А.А. Белолипецкий[1,2,3], А.А. Сычев[3]

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Введение

В работе предложена простая динамическая модель функционирования страховой компании со случайным ежегодным потоком доходов от вновь поступающих и уже действующих страховых полисов и случайным потоком убытков от предъявленных страховых исков. Предлагается нижняя оценка вероятности разорения за конечный период времени. При этом алгоритм вычисления этой оценки не требует больших временных затрат. В классической дискретной модели Крамера – Лундберга [1] исследуется процесс так называемого рискового резерва страховщика $U_n = u + cn - S_n$, где u начальный резерв, cn - объем собранных за n периодов детерминированных регулярных премий, а S_n - суммарные страховые выплаты. Предполагается, что $S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$, где W_i случайные величины (с.в.) выплат независимы и одинаково распределены. В рамках этой модели была получена нижняя оценка вероятности разорения компании на бесконечном промежутке времени $\psi(u) = e^{-Ru}$. Здесь R - поправочный коэффициент или коэффициент Лундберга. В дальнейшем эта модель усложнялась, например, была предложена модель Спарре – Андерсона [2]-[3]. В ней моменты T_i страховых выплат являлись случайными величинами. При этом процесс $\{T_i\}$ являлся процессом восстановления, то есть с.в. $\theta_i = T_i - T_{i-1}, i \geq 1$ считались независимыми и одинаково распределенными. Дальнейшие обобщения классической модели были связаны с отказом от детерминированности доходов, учетом факторов инфляции, возможности перестрахования. Не ставя целью обозреть обширный список работ по теории разорения, сошлемся лишь на литературу [4]-[5], в которой этот список представлен достаточно полно. Важное место занимают работы

[1] Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, abelolipet@mail.ru

[2] Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

[3] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), sychev.aa@phystech.edu

по двусторонним оценкам вероятности разорения [5]-[7]. Ссылки на работы, связанные с решением интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории разорения, можно найти в [8]-[9].

В данной статье представлена простая динамическая модель функционирования страховой компании со случайными потоками входящих однородных полисов и предъявляемых исков. Регулярные премии страхователей постоянны, а страховые выплаты детерминированы. Исследуется динамика первых трех моментов рискового резерва и на их основе предлагается нижняя оценка для вероятности не разорения к заданному моменту времени.

Описание и исследование модели

Пусть $N(\tau)$ - число страховых полисов, находящихся в портфеле страховщика на интервале времени $(\tau,\tau+1)$. Динамика объема страхового портфеля задается стохастическим уравнением

$$N(\tau+1)=N(\tau)+Y(\tau)-Z(\tau), N(0)=n_0. \qquad (1)$$

$Z(\tau)$- случайная величина (с.в.), имеющая смешанное пуассоновское распределение (число выбывших страхователей на интервале времени $(\tau,\tau+1)$ с выплатой им страховой суммы b) со случайным параметром,

$$\Lambda(\tau)=\lambda_c N(\tau), \lambda_c \in (0,1). \qquad (2)$$

$Y(\tau)$- с.в., имеющая пуассоновское распределение с параметром λ_p. Это число привлечённых страхователей на интервале времени $(\tau,\tau+1)$.

Найдем производящую функцию моментов (ПФМ) с.в. $N(\tau+1)$, как функцию ПФМ с.в. $N(\tau)$. Согласно (1) она равна

$$\begin{aligned} M_{N(\tau+1)}(t) &= E\left[\exp\left\{t\left(N(\tau)+Y(\tau)-Z(\tau)\right)\right\}\right]= \\ &= E\left[E\left[\exp\left\{t\left(N(\tau)+Y(\tau)-Z(\tau)\right)\right\}\middle|N(\tau)\right]\right]= \\ &= E\left[e^{tY(\tau)}\right]E\left[E\left[\exp\left\{t\left(N(\tau)-Z(\tau)\right)\right\}\middle|N(\tau)\right]\right]. \end{aligned} \qquad (3)$$

Последний переход обоснован независимостью случайных величин $Y(\tau)$ и $N(\tau)$. Но по определению пуассоновской величины $Y(\tau)$ значение

$$E\left[e^{tY(\tau)}\right]=M_{Y(\tau)}(t)=\exp\left\{\lambda_p(e^t-1)\right\}. \qquad (4)$$

Далее

$$\begin{aligned} E\left[E\left[\exp\left\{t\left(N(\tau)-Z(\tau)\right)\right\}\middle|N(\tau)\right]\right] &= E\left[E\left[e^{tN(\tau)+(-t)Z(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right]= \\ = E\left[E\left[e^{tN(\tau)}e^{(-t)Z(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right] &= E\left[e^{tN(\tau)}E\left[e^{(-t)Z(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right]. \end{aligned} \qquad (5)$$

Так как случайная величина $Z(\tau)$ имеет смешанное пуассоновское распределение со случайным параметром (2), то

$$E\left[e^{(-t)Z(\tau)}\middle|N(\tau)\right]=\exp\left\{\Lambda(\tau)\left(e^{-t}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lambda_c N(\tau)\left(e^{-t}-1\right)\right\}.$$

Тогда выражение (5) примет вид

$$E\left[\exp\left\{\left(t+\lambda_c\left(e^{-t}-1\right)\right)N(\tau)\right\}\right]=M_{N(\tau)}\left(t+\lambda_c\left(e^{-t}-1\right)\right).$$

Отсюда и из (3)-(5) получаем выражение для ПФМ

$$M_{N(\tau+1)}(t)=M_{Y(\tau)}(t)M_{N(\tau)}\left(t+\lambda_c\left(e^{-t}-1\right)\right)=$$
$$=\exp\left\{\lambda_p\left(e^{t}-1\right)\right\}M_{N(\tau)}\left(t+\lambda_c\left(e^{-t}-1\right)\right). \tag{6}$$

Обозначим $\beta(t)=t+\lambda_c\left(e^{-t}-1\right)$, $n(\tau)=E\left[N(\tau)\right]$. Очевидно, что $\beta(0)=0, \beta'(0)=1-\lambda_c, \beta''(0)=\lambda_c, \beta'''(0)=-\lambda_c$. Используем формулы $M_X(0)=1$ и $M_X^{(k)}(0)=E\left[X^k\right]$.В частности, $M'_X(0)=E\left[X\right]=\frac{d}{dt}\ln\left(M_X(t)\right)\big|_{t=0}$. Беря производные от логарифма левой и правой части уравнения (6), получим

$$\frac{d}{dt}\ln\left(M_{N(\tau+1)}(t)\right)=\lambda_p e^{t}+\frac{d}{dt}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\beta(t)\right)\right). \tag{7}$$

Следовательно,

$E[N(\tau+1)]=\frac{d}{dt}\ln\left(M_{N(\tau+1)}(t)\right)\big|_{t=0}=\lambda_p+\frac{d}{dt}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\beta(t)\right)\right)\big|_{t=0}$. Согласно формуле (П6) приложения, в которой $N=N(\tau), \xi(t)=\beta(t)$, второе слагаемое в правой части равно $a_1 n(\tau)$, где $a_1=\beta'(0)=1-\lambda_c$. Отсюда

$E[N(\tau+1)]=\frac{d}{dt}\ln\left(M_{N(\tau+1)}(t)\right)\big|_{t=0}=\lambda_p+\left(1-\lambda_c\right)n(\tau)$, или

$$n(\tau+1)=\mu n(\tau)+\lambda_p, n(0)=n_0, \tag{8}$$

где $\mu=1-\lambda_c\in(0,1)$.

Решением уравнения (8) является функция

$$n(\tau)=\mu^{\tau}n_0+\lambda_p\frac{1-\mu^{\tau}}{1-\mu}=\frac{\lambda_p}{\lambda_c}+\mu^{\tau}\left(n_0-\frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что при $n_0>\frac{\lambda_p}{\lambda_c}$ функция $n(\tau)$ монотонно убывающая, а при $n_0<\frac{\lambda_p}{\lambda_c}$ монотонно возрастающая. Причём, $n(\tau)\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\frac{\lambda_p}{\lambda_c}$.

Обозначим дисперсию $d(\tau)=\mathbf{D}[N(\tau)]$, и для произвольной случайной величины X используем известные формулы $\mathbf{D}[X]=M''_X(0)-\left(M'_X(0)\right)^2\equiv\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_X(t)\right)\big|_{t=0}$.

Прологарифмируем уравнение (6), и возьмем вторые производные по t от левой и правой части, используя (7). Получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau+1)}\left(t\right)\right)=\lambda_p e^t+\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\beta(t)\right)\right). \qquad (10)$$

Следовательно,

$$\mathbf{D}(N(\tau+1))=\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau+1)}\left(t\right)\right)\Big|_{t=0}=\lambda_p+\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\beta\left(t\right)\right)\right)\Big|_{t=0}. \qquad (11)$$

Для вычисления второго слагаемого в правой части используем формулу (П10) приложения, в которой $N=N(\tau),\xi(t)=\beta(t)$.

$\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\beta\left(t\right)\right)\right)\Big|_{t=0}=a_1^2 d(\tau)+a_2 n(\tau)$, где $a_1=\beta'(0)=\mu, a_2=\beta''(0)=\lambda_c$.

Отсюда и из (11) следует, что

$$d(\tau+1)=\lambda_p+d(\tau)\mu^2+n(\tau)\lambda_c,\ d(0)=\mathbf{D}[n_0]=0. \qquad (12)$$

С учетом (8) это уравнение примет вид

$d(\tau+1)=\mu^2 d(\tau)+h(\tau)$, где $h(\tau)=\lambda_p+\lambda_c n(\tau)=2\lambda_p+\mu^\tau\left(\lambda_c n_0-\lambda_p\right)$.

Поскольку $d(0)=0$, то

$d(1)=h(0)=\lambda_p+\lambda_c n_0,\ d(2)=\mu^2 d(1)+h(1)=\mu^2 h(0)+h(1)$,

$d(3)=\mu^2 d(2)+h(2)=\mu^4 h(0)+\mu^2 h(1)+h(2),\ldots$

$d(\tau)=\sum_{j=1}^{\tau}\mu^{2(j-1)}h(\tau-j)=2\lambda_p\frac{1-\mu^{2\tau}}{1-\mu^2}+(\lambda_c n_0-\lambda_p)\sum_{j=1}^{\tau}\mu^{2(j-1)+\tau-j}$. Сумма в правой части равна $\sum_{j=1}^{\tau}\mu^{\tau+j-2}=\mu^{\tau-1}\sum_{j=1}^{\tau}\mu^{j-1}=\mu^{\tau-1}\frac{1-\mu^\tau}{1-\mu}$. То есть

$$d(\tau)=2\lambda_p\frac{1-\mu^{2\tau}}{1-\mu^2}+(\lambda_c n_0-\lambda_p)\mu^{\tau-1}\frac{1-\mu^\tau}{1-\mu},\tau=1,2,...;d(0)=0. \qquad (13)$$

Найдем динамику третьего центрального момента с.в. $N(\tau)$.

Обозначим $l(\tau)=E\left[\left(N(\tau)-n(\tau)\right)^3\right]$. Известно, что для произвольной случайной величины X справедливо равенство $E\left[\left(X-E(X)\right)^3\right]=\frac{d^3}{dt^3}\ln\left(M_X\left(t\right)\right)\Big|_{t=0}$. Продифференцируем равенство (10) и положим в нем $t=0$. С учетом только что сказанного получим

$$l(\tau+1)=\frac{d^3}{dt^3}\ln\left(M_{N(\tau+1)}\left(t\right)\right)\Big|_{t=0}=\lambda_p+\frac{d^3}{dt^3}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\beta\left(t\right)\right)\right)\Big|_{t=0}. \qquad (14)$$

Для вычисления второго слагаемого в правой части воспользуемся формулой (П20) приложения, в которой $N=N(\tau),\xi(t)=\beta(t),a_3=\beta'''(0)=-\lambda_c$. Теперь из формулы (14) и естественного условия $l(0)=0$ следует задача Коши для $l(\tau)$:

$$l(\tau+1)=\lambda_p+(1-\lambda_c)^3 l(\tau)+3\lambda_c(1-\lambda_c)d(\tau)-\lambda_c n(\tau).\ l(0)=0. \qquad (15)$$

Изучим динамику первых трёх моментов с.в. *рискового резерва* $U(\tau)$. Под рисковым резервом в страховании понимается величина капитала, имеющегося к моменту τ, плюс собранные на интервале $(\tau, \tau+1)$ премии за вычетом страховых сумм по искам, выплаченным на этом же интервале. Его динамика зададим стохастическим уравнением

$$U(\tau+1) = U(\tau) + pN(\tau) - bZ(\tau),\ U(0) = u_0. \tag{16}$$

Здесь p, b - регулярная премия, вносимая страхователями, и страховое возмещение соответственно. Для простоты считаем эти величины постоянными. Найдем связь между ПФМ для случайных величин $U(\tau+1)$ и $U(\tau)$. Из (16) вытекает, что

$$\begin{aligned} M_{U(\tau+1)}(t) &= E\left[e^{tU(\tau+1)}\right] = E\left[e^{t(U(\tau)+pN(\tau)-bZ(\tau))}\right] = \\ &= E\left[E\left[e^{t(U(\tau)+pN(\tau)-bZ(\tau))}\middle|N(\tau)\right]\right] = E\left[E\left[e^{tU(\tau)}e^{tpN(\tau)}e^{-btZ(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Согласно (16) $U(\tau)$ не зависит от $N(\tau)$. Поэтому $E\left[e^{tU(\tau)}\middle|N(\tau)\right] = e^{tU(\tau)}$.

Очевидно, что и $E\left[e^{tpN(\tau)}\middle|N(\tau)\right] = e^{tpN(\tau)}$. Следовательно,

$$E\left[E\left[e^{tU(\tau)}e^{tpN(\tau)}e^{-btZ(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right] = E\left[e^{tU(\tau)}e^{tpN(\tau)}E\left[e^{-btZ(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right] =$$

$$E\left[e^{tU(\tau)}\right]E\left[e^{tpN(\tau)}E\left[e^{-btZ(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right] = M_{U(\tau)}(t)E\left[e^{tpN(\tau)}E\left[e^{-btZ(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right]. \tag{18}$$

Поскольку $Z(\tau)$ смешанный пуассоновский процесс с параметром $\Lambda(\tau) = \lambda_c N(\tau)$, то $E\left[e^{-btZ(\tau)}\middle|N(\tau)\right] = \exp\left\{\lambda_c N(\tau)\left(e^{-bt}-1\right)\right\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} &M_{U(\tau)}(t)E\left[e^{tpN(\tau)}E\left[e^{-btZ(\tau)}\middle|N(\tau)\right]\right] = \\ &= M_{U(\tau)}(t)E\left[\exp\left\{\left(tp+\lambda_c\left(e^{-bt}-1\right)\right)N(\tau)\right\}\right] = \\ &= M_{U(\tau)}(t)M_{N(\tau)}\left(tp+\lambda_c\left(e^{-bt}-1\right)\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь из (17)-(19) находим искомую связь

$$M_{U(\tau+1)}(t) = M_{U(\tau)}(t)M_{N(\tau)}\left(tp+\lambda_c\left(e^{-bt}-1\right)\right). \tag{20}$$

Обозначим $u(\tau) = E[U(\tau)]$. Как и ранее воспользуемся известными формулами

$$u(\tau+1) = \frac{d}{dt}\ln M_{U(\tau+1)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{21}$$

Прологарифмируем соотношение (20) и продифференцируем полученное равенство

$$\frac{d}{dt}\ln\left(M_{U(\tau+1)}(t)\right) = \frac{d}{dt}\ln\left(M_{U(\tau)}(t)\right) + \frac{d}{dt}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(pt+\lambda_c\left(e^{-bt}-1\right)\right)\right). \tag{22}$$

Обозначим

$$\alpha(t) = pt + \lambda_c\left(e^{-bt} - 1\right). \tag{23}$$

Очевидно, что

$$\alpha(0) = 0, \alpha'(0) = p - \lambda_c b, \alpha''(0) = \lambda_c b^2, \alpha'''(0) = -\lambda_c b^3. \tag{24}$$

Положим в (22) $t = 0$ и, используя (21), получим

$$u(\tau+1) = u(\tau) + \frac{d}{dt}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\alpha(t)\right)\right)\Big|_{t=0}. \tag{25}$$

Используем формулы (П5) и (П6) приложения, в которых $N = N(\tau), \xi(t) = \alpha(t)$. Тогда из (24) имеем $\frac{d}{dt}\ln\left[M_N\left(\alpha(t)\right)\right]\Big|_{t=o} = M_N'\left(0\right)\alpha'(0) = n(\tau)a_1$, где согласно (24) $a_1 = p - \lambda_c b$. Подставив полученные выражения в (25), окончательно получим линейное неоднородное конечно-разностное уравнение с начальным условием $u(0) = u_0$

$$u(\tau+1) = u(\tau) + (p - \lambda_c b)n(\tau). \tag{26}$$

Здесь u_0- начальное значение капитала (страхового резерва) компании. Решением уравнения (26) является функция

$$u(\tau) = u_0 + \sum_{j=0}^{\tau-1} g(j), \tau = 1, 2, \ldots, \text{ где} \tag{27}$$

$$g(j) = (p - \lambda_c b)n(j) = (p - \lambda_c b)\left[\frac{\lambda_p}{\lambda_c} + \mu^j\left(n_0 - \frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right)\right]. \tag{28}$$

Согласно (27)-(28) сумма

$$\sum_{j=0}^{\tau-1} g(j) = (p - \lambda_c b)\sum_{j=0}^{\tau-1} n(j) = (p - \lambda_c b)\sum_{j=0}^{\tau-1}\left[\frac{\lambda_p}{\lambda_c} + \mu^j\left(n_0 - \frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right)\right] =$$

$$= (p - \lambda_c b)\frac{\lambda_p}{\lambda_c}\tau + (p - \lambda_c b)\left(n_0 - \frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right)\frac{1 - \mu^\tau}{1 - \mu}. \tag{29}$$

Отсюда и из (27) получаем вид искомой функции

$$u(\tau) = u_0 + (p - \lambda_c b)\frac{\lambda_p}{\lambda_c}\tau + (p - \lambda_c b)\left(n_0 - \frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right)\frac{1 - \mu^\tau}{1 - \mu}. \tag{30}$$

Предположим, что

$$p - \lambda_c b > 0. \tag{31}$$

(А) Если $n_0 > \frac{\lambda_p}{\lambda_c}$, то из (12), (13) следует, что $u(\tau)$ монотонно возрастает от значения u_0. При этом для достаточно больших τ ведет себя линейно по τ.

(Б) Если $n_0 < \dfrac{\lambda_p}{\lambda_c}$, то третье слагаемое в (30) убывает от нуля до $-(p-\lambda_c b)\left(\dfrac{\lambda_p}{\lambda_c}-n_0\right)\dfrac{1}{1-\mu} = -(p-\lambda_c b)\left(\dfrac{\lambda_p}{\lambda_c}-n_0\right)\dfrac{1}{\lambda_c}$. Поэтому

$$u(\tau) > u_0 + (p-\lambda_c b)\frac{\lambda_p}{\lambda_c}\tau - (p-\lambda_c b)\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_c}-n_0\right)\frac{1}{\lambda_c} >$$

$$> u_0 + (p-\lambda_c b)\frac{\lambda_p}{\lambda_c} - (p-\lambda_c b)\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_c}-n_0\right)\frac{1}{\lambda_c}.$$

Отсюда следует, что если полученная нижняя оценка

$$u_0 + (p-\lambda_c b)\frac{\lambda_p}{\lambda_c} - (p-\lambda_c b)\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_c}-n_0\right)\frac{1}{\lambda_c} > 0, \tag{32}$$

то $u(\tau) > 0$. Итак, если $n_0 > \dfrac{\lambda_p}{\lambda_c}$, то $u(\tau) > 0$, если же $n_0 < \dfrac{\lambda_p}{\lambda_c}$, то для положительности функции $u(\tau)$ достаточно, например, выполнение условия (32).

Для дисперсии с.в. $U(\tau)$ введем обозначение $D(\tau) = \mathbf{D}[U(\tau)]$. Найдем связь между $D(\tau+1)$ и $D(\tau)$. Так как

$$D(\tau+1) = \frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{U(\tau+1)}(t)\right)\Big|_{t=0}, \tag{33}$$

то продифференцируем соотношение (22). Имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{U(\tau+1)}(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{U(\tau)}(t)\right) + \frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\alpha(t)\right)\right). \tag{34}$$

Положим в (34) $t=0$. Согласно (33) получим соотношение

$$D(\tau+1) = D(\tau) + \frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\alpha(t)\right)\right)\Big|_{t=0}. \tag{35}$$

Второе слагаемое в (35) согласно формулам (П10) приложения и (24) имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\alpha(t)\right)\right)\Big|_{t=0} = \left(\alpha'(0)\right)^2 d(\tau) + \alpha''(0)n(\tau) =$$

$$= \left(p-\lambda_c b\right)^2 d(\tau) + \lambda_c b^2 n(\tau).$$

Отсюда и из (35) получаем для $D(\tau)$ линейное неоднородное конечно-разностное уравнение

$$D(\tau+1) = D(\tau) + \left(p-\lambda_c b\right)^2 d(\tau) + \lambda_c b^2 n(\tau) \tag{36}$$

с начальным условием

$$D(0) = \mathbf{D}[u_0] = 0. \tag{37}$$

Из (36)-(37) следует, что $D(1) = \lambda_c b^2 n_0$. Пусть $\tau \ge 2$. Тогда решение этого уравнения можно записать в виде

$$D(\tau) = D(1) + \sum_{j=1}^{\tau-1} R(j), \tau = 2,3,...; D(0) = 0\text{, где} \tag{38}$$

$$R(j) = b^2 \lambda_c n(j) + (p - \lambda_c b)^2 d(j),\ j \ge 1. \tag{39}$$

Следовательно,

$$D(\tau) = \lambda_c n_0 b^2 + \sum_{j=1}^{\tau-1} R(j) = \lambda_c n_0 b^2 + b^2 \lambda_c \sum_{j=1}^{\tau-1} n(j) + (p - \lambda_c b)^2 \sum_{j=1}^{\tau-1} d(j). \tag{40}$$

Согласно (9)

$$\sum_{j=1}^{\tau-1} n(j) = \frac{\lambda_p}{\lambda_c}(\tau - 1) + \mu\left(n_0 - \frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right)\frac{1-\mu^{\tau-1}}{1-\mu}. \tag{41}$$

Используя (13), найдем

$$\sum_{j=1}^{\tau-1} d(j) = 2\lambda_p \sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1-\mu^{2j}}{1-\mu^2} + (\lambda_c n_0 - \lambda_p) \sum_{j=1}^{\tau-1} \mu^{j-1} \frac{1-\mu^j}{1-\mu} =$$

$$= \frac{2\lambda_p}{1-\mu^2}\left[(\tau-1) - \mu^2 \frac{1-\mu^{2\tau-2}}{1-\mu^2}\right] + \frac{\lambda_c n_0 - \lambda_p}{1-\mu}\left[\frac{1-\mu^{\tau-1}}{1-\mu} - \mu \frac{1-\mu^{2\tau-2}}{1-\mu^2}\right]. \tag{42}$$

Итак, $D(0) = 0, D(1) = \lambda_c n_0 b^2$. Для всех $\tau \ge 2$ значения $D(\tau)$ найдем, подставив в (40) выражения (41), (42).

$$D(\tau) = \lambda_c b^2 \left[n_0 + \frac{\lambda_p}{\lambda_c}(\tau-1) + \mu\left(n_0 - \frac{\lambda_p}{\lambda_c}\right)\frac{1-\mu^{\tau-1}}{1-\mu}\right] +$$

$$+ \frac{(\lambda_c n_0 - \lambda_p)(p - \lambda_c b)^2}{1-\mu}\left[\frac{1-\mu^{\tau-1}}{1-\mu} - \mu \frac{1-\mu^{2\tau-2}}{1-\mu^2}\right]. \tag{43}$$

Найдем теперь уравнение динамики для третьего центрального момента

$$L(\tau) = E\left[\left(U(\tau) - u(\tau)\right)^3\right]. \tag{44}$$

Поскольку для произвольной случайной величины X справедливо равенство $E\left[\left(X - E(X)\right)^3\right] = \frac{d^3}{dt^3}\ln\left(M_X(t)\right)\big|_{t=0}$, то продифференцировав равенство (34) и положив в нем $t = 0$, с учетом только что сказанного получим

$$L(\tau+1) = \frac{d^3}{dt^3}\ln\left(M_{U(\tau+1)}(t)\right)\big|_{t=0} = L(\tau) + \frac{d^3}{dt^3}\ln\left(M_{N(\tau)}\left(\alpha(t)\right)\right)\big|_{t=0}. \tag{45}$$

Для вычисления второго слагаемого в правой части воспользуемся формулой (П20) приложения, в которой $N = N(\tau), \xi(t) = \alpha(t)$. Тогда второе слагаемое в формуле (45) с учетом равенств (24) примет вид

$$\frac{d^3}{dt^3}\ln\left[M_{N(\tau)}\left(\alpha(t)\right)\right]\Big|_{t=0} = a_1^3 l(\tau) + 3a_1 a_2 d(\tau) + a_3 n(\tau). \quad (46)$$

Подставив (46) в (45), получим для $L(\tau)$ линейное неоднородное конечно-разностное уравнение

$L(\tau+1) = L(\tau) + a_1^3 l(\tau) + 3a_1 a_2 d(\tau) + a_3 n(\tau)$ с начальным условием $L(0) = 0$.

Используем равенства

$a_1 = \alpha'(0) = p - \lambda_c b, a_2 = \alpha''(0) = \lambda_c b^2, a_3 = \alpha'''(0) = -\lambda_c b^3$.

Тогда окончательно получаем

$$L(\tau+1) = L(\tau) + (p - \lambda_c b)^3 l(\tau) + 3\lambda_c b^2 (p - \lambda_c b) d(\tau) - \lambda_c n(\tau) b^3,\ L(0) = 0. \quad (47)$$

Значения $n(\tau), d(\tau), l(\tau)$ вычисляются либо по рекуррентным формулам (8), (12), (15) соответственно, либо, для $n(\tau), d(\tau)$, по формулам (9), (13).

Оценка вероятности не разорения

Оценим вероятность того, что ни в один из периодов отрезка $[0, T]$ значение рискового резерва не опустится ниже нуля. Последнее условие запишем как

$$\mathbf{P}(T) = P\left(U(1) \geq 0, U(2) \geq 0, ..., U(T) \geq 0\right). \quad (48)$$

Перепишем (48) в виде

$$\mathbf{P}(T) = P\left(U(T) \geq 0 \middle| U(1) \geq 0, U(2) \geq 0, ..., U(T-1) \geq 0\right) \times$$
$$\times P\left(U(1) \geq 0, U(2) \geq 0, ..., U(T-1) \geq 0\right) =$$
$$= P\left(U(T) \geq 0 \middle| U(1) \geq 0, U(2) \geq 0, ..., U(T-1) \geq 0\right) \mathbf{P}(T-1).$$

Для двух событий A, B очевидно неравенство $P(A) = P\left(A \middle| B\right) P(B) \leq P\left(A \middle| B\right)$. Поэтому $P\left(U(T) \geq 0 \middle| U(1) \geq 0, U(2) \geq 0, ..., U(T-1) \geq 0\right) \geq P\left(U(T) \geq 0\right)$, или $\mathbf{P}(T) \geq P\left(U(T) \geq 0\right) \mathbf{P}(T-1)$. Продолжая это неравенство, получим оценку

$$\mathbf{P}(T) \geq P\left(U(T) \geq 0\right) \cdot P\left(U(T-1) \geq 0\right) \cdot ... \cdot P\left(U(1) \geq 0\right).$$

Произведение

$$\mathbf{P}^*(T) = P\left(U(T) > 0\right) \cdot P\left(U(T-1) > 0\right) \cdot ... \cdot P\left(U(1) > 0\right) \quad (49)$$

является нижней оценкой вероятности не разорения компании на отрезке времени $[0, T]$.

Оценим компоненты произведения в правой части (49).

1. Воспользуемся гауссовой аппроксимацией.

$$P(U(\tau)\le 0)=P\left(\frac{U(\tau)-E[U(\tau)]}{\sqrt{\mathbf{D}[U(\tau)]}}\le -\frac{E[U(\tau)]}{\sqrt{\mathbf{D}[U(\tau)]}}\right)\approx \Phi\left(-\frac{E[U(\tau)]}{\sqrt{\mathbf{D}[U(\tau)]}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}^*(T)=\prod_{\tau=1}^{T}\left[1-\Phi\left(-\frac{E[U(\tau)]}{\sqrt{\mathbf{D}[U(\tau)]}}\right)\right]=\prod_{\tau=1}^{T}\left[1-\Phi\left(-\frac{u(\tau)}{\sqrt{D(\tau)}}\right)\right]. \qquad (50)$$

Здесь $\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ - интеграл ошибок.

2. Расчеты, проведенные на ряде примеров, показали, что для с.в. $U(\tau)$ величина $L(\tau)<0$, что означает наличие левого «тяжелого хвоста» у функции плотности распределения. В этом случае можно в качестве функции плотности распределения вероятности $f(x)$ с.в. $U(\tau)$ выбрать «зеркальное» гамма-распределение со сдвигом Последнее означает зеркальное отражение графика гамма - распределения относительно оси ординат со сдвигом вправо на $x_0>0$. Тогда функция плотности вероятности запишется как

$$f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(x_0-x\right)^{\beta-1}e^{-\beta(x_0-x)},\ x\le x_0 .$$

Параметры $\alpha(\tau),\beta(\tau),x_0(\tau)$ такого гамма - распределения подберем из условия совпадения первых трех моментов этого распределения с соответствующими моментами с.в. $U(\tau)$, то есть, с $u(\tau),D(\tau),L(\tau)$. Это приводит к трем равенствам

$$u(\tau)=x_0(\tau)-\frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)},\ D(\tau)=\frac{\alpha(\tau)}{\beta^2(\tau)},\ L(\tau)=-\frac{2\alpha(\tau)}{\beta^3(\tau)}.$$

Разрешив эту систему уравнений, мы получим выражения для искомых параметров

$$\beta(\tau)=-\frac{2D(\tau)}{L(\tau)},\ \alpha(\tau)=\frac{4D^3(\tau)}{L^2(\tau)},\ x_0(\tau)=u(\tau)-\frac{2D^2(\tau)}{L(\tau)}. \qquad (51)$$

Так как $L(\tau)<0$, то параметр $\beta(\tau)$ положителен. Функция распределения вероятностей с.в. $U(\tau)$ примет вид

$$F(x,\tau)=P(U(\tau)\le x)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\left(\beta(\tau)\right)^{\alpha(\tau)}(\tau)}{\Gamma(\alpha(\tau))}\left(x_0(\tau)-y\right)^{\alpha(\tau)-1}e^{-\beta(\tau)(x_0(\tau)-y)}dy,\ x\le x_0(\tau),\\ 1,\ x\ge x_0(\tau).\end{cases}$$

Введем новую переменную $z=\beta(\tau)\left(x_0-y\right)$. Тогда верхняя формула запишется как

$$F(x,\tau)=P(U(\tau)\le x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha(\tau))}\displaystyle\int\limits_{\beta(\tau)(x_0(\tau)-x)}^{\infty} z^{\alpha(\tau)-1}e^{-z}dz,\ x\le x_0(\tau),\\ 1,\ x=x_0(\tau).\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$P(U(\tau)\ge x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha(\tau))}\int\limits_{0}^{\beta(\tau)(x_0(\tau)-x)} z^{\alpha(\tau)-1}e^{-z}dz,\ x\le x_0(\tau)\text{, в частности,}$$

$$P(U(\tau)\ge 0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha(\tau))}\int\limits_{0}^{\beta(\tau)x_0(\tau)} z^{\alpha(\tau)-1}e^{-z}dz\,. \qquad (52)$$

Известно, что при больших значениях α гамма – распределение можно аппроксимировать нормальным распределением, что определяет преимущество приближения (50) над приближением (52).

Численный пример

Сравним нижние оценки $P^*(T)$ вероятности не разорения, вычисленные по формуле (50), и вероятности не разорения $P(T)$, полученные в результате имитационного моделирования. Для имитационного моделирования разорения страховой компании использовался язык программирования Python 3.7. Пуассоновские случайные величины реализованы с помощью пакета “poisson” из “scipy.stats”.

Зададим следующие значения параметров: страховые выплаты $b=1$, начальный капитал $u_0=100$, регулярные премии $p=0.04715$, начальный объем портфеля $n_0=1000$, $\lambda_c=0.05$, $\lambda_p=53.022$, $\zeta=n_0\lambda_c/\lambda_p$ =0.943.

Нижняя оценка $P^*(T)$ вероятности не разорения, вычисленная по формуле (50), и вероятность не разорения $P(T)$, полученная в результате имитационного моделирования, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

T	1	2	3	4	5	6	7	8
$P^*(T)$ в %	99.99	99.98	99.97	99.96	99.95	99.94	99.93	99.92
$P(T)$ в %	100	100	100	100	100	100	100	99.98

T	9	10	11	12	13	14	15
$P^*(T)$ в %	99.87	99.80	99.75	99.34	98.51	97.31	95.32
$P(T)$ в %	99.97	99.92	99.76	99.57	99.22	98.69	97.79

Приложение

Рассмотрим с.в. N и ее п.ф.м. $M_N\left(\xi(t)\right)$, где аргумент $\xi(t)$ является трижды непрерывно дифференцируемой функцией, причем $\xi(0)=0$. Введем обозначения

$$M'_N\left(\xi\right)=\frac{d}{d\xi}M_N\left(\xi\right), M''_N\left(\xi\right)=\frac{d^2}{d\xi^2}M_N\left(\xi\right), M'''_N\left(\xi\right)=\frac{d^3}{d\xi^3}M_N\left(\xi\right).$$

Математическое ожидание, дисперсию и третий центральный момент с.в. N обозначим n,d,l соответственно. Известно, что

$$M_N(0)=1, n=E\left[N\right]=M'_N(0), E\left[N^2\right]=M''_N(0), E\left[N^3\right]=M'''_N(0). \quad (\Pi 1)$$

Поскольку

$$d=\mathbf{D}\left[N\right]=E\left[N^2\right]-n^2, l=E\left[\left(N-E[N]\right)^3\right]=E\left[N^3\right]-3E\left[N^2\right]n+2n^3, (\Pi 2)$$

то

$$E\left[N^2\right]=d+n^2, E\left[N^3\right]=l+3dn+n^3. \quad (\Pi 3)$$

Обозначим

$$\xi'(0)=a_1, \xi''(0)=a_2, \xi'''(0)=a_3. \quad (\Pi 4)$$

А) Вычислим

$$\frac{d}{dt}\ln\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]=\frac{M'_N\left(\xi\right)\xi'(t)}{M_N\left(\xi(t)\right)}. \quad (\Pi 5)$$

Отсюда и из (П1) находим, что

$$\frac{d}{dt}\ln\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]\Big|_{t=o}=M'_N\left(0\right)\xi'(0)=a_1 n. \quad (\Pi 6)$$

Б) Из (П5) находим

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]=\frac{M_N\left(\xi(t)\right)\Psi_1(t)-\Psi_2(t)}{\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]^2}, \text{ где} \quad (\Pi 7)$$

$$\Psi_1(t)=M''_N\left(\xi\right)\left(\xi'(t)\right)^2+M'_N\left(\xi\right)\xi''(t), \quad (\Pi 8)$$

$$\Psi_2(t)=\left(M'_N\left(\xi\right)\xi'(t)\right)^2. \quad (\Pi 9)$$

$$\Psi_1(0)=M''_N\left(0\right)\left(\xi'(0)\right)^2+M'_N\left(0\right)\xi''(0)=(d+n^2)a_1^2+na_2,$$

$$\Psi_2(0)=\left(M'_N\left(0\right)\xi'(0)\right)^2=(na_1)^2.$$

Из (П1), (П2), (П4), (П7) - (П9) получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]\Big|_{t=0}=\left\{M''_N\left(0\right)a_1^2+M'_N\left(0\right)a_2\right\}-\left[M'_N\left(0\right)a_1\right]^2=$$

$$=a_1^2\mathbf{D}[N]+a_2E[N]=a_1^2 d+a_2 n. \quad (\Pi 10)$$

В) Третья производная

$$\frac{d^3}{dt^3}\ln\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]=\Theta_1(t)-\Theta_2(t)\text{, где} \qquad (\text{П11})$$

$$\Theta_1(t)=\frac{\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]^2\frac{d}{dt}\left[M_N\left(\xi(t)\right)\Psi_1(t)-\Psi_2(t)\right]}{\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]^4},$$

$$\Theta_2(t)=\frac{2M_N\left(\xi(t)\right)M_N'\left(\xi\right)\xi'(t)\left[M_N\left(\xi(t)\right)\Psi_1(t)-\Psi_2(t)\right]}{\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]^4}. \qquad (\text{П12})$$

Отсюда и из (П1), (П2), (П4) следует, что

$$\Theta_2(0)=2a_1E[N]\left(a_1^2d+a_2n\right)=2a_1^3nd+2a_1a_2n^2. \qquad (\text{П13})$$

Чтобы вычислить $\Theta_1(0)$ найдем сначала

$$\frac{d}{dt}M_N\left(\xi(t)\right)\Psi_1(t)=M_N'\left(\xi\right)\xi'(t)\Psi_1(t)+M_N\left(\xi(t)\right)\frac{d}{dt}\Psi_1(t).$$

(П14)

$$\frac{d}{dt}\Psi_1(t)=\frac{d}{dt}\left[M_N''\left(\xi\right)\left(\xi'(t)\right)^2+M_N'\left(\xi\right)\xi''(t)\right]=$$

$$=M_N'''\left(\xi\right)\left(\xi'(t)\right)^3+2M_N''\left(\xi\right)\xi'(t)\xi''(t)+M_N''\left(\xi\right)\xi'(t)\xi''(t)+$$
$$+M_N'\left(\xi\right)\xi'''(t)=M_N'''\left(\xi\right)\left(\xi'(t)\right)^3+3M_N''\left(\xi\right)\xi'(t)\xi''(t)+M_N'\left(\xi\right)\xi'''(t) \qquad (\text{П15})$$

Подставив (П15) в (П14), получим

$$\frac{d}{dt}M_N\left(\xi(t)\right)\Psi_1(t)=M_N'\left(\xi\right)\xi'(t)\Psi_1(t)+$$
$$+M_N\left(\xi(t)\right)\left[M_N'''\left(\xi\right)\left(\xi'(t)\right)^3+3M_N''\left(\xi\right)\xi'(t)\xi''(t)+M_N'\left(\xi\right)\xi'''(t)\right]. \qquad (\text{П16})$$

При $t=0$ из (П1) - (П4) и (П16) следует

$$\frac{d}{dt}M_N\left(\xi(t)\right)\Psi_1(t)\Big|_{t=0}=a_1^3E[N^3]+3a_1a_2E[N^2]+a_3E[N]+$$
$$+a_1a_2n^2+n^3a_1^3+nda_1^3=a_1^3\left(l+4nd+2n^3\right)+a_1a_2(3d+4n^2)+a_3n. \qquad (\text{П17})$$

Найдем теперь

$$\frac{d}{dt}\Psi_2(t)=\frac{d}{dt}\left(M_N'\left(\xi\right)\xi'(t)\right)^2=$$
$$=2M_N'\left(\xi\right)\xi'(t)\left[M_N''\left(\xi\right)\left(\xi'(t)\right)^2+M_N'\left(\xi\right)\xi''(t)\right]. \qquad (\text{П18})$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\Psi_2(t)\Big|_{t=0}=2a_1E[N]\left[a_1^2E[N^2]+a_2E[N]\right]=2a_1n\left[a_1^2\left(d+n^2\right)+a_2n\right]=$$

$$= 2a_1^3\left(nd + n^3\right) + 2a_1a_2n^2. \qquad (П19)$$

Подставим (П16), (П18) в (П12) и используем (П17), (П19) получим

$\Theta_1(0) = a_1^3\left(l + 2dn\right) + a_1a_2(3d + 2n^2) + a_3n$.

Отсюда из (П13) и (П11) заключаем, что

$$\frac{d^3}{dt^3}\ln\left[M_N\left(\xi(t)\right)\right]\Big|_{t=0} = a_1^3l + 3a_1a_2d + a_3n. \qquad (П20)$$

Заключение

Алгоритм вычисления нижней оценки вероятности не разорения страховой компании по формуле (49) состоит в последовательном, $\tau = 1,2,...,T$, вычислении значений моментов $n(\tau), d(\tau), l(\tau)$ и $u(\tau), D(\tau), L(\tau)$ по рекуррентным формулам (8), (12), (15), (26), (36), (47) с учетом начальных значений. После чего следует применить формулы (50), либо (52) для вычисления сомножителей в формуле (49), которая задает нижнюю оценку вероятности того, что рисковый резерв будет неотрицательным в течение T периодов времени. При этом параметры «зеркального» гамма - распределения $\alpha(\tau), \beta(\tau), x_0(\tau)$ вычисляются по формулам (51). Численные эксперименты показали, что гауссовы нижние оценки вероятностей не разорения и значения этих вероятностей, полученные в результате имитационного моделирования, совпадают с точностью до двух процентов на первых 15 периодах времени.

Литература

1. *Бауэрс Н., Гербер Х. и др.* Актуарная математика //М.: Янус-К- 2001. 656 с.
2. *Andersen E. Sparre.* On the collective theory fo risk in case of contagion between the claims / / Trans. XVth International Congress of Actuaries, II. 1957. P. 219-229.
3. *Grandell J.* Aspects of risk theory. New York: Springer-Verlag, 1991.175 c.
4. *Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.* Математические основы теории риска // М/: Физматлит, 2011, 591 с.
5. *Калашников В.В., Константинидис А.А.* Вероятность разорения //Фундаментальная и прикладная математика. 1996, т.2, №4, с. 1005-1100.
6. *Tang Q., Tsitsiashvili G.* Finite and Infinite Time Ruin Probabilities in the Presence of Stochastic Returns on Investments// Advances in Applied Probability. Vol. 36, №.4, 2004, pp. 1278-1299.

7. *Yang Y, Jiang T, Wang K, Yuen K.* Interplay of financial and insurance risks in dependent discrete-time risk models - Statistics & Probability Letters, 2020 – Elsevier. Volume 162, July 2020, 108752.

8. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярные начальные и краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в динамических моделях страхования с учётом инвестиций. – Современная математика. Фундаментальные направления, 2014, том 53, с. 5–29.

9. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Славко Б.В.* Безрисковые инвестиции и их сравнение с простыми рисковыми стратегиями в модели пенсионного страхования: решение сингулярных задач для интегро-дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2020, том 60, № 10, с. 1676-1696.