

А.В. Александров¹, Л.В. Дородницын²

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ОТРАЖЕННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ*

Введение

Использование искусственно сгенерированных турбулентных полей скорости широко распространено в задачах вычислительной газовой динамики. Применение таких полей позволяет существенно снизить вычислительную стоимость расчетов.

Первые работы, касающиеся способов задания искусственных турбулентных полей, появились в семидесятые годы прошлого века [1]. Наибольшее распространение в настоящий момент получили спектральные методы генерации поля. В современных спектральных методах [2 – 6] турбулентное поле строится в виде суммы гармоник Фурье либо других базисных функций, имеющих детерминированные и/или стохастические параметры. Методы данного класса позволяют строить изотропные и анизотропные турбулентные поля с заданными рейнольдсовыми напряжениями и одноточечными моментами первого и второго порядков. В то же время корректность двухточечных моментов второго порядка такие методы в большинстве своём не гарантируют. При этом в задачах вычислительной аэроакустики двухточечные моменты, наряду с масштабами турбулентности, играют ключевую роль [7].

Другим набирающим популярность подходом к генерации турбулентных полей с заданными свойствами является метод численной фильтрации белого шума [8 – 12], заключающийся в свертке случайного поля с заданным детерминированным ядром. В рамках этого направления удаётся построить анизотропное турбулентное поле с заданными двухточечными моментами второго порядка [12 – 14], что актуально для ряда инженерных задач, связанных с генерацией шума турбулентным потоком.

В настоящей работе рассматривается известная и весьма актуальная задача о возникновении акустических волн в результате рассеяния турбулентного следа на препятствии. Данная задача аэроакустики характерна

¹ ИПМ имени М.В. Келдыша РАН, Москва, e-mail: anatoly.v.alexandrov@gmail.com

² МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, e-mail: dorodn@cs.msu.ru

* Результаты работы автора из ИПМ имени М.В. Келдыша РАН получены в рамках госзадания.

тем, что эффект генерации звука проявляется уже в линейном приближении [15, 16], поскольку амплитуда акустических волн имеет один порядок с амплитудой турбулентных пульсаций. Взаимодействие турбулентного потока с некоторым профилем является одним из основных источников шума во многих промышленных устройствах, включая вертолеты, турбины и двигатели с открытым ротором, в которых турбулентность, генерируемая в следе за лопастями или лопатками, стоящими вверх по потоку, набегаает на препятствия ниже по потоку [6, 16, 17].

В работе представлена и исследована методика моделирования акустических волн, образующихся в вышеописанной физической постановке. Вычислительная технология базируется на построении искусственного турбулентного поля с заданными характеристиками на основе оригинального метода тензорной фильтрации белого шума [12, 13]. Динамика сгенерированного начального поля описывается линеаризованными уравнениями Эйлера на неоднородном фоне. Моделирование осуществляется с использованием схем, сохраняющих дисперсионные соотношения, четвертого порядка аппроксимации [18 – 20]. Среднее поле вычисляется на основе нелинейных уравнений Эйлера, для дискретизации которых используется кинетически-согласованная разностная схема (КСРС) [21, 22].

В статье излагаются элементы численного алгоритма. Проведены вычислительные тесты, направленные на исследование вопроса о сохранении статистики сгенерированной турбулентности в процессе переноса, т.е. о соответствии алгоритмов так называемой гипотезе замороженной турбулентности [23], которая считается установленной. На основе предложенной методики выполнен расчет рассеяния турбулентного следа на прямоугольном препятствии.

1. Постановка задачи и методика моделирования

Двумерный профиль (рис. 1), имеющий форму прямоугольника, сильно вытянутого вдоль оси x , обтекается потоком газа в направлении оси x с числом Маха $M \equiv u/c = 0.3$. В газе имеется прямоугольная область турбулентного следа, расположенная вверх по потоку от профиля.

Численное моделирование состоит из следующих этапов.

1. Вычисляется стационарное фоновое течение (среднее поле) на основе нелинейных уравнений Эйлера с искусственной вязкостью.
2. Задается поле флуктуаций скорости в прямоугольной области впереди профиля (на рис.1 цвета отвечают уровням горизонтальной скорости). Это поле используется при задании начальных условий для задачи аэроакустики.
3. Динамика распространения возмущений описывается линейными уравнениями Эйлера с переменными коэффициентами и источниковыми членами.

4. Для разностной аппроксимации линейной задачи используется 7-точечная схема DRP.

Каждый из перечисленных пунктов разберем в деталях.

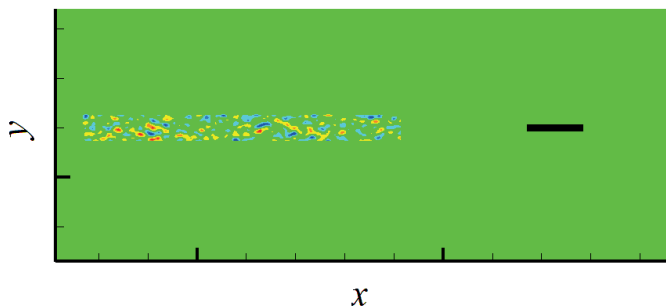


Рис.1. Схема постановки задачи

Вычисление среднего поля

Расчетная область представляет собой прямоугольник за вычетом профиля. В указанной области строится равномерная квадратная сетка. Среднее поле моделируется на основе нелинейных уравнений Эйлера, для аппроксимации которых используется кинетически-согласованная разностная схема (КСРС) [21] с искусственной вязкостью, пропорциональной шагу сетки. При этом на обтекаемом профиле ставятся условия непротекания и прилипания для скорости, а также нулевые нормальные производные термодинамических параметров. Такая постановка задачи физически корректна для КСРС и связанной с ней дифференциальной квазигазодинамической системы уравнений [22].

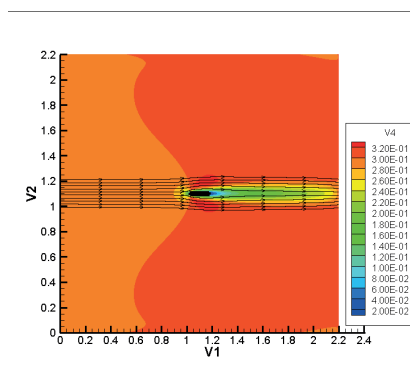


Рис 2. Поле средней продольной компоненты скорости.

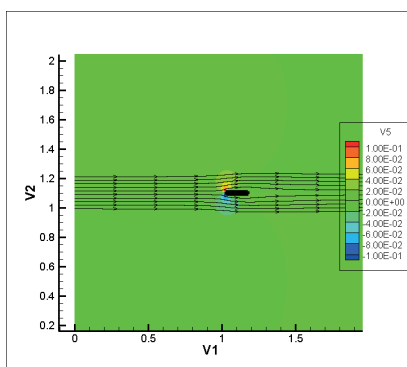


Рис 3. Поле средней поперечной компоненты скорости.

На рисунках 2 и 3 приведены средние поля компонент скорости. Хорошо видны области пограничного слоя и следа позади тела.

Генерация поля пульсационных скоростей

Технология основана на тензорном методе фильтрации, изложенном в наших предыдущих работах [12, 13]. Метод строит трехмерное поле функции тока, опираясь на спектральный тензор ковариаций функции тока, зависящий от трехмерного волнового вектора:

$$\hat{C}_{ij}(\mathbf{k}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Данная задача является типичным примером «ортогональной» турбулентности [13], поскольку анизотропия обладает очевидными главными осями – вдоль потока (x), поперек профиля (y) и по размаху (z). Тем самым статистика поля описывается шестью основными параметрами: это $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – среднеквадратичные скорости турбулентных пульсаций, l_x, l_y, l_z – интегральные масштабы турбулентности. Для рассматриваемого класса турбулентности имеются замкнутые аналитические формулы генерации синтетического турбулентного поля [13].

Двумерная постановка задачи позволяет использовать «квазитрехмерную» модель турбулентного поля [10], согласно которой волновой вектор становится двумерным, имея z -компоненту, равную нулю:

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0).$$

Функция тока становится скалярной, и ее статистику, вместо тензора (1), характеризует спектральная функция $\hat{C}(\mathbf{k})$, равная

$$\hat{C}(\mathbf{k}) = 2l_x l_y l_z f(\xi), \quad \xi^2 = l_x^2 k_x^2 + l_y^2 k_y^2. \quad (2)$$

Волновой вектор фигурирует в виде скалярного параметра ξ , который можно трактовать как безразмерное анизотропное волновое число; функция $f(\xi)$ – безразмерная, положительная и четная. В представляемых расчетах использовалась спектральная функция Липмана

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi^2 [1 + \xi^2]^3}.$$

Тензорный метод фильтрации сводится к случаю, аналогичному [10]. Поле функции тока представляется в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathcal{U}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (3)$$

Здесь $G(\mathbf{r})$ – скалярное ядро фильтра, $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ – поле белого шума со стандартной ковариацией

$$\langle \mathcal{U}(\mathbf{x}) \mathcal{U}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \delta(\mathbf{r}).$$

Скалярное ядро фильтра $G(\mathbf{r})$ фактически зависит от одной скалярной переменной, имеющей смысл анизотропного безразмерного радиуса, и выражается следующим образом:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{g(\zeta)}{\sqrt{l_x l_y l_z}}, \quad g(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{f(\xi)} J_0(\xi \zeta) \xi d\xi, \quad (4)$$

$$\zeta(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{x^2}{l_x^2} + \frac{y^2}{l_y^2}}.$$

Здесь $J_n(z)$ – функция Бесселя 1-го рода.

Дискретная двумерная модель [9, 10] белого шума (3) строится следующим способом. Область задания турбулентного поля разбивается на прямоугольники (вихревые ячейки), расположенные в виде регулярной решетки. В центре \mathbf{x}^n каждого прямоугольника, имеющего размеры Δ_x, Δ_y , задается случайная величина $\Omega^n = \pm 1$ с вероятностью 1/2.

Интеграл (3) аппроксимируется конечной суммой по узлам \mathbf{x}^n , находящимся в пределах области влияния точки \mathbf{x} , имеющей форму круга радиусом в несколько масштабов турбулентности.

В итоге поле функции тока (3) выглядит как

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathcal{M}(\mathbf{x})} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n) \Omega^n \sqrt{\Delta_x \Delta_y}. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ – множество номеров вихрей, попадающих в область влияния точки \mathbf{x} .

Формула поля скорости сводится к дифференцированию ядра $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n)$ в равенстве (5) и в итоге дает следующие покомпонентные выражения:

$$u_x(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathcal{M}(\mathbf{x})} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n)}{\partial y} \Omega^n \sqrt{\Delta_x \Delta_y}, \quad (6)$$

$$u_y(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathcal{M}(\mathbf{x})} -\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n)}{\partial x} \Omega^n \sqrt{\Delta_x \Delta_y}.$$

В выражении (6) производные функции ядра фильтра приобретают, согласно формулам (4), вид:

$$\left(\frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial y} \right) = \frac{g'(\zeta)}{\sqrt{l_x l_y l_z}} \left(\frac{x}{\zeta}, \frac{y}{\zeta} \right), \quad (7)$$

$$g'(\zeta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{f(\xi)} J_1(\xi \zeta) \xi^2 d\xi.$$

Моделирование эволюции поля возмущений

Уравнения Эйлера, линеаризованные на непостоянном фоне, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + C_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix}, \quad C_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_x + \mathbf{K}_y,$$

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial x} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial x} & 0 & \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \rho}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial y} & \gamma \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ – плотность, u, v – компоненты скорости, p – давление, γ – показатель адиабаты: $c^2 = \gamma p / \rho$ – квадрат скорости звука. Штрихами обозначены возмущения величин. В матрицы входят полученные из нелинейной задачи фоновые параметры и их градиенты.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая модель является бездиссипативной, и потому автоматически удовлетворяет гипотезе замороженной турбулентности Тейлора, а также сохраняет статистику одномерного турбулентного поля.

Разностная аппроксимация линейной системы уравнений

Гиперболическая система (8) на равномерной сетке представляется в виде разностной схемы, сохраняющей дисперсионные соотношения (DRP) [18, 20]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \mathcal{D}_x^h \mathbf{U} + C_y \mathcal{D}_y^h \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0,$$

где \mathcal{D}_x^h и \mathcal{D}_y^h – кососимметрические 7-точечные центрально-разностные операторы [18] вида

$$\mathcal{D}_x^h u \equiv \frac{1}{h_x} [a_1(u_{i+1} - u_{i-1}) + a_2(u_{i+2} - u_{i-2}) + a_3(u_{i+3} - u_{i-3})],$$

$$a_1 = 0.79926643, \quad a_2 = -0.18941314, \quad a_3 = 0.02651995.$$

Дифференциальные выражения в матрице K заменялись такими же разностями DRP. Использовалась та же сетка, на которой ранее вычислялись величины среднего поля.

Производная по времени реализовывалась посредством стандартного метода Рунге-Кутты 4-го порядка аппроксимации.

Величины, вычисленные на очередном слое по времени, подвергались процедуре фильтрации с целью подавления паразитных сеточных осцилляций. Применялись операторы фильтров из [19].

Граничные условия на профиле заимствованы из [19]: в частности, они содержат разности на скошенных 7-точечных шаблонах. Вокруг внешней границы расчетной области задавалась буферная зона.

2. Результаты расчетов

Исследование свойств генерируемых турбулентных полей

Перед проведением расчетов основной задачи была выполнена валидация численных алгоритмов. Исследовались характеристики сгенерированного турбулентного поля: в частности, сохранение масштабов в результате переноса без рассеяния, т.е. выполнение гипотезы вмороженной турбулентности [23]. Для этого моделировалась эволюция начального турбулентного поля, задаваемого формулами (6)–(7), в терминах линейризованных уравнений Эйлера (8) с постоянными коэффициентами. Расчет выполнялся в прямоугольной области с периодическими граничными условиями. Сгенерированное начальное поле также обладало периодичностью. Сравнивались характеристики поля в начальный момент времени и на момент окончания расчета.

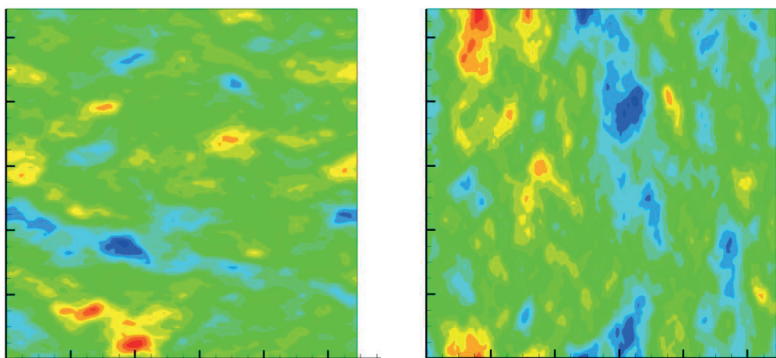


Рис. 4. Пример сгенерированного периодического турбулентного поля: продольная (слева) и поперечная (справа) компоненты скорости

Пример двумерного турбулентного поля, сгенерированного по формулам (6)–(7), проиллюстрирован на рис. 4 уровнями продольной и попе-

речной компонент скорости. На рисунках 5 и 6 приведены поля ротора скорости для случаев равных масштабов турбулентности ($l_x = l_y$) и продольного масштаба, в 2 раза большего поперечного ($l_x = 2l_y$).

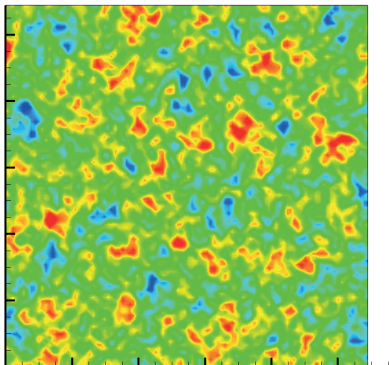


Рис. 5. Ротор поля скорости с равными масштабами турбулентности.

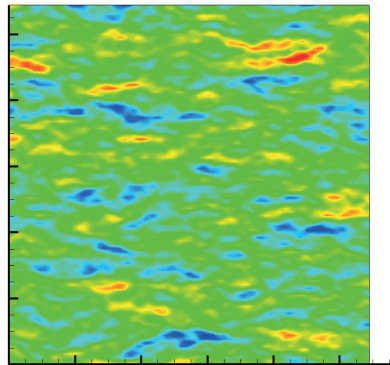


Рис. 6. Ротор поля скорости с масштабами турбулентности $l_x = 2l_y$.

В качестве характеристик генерируемых турбулентных полей использовалась продольная и поперечная корреляционные функции

$$f(r) = \frac{\langle u'(x, y, t) u'(x + r, y, t) \rangle}{(\langle u'(x, y, t)^2 \rangle \langle u'(x + r, y, t)^2 \rangle)^{1/2}}, \quad (9)$$

$$g(r) = \frac{\langle v'(x, y, t) v'(x + r, y, t) \rangle}{(\langle v'(x, y, t)^2 \rangle \langle v'(x + r, y, t)^2 \rangle)^{1/2}}.$$

В формулах (9) применялось численное осреднение по узлам сетки (x, y) , расположенным в левой нижней четверти расчетной области.

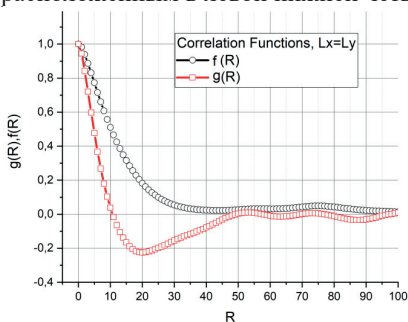


Рис. 7. Продольная и поперечная корреляционные функции для случая масштабов $l_x = l_y$.

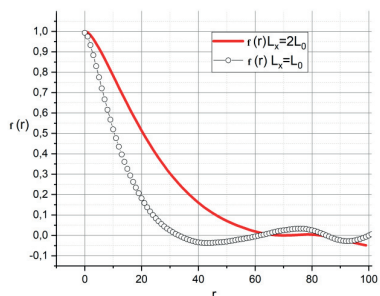


Рис. 8. Продольные корреляционные функции для полей с масштабами $l_x = l_y$ и $l_x = 2l_y$.

Исследование сгенерированных полей в начальный момент времени $t = 0$ дало следующие результаты. На рисунке 7 приведены продольная и поперечная корреляционные функции для случая равных масштабов турбулентности $l_x = l_y$. На рисунке 8 сравниваются продольные корреляционные функции для полей скорости с масштабами турбулентности одинаковыми ($l_x = l_y$) и отличающимися в 2 раза ($l_x = 2l_y$). Две кривые практически подобны друг другу с коэффициентом 2. При этом интегральные масштабы турбулентности, вычисленные по реализациям изотропного и анизотропного поля, также отличаются в 2 раза. Графики корреляционных функций (рис. 7–8) показывают незначительные отклонения от нуля на больших масштабах, что, по всей видимости, связано с недостатком статистических данных для осреднения.

Эволюция турбулентного поля, описываемая DRP-схемой для линеаризованных уравнений Эйлера, исследовалась с точки зрения влияния переноса на корреляционную функцию. Было построено поле с равными поперечным и продольным масштабами турбулентности $l_x = l_y$, составляющими 8 ячеек сетки. На рисунках 9 и 10 приведены продольные и поперечные корреляционные функции на начальный и конечный моменты времени. Очевидно, что перенос почти не оказывает влияния на свойства корреляционных функций, что соответствует гипотезе о «вмороженной» турбулентности, лежащей в основе модели.

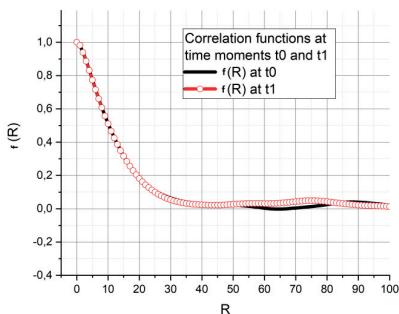


Рис. 9. Продольные корреляционные функции на начальный и конечный моменты времени.

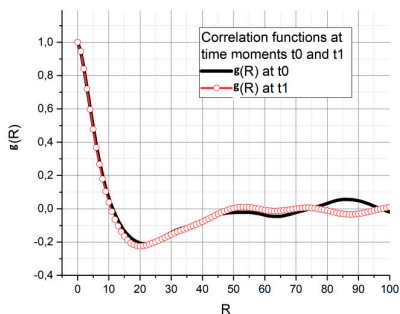


Рис. 10. Поперечные корреляционные функции на начальный и конечный моменты времени.

Моделирование рассеяния искусственного турбулентного поля на прямоугольном препятствии

Выполнялось моделирование рассеяния полученного турбулентного поля на прямоугольном препятствии. На рис. 11 приведено начальное поле компонент скорости. Видно, что область задания турбулентных пуль-

саций ограничена прямоугольником. На границах данной области компоненты скорости имеют разрыв. Поэтому в начальные моменты времени граница турбулентной области становится источником акустических волн. Данные паразитные волны покидают расчетную область еще до момента начала взаимодействия турбулентного следа с препятствием.

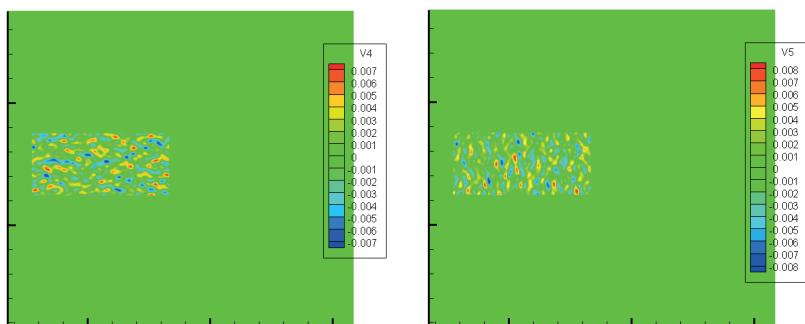


Рис. 11. Поля продольной (слева) и поперечной (справа) компоненты скорости в начальный момент времени

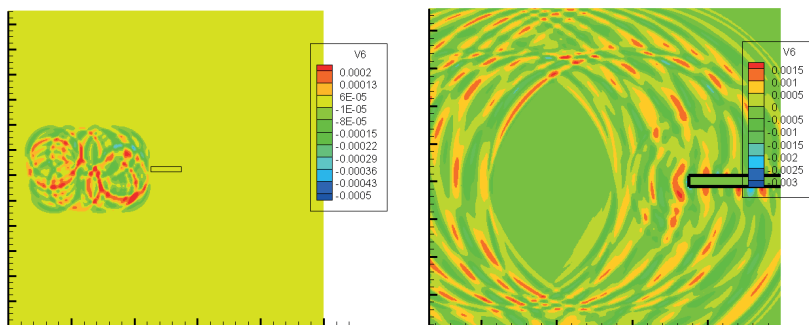


Рис. 12. Поле пульсации давления на момент времени сразу после начала расчета (слева) и в момент прохождения паразитными волнами препятствия (справа)

На рисунке 12 приведены поля пульсации давления на момент времени сразу после начала расчета и момент прохождения паразитными волнами препятствия. Правый рисунок показывает, что после отхода паразитных волн, возникших в начальный момент, дальнейшей их генерации не происходит. С другой стороны, к моменту прохождения препятствия паразитными волнами турбулентный след еще не достигает препятствия, поскольку скорость распространения акустических волн по потоку $u + c$ превышает скорость переноса u на величину скорости звука.

Отметим, что на границе задания искусственной турбулентности в начальный момент времени имеется сильный разрыв. Возникающая неустойчивость успешно подавляется при помощи фильтров, о которых говорилось в предыдущем разделе.

На рисунке 13 приведены поля скорости на два последовательных момента t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$) во время прохождения турбулентным следом препятствия.

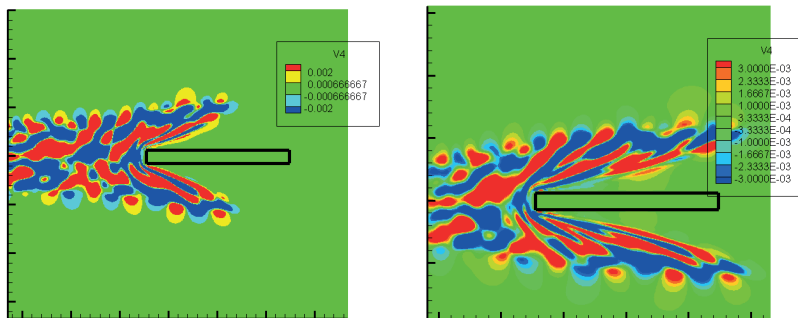


Рис. 13. Поле продольной компоненты скорости в моменты времени t_1 и t_2 в процессе прохождения препятствия турбулентным следом

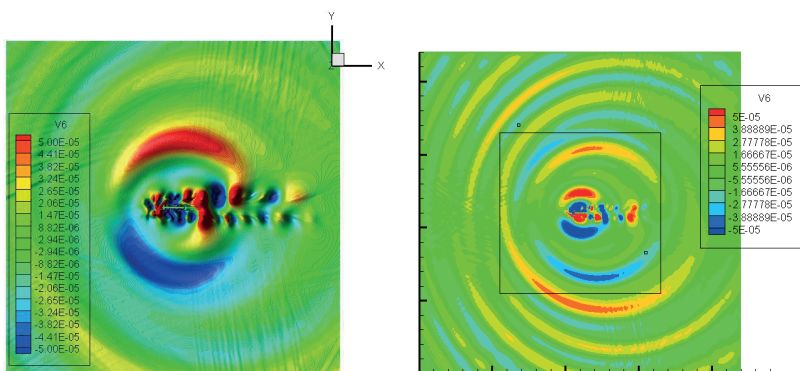


Рис. 14. Поле давления при прохождении препятствия турбулентным следом; слева – увеличенный фрагмент

На рисунке 14 приведено поле давления при прохождении турбулентным следом препятствия. Хорошо видны низкочастотные акустические волны, генерируемые в результате взаимодействия турбулентного следа с препятствием. На правом рисунке хорошо виден дипольный источник, возникающий по обе стороны от препятствия. Наличие коротких акустических волн, которые особенно заметны на левом рисунке 14, объ-

яняется появлением источников на передней и задней кромках профиля, а также незначительным паразитным отражением акустических волн от внешней границы расчетной области.

Заключение

В работе представлена и исследована методика моделирования акустических волн, возникающих в результате рассеяния турбулентного следа на препятствии. Методика основана на генерации искусственного турбулентного поля с заданными характеристиками на основе оригинального метода тензорной фильтрации белого шума.

На основе предложенной методики выполнен расчет рассеяния турбулентного следа на прямоугольном препятствии. Полученные результаты качественно совпадают с ожидаемыми.

В дальнейшем планируется использование данной методики для предсказания акустических характеристик в дальнем поле от рассеяния турбулентного следа на крыловом профиле.

Литература

1. *Kraichnan R.* Diffusion by a random velocity field // *Phys. Fluids*, 1970, v.13, No.1, p.22–31.
2. *Smirnov A., Shi S., Celik I.* Random flow generation technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *J. Fluids Eng.*, 2001, v.123, No.2, p.359–371.
3. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // *Flow Turbulence Combust.*, 2014, v.93, No.1, p.63–92.
4. *Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П., Колоухин Д.Р.* Генерация неоднородных турбулентных полей скорости на основе модифицированного рандомизированного спектрального метода // *Прикладная математика и информатика №63*. – М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020, с.22–35; англ. пер.: *Alexandrov A.V., Dorodnicyn L.W., Duben' A.P., Kolyukhin D.R.* Generation of nonhomogeneous isotropic turbulent velocity fields by Modified Randomized Spectral Method // *Comput. Math. Model.*, 2020, v.31, No.3, p.308–319.
5. *Liu X., Chaitanya P., Joseph P.* Proper Orthogonal Decomposition method for the prediction of fan broadband interaction noise // *AIAA Journal*, 2022, v.60, No.9, p.5336–5356. DOI:10.2514/1.J061176
6. *Jiang S., Wang Y., Yan Z. et al.* Variations with Mach number for gust–airfoil interaction noise // *Physics of Fluids*, 2023, v.35, No.2: 026111. DOI:10.1063/5.0139656

7. *Ewert R.* Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a fast random particle-mesh (RPM) method // *Computers and Fluids*, 2008, v.37, p.369–387.
8. *Klein M., Sadiki A., Janicka J.* A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations // *J. Comput. Phys.*, 2003, v.186, p.652–665.
9. *Gea-Aguilera F., Gill J., Zhang X.* Synthetic turbulence methods for computational aeroacoustic simulations of leading edge noise // *Computers and Fluids*, 2017, v.157, p.240–252. doi:10.1016/j.compfluid.2017.08.039.
10. *Shen Z., Zhang X.* Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction // *J. of Sound and Vibration*, 2019, v.458, p.544–564.
11. *Gea-Aguilera F., Karve R., Gill J., Zhang X., Angland D.* On the effects of anisotropic turbulence on leading edge noise // *J. of Sound and Vibration*, 2021, v.495, article id. 115895.
12. *Александров А.В., Дородницын Л.В.* Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2021, №95, М., 15 с.
13. *Дородницын Л.В.* Корреляционный тензор функции тока как основа моделирования анизотропной турбулентности с заданными статистическими параметрами // *Прикладная математика и информатика №74*. – М.: Изд-во МАКСПресс, 2023, с.27–50.
14. *Kerschen E.J., Gliebe P.R.* Noise caused by the interaction of a rotor with anisotropic turbulence // *AIAA Journal*, 1981, v.19, No.6, p.717–723.
15. *Amiet R.K.* Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream // *J. of Sound and Vibration*, 1975, 41(4), p.407–420.
16. *Hales A.D.G., Ayton L.J., Jiang C. et al.* A mathematical model for the interaction of anisotropic turbulence with a rigid leading edge // *J. Fluid Mech.*, 2023, v.970, A29. DOI:10.1017/jfm.2023.630
17. *Han J., Zhang Yu, Li S., Hong W., Wu D.* On the reduction of the noise in a low-pressure turbine cascade associated with the wavy leading edge // *Physics of Fluids*, 2023, v.35, 095103. DOI:10.1063/5.0165080
18. *Tam C.K.W., Webb J.C.* Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // *J. Comput. Phys.*, 1993, v.107, p.262–281.
19. *Tam C.K.W.* *Computational Aeroacoustics: A Wave Number Approach*. – Cambridge Aerospace Series, v.33, Cambridge Univ. Press, N.Y., 2012, 492 pp.
20. *Александров А.В., Дородницын Л.В.* Использование аэроакустических схем высокой точности на регулярных сетках для моделирования вяз-

- ких течений // Матем. моделирование, 2017, т.29, №1, с.63–83; англ. пер.: *Alexandrov A.V., Dorodnicyn L.W.* Simulation of viscous flows by highly accurate aeroacoustic schemes on regular grids // *Math. Models Comput. Simul.*, 2017, v.9, No.4, p.457–473.
21. *Абалакин И.В., Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные разностные схемы как модель для описания газодинамических течений // Матем. моделирование, 1996, т.8, №8, с.17–36.
 22. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: Изд-во МАКСПресс, 2004; *Chetverushkin B.N.* Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations. – CIMNE, Barcelona, Spain, 2008, 298 pp.
 23. *Taylor G.* The spectrum of turbulence // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1938, v.164, No.919, p.476–490. DOI:10.1098/rspa.1938.0032