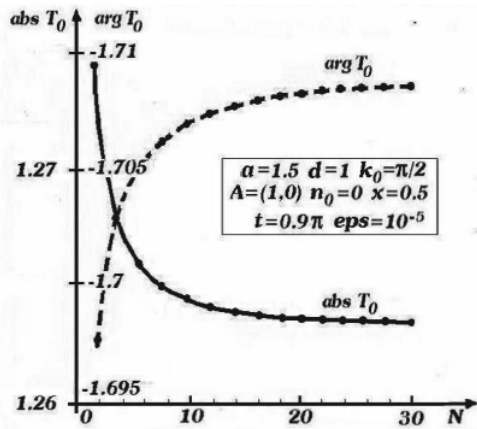


Рис. 4: Зависимость коэффициента прохождения $T_0(t)$ от N для $t = 0.9\pi$.

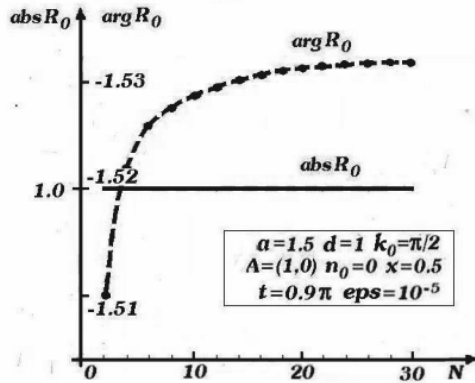


Рис. 5: Зависимость коэффициента отражения $R_0(t)$ от N для $t = 0.9\pi$.

Также было проведено исследование получаемого численного решения в плоскости $z = 0$ для проверки выполнения условий сопряжения на дырке и граничных условий на фланце. Расчёты проводились при $z = \pm 0.001$ для $N = 5, 10, 20$. Результаты показали, что условия в плоскости $z = 0$ в интегральном смысле выполняются.

В таблице 1, 2 приведены значения R_k , соответствующие распространяющимся гармоникам.

В таблице 1 для фиксированного $a/d = 1, 5$ и $x = kd/\pi$ для значений 0, 5; 1, 5; 4, 5.

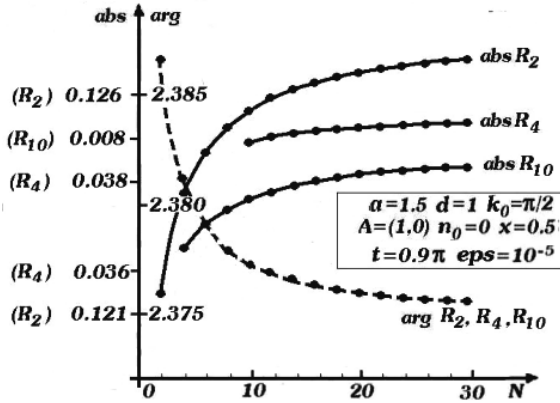


Рис. 6: Зависимость коэффициентов отражения $R_2(t)$, $R_4(t)$, $R_{10}(t)$ от N для $t = 0.9\pi$.

Таблица 1

$\varkappa = kd/\pi$	0,5	1,5	4,5
$ R_0 $	0,328	0,84	0,029
$ R_1 $	-	0,116	0,018
$ R_2 $	-	-	0,049
$ R_3 $	-	-	0,027
$ R_4 $	-	-	0,120

Таблица 2

a/d	1,5	2,0	4,5
$ R_0 $	0,0843	0,0751	0,0701
$ R_1 $	0,116	0,117	0,0602

В таблице 2 для фиксированного $\varkappa = 1,5$ и значений $a/d = 1, 5; 2; 4, 5$.

Расчет поля $u(x, z)$ вблизи границы $z = 0$ показывает, что при $z = \delta > 0$ и $d \leq x \leq a$ поле $u(x, z)$ удовлетворяет граничному условию $u(x, z) = 0$ при $z = 0$ с достаточной точностью. Поле в дальней зоне при $z > 0$ полностью определяется распространяющимися коэффициентами $T_j(t)$.

5 Заключение

В статье рассмотрен метод расчета поля в бесконечной решетке при возбуждении центрального волновода основной распространяющейся

волной. Получены значения коэффициентов распространяющихся волн в центральном волноводе и поле в свободном полупространстве.

Конфликт интересов

Отсутствует

Вклад авторов

А.С.Ильинский – постановка задачи, вывод формул, написание текста статьи. И.В.Дмитриева – разработка алгоритма, проведение расчетов, написание текста статьи. И.В.Бережная – построение графиков, написание текста статьи.

Список литературы

- [1] Дифракция волн на решетках / В.П. Шестопалов, Л.Н. Литвиненко, С.А. Масалов, В.Г. Сологуб. — Изд-во Харьковского ун-та, 1974.
- [2] *Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч.* Теория и анализ фазированных антенных решеток. — М.: Мир, 1974.
- [3] *Макеев И.А., Скобелев С.П.* Анализ и оптимизация решетки много-модовых плоских волноводов, возбуждаемых ТМ волнами, для формирования секторных парциальных диаграмм направленности // *Радиотехника и электроника*. — 2017. — Т. 62, № 11. — С. 1078–1085.
- [4] *Ordek S., Yamac Y.E., Kizilay A.* Grating lobe suppression using grid cover structures on horn arrays with linear and circular polarizations // *Microw. Opt. Technol. Lett.* — 2019. — Vol. 61, no. 11. — Pp. 2520–2526.
- [5] *Сидоров К.М., Скобелев С.П.* Фазированные антенные решетки связанных многомодовых волноводов гексагонального сечения с секторными диаграммами направленности // *Радиотехника*. — 2022. — № 4. — С. 42–49.
- [6] Metasurfaces integrated with a single-mode waveguide array for off-chip wavefront shaping / S. Chen, J. Huang, S. Yin et al. // *Opt. Express*. — 2023. — Vol. 31. — Pp. 15876–15887.
- [7] *Хелл Х., Мауэ А., Вестнфаль К.* Теория дифракции. — М.: Мир, 1974.
- [8] *Митра Ли.* Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974.

- [9] *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. — Изд-во Харьковского ун-та, 1974.
- [10] *Свешиников А. Г.* Принцип излучения // *ДАН СССР*. — 1950. — Т. 73, № 5. — С. 917—920.
- [11] *Ильинский А.С., Лебедева О.А.* Численный метод расчета плоских полубесконечных структур // *Вычислительные методы и программирование*. — 1982. — Т. XXXVI. — С. 155–164.
- [12] *Лидский В.Б.* Разложение по собственным функциям уравнений с периодическими коэффициентами // Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями II-го порядка / Под ред. Э.И. Титчмарш. — М.: Иностранная литература, 1961. — Т. 2. — С. 529–533.
- [13] *Ильинский А.С.* Плоская задача возбуждения прозрачной периодической структуры точечным источником // *Вычислительные методы и программирование*. — 1975. — Т. XXIV. — С. 220–235.
- [14] *Нефедов Е.И., Сивов А.Н.* Электродинамика периодических структур. — М.: Наука, 1977.
- [15] *Свешиников А. Г.* К обоснованию метода расчёта нерегулярных волноводов // *ЖВМ и МФ*. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 170–179.