

Приближенные солитонные решения для задачи распространения двухцветного лазерного излучения в среде с комбинированной нелинейностью

Лысак Т. М.^{1,2*}, Песков Н. В.¹

^{1*}Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, д.1, стр 52, Москва, 119991, Москва, Россия.

²Факультет ВМК, Совместный университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Гоцзидасюэюань, Шэньчжэнь, 518172, Гуандун, Китай.

*Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s):

lysak@cs.msu.su;

Соавторы: peskovnick@gmail.com;

Аннотация

В работе проведено аналитическое и численное исследование солитонного режима распространения двухцветного лазерного излучения в среде с квадратичной и кубичной нелинейностью на основе связанных уравнений Шредингера для медленно меняющихся амплитуд. С помощью метода многих масштабов построено приближенное аналитическое решение для рассматриваемого солитонного режима распространения. Показано, что самовоздействие волн вдали от фазового синхронизма может приводить к реализации солитонного режима без преимущественной концентрации энергии в одной из волн. Проведена верификация построенных аналитических решений в компьютерном эксперименте на основе консервативных разностных схем. Обнаружено сохранение солитонного режима двучетного лазерного излучения на определенной трассе распространения, в конце которой наблюдается распад солитонного режима. В результате распада солитонного режима происходит практически 100 % преобразование энергии волны второй гармоники в энергию основной волны с формированием двух разбегающихся субимпульсов основной волны солитонной формы.

Ключевые слова: солитоны, фемтосекундные импульсы, метод многих масштабов, двухцветное лазерное излучение, численное моделирование.

1 Введение

Солитонное распространение лазерных импульсов привлекает внимание в связи с их важностью как для фундаментальных исследований, так и для многочисленных приложений в области лазерной физики, оптической связи, и оптической памяти. Возможность распространения лазерного излучения в солитонном режиме обусловлена балансом между распылением импульса в результате действия дисперсионных процессов и его самофокусировкой в нелинейной среде [1], [2]. В последнее время большой интерес привлекают также многоцветные солитоны – связанные солитоны импульсов различной частоты [3], [4]. Формирование таких связанных солитонов обусловлено их параметрическим взаимодействием в среде с соответствующими нелинейностями. Простейшим примером таких солитонов являются двухцветные солитоны, формирующиеся в различных средах с квадратичной нелинейностью [5], [6], [7], [8]. Формирование солитонов в квадратичной среде обусловлено, в том числе, балансом между двумя взаимнообратными процессами – процессом генерации второй гармоники, то есть генерацией излучения на удвоенной частоте, и процессом генерации половинной гармоники, в результате которой два фотона преобразуются в один фотон с удвоенной частотой. Характеристики формирующихся двухцветных солитонов зависят от условий взаимодействия волн. В чисто квадратичной среде двухцветные солитоны, то есть солитоны со сравнимыми пиковыми интенсивностями импульсов обеих волн, возможны при незначительной фазовой расстройке, либо в условиях групповой расстройки [7], [9].

В приближении медленно меняющихся амплитуд распространение лазерного излучения в квадратичной среде описывается парой связанных уравнений Шредингера с квадратичной нелинейностью. В случае сверхкоротких высокоинтенсивных импульсов необходимо учитывать слагаемые высших порядков в выражении для нелинейной поляризации [5], [10]. Учет этих слагаемых приводит к новым интересным явлениям. В частности, в квадратично-кубичной среде возможна высокоэффективная генерация второй гармоники вдали от фазового синхронизма [11], [12].

Как известно, при больших фазовых расстройках (в каскадном пределе) распространение излучения на основной волне в квадратичной среде в отсутствие входного излучения на удвоенной частоте может быть описано нелинейным уравнением Шредингера с кубичной нелинейностью, которое обладает солитонным решением [6]. Таким образом, вдали от

фазового синхронизма в квадратичной среде возможно распространение излучения на основной волне в солитонном режиме. В настоящей работе показано, что в случае высокоинтенсивных лазерных импульсов, когда существенным является учет кубичной нелинейности, возможно на определенной трассе распространение в солитонном режиме двучетного лазерного излучения, характеризуемого сравнимыми значениями пиковых амплитуд волн обеих гармоник.

2 Постановка задачи

В рамках приближения медленно меняющихся амплитуд распространение распространения двучетного лазерного излучения в квадратичной среде в условиях самовоздействия волн может быть описано двумя связанными уравнениями Шредингера с квадратичной и кубичной нелинейностями [5], [10]:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} + v_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} + iD_{2,1} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + i\gamma_1 E_1^* E_2 e^{i\Delta k z} + i\alpha_1 E_1 (|E_1|^2 + \beta |E_2|^2) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} + v_2 \frac{\partial E_2}{\partial t} + iD_{2,2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + i\gamma_2 (E_1)^2 e^{-i\Delta k z} + i\alpha_2 E_2 (\beta |E_1|^2 + |E_2|^2) = 0 \quad (1b)$$

Здесь E_1 и E_2 - медленно меняющиеся амплитуды волны основной и второй гармоники; параметры γ_1 и γ_2 характеризуют квадратичную нелинейность среды; параметры $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = 2\alpha$ описывают самовоздействие волн; $\beta = 2$; v_1 и v_2 задают групповые скорости взаимодействующих волн; $D_{2,1}$ и $D_{2,2}$ характеризуют дисперсию групповых скоростей, параметр Δk описывает расстройку волновых чисел взаимодействующих волн.

Уравнения (1) дополняются нулевыми граничными условиями

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} E_1(z, t = 0) &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} E_2(z, t = 0) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^l E_1(z, t = 0)}{\partial t^l} = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial^l E_2(z, t = 0)}{\partial t^l} = 0, l \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

а также начальными условиями

$$E_1(z = 0, t) = E_{10}(t), \quad E_2(z = 0, t) = E_{20}(t). \quad (3)$$

В зависимости от соотношений пиковых амплитуд входных импульсов основной и удвоенной гармоник можно выделить два предельных случая. Если на среду падает только излучение на основной частоте ($E_{20}(t) \equiv 0$), происходит процесс генерации второй гармоники. В

случае, когда пиковая интенсивность излучения на основной частоте намного меньше пиковой интенсивности излучения на удвоенной частоте ($\max_t |E_{20}(t)| \gg \max_t |E_{10}(t)|$), может происходить процесс генерации половинной гармоники, то есть энергия излучения на удвоенной частоте преобразуется в энергию излучения на основной частоте.

В случае большой расстройки волновых чисел (при $\Delta k \gg 1$) – в так называемом каскадном пределе – эффективность генерации второй гармоники в квадратичной среде без учета самовоздействия ($\alpha = 0$) незначительна. В этом случае, и при отсутствии на входе в среду излучения на удвоенной частоте ($E_{20}(t) \equiv 0$), распространение излучения на основной частоте с хорошей точностью описывается нелинейным уравнением Шредингера с кубичной нелинейностью [6]:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} + v_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} + i D_{2,1} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + i \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\Delta k} |E_1|^2 E_1 = 0 \quad (4)$$

Уравнение Шредингера (4) с кубичной нелинейностью является полностью интегрируемым уравнением, которое имеет различные типы солитонных решений. В частности, односолитонное семейство решений уравнения Шредингера имеет следующий вид [1], [2]:

$$E_1(z, t) = \eta \operatorname{ch}^{-1} \left(\eta \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2}{2 D_{2,1} \Delta k}} (t - Vz) \right) \cdot \exp \left(i \left(\frac{V}{2 D_{2,1}} t - \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\Delta k} \eta^2 - \frac{V^2}{4 D_{2,1}} \right) z \right) \right) \quad (5)$$

где η – амплитуда, V – скорость солитона. Таким образом, в квадратичной среде при большой фазовой расстройке в отсутствии на входе излучения на удвоенной частоте возможно распространение излучения основной частоты в солитонном режиме практически без генерации второй гармоники.

Целью настоящей работы является исследование возможности солитонного распространения двучетного (то есть характеризуемого сравнимыми пиковыми амплитудами основной волны и волны второй гармоники) лазерного излучения в нелинейной среде с комбинированной нелинейностью. С этой целью в следующем разделе приведены приближенные уравнения для описания распространения обеих волн, полученные с помощью метода многих масштабов [13], [14]. На основе приближенных уравнений рассмотрены возможные режимы солитонного распространения лазерного излучения и получены приближенные солитонные решения для этих режимов. Проведена верификация построенных солитонных режимов в компьютерном эксперименте на основе консервативной разностной схемы.

3 Приближенные уравнения

В рамках метода многих масштабов [13], [14] медленно меняющиеся амплитуды волн можно представить в виде разложений по малому параметру $\epsilon = \frac{1}{\Delta k} \ll 1$:

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots \\ E_2(z, t) &= b_0 + \epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2 + \dots \end{aligned}$$

В данных разложениях все коэффициенты являются функциями быстрой переменной $\zeta = \Delta k z = \epsilon^{-1} z$, исходной переменной z и набора медленных переменных $\xi_n = \epsilon^n z$, $n \in \mathbb{N}$: $a_j(t, \zeta, z, \xi_1, \xi_2, \dots)$, $b_j(t, \zeta, z, \xi_1, \xi_2, \dots)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Линейные дифференциальные операторы по пространственной переменной также представляются в виде разложений по малому параметру:

$$\begin{aligned} L^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial z} + v_j \frac{\partial}{\partial t} + i D_{2,j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} L_{-1}^{(j)} + L_0^{(j)} + \epsilon L_1^{(j)} + \epsilon^2 L_2^{(j)} + \dots, \\ L_{-1}^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad L_0^{(j)} = \frac{\partial}{\partial z} + v_j \frac{\partial}{\partial t} + i D_{2,j} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ L_1^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \quad L_n^{(j)} = \frac{\partial}{\partial \xi_n}, \dots \end{aligned}$$

Ограничившись первыми двумя членами разложения и тремя пространственными масштабами, можно получить следующие приближенные выражения для основной волны и волны второй гармоники:

$$E_1(z, t) = a_0 + \frac{1}{\Delta k} (-\gamma_1 a_0^* b_0 e^{i\Delta k z} + \bar{a}_1) + o\left(\frac{1}{\Delta k}\right), \quad (6a)$$

$$E_2(z, t) = b_0 + \frac{1}{\Delta k} (\gamma_2 a_0^2 e^{-i\Delta k z} + \bar{b}_1) + o\left(\frac{1}{\Delta k}\right). \quad (6b)$$

Основные члены разложений $a_0(t, z)$, $b_0(t, z)$ в этих выражениях удовлетворяют связанным нелинейным уравнениям Шредингера:

$$\frac{\partial a_0}{\partial z} + v_1 \frac{\partial a_0}{\partial t} + i D_{2,1} \frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} + i \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\Delta k} \right) |a_0|^2 a_0 + i \left(\alpha_1 \beta - \frac{\gamma_1^2}{\Delta k} \right) |b_0|^2 a_0 = 0, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial z} + v_2 \frac{\partial b_0}{\partial t} + i D_{2,2} \frac{\partial^2 b_0}{\partial t^2} + i \alpha_2 |b_0|^2 b_0 + i \left(\alpha_2 \beta - 2 \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\Delta k} \right) |a_0|^2 b_0 = 0. \quad (7b)$$

Члены первого порядка малости $\bar{a}_1(t, z)$, $\bar{b}_1(t, z)$, удовлетворяют линейным уравнениям

$$\frac{\partial \bar{a}_1}{\partial z} + v_1 \frac{\partial \bar{a}_1}{\partial t} + iD_{2,1} \frac{\partial^2 \bar{a}_1}{\partial t^2} = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \bar{b}_1}{\partial z} + v_2 \frac{\partial \bar{b}_1}{\partial t} + iD_{2,2} \frac{\partial^2 \bar{b}_1}{\partial t^2} = 0 \quad (8b)$$

при выполнении дополнительного условия $\alpha = O(\frac{1}{\Delta k})$.

Уравнения, аналогичные уравнениям (7)-(8), были получены в работе [14] для квадратичной среды без самовоздействия ($\alpha = 0$).

В следующем разделе на основе полученных приближенных уравнений будут рассмотрены возможные режимы солитонного распространения лазерного излучения и получены приближенные аналитические решения для этих режимов.

4 Солитонные режимы распространения лазерного излучения

При рассмотрении различных режимов солитонного распространения ограничимся случаем группового синхронизма $v_1 = v_2 = 0$.

4.1 Отсутствие излучения на удвоенной частоте на входе в нелинейную среду

Если на входе в нелинейную среду отсутствует излучение на удвоенной частоте: $E_2(z = 0, t) = E_{20}(t) \equiv 0$ из равенств (6) следует, что начальные условия для уравнений (7)-(8) принимают вид

$$a_0(t, z = 0) = E_1(z = 0, t) = E_{10}(t) \quad (9a)$$

$$b_0(t, z = 0) \equiv 0 \quad (9b)$$

$$\bar{a}_1(t, z = 0) = 0 \quad (9c)$$

$$\bar{b}_1(t, z = 0) = -\gamma_2 a_0^2(t, z = 0) = -\gamma_2 E_{10}^2(t) \quad (9d)$$

В этом случае уравнения (7b) и (8a) имеют нулевое решение: $b_0(t, z) \equiv 0$, $\bar{a}_1(t, z) \equiv 0$, а функция $a_0(t, z)$ удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера

$$\frac{\partial a_0}{\partial z} + iD_{2,1} \frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} + i(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\Delta k}) |a_0|^2 a_0 = 0. \quad (10)$$

Функция $\bar{b}_1(t, z)$ удовлетворяет линейному уравнению (8b) с начальным условием (9d), определяемым входным импульсом основной волны. Медленно меняющиеся амплитуды волн обеих гармоник описываются приближенными равенствами

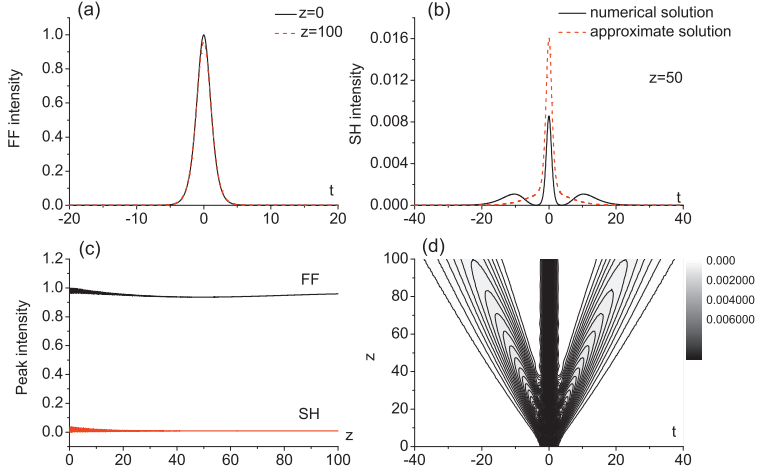


Рис. 1: Форма импульса основной волны (а) и волны второй гармоники (b); эволюция пиковой интенсивности основной волны (FF) и волны второй гармоники (SH) (c); эволюция формы импульса волны второй гармоники (d) в квадратичной среде ($\alpha = 0$) с параметрами $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1$ в отсутствие входного излучения на удвоенной частоте и солитонном входном импульсе (12) основной волны при $A_0 = 1$.

$$E_1(z, t) = a_0(t, z) + o\left(\frac{1}{\Delta k}\right), \quad (11a)$$

$$E_2(z, t) = \frac{1}{\Delta k} (\gamma_2 a_0^2(t, z) e^{-i\Delta k z} + \bar{b}_1(t, z)) + o\left(\frac{1}{\Delta k}\right). \quad (11b)$$

Из уравнений (8b), (10) следует, что в случае задания начального распределения основной волны в солитонной форме:

$$E_{10}(t) = a_0(t, z)|_{z=0}, \quad (12a)$$

$$a_0(t, z) = A_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(A_0 \sqrt{\frac{1}{2D_{2,1}} \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\Delta k} \right) t} \right) \exp \left(-i \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\Delta k} \right) A_0^2 z \right), \quad (12b)$$

эта солитонная форма должна сохраняться с хорошей точностью. В процессе распространения основной волны генерируется волна второй гармоники малой интенсивности, представляемая в виде суммы двух

волн – волны, формируемой излучением волны основной гармоники, и малоамплитудной линейной волны $\bar{b}_1(t, z)$.

Компьютерные расчеты подтверждают сохранение с большой точностью солитонной формы импульса основной волны (Рис. 1). Однако наблюдается расхождение между формой импульса волны второй гармоники, полученной в компьютерном эксперименте (сплошная линия на Рис. 1b) и приближенным решением (11b) (пунктирная линия на Рис. 1b). Данное расхождение является следствием начального этапа распространения излучения, на котором часть энергии основной волны преобразуется в энергию волны на удвоенной частоте. В результате начальное распределение линейной волны $\bar{b}_1(t, z)$ приобретает дополнительный неоднородный по переменной t сдвиг фаз, приводящий к формированию двух линейных субимпульсов волны второй гармоники – быстрого и медленного.

4.2 Малоамплитудное излучения на удвоенной частоте на входе в нелинейную среду

Сохранение начальных распределений с большой точностью возможно, если начальные распределения гарантируют отсутствие линейных волн ($\bar{a}_1(t, z) \equiv 0, \bar{b}_1(t, z) \equiv 0$). Это возможно, например, в случае, когда входной импульс основной волны имеет солитонную форму (12), а входной импульс волны второй гармоники связан с входным импульсом волны основной гармоники соотношением

$$E_2(z = 0, t) = \frac{\gamma_2}{\Delta k} E_{10}^2(t). \quad (13)$$

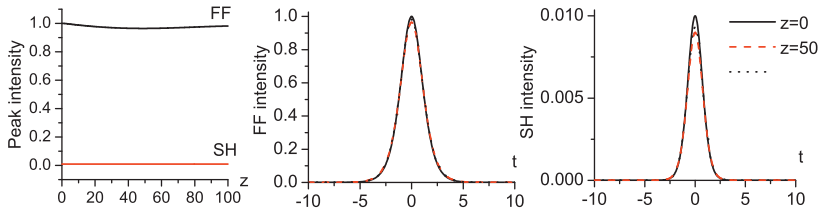


Рис. 2: Эволюция пиковой интенсивности основной волны (FF) и волны второй гармоники (SH); форма импульса основной волны и волны второй гармоники в различных сечениях среды в квадратичной среде ($\alpha = 0$) с параметрами $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1$ при задании входных импульсов (12), (13) при $A_0 = 1$.

Компьютерный эксперимент подтверждает данный вывод (Рис. 2). При задании входных импульсов обеих волн в солитонном виде (12),

(13) в чисто квадратичной среде ($\alpha = 0$) обе волны распространяются в солитонном режиме на большой трассе распространения (порядка десяти дисперсионных длин).

5 Солитонный режим распространения двуцветного лазерного излучения

Рассмотренные в предыдущих разделах солитонные режимы распространения волн характеризуются высокоинтенсивной волной основной частоты и низкоинтенсивной волной удвоенной частоты. Из приближенных уравнений (7), (8) следует, что такие режимы возможны как в квадратично-кубичной среде, так и в чисто квадратичной среде. Солитонные режимы со сравнимыми амплитудами обеих волн невозможны в чисто квадратичной среде при больших фазовых расстройках [9]. Однако такие режимы возможны в среде с комбинированной квадратично-кубичной нелинейностью. Действительно, при выполнении соотношений

$$\alpha_1\beta - \frac{\gamma_1^2}{\Delta k} = 0, \quad \alpha_2\beta - 2\frac{\gamma_1\gamma_2}{\Delta k} = 0$$

связанная система уравнений (7), описывающая главные члены разложений для обеих волн, распадается на два независимых уравнения Шредингера

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0}{\partial z} + v_1 \frac{\partial a_0}{\partial t} + iD_{2,1} \frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} + i \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1\gamma_2}{\Delta k} \right) |a_0|^2 a_0 &= 0, \\ \frac{\partial b_0}{\partial z} + v_2 \frac{\partial b_0}{\partial t} + iD_{2,2} \frac{\partial^2 b_0}{\partial t^2} + i\alpha_2 |b_0|^2 b_0 &= 0, \end{aligned}$$

каждое из которых имеет солитонное решение:

$$a_0(t, z) = A_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(A_0 \sqrt{\frac{1}{2D_{2,1}}} \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1\gamma_2}{\Delta k} \right) t \right) \exp \left(-i \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_1\gamma_2}{\Delta k} \right) A_0^2 z \right) \quad (14a)$$

$$b_0(t, z) = B_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(B_0 \sqrt{\frac{\alpha_2}{2D_{2,2}t}} \right) \exp(-i\alpha_2 B_0^2 z) \quad (14b)$$

параметры A_0, B_0 , задают амплитуды солитонов и могут быть выбраны произвольным образом.

При задании соответствующих начальных условий:

$$E_1(z = 0, t) = a_{00}(t) - \frac{\gamma_1}{\Delta k} a_{00}^*(t) b_{00}(t) \quad (15a)$$

$$E_2(z = 0, t) = b_{00}(t) + \frac{\gamma_2}{\Delta k} a_{00}^2(t) \quad (15b)$$

$$a_{00}(t) \equiv a_0(t, z = 0), \quad b_{00}(t) \equiv b_0(t, z = 0), \quad (15c)$$

линейные волны не генерируются ($\bar{a}_1(t, z) \equiv 0$, $\bar{b}_1(t, z) \equiv 0$), а приближенное решение для обеих волн описывается солитонными решениями уравнения Шредингера

$$E_1(z, t) = a_0(t, z) - \frac{\gamma_1}{\Delta k} a_0^*(t, z) b_0(t, z) e^{i\Delta k z}, \quad (16a)$$

$$E_2(z, t) = b_0(t, z) + \frac{\gamma_2}{\Delta k} a_0^2(t, z) e^{-i\Delta k z}, \quad (16b)$$

Решения (16) представляют собой осциллирующие солитонные решения, пиковая амплитуда которых испытывает колебания с амплитудой ΔA и периодом P , задаваемыми соотношениями

$$\Delta A = A_0^2 B_0 4\gamma_1 \Delta k, \quad P = \frac{2\pi}{2\alpha(3A_0^2 - B_0^2) + \Delta k}. \quad (17)$$

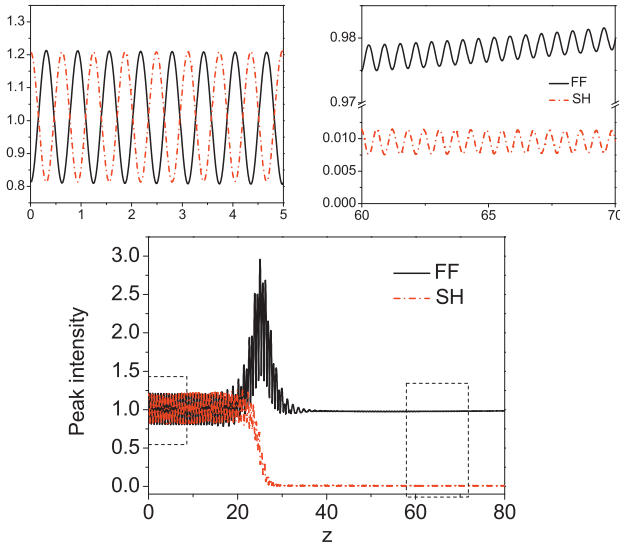


Рис. 3: Эволюция пиковой интенсивности основной волны (FF) и волны второй гармоники (SH) в квадратично-кубичной среде с параметрами $\alpha = 0.05$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1$, $\Delta k = 10$ при задании входных импульсов (14), (15) с $A_0 = B_0 = 1$.

Компьютерный эксперимент подтверждает существование полученных солитонных решений, которые однако оказываются неустойчивыми

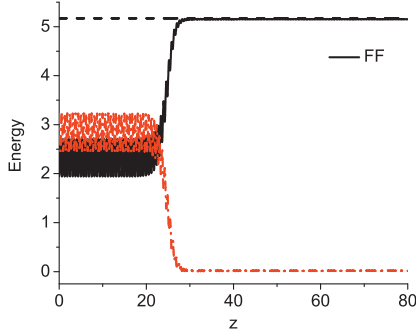


Рис. 4: Эволюция энергии основной волны (FF) и волны второй гармоники (SH) в квадратично-кубичной среде с параметрами $\alpha = 0.05$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1$, $\Delta k = 10$ при задании входных импульсов (14), (15) с $A_0 = B_0 = 1$.

на большой трассе распространения. На Рис. 3 - 6 приведены результаты компьютерного эксперимента для значений параметров

$$\alpha = 0.05, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1, \quad \Delta k = 10, \quad v_1 = v_2 = 0$$

и начальных значений пиковых амплитуд солитонных решений $A_0 = B_0 = 1$.

Приближенное солитонное решение (16) сохраняется на некоторой трассе распространения (до 20 безразмерных единиц). На этой трассе распространения форма импульсов, амплитуда и период колебаний пиковой интенсивности с хорошей точностью описываются формулами (14), (16), (17) (Рис. 3). Заметим, что значения параметров колебаний пиковой амплитуды для обеих волн (17) с хорошей точностью соответствуют формулам, полученным в приближении длинных волн [15].

В процессе распространения волн постепенно нарастает отклонение решения от приближенного решения, в результате чего происходит перестройка режима распространения, которая приводит к перераспределению большей части энергии от волны второй гармоники к основной волны (Рис. 4) - происходит процесс генерации половинной частоты. После перестройки к начальному импульсу основной волны, который продолжает распространяться без изменений, добавляются два субимпульса солитонной формы – быстрый и медленный (Рис. 5, 6). Излучение на удвоенной частоте становится низкоинтенсивным, связанным с импульсом основной волны формулой

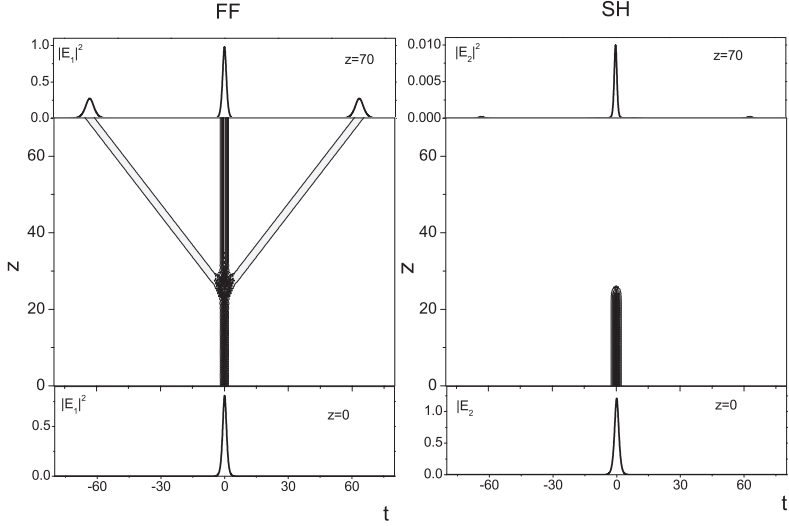


Рис. 5: Эволюция формы основной волны (FF) и волны второй гармоники (SH) в квадратично-кубичной среде с параметрами $\alpha = 0.05$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1$, $\Delta k = 10$ при задании входных импульсов (14), (15) с $A_0 = B_0 = 1$.

$$E_2(z, t) = \frac{\gamma_2}{\Delta k} E_1^2(z, t) e^{-i\Delta k z} \quad (18)$$

После перестройки решения, центральный импульс основной волны сохраняет солитонную форму, однако параметры колебаний его пиковой амплитуды существенно уменьшаются, тем не менее с хорошей точностью удовлетворяя формулам (17) и формулам из статьи [15]. Распространение центральных субимпульсов обеих волн после перестройки соответствует солитонному распространению волн в каскадном пределе с высокоинтенсивной основной волной и низкоинтенсивной волной второй гармоники.

Сформированные после перестройки два субимпульса основной волны имеют несущие частоты, отличающиеся от несущей частоты центрального импульса, однако в сумме дающие несущую частоту падающего импульса волны второй гармоники (Рис. 6). Различие несущих частот приводит к разбеганию субимпульсов (Рис. 5). Спектры импульсов сохраняются в процессе их распространения после перестройки, что доказывает солитонный характер распространения волн.

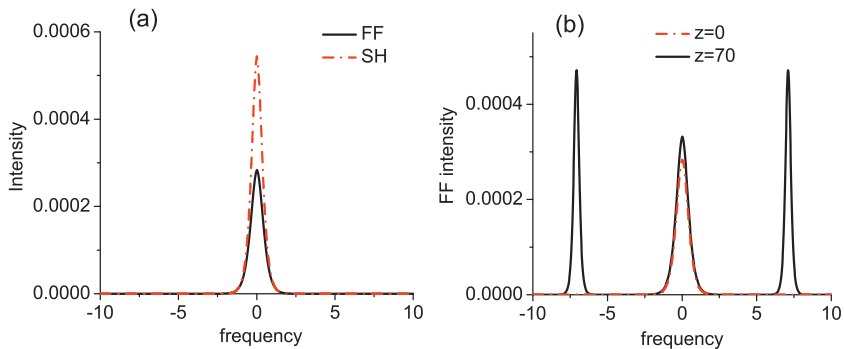


Рис. 6: Спектр импульса основной волны (FF) и волны второй гармоники (SH) на входе в квадратичной-кубичной среде (a) и в сечении $z=70$ (b). Параметры среды $\alpha = 0.05$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1$, $\Delta k = 10$ при задании входных импульсов (14), (15) с $A_0 = B_0 = 1$.

Аналогичные процессы происходят и при задании начальных распределений в виде высокоинтенсивной волны второй гармоники и низкоинтенсивной волны основной гармоники ($A_0 = 0.1, B_0 = \sqrt{0.99}$, Рис. 7). В результате перестройки солитонного решения формируются субимпульсы основной волны. Интенсивность субимпульсов существенно превышает исходную интенсивность центрального импульса, который продолжает распространяться без изменения своей пиковой интенсивности. Суммарная энергия субимпульсов почти равна начальной энергии импульса волны второй гармоники. Таким образом, происходит практически 100 % преобразование энергии волны на удвоенной частоте в энергию волны на основной частоте. Низкоинтенсивный импульс волны второй гармоники также состоит из трех субимпульсов, связанных с субимпульсами основной волны. Однако в этом случае импульсы волн (Рис. 7c,d) уже не связаны равенством (18).

6 Заключение

В заключение, на основе метода многих масштабов получены условия солитонного распространения двухцветного лазерного излучения в среде с комбинированной нелинейностью, выписаны приближенные солитонные решения и проведена верификация этих решений в компьютерном эксперименте. Показано, что солитонное распространение лазерного излучения со сравнимыми пиковыми амплитудами происходит на ограниченной трассе распространения. В результате перестройки решения происходит трансформация энергии волны на удвоенной частоте в энергию волны на основной частоте – то есть происходит генерация половинной гармоники.

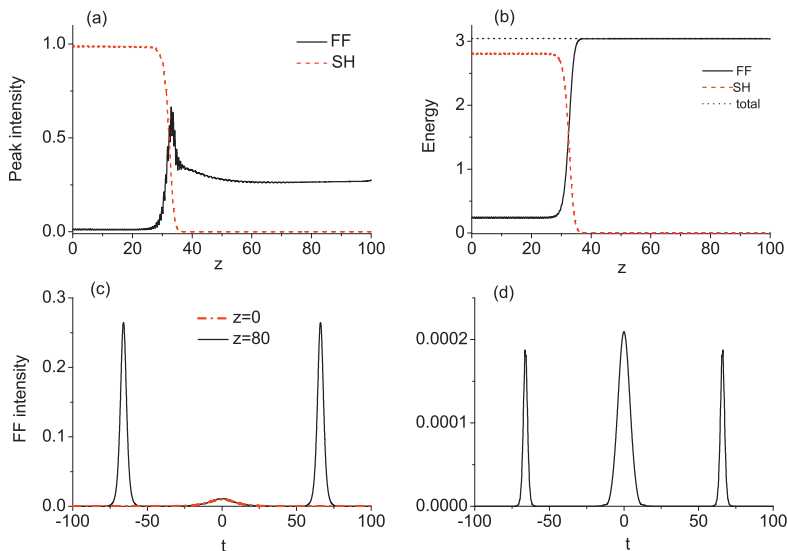


Рис. 7: Эволюция пиковой интенсивности (a) и энергии (b) основной волны (FF) и волны второй гармоники (SH); форма импульса основной волны (c) и волны второй гармоники (d) после перестройки решения. Квадратично-кубическая среда с параметрами $\alpha = 0.05$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $D_{2,1} = D_{2,2} = 0.1$, $\Delta k = 10$ при задании входных импульсов (14), (15) с $A_0 = 1$, $B_0 = \sqrt{0.99}$.

В результате генерации половинной гармоники формируются два субимпульса основной волны солитонной формы, при этом основной импульс основной волны распространяется без изменений. Процесс генерации половинной гармоники особенно выражен при малой начальной пиковой интенсивности основной волны. В этом случае практически вся энергия волны второй гармоники переходит в энергию волны на основной частоте.

Авторские декларации

Финансирование

Работа выполнена при частичной поддержке госбюджетной темы НИР № 2.1.21 ВМК МГУ.

Доступность данных и программного кода

Недоступны.

Конфликт интересов

Отсутствует.

Вклад авторов

Т.М. Лысак - разработка математических методов, написание текста статьи. Н.В. Песков - численные эксперименты, написание текста статьи.

Список литературы

- [1] *Kivshar U.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals. — Boston, USA: Academic Press (Elsevier Science), 2003.
- [2] *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [3] *Torner L., Stegeman G.I.* Multicolor Solitons // *Optics and Photonics News*. — 2001. — Vol. 12, no. 6. — Pp. 36–39.
- [4] *Wu L., Chen W., Shen M.* Incoherently coupled two-color vector dark solitons in self-defocusing media // *Opt. Express*. — 2018. — Vol. 26. — Pp. 32194–32204.
- [5] *Liu X., Beckwitt K., Wise F.* Two-dimensional optical spatiotemporal solitons in quadratic media // *Phys. Rev. E*. — 2000. — Vol. 62. — P. 1328.
- [6] Optical solitons due to quadratic nonlinearities: from basic physics to futuristic applications / A.V. Buryak, P. Di Trapani, D.V. Skryabin, Trillo S. // *Physics Reports*. — 2002. — Vol. 370, no. 2. — Pp. 63–235.
- [7] *G.I. Stegeman.* Quadratic spatial solitons // *Comptes Rendus Physique*. — 2007. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 221–233.
- [8] Two-color solitons in chirped photonic lattices / J. Zheng, C. Huang, S. Zhong, L. Dong // *J. Opt. Soc. Am.* — 2010. — Vol. 27. — Pp. 2224–2230.
- [9] *Torner L.* Stationary solitary waves with second-order nonlinearities // *Optics Communications*. — 1995. — Vol. 1148, no. 1-2. — Pp. 136–149.
- [10] Трехчастотные взаимодействия интенсивных световых волн в средах с квадратичной и кубической нелинейностями / Т.Б. Разумихина, Л.С. Телегин, А.И. Холодных, А.С. Чиркин // *Квантовая электроника*. — 1984. — Т. 11, № 10. — С. 2026–2030.

- [11] *Lysak T.M., Trofimov V.A.* Efficient second harmonic generation by a femtosecond pulse far from phase matching // *Optics and Spectroscopy*. — 2002. — Vol. 92, no. 2. — Pp. 287—289.
- [12] Высокоэффективная генерация второй гармоники интенсивного фемтосекундного излучения при существенном влиянии кубической нелинейности / С.Ю. Миронов, В.Н. Гинзбург, В.В. Ложкарев и др. // *Квантовая электроника*. — 2011. — Т. 41, № 11. — С. 963—967.
- [13] *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. — Wiley Classics Library Edition (John Wiley & Sons, Inc.), 1993.
- [14] Effective lensing effects in parametric frequency conversion / C. Conti, S. Trillo, P. Di Trapani et al. // *J. Opt. Soc.Am. B*. — 2002. — Vol. 19, no. 11. — Pp. 852—859.
- [15] *Lysak T.M., Trofimov V.A.* Second Harmonic Generation by Femtosecond Pulse under the Condition of Nonzero Amplitude of the Double-Frequency Wave // *Optics and Spectroscopy*. — 2002. — Vol. 93, no. 5. — Pp. 797—809.