УДК: 519.886.2

О верхних оценках стоимости азиатского опциона

Морозов В. В.[1*], Тасжанов Т. К.[1]

[1*]Кафедра исследования операций, Факультет ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия.

*Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s): vmorosov@mail.ru;
Соавторы: timurtaszhanov@gmail.com;

Получено редакцией 18.01.2024; внесены авторские правки 23.09.2024; принята к публикации 02.10.2024

1 Введение

В модели финансового рынка Блэка-Шоулса [1] стоимость актива (акции, валюты и т.п.) $S(t)$ задается стохастическим уравнением геометрического броуновского движения

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dz(t)), \tag{1}$$

где r — банковская процентная ставка, $\sigma > 0$ — волатильность, а $z(t)$ — стандартный винеровский процесс, $z(0) = 0$. По смыслу rdt — математическое ожидание доходности актива $dS(t)/S(t)$ за время dt, а $\sigma^2 dt$ — дисперсия этой доходности. Рынок предполагается безарбитражным, т.е. исключающим возможность получения прибыли без всякого риска (строгое определение см. в [2]). Для этого достаточно потребовать, чтобы процесс $e^{-rt}S(t)$ был мартингалом. Уравнение (1) имеет решение $S(t) = S(0)e^{x(t)}$, где $x(t) = \tilde{r}t + \sigma z(t)$ — процесс броуновского движения со сносом $\tilde{r} = r - \sigma^2/2$. Пусть $\bar{S} = \int_0^T S(t)dt/T$ — средняя стоимость актива на отрезке времени от 0 до T. (Черта будет использоваться для обозначения средних значений функций и процессов.)

Азиатский опцион европейского типа представляет собой ценную бумагу, дающую возможность покупки актива в момент исполнения T по цене K. Платеж по опциону равен величине $(\bar{S} - K)^+$, где $x^+ = \max(x, 0)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим пример использования опциона.

Пусть дистрибьютор планирует покупку в момент T актива по оптовой цене K для его дальнейшей продажи в розницу. Он предполагает, что средняя цена актива $\bar{S}$ на отрезке $[0, T]$ сохранится и в будущем. Приобретая опцион, дистрибьютор имеет возможность оптовой закупки актива по цене $K \leqslant \bar{S}$. Если $K > \bar{S}$, то опцион не предъявляется. Его стоимость в начальный момент времени $t = 0$ дается формулой $c(S, 0) = e^{-rT}\mathrm{E}_0[(\bar{S} - K)^+]$, где E_0 — символ математического ожидания при условии $S(0) = S$.

Использование численных методов для поиска $c(S, 0)$ обычно вызывает затруднения при установлении точности результатов. Например, часть оценок, полученных в [3] по методу Монте-Карло, оказалась меньше нижней оценки стоимости $c(S, 0)$ (см. [4]). Другой подход состоит в построении нижних и верхних оценок для $c(S, 0)$ [4],[5],[6]. В [4] была предложена нижняя оценка в виде двойного интеграла, представленная впоследствии в [5] как однократный интеграл. В [4] также найдена аналитически несложная оценка длины отрезка, содержащего стоимость $c(S, 0)$. Это дало быструю, но весьма грубую верхнюю оценку для $c(S, 0)$. Она последовательно улучшалась в работах [5] и [6]. В последней осуществлялась минимизация двойного интеграла по параметру. В настоящей статье предложены некоторые модификации верхних оценок из [5],[6] и произведено их численное сравнение.

2 Метод получения верхних оценок

Верхние оценки стоимости азиатского опциона в литературе получены в основном с использованием следующего неравенства. Пусть H — множество абсолютно интегрируемых на отрезке $[0, T]$ функций h, для которых выполнено условие нормировки $\bar{h} = \int\limits_0^T h(t)dt/T = 1$. Рассмотрим множество W случайных процессов $w(t)$, согласованных с естественной фильтрацией винеровского процесса $z(t)$ и для которых интеграл $\int_0^T |w(t)|dt$ конечен почти всюду. Тогда для любой функции $h \in H$, любого процесса $w \in W$ и любого числа $a \in \mathbb{R}$ имеем

$$E_0(\bar{S} - K)^+ = E_0\Big(\frac{1}{T}\int\limits_0^T [S(t) - Kh(t) - aK(w(t) - \bar{w})]dt\Big)^+ \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\int\limits_0^T E_0[S(t) - Kh(t) - aK(w(t) - \bar{w})]^+ dt \overset{def}{=} \frac{1}{T}B(h, a).$$

Здесь использовано неравенство Йенсена для выпуклой функции $x^+ :\ (\bar{u})^+ \leqslant \overline{(u^+)}$, справедливого для любого процесса $u \in W$. Из выпуклости функции x^+ также следует выпуклость функционала $B(h, a)$ по переменным h и a. Минимизируя его по этим переменным при разных процессах $w(t)$, можно получать различные верхние оценки стоимости азиатского опциона.

3 Верхняя оценка при $w(t) = x(t)$

Положим $w(t) = x(t)$, где $x(t) = \tilde{r}t + \sigma z(t)$. Следуя [5], займемся решением задачи

$$\min_{h \in H} B(h, a) = B(h^*(a), a)$$

при любом фиксированном a (в [5] предполагалось, что $a = 1$). Приведем без доказательства две леммы.

Лемма 1. *Пусть заданы числа ε, a, d и положительное число K, а также двумерная нормально распределенная случайная величина (X, X_1) с плотностью $\psi(x, x_1)$ и возрастающая дифференцируемая функция $Q(x)$. Тогда существует производная*

$$\frac{dE(Q(X) - \varepsilon K y - aX_1 - d)^+}{dy} = -\varepsilon K \mathbb{P}\{Q(X) - aX_1 \geqslant \varepsilon K y + d\}. \quad (2)$$

Следствие 1.1. *Функция $E(Q(X) - \varepsilon K y - aX_1 - d)^+$ дифференцируема и выпукла по переменной y.*

Доказательство. При $\varepsilon > 0$ вероятность $\mathbb{P}\{Q(X) - aX_1 \geqslant \varepsilon K y + d\}$ убывает по y, а при $\varepsilon < 0$ она возрастает. В обоих случаях производная (2) возрастает по y. □

Рассмотрим множество Ξ абсолютно интегрируемых на $[0, T]$ функций ξ, удовлетворяющих условию $\int_0^T \xi(t) dt = 0$.

Лемма 2. *Пусть g — функция, непрерывная на отрезке $[0, T]$. Если для любой функции $\xi \in \Xi$ выполнено $\int_0^T \xi(t) g(t) dt = 0$, то функция g — константа.*

Пусть существует функция $h^*(t, a)$, минимизирующая функционал $B(h, a)$ на множестве H при заданном a. Любая функция $\xi \in \Xi$ задает возможное направление в точке $h^* \in H$. Определим функцию $v(y, a, \xi) = B(h^* + y\xi, a)$. По следствию 1.1 функция $v(y, a, \xi)$ дифференцируема и выпукла по переменной y. Из условия минимума первого порядка для любой функции $\xi \in \Xi$ справедливо равенство $v'_y(0, a, \xi) = 0$ или по лемме 1

$$\int_0^T \xi(t) \mathbb{P}\{S e^{x(t)} - aK(x(t) - \bar{x}) - K h^*(t, a) \geqslant 0\} dt = 0.$$

Из леммы 2 следует, что найдется такая константа $\kappa \in (0, 1)$, для которой выполнено тождество по переменной t

$$\mathbb{P}\{S e^{\tilde{r}t + \sigma z(t)} - aK(x(t) - \bar{x}) - K h^*(t, a) \geqslant 0\} \equiv \kappa. \quad (3)$$

Таким образом, при каждом $t \in [0,T]$ значение функции $h^*(t,a)$ определяется как κ-квантиль распределения случайной величины $(Se^{\tilde{r}t+\sigma z(t)} - aK(x(t)-\bar{x}))/K$. С учетом выпуклости функционала $B(h,a)$ по $h \in H$ тем самым доказана

Теорема 3. *Для всякого $a \in \mathbb{R}$ минимум функционала $B(h,a)$ по $h \in H$ достигается на функции $h^*(t,a)$, определяемой тождеством* (3).

При $a \neq 0$ найти оптимальную функцию $h^*(t,a)$ из тождества (3) весьма затруднительно. Поэтому займемся поиском квазиоптимальной функции $\tilde{h}$. Имеем: $x(t)-\bar{x} = \tilde{r}(t-T/2)+\sigma(z(t)-\bar{z})$. Поскольку величина σ мала, заменим в тождестве (3) экспоненту $e^{\sigma z(t)}$ на $1+bz(t)$, где b — малый параметр. В результате функцию $\tilde{h}(t,a,b)$ определим из тождества

$$\mathbb{P}\{Se^{\tilde{r}t}(1+bz(t)) - aK(\tilde{r}(t-T/2)+\sigma(z(t)-\bar{z})) - K\tilde{h}(t,a,b) \geqslant 0\} \equiv \kappa.$$

Положим $c_t = bSe^{\tilde{r}t} - aK\sigma$, $N_t = c_t z(t) + aK\sigma\bar{z}$. Тогда последнее тождество приобретает вид

$$\mathbb{P}\{Se^{\tilde{r}t} - aK\tilde{r}(t-T/2) + N_t \geqslant K\tilde{h}(t,a,b)\} \equiv \kappa. \tag{4}$$

Дисперсии нормально распределенных величин $z(t), \bar{z}$ и их ковариация равны $Var\, z(t) = t$, $Var\,\bar{z} = T/3$ и $Cov(z(t),\bar{z}) = t(1-t/(2T))$ [5]. Отсюда следует, что дисперсия случайной величины N_t равна $v_t = Var\, N_t = c_t^2 t + a^2\sigma^2K^2T/3 + 2c_t a\sigma Kt(1-t/(2T))$. Случайная величина $V = N_t/\sqrt{v_t}$ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Теперь тождество (4) можно переписать в виде

$$\mathbb{P}\Big\{V \geqslant \frac{K\tilde{h}(t,a,b) - Se^{\tilde{r}t} + aK\tilde{r}(t-T/2)}{\sqrt{v_t}}\Big\} \equiv \kappa.$$

Поэтому величина $(K\tilde{h}(t,a,b) - Se^{\tilde{r}t} + aK\tilde{r}(t-T/2))/\sqrt{v_t}$ не зависит от t и представляет собой константу. Обозначим ее через γ. Отсюда $\tilde{h}(t,a,b) = Se^{\tilde{r}t}/K - a\tilde{r}(t-T/2) + \gamma\sqrt{v_t}/K$. Из условия нормировки для $\tilde{h}(t,a,b)$ получим константу

$$\gamma = \begin{cases} \Big(\int\limits_0^T \sqrt{v_t}dt\Big)^{-1}\Big(TK - S(e^{\tilde{r}T}-1)/\tilde{r}\Big), & \tilde{r} \neq 0, \\ \Big(\int\limits_0^T \sqrt{v_t}dt\Big)^{-1} T(K-S), & \tilde{r} = 0. \end{cases}$$

Найдем интеграл

$$B(\tilde h(a,b),a)=\int\limits_0^T E[Se^{\tilde r t+\sigma z(t)}-K\tilde h(t,a,b)-aK(x(t)-\bar x)]^+dt=$$

$$=\int\limits_0^T E\Big[Se^{\tilde r t+\sigma\sqrt{t}X}-K\tilde h(t,a,b)-a\tilde r K\Big(t-\frac{T}{2}\Big)-a\sigma K\Big(\sqrt{t}X-\sqrt{\frac{T}{3}}Y\Big)\Big]^+dt,$$

где двумерная величина $(X,Y)=\big(z(t)/\sqrt{t},\sqrt{3/T}\bar z\big)$ с ковариацией $\rho(t)=Cov(X,Y)=\sqrt{3t/T}(1-t/(2T))$ имеет нормальную плотность

$$\psi(x,y,\rho(t))=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2(t)}}\exp\Big(-\frac{(y-\rho(t)x)^2}{2(1-\rho^2(t))}-\frac{x^2}{2}\Big).$$

Вводя обозначения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ \Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^x\varphi(y)dy,$$

$$\rho_1(t)=\sqrt{1-\rho^2(t)},\ a_1(x,t)=Se^{\tilde r t+\sigma\sqrt{t}x}-K\tilde h(t,a,b)-a\tilde r K\Big(t-\frac{T}{2}\Big),$$

$$a_2(x,t)=a_1(x,t)-Ka\sigma\sqrt{t}x+Ka\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}\rho(t)x,\ b_2(t)=a\sigma K\sqrt{\frac{T}{3}}\rho_1(t),$$

интеграл $B(\tilde h(a,b),a)$ при $a\neq 0$ можно преобразовать к виду (см. [5])

$$B(\tilde h(a,b),a)=\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\Big[a_2(t,x)\Phi\Big(\frac{a_2(t,x)}{|b_2(t)|}\Big)+b_2(t)\varphi\Big(\frac{a_2(t,x)}{b_2(t)}\Big)\Big]dxdt. \tag{5}$$

В [5] была предложена верхняя оценка $U_1=e^{-rT}B(\tilde h(1,\sigma),1)/T$. Ее улучшает оценка

$$U_2=\frac{e^{-rT}}{T}\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}B(\tilde h(a,b),b)=\frac{e^{-rT}}{T}B(\tilde h(a^*,b^*),a^*).$$

4 Верхняя оценка при $w(t)=c(t)z(t)+d(t)$

В [6] высказана идея следующей верхней оценки. Если в функционале $B(h,a)$ положить $h(t)\equiv 1$, $a=1$ и $w(t)=S(t)/K$, то оценка $e^{-rT}B(1,1)/T$ становится точной, т.е. совпадает со стоимостью $c(S,0)$.

Заменим процесс $S(t)/K$ на $c(t)z(t)+d(t)$, где детерминированные функции $c(t)$ и $d(t)$ определяются из условий равенства математических ожиданий и дисперсий процессов $c(t)z(t)+d(t)$ и $S(t)/K$:

$$E[c(t)z(t)+d(t)] = E_0\Big[\frac{S(t)}{K}\Big],\ Var[c(t)z(t)+d(t)] = Var_0\Big[\frac{S(t)}{K}\Big]$$

или, учитывая, что $Ez(t)=0$ и $Var\,z(t)=t$,

$$d(t) = E\Big[\frac{S}{K}e^{x(t)}\Big] = \frac{S}{K}e^{rt},\ c^2(t)t = \frac{S^2}{K^2}e^{2rt}(e^{\sigma^2 t}-1).$$

Поскольку величина σ мала, для разности $e^{\sigma^2 t}-1$ воспользуемся разложением $\sigma^2 t+\sigma^4 t^2/2$. Тогда $c(t) = (S/K)e^{rt}\sigma\sqrt{1+pt}$, где $\sigma^2/2$ заменяет малый параметр p. Далее вместо $B(1,1)$ будем писать $B(1,1,p)$.

Рассмотрим процесс $w(t) = c(t)z(t)+d(t)$. Его среднее значение $\bar{w} = Y_1+S(e^{rT}-1)/(rKT)$, где $Y_1=\int_0^T c(t)z(t)dt/T$ — нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$Var\,Y_1 = \sigma_1^2 = \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T c(t)c(s)\min(t,s)dsdt.$$

При фиксированном $t\in[0,T]$ ковариация случайных величин $z(t)$ и Y_1 равна

$$a_1(t) \overset{def}{=} Cov(z(t),Y_1) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T c(s)\min(t,s)ds.$$

Случайные величины $X=z(t)/\sqrt{t}$, $Y=Y_1/\sigma_1$ имеют стандартные нормальные распределения $\mathcal{N}(0,1)$ с коэффициентом корреляции $\rho(t) = Cov(X,Y) = a_1(t)/(\sigma_1\sqrt{t})$.

Полагая $b_1(t)=\sqrt{-r(1/p+t)}$, функцию $a_1(t)$ можно представить в виде

$$a_1(t) = \frac{\sigma S}{KTrb_1(0)}\Big\{te^{rT}b_1(T) - \frac{t\sqrt{\pi}}{2}e^{-r/p}(\mathrm{erf}(b_1(T)) - \mathrm{erf}(b_1(t))+$$

$$+\frac{3}{2r}(b_1(0)-e^{rt}b_1(t)) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-r/p}\Big(\frac{3}{2r}+\frac{1}{p}\Big)(\mathrm{erf}(b_1(t))-\mathrm{erf}(b_1(0))\Big\},$$

где $\mathrm{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi})\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ — функция ошибок. Запишем значение функционала

$$B(1,1,p) = \int\limits_0^T E_0[S(t) - K(1 + w(t) - \bar{w})]^+ dt =$$

$$= \int\limits_0^T E\Big[Se^{\tilde{r}t+\sigma\sqrt{t}X} - K\Big(1 + \frac{S}{K}\Big(e^{rt} - \frac{1}{rT}(e^{rT}-1)\Big) + c(t)\sqrt{t}X - \sigma_1 Y\Big)\Big]^+ dt.$$

По аналогии с предыдущим пусть $\rho_1(t) = \sqrt{1-\rho^2(t)},\ b_2(t) = K\rho_1(t)\sigma_1,$

$$a_2(x,t) = Se^{\tilde{r}t+\sigma\sqrt{t}x} - K - S\Big(e^{rt} - \frac{1}{rT}(e^{rT}-1)\Big) - Kc(t)\sqrt{t}x + K\sigma_1\rho(t)x.$$

Тогда $B(1,1,p)$ находим по формуле (5) и получаем верхнюю оценку

$$U_3 = \frac{e^{-rT}}{T}\min_{p\in\mathbb{R}} B(1,1,p) = \frac{e^{-rT}}{T}B(1,1,p^*).$$

5 Минимизация функционала $\boldsymbol{B(h,a)}$ покоординатным спуском

Возьмем процесс $w(t) = x(t)$ и займемся минимизацией функционала $B(h,a)$. Функционал $B(h,a)$ задается формулой (5), где в выражении для $a_1(x,t)$ функцию $\tilde{h}(a,b)$ нужно заменить на h. Возьмем начальную функцию $h = 1$. В [6] предложена верхняя оценка стоимости азиатского опциона

$$U_4 = \frac{e^{-rT}}{T}\min_{a\in\mathbb{R}} B(1,a) = \frac{e^{-rT}}{T}B(1,a^*).$$

Это первая итерация по методу покоординатного спуска. Улучшим оценку U_4, используя вариацию $\xi_1 \in \Xi$, при которой функция $v(y,a^*,\xi_1) = B(1+y\xi_1,a^*)$ имеет в нуле производную (см. лемму 1)

$$v'_y(0,a^*,\xi_1) = -K\int\limits_0^T \xi_1(t)\mathbb{P}\{Se^{x(t)} - a^*K(x(t)-\bar{x}) - K \geqslant 0\}dt.$$

Функция $P(t) \stackrel{def}{=} \mathbb{P}\{Se^{x(t)} - a^*K(x(t)-\bar{x}) - K \geqslant 0\}$ представима в виде интеграла (см. формулу (5))

$$P(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{a_2(x,t)}{b_2(t)}\Big)\varphi(x)dx,$$

где в выражениях для $a_2(x,t)$ и $b_2(t)$ следует положить $a = a^*$ и вместо $\tilde{h}$ взять $h = 1$. Пусть t_1 и t_2 точки максимума и минимума функции $P(t)$ на отрезке $[0,T]$. Определим вариацию $\xi_1(t) = \varphi((t-t_1)/s_1)/k_1 - \varphi((t-t_2)/s_1)/k_2$ как разность плотностей нормального распределения, где величина $s_1 = |t_1 - t_2|/6$ определяется по правилу «трех сигм», а нормировочные коэффициенты $k_i = \Phi((T-t_i)/s_1) - \Phi(-t_i/s_1),\ i = 1,2,$ обеспечивают равенство нулю интеграла от вариации ξ_1 на отрезке $[0,T]$. Пусть минимум $\min\limits_{y\in\mathbb{R}} v(y, a^*, \xi_1)$ достигается в точке y_1. После второй итерации получаем промежуточную оценку $U_4' = e^{-rT}B(1 + y_1\xi_1, a^*)/T$. Далее делаем третью итерацию данного метода, вычисляя минимум $\min\limits_{a\in\mathbb{R}} B(1+y_1\xi_1, a) = B(1+y_1\xi_1, a^{**})$ и соответствующую верхнюю оценку $U_5 = e^{-rT}B(1+y_1\xi_1, a^{**})/T$. Следующая итерация использует вариацию ξ_2 и т.д.

6 Численное сравнение оценок

В таблицах 1 и 2 представлены результаты расчетов верхних оценок стоимости азиатского опциона $c(S,0)$ при $T = 1,\ S = 100$. Для сравнения указана нижняя оценка L, предложенная в [4]. Оценки вычислялись с точностью до шестого знака после точки. При этом верхние оценки округлялись до пятого знака в большую сторону, а нижние — в меньшую. Среднее время (в секундах) работы процессора с частотой 2.24 ГГц для каждой оценки составило $T_L = 0.02$, $T_{U_1} = 4.36$, $T_{U_2} = 776$, $T_{U_3} = 276$, $T_{U_4} = 75$, $T_{U_5} = 306$.

Таблица 1: Оценки стоимости азиатского опциона при $\sigma = 0.1$.

r	K	L	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0.05	90	11.95107	11.95223	11.95119	11.95139	11.95117	11.95114
	100	3.64134	3.64157	3.64154	3.64218	3.64155	3.64154
	110	0.33107	0.33225	0.33151	0.33185	0.33165	0.33152
0.09	90	13.38519	13.38603	13.38526	13.38538	13.38523	13.38522
	100	4.91507	4.91541	4.91526	4.91588	4.91525	4.91525
	110	0.63006	0.63102	0.63071	0.63097	0.63097	0.63076
0.15	90	15.39876	15.39916	15.39880	15.39883	15.39878	15.39878
	100	7.02767	7.02846	7.02783	7.02838	7.02780	7.02780
	110	1.41328	1.41431	1.41426	1.41436	1.41473	1.41438

Анализируя таблицы, можно сделать следующие выводы. При малой волатильности ($\sigma = 0.1$) верхняя оценка U_1 стоимости опциона близка к нижней оценки L и отличается от нее в третьем знаке после точки. Другие оценки улучшают U_1, но существенно уступают ей по времени

Таблица 2: Оценки стоимости азиатского опциона при $\sigma = 0.5$.

r	K	L	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0.05	90	17.42758	17.46884	17.45914	17.53149	17.45929	17.45738
	100	12.31491	12.35268	12.34551	12.40992	12.34611	12.34468
	110	8.50693	8.54958	8.53825	8.59501	8.53882	8.53699
0.09	90	18.18294	18.22077	18.21145	18.28822	18.21154	18.20987
	100	13.02253	13.05680	13.05095	13.11965	13.05168	13.05033
	110	9.11795	9.15601	9.14805	9.20762	9.14880	9.14710
0.15	90	19.30061	19.33469	19.32505	19.40758	19.32499	19.32363
	100	14.09498	14.12495	14.12072	14.19534	14.12125	14.12002
	110	10.06490	10.09794	10.09331	10.15770	10.09422	10.09272

вычисления. При большой волатильности ($\sigma = 0.5$) оценка U_3 хуже U_1 и по точности и по времени вычисления, а оценка U_2 по аналогичной причине проигрывает U_5. Метод покоординатного спуска дает удовлетворительные верхние оценки U_4 (одна итерация), U_4' (две итерации) и U_5 (три итерации). Промежуточная оценка U_4' в таблицах не указана, но ее значения ближе к U_5, чем к U_4. Выбор одной из последних трех оценок может быть продиктован ограничением по времени, затрачиваемым на вычисления.

Список литературы

[1] *Black F. Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // *Journal of Political Economy.* — 1973. — Vol. 81, no. 3. — Pp. 637–659.

[2] *А.Н. Ширяев.* Основы стохастической финансовой математики. — М.: ФАЗИС, 1999.

[3] *Levy E. Turnbill S.* Average intelligence // *RISK.* — 1992. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 5–9.

[4] *Rogers L.C.G. Shi Z.* The value of an Asian option // *Journal of Applied Probability.* — 1995. — Vol. 32, no. 4. — Pp. 1077–1088.

[5] *G. Thompson.* Fast narrow bounds on the value of Asian options. — Working paper: University of Cambridge, 1999.

[6] *Новиков А.А. Кордзахия Н.Е.* Нижние и верхние оценки для цен опционов азиатского типа // *Труды МИАН.* — 2014. — Т. 287. — С. 234–241.