

И.С. Барашков¹

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Введение

В прикладной электродинамике часто необходимо проводить математическое моделирование электромагнитных полей в проводящих неоднородных средах. В работах [1]–[12] рассмотрены различные подходы к такому моделированию в двумерном и трёхмерном случаях с помощью метода интегральных уравнений и конечно разностного метода. В настоящей работе проводится численный анализ метода интегральных уравнений в задаче магнитотеллурического зондирования (МТЗ) в неоднородной среде. Подробно изучен случай контрастных проводящих сред, когда проводящая неоднородность находится в плохо проводящей среде.

Эффект контрастности среды наиболее сильно проявляется в случае *H*-поляризованного двумерного электромагнитного поля в неоднородной среде. Поэтому численный эксперимент проводится именно для этого случая для модели грабена. Анализ численного решения интегрального уравнения в этом случае показал, что решение имеет плохую точность, когда в области неоднородности используется традиционная равномерная прямоугольная сетка, а узлы, в которых вычисляется электрическое поле, традиционно расположены в центре ячеек сетки. При этом ничего не делается для детализации поведения поля на границах неоднородности в надежде на то, что граничные условия будут учитываться сами собой автоматически. Не помогает даже использование метода повышенной фоновой проводимости, предложенного в работе [1].

Значительно лучший результат был получен при совместном использовании метода повышенной фоновой проводимости и специальной неравномерной сетки с уменьшенными по высоте ячейками в верхнем ряду сетки и с узлами на верхней границе этих ячеек. В настоящей работе приводится обоснование этого результата с учётом сингулярности интегрального уравнения. Таким образом, показано, что

¹Лаборатория математической физики факультета ВМК МГУ, baraskov@cs.msu.ru

учёт значений поля на границе неоднородности важен для правильного решения интегрального уравнения.

Постановка задачи для H –поляризованного поля в слоистой среде

Рассмотрим двумерную проводящую среду (рис. 1), в которой зона неоднородности S_H с электропроводностью σ_H находится в трёхслойной горизонтально однородной слоистой среде. Причём второй слой, в котором находится неоднородность, имеет проводимость

$$\sigma_2 \ll \sigma_1 \text{ и } \sigma_2 \ll \sigma_H.$$

Для этой среды будем решать задачу расчёта электромагнитного поля, возбуждаемого плоской волной, вертикально падающей на земную поверхность. Задача с таким возбуждением поля называется задачей магнитотеллурического зондирования.

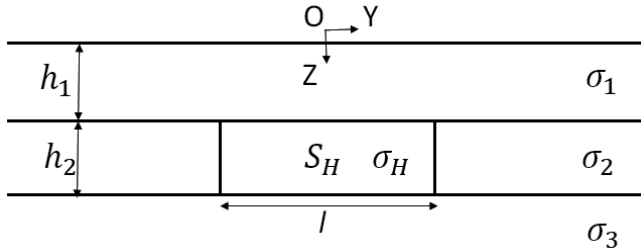


Рис.1. Стандартная модель строения неоднородной среды.

В двумерном случае электромагнитное поле распадается на две независимых поляризации. Пусть среда и источники поля не зависят от координаты x . Тогда в уравнениях Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H}$$

положим $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$. Подробно рассмотрим случай H –поляризации, когда

$E_x = 0, H_y = 0, H_z = 0, \vec{H} = (H_x, 0, 0), \vec{E} = (0, E_y, E_z)$ и получим:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\sigma E_z, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x. \quad (2)$$

Из уравнения (2) найдём H_x :

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Это выражение для H_x подставим в уравнения (1). Тогда при $z > 0$ получим систему уравнений для электрического поля $E_y = E_y(y, z), E_z = E_z(y, z)$. Система имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = i\omega\mu\sigma E_y, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -i\omega\mu\sigma E_z \quad (4)$$

с краевыми условиями в задаче магнитотеллурического зондирования, в которой поле возбуждается плоской волной, вертикально падающей на земную поверхность

$$E_z(y, z) \Big|_{z=0} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} E_z(y, z) = 0, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} E_z(y, z) = 0, \quad (5)$$

$$H_x \Big|_{z=0} = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = 1, \quad (6)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E_y(y, z) = 0, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} E_y(y, z) = E_y^0(z) \quad (7)$$

и условиями непрерывности тангенциальных компонент поля на границах разрыва проводимости $\sigma(y, z)$

$$[E_\tau] = 0, \quad (8)$$

где $E_y^0(z)$ – поле в горизонтально однородной слоистой среде стандартной модели, а квадратными скобками обозначен разрыв функции.

В задаче требуется найти импеданс $Z(y, z = 0)$ на поверхности земли

$$Z(y, z = 0) = \frac{E_y(y, z=0)}{H_x(y, z=0)}. \quad (9)$$

Согласно граничному условию нормировки (6) на поверхности земли для магнитного поля H_x при вычислении импеданса Z на поверхности земли достаточно знать только горизонтальную компоненту электрического поля E_y .

Система интегральных уравнений для решения задачи (4)-(8) в случае H -поляризации по конечной прямоугольной области S_H получена в работе [4] и имеет вид:

$$E_y(M) - \int_{S_H} \{G_{yy}[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)]E_y(M^0) + G_{yz}[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)]E_z(M^0)\} ds_{M^0} = E_y^0(z), \quad (10)$$

$$E_z(M) - \int_{S_H} \{G_{zy}[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)]E_y(M^0) + G_{zz}[\sigma_H(M^0) - \sigma_2(M^0)]E_z(M^0)\} ds_{M^0} = 0, \quad (11)$$

где

$$G_{yy}(y - y^0, z, z^0), G_{yz}(y - y^0, z, z^0), G_{zy}(y - y^0, z, z^0), G_{zz}(y - y^0, z, z^0)$$

являются компонентами двумерного тензора Грина для горизонтально однородной слоистой среды стандартной модели с проводимостью

$$\sigma_c(z) = \begin{cases} \sigma_1(z) & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \sigma_2 & \text{при } h_1 < z < h_1 + h_2, \\ \sigma_3(z) & \text{при } z > h_1 + h_2, \end{cases} \quad (12)$$

$$E_y^0(z) = \frac{1}{\sigma_c(z)} \frac{\partial H_x^0(z)}{\partial z} \quad (13)$$

является одномерным нормальным электрическим полем в стандартной горизонтально однородной слоистой среде с этой проводимостью, нормированным таким образом, что соответствующее одномерное магнитное поле равно единице на поверхности земли

$$H_x^0(z) \Big|_{z=0} = 1. \quad (14)$$

После того, как уравнения (10) – (11) уже решены и электрическое поле в области неоднородности уже найдено, из этих уравнений легко получить формулы для пересчёта электрического поля в первый слой и на поверхность земли, перенеся интегралы в соотношениях (10) – (11) от известных функций в правую часть.

Компоненты двумерного тензора Грина для случая H – поляризации построены в работе [4] и имеют вид:

$$G_{yy} = -\frac{1}{2\pi\sigma_c(z)} F_c \left(\frac{dU_\sigma^1}{dz} \right), \quad G_{zy} = \frac{1}{2\pi\sigma_c(z)} \frac{\partial}{\partial y} F_c(U_\sigma^1), \quad (15)$$

$$G_{yz} = \frac{1}{2\pi\sigma_c(z)} \frac{\partial}{\partial y} F_c \left(\frac{dU_\sigma^0}{dz} \right), \quad G_{zz} = \frac{1}{2\pi\sigma_c(z)} F_c(\lambda^2 U_\sigma^0), \quad (16)$$

где F_c – косинус-преобразование Фурье

$$F_c(f) = \int_0^\infty \cos\lambda(y - y^0) \cdot f(\lambda) d\lambda. \quad (17)$$

Функции $U_\sigma^0(z)$ и $U_\sigma^1(z)$ определяются из задачи

$$\sigma(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sigma(z)} \frac{dU_\sigma^a}{dz} \right) - (\lambda^2 - k^2(z)) U_\sigma^a = 0 \quad (18)$$

при $z \in (0, z^0) \cup (z^0, \infty)$. На разрыве электропроводности $\sigma_c(z)$ выполняются условия

$$[U_\sigma^a]_z = 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{1}{\sigma(z)} \frac{dU_\sigma^a}{dz} \right]_z = 0, \quad (19)$$

а при $z = z^0$ имеем условия

$$[U_\sigma^a]_{z^0} = -2a, \quad \left[\frac{dU_\sigma^a}{dz} \right]_{z^0} = -2(1 - a), \quad a = 0 \quad \text{или} \quad a = 1, \quad (20)$$

$$U_\sigma^a(0) = 0, \quad U_\sigma^a(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty \quad (21)$$

и $Re\sqrt{\lambda^2 - k^2(z)} > 0, \quad k^2(z) = i\omega\mu\sigma(z).$

Исследование особенности компоненты $G_{yy}(y - y^0, z, z^0)$ двумерного тензора Грина

Рассмотрим особенность компоненты $G_{yy}(y - y^0, z, z^0)$ двумерного тензора Грина. Функция $U_{\sigma}^1(z)$ представима в виде:

$$U_{\sigma}^1(z) = C_1(e^{\eta_1 z} - e^{-\eta_1 z}) \text{ при } 0 < z < h_1, \quad (22)$$

$$U_{\sigma}^1(z) = -\frac{z-z^0}{|z-z^0|} e^{-\eta_2|z-z^0|} + C_2 e^{\eta_2 z} + D_2 e^{-\eta_2 z} \text{ при } h_1 < z < h_1 + h_2, \quad (23)$$

$$U_{\sigma}^1(z) = D_3 e^{-\eta_3 z} \text{ при } z > h_1 + h_2, \quad (24)$$

где $\eta_i = \sqrt{\lambda^2 - k_i^2}$, $k_i^2 = i\omega\mu\sigma_i$, $Re(\eta_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Коэффициенты C_1 , C_2 , D_2 , D_3 находятся из граничных условий (19). Слагаемые с коэффициентами C_2 , D_2 дают гладкий вклад в компоненту $G_{yy}(y - y^0, z, z^0)$ двумерного тензора Грина. Более детально рассмотрим слагаемое

$$-\frac{z-z^0}{|z-z^0|} e^{-\eta_2|z-z^0|} = \frac{d}{dz} \frac{e^{-\eta_2|z-z^0|}}{\eta_2}, \quad (25)$$

которое даёт вклад с особенностью в компоненту $G_{yy}(y - y^0, z, z^0)$ двумерного тензора Грина. Обозначим этот вклад через $G_{yy}^{(1)}(y - y^0, z, z^0)$. Тогда согласно первой из формул (15) во втором слое получим

$$\begin{aligned} G_{yy}^{(1)}(y - y^0, z, z^0) &= -\frac{1}{2\pi\sigma_2} F_c \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dz} \frac{e^{-\eta_2|z-z^0|}}{\eta_2} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi\sigma_2} \frac{d^2}{dz^2} \int_0^{\infty} \cos\lambda(y - y^0) \cdot \frac{e^{-\eta_2|z-z^0|}}{\eta_2} d\lambda = -\frac{1}{\sigma_2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_2\rho) \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где $\rho = \sqrt{(y - y^0)^2 + (z - z^0)^2}$, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Поскольку функция Ханкеля имеет логарифмическую особенность $\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_2\rho) \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$, то

$$G_{yy}^{(1)}(y - y^0, z, z^0) \approx -\frac{1}{2\pi\sigma_2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln \frac{1}{\rho}. \quad (27)$$

Обозначим через $\tilde{G}_{yy}^{(1)}$ интеграл от функции $-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right) / (2\pi\sigma_2)$ по $dz^0 dy^0$ по прямоугольнику ΔS в центре этого прямоугольника при $z = 0, y = 0$.

При теоретических исследованиях обычно берут в качестве элементарной области маленький кружочек радиуса r_0 с центром в точке M . Однако при численных расчётах это не удобно, так как общая область неоднородности обычно разбивается на прямоугольные ячейки. Оказывается, что особую часть тензора Грина можно аналитически проинтегрировать по прямоугольнику. Главную сингулярную часть представляет следующая функция: $-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right) / (2\pi\sigma_2)$. Если прямоугольная ячейка ΔS имеет стороны длиной h_y, h_z , то

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{yy}^{(1)} &= -\frac{1}{2\pi\sigma_2} \int_{\Delta S} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln \frac{1}{\rho} dz^0 dy^0 = \\
 &= \frac{1}{4\pi\sigma_2} \int_{-0,5h_y}^{0,5h_y} dy^0 \int_{-0,5h_z}^{0,5h_z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ln((y-y^0)^2 + (z-z^0)^2) dz^0 = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_2} \int_{-0,5h_y}^{0,5h_y} dy^0 \int_{-0,5h_z}^{0,5h_z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z-z^0}{(y-y^0)^2 + (z-z^0)^2} dz^0 = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_2} \int_{-0,5h_y}^{0,5h_y} dy^0 \int_{-0,5h_z}^{0,5h_z} \frac{\partial}{\partial z^0} \frac{z^0-z}{(y-y^0)^2 + (z-z^0)^2} dz^0 = \\
 &= \frac{h_z}{2\pi\sigma_2} \int_{-0,5h_y}^{0,5h_y} \frac{dy^0}{(y^0)^2 + (0,5h_z)^2} = \frac{2}{\pi\sigma_2} \arctg \left(\frac{h_y}{h_z} \right).
 \end{aligned}$$

Значение $\tilde{G}_{yy}^{(1)}$ зависит только от отношения h_y и h_z , а не от длины сторон h_y и h_z прямоугольника ΔS . В частном случае, когда прямоугольник ΔS имеет одинаковые длины сторон $h_y = h_z$ и становится квадратом, формула упрощается

$$\tilde{G}_{yy}^{(1)} = \frac{2}{\pi\sigma_2} \arctg \left(\frac{h_y}{h_z} \right) = \frac{2}{\pi\sigma_2} \arctg(1) = \frac{1}{2\sigma_2}. \quad (28)$$

Точно такой же результат получается в теоретических исследованиях при интегрировании по маленькому кружочку радиуса r_0 с центром в точке M .

Исследование особенности компоненты $G_{zz}(y - y^0, z, z^0)$
двумерного тензора Грина

Рассмотрим теперь особенность компоненты $G_{zz}(y - y^0, z, z^0)$ двумерного тензора Грина. Фундаментальная функция $U_{\sigma}^0(z)$ представима в виде:

$$U_{\sigma}^0(z) = C_1(e^{\eta_1 z} - e^{-\eta_1 z}) \text{ при } 0 < z < h_1, \quad (29)$$

$$U_{\sigma}^0(z) = \frac{e^{-\eta_2|z-z^0|}}{\eta_2} + C_2 e^{\eta_2 z} + D_2 e^{-\eta_2 z} \text{ при } h_1 < z < h_1 + h_2, \quad (30)$$

$$U_{\sigma}^0(z) = D_3 e^{-\eta_3 z} \text{ при } z > h_1 + h_2. \quad (31)$$

Коэффициенты C_1, C_2, D_2, D_3 находятся из граничных условий (19). Слагаемые с коэффициентами C_2, D_2 дают гладкий вклад в компоненту $G_{zz}(y - y^0, z, z^0)$ двумерного тензора Грина. Детальнее рассмотрим слагаемое $e^{-\eta_2|z-z^0|}/\eta_2$, которое даёт вклад с особенностью в компоненту $G_{zz}(y - y^0, z, z^0)$ двумерного тензора Грина. Обозначим этот вклад через $G_{zz}^{(1)}(y - y^0, z, z^0)$. Тогда согласно второй из формул (16) во втором слое получим

$$\begin{aligned} G_{zz}^{(1)}(y - y^0, z, z^0) &= \frac{1}{2\pi\sigma_2} F_c \left(\lambda^2 \frac{e^{-\eta_2|z-z^0|}}{\eta_2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi\sigma_2} \frac{d^2}{dy^2} F_c \left(\frac{e^{-\eta_2|z-z^0|}}{\eta_2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi\sigma_2} \frac{d^2}{dy^2} \int_0^{\infty} \cos\lambda(y - y^0) \cdot \frac{e^{-\eta_2|z-z^0|}}{\eta_2} d\lambda = -\frac{1}{\sigma_2} \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_2 \rho) \right). \end{aligned}$$

Поскольку функция Ханкеля имеет логарифмическую особенность, то

$$G_{zz}^{(1)}(y - y^0, z, z^0) \approx -\frac{1}{2\pi\sigma_2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln \frac{1}{\rho}.$$

Обозначим через $\tilde{G}_{zz}^{(1)}$ интеграл от функции $-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right) / (2\pi\sigma_2)$ по $dz^0 dy^0$ по прямоугольнику ΔS в центре этого прямоугольника при $z = 0, y = 0$. Аналогично тому, как это делалось при вычислении $\tilde{G}_{yy}^{(1)}$, получим

$$\tilde{G}_{zz}^{(1)} = \frac{2}{\pi\sigma_2} \operatorname{arctg} \left(\frac{h_z}{h_y} \right). \quad (32)$$

Результаты расчётов при использовании метода повышенной фоновой проводимости

В работе [4] детально сформулирован конкретный вариант метода квадратурных сумм – метод аппроксимации интегрального оператора при переходе от системы интегральных уравнений (10)–(11) к системе линейных алгебраических уравнений для построения численного метода решения интегральных уравнений (10)–(11). При этом использовалась традиционная сетка с одинаковыми ячейками и традиционное расположение узлов в центре ячеек, в которых вычисляются значения функции. При точной реализации этого метода при аппроксимации интегрального оператора в систему линейных алгебраических уравнений неизбежно вносятся некоторые погрешности, которые оказались вовсе не маленькими. Затем по формулам (15) – (16) эти погрешности делятся на маленькое значение $\sigma_c(z) = \sigma_2$ при $h_1 < z < h_1 + h_2$. В результате погрешности многократно увеличиваются, что приводит к невозможности правильно численно решить задачу. Для замены маленького значения σ_2 на увеличенное значение фоновой проводимости σ_Φ чтобы повысить точность в работе [1] было предложено использование метода повышенной фоновой проводимости.

На рис. 1 показана стандартная модель строения неоднородной среды с неоднородностью в области S_H ширины l , которая имеет проводимость $\sigma_H(M) = \sigma_1$. Согласно предложенному методу повышенной фоновой проводимости надо провести расширение модели неоднородности до ширины L с увеличением электропроводности второго слоя со значения σ_2 до величины σ_Φ на расстоянии $0,5(L-l)$ от неоднородности.

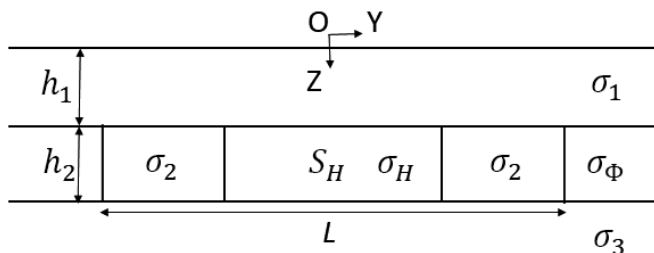


Рис. 2. Расширенная модель неоднородной зоны с повышением фоновой проводимости

Такая расширенная модель неоднородной зоны с повышением фоновой проводимости показана на Рис.2. В этой модели зона неоднородности S_H увеличена на ΔS_H . Эта дополнительная область

окружает область S_H , а её проводимость равна σ_2 . Вне этой расширенной области $S_H + \Delta S_H$ проводимость слоя, в котором находится $S_H + \Delta S_H$, равна фоновой $\sigma_\Phi \gg \sigma_c$. При решении интегрального уравнения по расширенной области в этом случае в знаменателе в формулах (15) – (16) попадёт большое значение σ_Φ и точность численного решения интегрального уравнения повысится. Ясно, что всегда существует такое расширение области неоднородности ΔS_H , что наличие фоновой неоднородности практически не сказывается на результат моделирования поля в окрестности зоны S_H . Размер расширения зависит от частоты поля. Его можно определить с помощью следующего подхода. Наличие σ_Φ не должно практически влиять на нормальное поле в области S_H .

На Рис.3 показано поведение модуля горизонтальной компоненты электрического тока $J_y = \sigma E_y$ над расширенной областью неоднородности и в расширенной области неоднородности, посчитанного с использованием метода повышенной фоновой проводимости. Параметры модели были выбраны следующим образом:

$$\sigma_2/\sigma_1 = 0,01; \quad \sigma_3/\sigma_1 = 0,001; \quad \sigma_H/\sigma_1 = 1; \quad \sigma_\Phi/\sigma_1 = 0,8;$$

$$h_2/h_1 = 1; \quad l/h_1 = 10; \quad L/h_1 = 20; \quad \lambda_1/h_1 = 32,$$

где λ_1 – длина волны в первом слое.

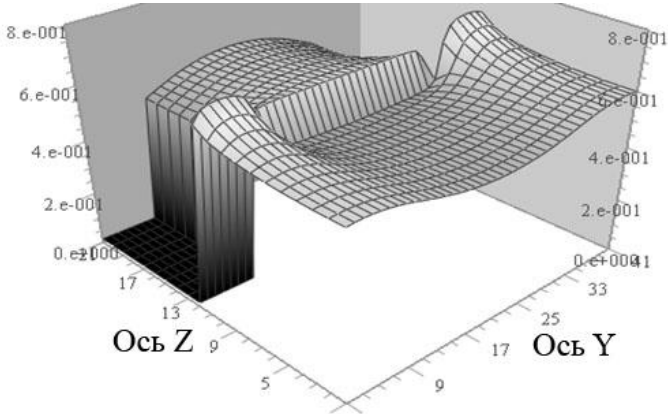


Рис.3. Модуль горизонтальной компоненты электрического тока $J_y = \sigma E_y$, посчитанного с использованием метода повышенной фоновой проводимости.

Поверхности земли $z = 0$ соответствует та часть рисунка, где показана ось Y . Противоположная сторона рисунка соответствует глубине $z/h_1 = 2$, где расположена нижняя граница неоднородной области S .

На средней глубине при $z/h_1 = 1$ находится верхняя граница неоднородной области S . Центр неоднородной области S по горизонтали находится посередине отрезка, который на рисунке обозначен как ось Y .

Анализ численных значений $|J_y|$ в этом случае показал, что решение имеет плохую точность, когда в области расширенной неоднородности используется традиционная равномерная прямоугольная сетка, а узлы, в которых вычисляется электрическое поле, традиционно расположены в центре ячеек сетки. При этом ничего не делается для детализации поведения поля на границах неоднородности в надежде на то, что граничные условия будут учитываться сами собой автоматически. Не помогает даже использование метода повышенной фоновой проводимости

При традиционном способе построения сетки с одинаковыми прямоугольными ячейками и при традиционном выборе узлов в центре ячеек сетки точнее вычисляются значения во внутренних узлах сетки, для которых сверху и снизу ещё есть узлы. Для крайних верхних узлов точности не хватает, поскольку выше этих узлов нет дополнительных верхних узлов и наблюдается увеличение нормы вычисленных значений горизонтальной компоненты электрического поля при приближении снизу к верхней границе области интегрирования.

Настоящей физической границы там нет и никакого бугра модуля поля, как на Рис.3 там не должно быть. Неправильный расчёт поля в неоднородности приводит к неправильному пересчёту поля в первый слой и на поверхность земли. Поскольку в верхней части неоднородности получаются завышенные значения модуля $|J_y|$, то при пересчёте поля в первый слой и на поверхность земли получаются тоже завышенные значения модуля горизонтальной компоненты тока. В результате на поверхности земли на Рис.3 не видно, что поле сильно убывает при приближении к середине неоднородности из-за перетекания тока в неоднородность, что должно быть при правильном расчёте.

Измельчение ячеек традиционной сетки не приводит к уменьшению интеграла по ячейке из-за сингулярности ядра интегрального уравнения. Даже для самой маленькой ячейки интеграл приблизительно равен значению $2 \arctg(h_y/h_z) / (\pi \sigma_\Phi)$, полученному по формуле (28). Для значений поля в верхнем ряду ячеек сетки получаются такие же большие по модулю диагональные элементы интегральной части матрицы системы линейных алгебраических уравнений, как и для значений внутренних рядов. Никакой специфики пограничных значений самого верхнего ряда в этих линейных алгебраических уравнениях не содержится. Получается коллекция линейных алгебраических уравнений только для внутренних значений

поля. Для увеличения точности решения на границе надо увеличить количество узлов в проблемном месте.

Математическое обоснование необходимости использования специальной сетке с узлами на верхней границе сетки

Чтобы увеличить количество узлов в проблемном месте была построена сетка, изображённая на Рис.4 и добавлены дополнительные узлы непосредственно на самой границе. Чтобы расстояния по вертикали между узлами остались одинаковыми, размер ячеек в верхнем ряду уменьшен в два раза.

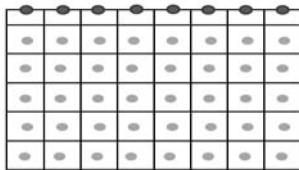


Рис.4. Неравномерная сетка со специальным способом выбора узлов

Если разместить узлы верхнего ряда на верхнюю границу ячеек сетки, то специфика пограничных значений самого верхнего ряда в алгебраических уравнениях уже будет учитываться. Для рассматриваемой модели верхняя граница неоднородности совпадает с границей горизонтально однородной слоистой среды, что является специфической особенностью этой границы и отличает её от других границ рассматриваемой модели среды. В этом случае в выражении для функции $\left. \frac{d}{dz} U_{\sigma}^1(z, z^0) \right|_{z=h_1}$, через которую согласно первой из формул (15) вычисляется компонента тензорной функции Грина $G_{yy}(y - y^0, z, z^0)$, слагаемое, порождающее особенность частично компенсируется за счёт других слагаемых.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dz} U_{\sigma}^1(z, z^0) \right|_{z=h_1} = & \eta_2 e^{\eta_2(h_1 - z^0)} + S \eta_2 \{ -e^{\eta_2(h_1 - z^0)} q_2 (1 + p_2) + \\ & + e^{-\eta_2(h_1 + 2h_2 - z^0)} (q_1 - q_2) (1 - p_2) - \\ & - e^{\eta_2(h_1 - 2h_2 - z^0)} q_2 (1 - p_2) \} \end{aligned} \quad (33)$$

при $h_1 < z^0 < h_1 + h_2$, где

$$q_1 = 1 + p_1 - e^{-2\eta_1 h_1} (1 - p_1), \quad q_2 = 1 - p_1 - e^{-2\eta_1 h_1} (1 + p_1),$$

$$p_1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad p_2 = \frac{\eta_2}{\eta_3} \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \quad S = \left(q_1 (1 + p_2) + e^{-2\eta_2 h_2} q_2 (1 - p_2) \right)^{-1}.$$

Первое слагаемое $\eta_2 e^{\eta_2(h_1 - z^0)}$ в правой части формулы (33) даёт особенность функции Грина, но слагаемое $-\mathcal{S}\eta_2 e^{\eta_2(h_1 - z^0)} q_2(1 + p_2)$ с такой же экспонентой, как и в первом слагаемом, имеет противоположный знак, стоит на втором месте в правой части формулы (33) и частично компенсирует первое слагаемое.

В результате для граничных значений горизонтальных компонент электрического поля в верхнем ряду ячеек сетки получаются маленькие по модулю диагональные элементы интегральной части матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Специфика пограничных значений самого верхнего ряда в соответствующих линейных алгебраических уравнениях в этом случае учитывается. Формула (33) позволяет математически объяснить улучшение результатов расчётов при использовании специальной сетки и специального расположения узлов.

Когда мы выражаем поле в виде интеграла, но при численных расчётах заменяем интеграл на квадратурную сумму, то в эту сумму входят маленькие по модулю диагональные элементы интегральной части матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

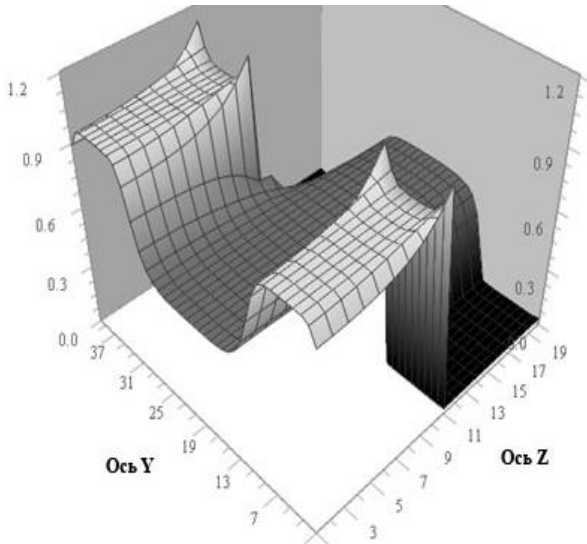


Рис. 5. Модуль горизонтальной компоненты электрического тока $J_y = \sigma E_y$, посчитанного с использованием специальной сетки

Если же использовать традиционную старую схему вычислений, то в эту сумму входят большие по модулю диагональные элементы интегральной части матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Это и приводит к образованию горба модуля

горизонтальной компоненты электрического тока около верхней границы неоднородности, что хорошо видно на графике модуля тока на Рис.3.

На Рис. 5 показано поведение модуля горизонтальной компоненты электрического тока $J_y = \sigma E_y$, посчитанного в области S и выше с использованием специальной сетки. Из этого рисунка видно, что горизонтальный ток внутри неоднородности в области S , посчитанный из системы интегральных уравнений (10)–(11) и горизонтальный ток над неоднородностью выше области S , посчитанный при пересчёте на поверхность хорошо состыковываются. На верхней границе области S при $z/h_1 = 1$ не возникает какого-либо скачка функции $|J_y|$. Это соответствует физическому смыслу функции J_y и свидетельствует о правильности вычислений.

Таким образом, показано, что учёт значений поля на границе неоднородности важен для правильного решения интегрального уравнения, а простое измельчение ячеек сетки не может привести к правильному результату. В настоящей работе приводится обоснование этого результата с учётом сингулярности интегрального уравнения.

Если учесть ещё влияние и других границ, а не только верхней границы, то точность решения интегрального уравнения повысится и значение σ_Φ можно будет уменьшить. Более того, вполне вероятно можно будет вовсе отказаться от использования метода повышенной фоновой проводимости.

Результаты расчётов при использовании сетки с квадратными ячейками

Для модели с глубоким грабеном при $h_2/h_1 = 4,875$ использована сетка с квадратными ячейками во всех рядах сетки кроме самого верхнего, в котором высота ячеек в два раза меньше ширины. Это привело к повышению точности решения. По сравнению с предыдущей моделью ячейки сетки стали больше по вертикали и по площади, а точность решения увеличилась.

Это объясняется тем, что сингулярная особенность наиболее правильно интегрируется в соответствии с формулами (28) и (32) именно на квадрате.

На Рис. 6 показан модуль горизонтальной компоненты электрического тока $J_y = \sigma E_y$, посчитанного с использованием сетки с квадратными ячейками. При сравнении модуля горизонтальной компоненты электрического тока на Рис. 6 с модулем тока на Рис. 5, который рассчитывался на сетке с прямоугольными ячейками видно, что на Рис. 6 отсутствуют выбросы вверх значений модуля тока в угловых точках на верхней границе грабена, которые видны на Рис. 5.

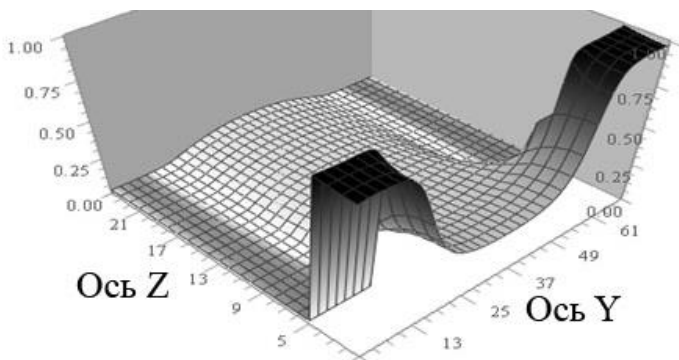


Рис.6. Модуль горизонтальной компоненты электрического тока $J_y = \sigma E_y$, посчитанного с использованием сетки с квадратными ячейками

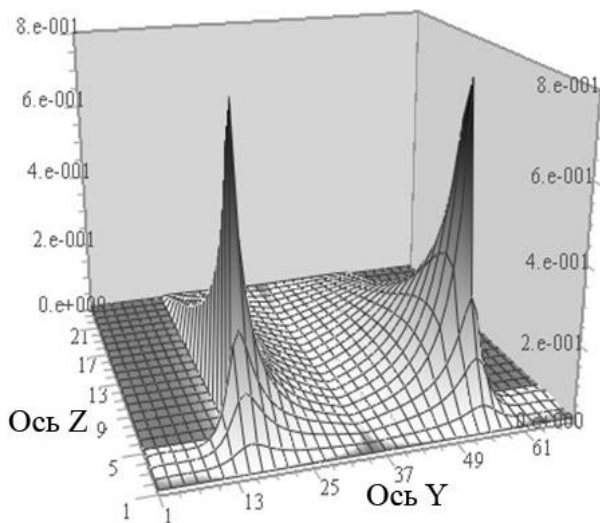


Рис. 7. Модуль вертикальной компоненты электрического тока $J_z = \sigma E_z$, посчитанного с использованием сетки с квадратными ячейками

Эти выбросы объясняются не физическими причинами, а вычислительной погрешностью, которая заметна при использовании сетки с прямоугольными ячейками и отсутствует при использовании сетки с квадратными ячейками.

На Рис.7 показан модуль вертикальной компоненты электрического тока $J_z = \sigma E_z$, посчитанного с использованием сетки с квадратными

ячейками. Из этого рисунка видно, что ток, текущий в первом верхнем слое, начинает заворачивать вниз в неоднородность уже при малой глубине z . Ниже этот ток складывается с током, который завернул вниз при несколько большей глубине z . Поэтому функция $|J_z|$ возрастает по z над вертикальной боковой границей грабена при $0 < z < h_1$. Попав внутрь грабена, пришедший ток постепенно поворачивается и меняет направление на горизонтальное. Поэтому функция $|J_z|$ убывает по z при $h_1 < z < h_1 + h_2$. Это соответствует физическому смыслу функции J_z и свидетельствует о правильности вычислений.

Заключение

В настоящей работе исследованы некоторые новые свойства системы интегральных уравнений (10) – (11), которые ранее не были известны, логически объяснимы и практически полезны при дальнейших исследованиях интегральных уравнений и их использовании в задачах геоэлектрики неоднородных проводящих сред.

Литература

1. *Dmitriev, V.I.* The Integral-Equation Method in Low-Frequency Electrodynamics of Nonhomogeneous Contrast//Computational Mathematics and Modeling, 2018, Vol. 29, pp 42–47.
2. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике.- М. МАКСПресс, 2008,-316с.
3. *Дмитриев В.И.* Морские электромагнитные зондирования. – М. АРГАМАК МЕДИА, 2004,-192с.
4. *Dmitriev V.I., Belkin P.S., Mershchikova N.A.* Integral Equation Method for Modeling of Two-Dimensional Geoelectricity Problems//Computational Mathematics and Modeling, 2005, Vol. 16, pp. 289–300.
5. *Martin Čumaabc, Alexander Gribenkoab, Michael S. Zhdanov.* Inversion of magnetotelluric data using integral equation approach with variable sensitivity domain: Application to EarthScope MT data//Physics of the Earth and Planetary Interiors, September 2017, Vol. 270, pp. 113-127.
6. *Musa A. Bello, Rongwen Guo, Jianxin Liu.* Forward plane-wave electromagnetic model in three dimensions using hybrid finite volume-integral equation scheme //Geophysical Prospecting, 2019, Vol. 67, pp. 2213–2226.
7. *Dmitriev V.I., Barashkov I.S.* Mathematical modeling of marine electromagnetic sounding of a three-dimensional nonhomogeneous medium//Computational Mathematics and Modeling, July 2012, Vol. 23, Issue 3, pp. 239-253.

8. *Barashkov I.S., Dmitriev V.I.* Modeling marine electromagnetic soundings by the reciprocity principle//Computational Mathematics and Modeling, January 2013, Vol. 24, Issue 1, pp. 1-13.
9. *Dmitriev V.I., Barashkov I.S.* Mathematical modeling of mobile marine electromagnetic soundings//Computational Mathematics and Modeling, 2014, Vol. 25, No. 3, July, pp. 342-350.
10. *Dmitriev V.I., Barashkov I.S.* Finite-Difference–Integral Method for Computing Low-Frequency Electromagnetic Fields in a Nonhomogeneous Medium//Computational Mathematics and Modeling, 2016, Vol. 27, № 2, pp. 145-161.
11. *Barashkov I.S., Dmitriev V.I.* A Numerical Method for Low-Frequency Electromagnetic Fields in a Nonhomogeneous Medium in the Case of H-Polarization//Computational Mathematics and Modeling, 2017, Vol. 28, № 2, pp. 254-266.
12. *Dmitriev V.I., Barashkov I.S.* Numerical Analysis of the Integral Equation Method for the Computation of the Electromagnetic Field in a Nonhomogeneous Medium//Computational Mathematics and Modeling, 2019, Vol. 30, № 1, pp. 55-67.