С.А. Ложкин[1], Д.Э. Хзмалян[2]

О СЛОЖНОСТИ СТАНДАРТНОЙ МУЛЬТИПЛЕКСОРНОЙ ФУНКЦИИ В ОДНОМ КЛАССЕ КОНТАКТНЫХ СХЕМ*

Введение

Рассматриваемая задача относится к теории синтеза управляющих систем, которая является одним из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. Необходимость проектирования и логического описания дискретных вычислительных устройств различного типа привела к возникновению данной теории. Клод Шеннон в работах [1, 2] дал строгую математическую постановку задачи синтеза управляющих систем, положив тем самым начало соответствующей теории, исследования в которой ведутся с тех пор непрерывно.

В теории синтеза управляющих систем изучаются модели различных дискретных преобразователей сигналов, их сложность, надежность и другие характеристики. Интерес к этой области знания обусловлен, прежде всего, возможностью применения полученных результатов при проектировании оптимальных или близких к оптимальным по определённым характеристикам схем, при изучении их поведения и надёжности, при тестировании схем и т.д.

Задача синтеза ставится для определенного класса управляющих систем, при этом, количество таких классов довольно велико, что оправдано потребностью в изучении различных моделей и характеристик реальных схем. Для каждого класса определяется структура его схем и их функционирование в виде системы функций алгебры логики (ФАЛ). Также для каждого класса предполагается наличие функционала сложности, который каждой схеме ставит в соответствие положительное число, отражающее некоторую числовую характеристику для схем из рассматриваемого класса (например, в классе схем из функциональных элементов функционалом сложности может являться число элементов в схеме).

---

[1]МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru
[2]МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: david.khzmalian@gmail.com
* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621.

Задача синтеза в общем виде состоит в построении для заданной системы ФАЛ такой реализующей её схемы из заданного класса, на которой достигается минимальное значение исследуемого функционала сложности. Указанное значение считается сложностью данной системы ФАЛ в рассматриваемом классе схем относительно изучаемого функционала. В теории синтеза выделяют при этом два основных направления: “массового” и “индивидуального” синтеза.

Методы “массового” или, как его ещё называют, универсального синтеза позволяют единообразно строить схемы для произвольных ФАЛ. Критерием качества таких методов являются, обычно, получаемые с их помощью верхние оценки функции Шеннона, которая зависит от натурального аргумента n, равна сложности самой сложной ФАЛ от n булевых переменных (БП) и, как правило, при $n = 1,2,\ldots$ асимптотически совпадает со сложностью почти всех ФАЛ от этих БП. Однако, данные методы не оптимальны для задачи индивидуального синтеза. При доказательстве нижних оценок сложности индивидуальных ФАЛ мощностной подход, который используется для получения нижних оценок функции Шеннона, не применим, а для их получения используются особенности поведения самой ФАЛ. Поэтому в теории индивидуального синтеза доказательство нижних оценок, за исключением тривиальных оценок, связанных с числом существенных БП реализуемой ФАЛ (см., например, [3]), зачастую оказывается гораздо сложнее доказательства соответствующих верхних оценок.

Получение нижних оценок индивидуальной сложности сводится, обычно, к исследованию свойств и особенностей рассматриваемой ФАЛ, из которых выводится та или иная нижняя оценка их сложности. Стоит отметить, что зачастую используется прием “забивающих” констант, который связан с подстановкой константы 0 или 1 вместо некоторого количества входных БП в схему, реализующую данную ФАЛ, и последующим устранением из нее определенного числа элементов. Такой подход применялся, например, в работах [4,5].

Довольно широко изучалась сложность реализации “управляющих” ФАЛ и сложность реализации систем таких ФАЛ. В частности, доказано, что сложность реализации так называемого универсального многополюсника порядка n, то есть системы всех ФАЛ от n БП, в классе СФЭ в произвольном с единичными весами элементов равна $2^{2^n} - n$ (см. [6]). В работе [2] Шеннон построил универсальный контактный многополюсник с 1 входом и 2^{2^n} выходами, имеющий сложность асимптотически равную $2 \cdot 2^{2^n}$. Позднее С.А. Ложкин и М.А. Кошкин в работе [7] доказали, что он является асимптотически оптимальным.

Одним из самых распространенных классов индивидуальных управляющих систем ФАЛ являются конъюнктивные дешифраторы, то есть системы элементарных конъюнкций ранга n от n БП. Верхняя оценка сложности реализации полного дешифратора порядка n, то есть системы всех ЭК ранга n от n БП, в классе СФЭ в стандартном базисе, получается с помощью разбиения набора переменных на две части, равна $2^n + O\left(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}\right)$ и является асимптотически точной (см. [6]).

Сложность дешифратора порядка n в классе контактных схем с 1 входом и 2^n выходам, асимптотически равна 2^n (см. [8]). В работе [9] поведение сложности дешифратора порядка n в классе контактных схем было установлено на уровне так называемых асимптотических оценок высокой степени точности (АОВСТ), то есть с точностью до второго члена разложения, и оказалось равным величине вида $2^n + \frac{2^n}{n} \pm O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right)$.

В данной работе рассматривается задача индивидуального синтеза контактных схем (КС) для мультиплексорной функции алгебры логики порядка n, то есть для функции μ_n от $n + 2^n$ БП, первые n из которых называются "адресными", а оставшиеся 2^n – "информационными". Значение этой функции равно значению той ее информационной переменной, номер которой поступил на адресные входы.

В иностранной литературе (см., например, [10, 11]) мультиплексорная ФАЛ μ_n обычно называется *storage access function* (т. е. "функция доступа к памяти") либо *lookup function* (т. е. "функция поиска"), что подчёркивает сферу её применений.

Стоит отметить, что контактный мультиплексор порядка n может быть легко получен из контактного дешифратора порядка n с помощью проведения 2^n контактов информационных БП, которые будут соединять выходные полюса дешифратора с выходом мультиплексора.

Сложность мультиплексорной ФАЛ изучалась в ряде работ. Так, в работе [12] для сложности мультиплексорной ФАЛ в классе параллельно-последовательных схем были установлены АОВСТ следующего вида:

$$2^{n+1} + \frac{2^n}{n} \pm O\left(\frac{2^{n+1}}{n \log n}\right). \quad (1)$$

В работе [13] получена нижняя оценка сложности реализации мультиплексора порядка n в классе схем из функциональных элементов (СФЭ) в так называемом унимодальном базисе U_2, состоящем из всех двухместных элементарных конъюнкций и дизъюнкций, равная $2^{n+1} - 2$. В работе [14] приводится реализация стандартного мультиплексора порядка n с помощью СФЭ в этом же базисе со сложностью $2^{n+1} + O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$ и глубиной $n + \lceil \log n \rceil + 1$. Также известно (см., например, [15]), что сложность реализации ФАЛ μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, как формулами, так и СФЭ в стандартном базисе $Б_0$, асимптотически равна 2^{n+1}.

В работе [16] получена нижняя оценка вида $2^{n+1}+c_1(n)\cdot 2^{\frac{n}{2}}-O\left(2^{\frac{n}{4}}\right)$ и верхняя оценка вида $2^{n+1}+c_2(n)\cdot 2^{\frac{n}{2}}+O\left(2^{\frac{n}{4}}\right)$ для сложности реализации мультиплексора μ_n в классе СФЭ над базисом Б_0, где $c_1(n)=\frac{1}{3}$, $c_2(n)=2$, если n чётно, и $c_1(n)=0{,}32$, $c_2(n)=\frac{3}{\sqrt{2}}$ если n нечётно. При этом в работе [17] было установлено, что указанная нижняя оценка верна при $c_1(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

В настоящей работе изучается сложность реализации ФАЛ μ_n в одном специальном классе контактных схем, для которой устанавливаются близкие к АОВСТ оценки.

1. Основные определения, обозначения и формулировка полученных результатов

Напомним некоторые определения и факты, а также введем обозначения, связанные с реализацией ФАЛ в классе контактных схем. Те понятия, которые в данной работе не определяются, могут быть найдены в [18].

Сложностью $L(\Sigma)$ контактной схемы Σ будем называть количество контактов в ней.

Сложностью $L^K(f)$ ФАЛ f будем называть количество контактов в схеме, которая реализует f с минимальной сложностью.

Будем рассматривать мультиплексорную ФАЛ μ_n порядка n от $n+2^n$ переменных

$$\mu_n(x_1,x_2,\dots,x_n,y_0,y_1,\dots,y_{2^n-1})=\bigvee_{\tilde\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in B^n} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\dots x_n^{\sigma_n}y_{\nu(\tilde\sigma)},$$

где $\nu(\tilde\sigma)$ это число, двоичная запись которого совпадает с $\tilde\sigma$.

Следуя [6], будем говорить, что непустое подмножество U БП X ФАЛ f *забивает* ее БП x, $x\notin U$, если подстановкой некоторых констант вместо БП множества U из ФАЛ f можно получить ФАЛ, не зависящую существенно от x.

Множество X, состоящее из БП ФАЛ f, будем называть *незабиваемым*, если $|X|\geq 2$ и любая БП x, $x\in X$, не забивается множеством $X\setminus\{x\}$. Переменная, принадлежащая некоторому незабиваемому множеству БП ФАЛ f, считается *незабиваемой* переменной этой ФАЛ.

Из определений следует, что если U - незабиваемое множество БП ФАЛ f и $U'\subset U$, $|U'|\geq 2$, то при любой подстановке констант вместо БП из множества $U\setminus U'$ в ФАЛ f получается ФАЛ f', для которой множество U' является незабиваемым множеством. Заметим, что информационные БП образуют незабиваемое множество переменных ФАЛ μ_n, и, следовательно, в соответствии с [19],

$$L^K(\mu_n) \geq 2^{n+1} - 1.$$

Любую ФАЛ, которая получается из ФАЛ μ_n в результате некоторой подстановки констант вместо ее информационных БП, будем называть *квазимультиплексорной ФАЛ порядка n и ранга r,* где r число информационных БП, вместо которых не были подставлены константы.

Будем говорить, что контактная схема Σ от адресных БП $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ и информационных БП $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m, \dots\}$ *корректна*, если любая проводящая цепь схемы Σ, содержащая вершину инцидентную некоторому контакту информационной переменной, обязательно содержит также контакт какой-либо информационной переменной инцидентный данной вершине. Легко видеть, что любая ФАЛ f от БП из $X \cup Y$ может быть реализована корректной КС.

Множество K', которое состоит из всевозможных корректных контактных схем, будем называть классом *корректных контактных схем*.

Сложностью $L^{K'}(f)$ функции f от БП из $X \cup Y$ в классе K' будем, называть сложность минимальной контактной схемы из класса K', которая реализует данную функцию.

Доказаны следующие утверждения.

Лемма. Пусть Σ - минимальная контактная схема, реализующая мультиплексорную ФАЛ μ_n порядка $n, n \geq 2$. Тогда число тех информационных БП, которые имеют в схеме Σ ровно два контакта, не превосходит $8\frac{2^n}{n} - 8k + O\left(\frac{2^n}{n\log n}\right)$, где k — это число тех информационных БП ФАЛ μ_n, которые имеют в схеме Σ не менее трех контактов.

Теорема. Для мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка $n, n \geq 2$, справедливо следующее неравенство:

$$L^{K'}(\mu_n) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} - O\left(\frac{2^n}{n^2}\right). \qquad (2)$$

Далее приводятся доказательства сформулированных выше утверждений.

2. Доказательство леммы

Пусть Σ — схема, удовлетворяющая условию леммы, то есть Σ является минимальной контактной схемой, реализующая мультиплексорную ФАЛ μ_n порядка $n,\ n \geq 2$, и пусть k — количество тех информационных БП, число контактов которых в схеме Σ больше или равно 3.

Построим схему Σ' из схемы Σ путем подстановки константы 0 вместо всех информационных БП, имеющих в схеме Σ три или более контакта. При это верно следующее неравенство:

$$L(\Sigma) \geq L(\Sigma') + 3k. \qquad (3)$$

Пусть далее $\mathfrak{A}$ — множество тех информационных переменных, у которых в схеме Σ' имеется только один замыкающий контакт, $\mathfrak{B}$ — множество тех информационных переменных, у которых в схеме Σ' имеются два замыкающих контакта, а $\mathfrak{C}$ — множество тех информационных переменных, у которых в схеме Σ' имеются один размыкающий контакт и один замыкающий контакт. В силу монотонной зависимости мультиплексорной функции от информационных БП, в схеме Σ' не могут отсутствовать замыкающие контакты какой-либо информационной переменной. Следовательно, множества $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ между собой не пересекаются, а их объединение составляет множество всех информационных БП.

Таким образом, общее число контактов информационных переменных в схеме Σ' равно $|\mathfrak{A}| + 2|\mathfrak{B}| + 2|\mathfrak{C}|$, а искомое число тех информационных БП, которые имеют в схеме Σ ровно два контакта, равно $|\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}|$.

Будем, как обычно, называть цикл C из контактов информационных переменных непроводящим, если в нем одновременно присутствуют и размыкающий, и замыкающий контакты хотя бы одной информационной переменной из множества $\mathfrak{C}$. В иных случаях, будем называть цикл C проводящим.

Докажем, что в схеме Σ' все непроводящие циклы содержат не менее двух пар, состоящих из замыкающего и размыкающего контактов одной и той же информационной переменной БП из множества $\mathfrak{C}$. Действительно, пусть C_1 - непроводящий цикл из контактов информационных переменных, в котором одновременно присутствуют размыкающий и замыкающий контакты только одной информационной переменной y_i из множества $\mathfrak{C}$. Тогда при подстановке константы 0 вместо всех отличных от y_i информационных переменных из множества $\mathfrak{C}$ и константы 1 вместо остальных информационных переменных теряется существенная зависимость ФАЛ, реализуемой КС Σ', от БП y_i, что противоречит определению мультиплексорной функции.

Таким образом, сформулированное выше свойство непроводящих циклов схемы Σ', состоящих из контактов информационных БП, доказано. Из него следует, что при подстановке константы 0 вместо одной из тех, не менее, чем двух, информационных переменных, которые принадлежат множеству $\mathfrak{C}$, и оба контакта которых входят в непроводящий цикл, последний будет "разорван".

Подставим в схему Σ' константы 0 вместо не более, чем половины информационных переменных из множества $\mathfrak{C}$, таким образом, чтобы “исчезли” все непроводящие циклы схемы Σ'. Полученную схему обозначим как Σ'', а подмножество оставшихся в нем информационных переменных множества $\mathfrak{C}$ как — $\mathfrak{C}'$, где $|\mathfrak{C}'| \leq \left|\frac{\mathfrak{C}}{2}\right|$. При этом общее число информационных переменных в схеме Σ'' будет равно $|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}'|$.

Рассмотрим произвольный проводящий цикл C_2 в схеме Σ'', состоящий из контактов информационных переменных. Если в данном цикле есть замыкающий контакт информационной переменной y_i из множества $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{C}'$, то, подставив константу 0 вместо информационных переменных из множества $\mathfrak{C}'$, у которых в цикле C_2 имеется размыкающий контакт, и константу 1 вместо всех остальных информационных переменных, кроме y_i, мы получим “висячий” цикл из единственного замыкающего контакта информационной переменной y_i, который не будет влиять на функционирование схемы Σ'', что противоречит незабиваемости множества информационных переменных. Если же в проводящем цикле C_2 содержаться контакты только одной информационной переменной из множества $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}'$, то данный цикл мы оставляем нетронутым.

Пусть теперь в проводящем цикле C_2 имеются две или более информационных переменных из множества $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}'$. Тогда, подставив подходящую константу вместо любой из них, мы “разорвем” этот проводящий цикл. Выбор этой константы зависит от того, к какому множеству принадлежит данная информационная переменная: если множеству $\mathfrak{B}$, то выбирается константа 1, иначе константа 0. Заметим, что если выбранная информационная переменная принадлежит множеству $\mathfrak{C}'$, то замыкающий контакт этой информационной переменной не может содержаться в других циклах по доказанному выше. Это означает, что, подставив в схему Σ'' соответствующие константы вместо половины информационных переменных из множеств $\mathfrak{C}'$ и $\mathfrak{B}$, мы избавимся от всех проводящих циклов, имеющих две или более информационных переменных. Получившуюся схему обозначим как Σ_1. При этом, учитывая неравенство (3), верно следующее:

$$L(\Sigma) \geq L(\Sigma_1) + 3k + 2\frac{|\mathfrak{C}|}{2} + 2\frac{|\mathfrak{B}| + \frac{|\mathfrak{C}|}{2}}{2}.$$

Из предыдущего неравенства следует:

$$L(\Sigma) \geq L(\Sigma_1) + \frac{3|\mathfrak{C}|}{2} + |\mathfrak{B}| + 3k. \tag{4}$$

Заметим, что число информационных переменных в схеме Σ_1 равно $|\mathfrak{A}| + \frac{|\mathfrak{B}|}{2} + \frac{|\mathfrak{C}|}{4}$.

Циклы, содержащиеся в схеме Σ_1, являются либо висячими, то есть состоящими из одного контакта информационной переменной, либо состоят из двух замыкающих контактов одной и той же информационной переменной. Висячие циклы мы будем игнорировать, а циклы, которые состоят из двух замыкающих контактов одной и той же информационной переменной, будем воспринимать как один замыкающий контакт данной информационной переменной.

Рассмотрим для каждой информационной переменной вершины, которые инцидентны замыкающим контактам этой переменной. При этом будем говорить, что вершина инцидентная замыкающему контакту информационной переменной относится к типу А, Б, В, Г, Д или Е, если она удовлетворяет соответствующим условиям:

- Тип А — если вершина является полюсом схемы.
- Тип Б — если к данной вершине присоединен контакт адресной переменной.
- Тип В — если к данной вершине присоединена ровно одна пара из размыкающего и замыкающего контактов одной и той же информационной переменной и при этом она не принадлежит типу Б.
- Тип Г — если к данной вершине присоединено более одной пары из размыкающего и замыкающего контактов одной и той же информационной переменной, а также, возможно, присоединены “одиночные” замыкающие или размыкающие контакты других информационных БП и при этом она не принадлежит типу Б.
- Тип Д — если к данной вершине присоединены замыкающие или размыкающие контакты других информационных переменных, и при этом данная вершина не принадлежит предшествующим типам.
- Тип Е — если она не является полюсом схемы и к этой вершине присоединен только один контакт, то есть замыкающий контакт рассматриваемой информационной переменной.

Докажем, что в схеме Σ_1 отсутствуют вершины типа В. Пусть вершина инцидентная замыкающему контакту информационной переменной принадлежит типу В. Тогда подставим константы 0 вместо информационных переменных, замыкающие контакты которых инцидентны данной вершине, и константы 1 вместо всех остальных информационных переменных за исключением, той единственной БП, пара из замыкающего и размыкающего контактов которой присоединена к данной вершине. При этом получим, что любая цепь, которая проходит через замыкающий контакт данной пары, не проводит ни на одном наборе адресных переменных, что противоречит незабиваемости множества информационных переменных.

Также, заметим, что если вершина принадлежит типу Д или Е, то связанный с ней замыкающий контакт рассматриваемой информационной переменной y_i, либо теряет существенность подстановкой констант вместо других информационных переменных в случае Д, либо является висячим контактом, который не влияет на функционирование схемы. При этом может возникнуть следующая ситуация: к данной вершине присоединен размыкающий контакт информационной переменной y_j, и у рассматриваемой информационной переменной есть второй замыкающий контакт, который соединен с замыкающим контактом переменной y_j. В этом случае вершина, в которой соединяются замыкающие контакты информационных переменных y_i и y_j, не может быть типа Д, так как иначе подстановкой соответствующих констант вместо всех информационных переменных кроме информационной переменной y_j, мы ее "забьем", что противоречит незабиваемости множества информационных переменных. Таким образом, хотя бы у одного из двух замыкающих контактов рассматриваемой информационной переменной инцидентные ему вершины не принадлежат типу Д или Е. Если к рассматриваемой вершине (будем называть ее средней), принадлежащей к типу Д или Е, присоединены два замыкающих контакта информационной переменной y_i, то остальные две вершины (будем называть их крайними) инцидентные этим двум замыкающим контактам не могут быть типа Д или Е. Пусть это не так, и одна из крайних вершин тоже принадлежит типу Д или Е. Тогда, подставив соответствующие константы вместо информационных переменных инцидентных средней и крайней вершине типа Д, мы получим висячую цепь из двух контактов информационной переменной y_i, что противоречит незабиваемости множества информационных переменных.

Заметим, что число вершин, типа Г, не больше, чем половина от числа информационных переменных, у которых в схеме Σ_1 присутствуют и замыкающий, и размыкающий контакты, то есть $\frac{|\mathfrak{C}|}{8}$. Очевидно, что число вершин, принадлежащих типу А, не превосходит 2.

Таким образом, так как число вершин инцидентных замыкающим контактам информационных переменных не меньше, чем $|\mathfrak{A}| + \frac{|\mathfrak{B}|}{2} + \frac{|\mathfrak{C}|}{4}$, то число контактов адресных БП, которые присоединены к этим вершинам, то есть число вершин принадлежащих типу Б, не меньше, чем $|\mathfrak{A}| + \frac{|\mathfrak{B}|}{2} + \frac{|\mathfrak{C}|}{4} - \frac{|\mathfrak{C}|}{8} - 2$.

Получаем, что:

$$L(\Sigma_1) \geq |\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| + \frac{|\mathfrak{C}|}{2} + |\mathfrak{A}| + \frac{|\mathfrak{B}|}{2} + \frac{|\mathfrak{C}|}{4} - \frac{|\mathfrak{C}|}{8} - 2,$$

$$L(\Sigma_1) \geq 2(|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}|) - \frac{1}{2}|\mathfrak{B}| - \frac{11}{8}|\mathfrak{C}| - 2.$$

Учитывая, что $|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}| = 2^n - k$, приходим к неравенству

$$L(\Sigma_1) \geq 2(2^n - k) - \frac{1}{2}|\mathfrak{B}| - \frac{11}{8}|\mathfrak{C}| - 2.$$

Из неравенства (4) следует, что:

$$L(\Sigma) \geq 2(2^n - k) - \frac{1}{2}|\mathfrak{B}| - \frac{11}{8}|\mathfrak{C}| - 2 + \frac{3|\mathfrak{C}|}{2} + |\mathfrak{B}| + 3k,$$

$$L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{1}{2}|\mathfrak{B}| + \frac{1}{8}|\mathfrak{C}| + k - 2.$$

Так как $\frac{1}{2}|\mathfrak{B}| + \frac{1}{8}|\mathfrak{C}| \geq \frac{1}{8}(|\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}|)$, то верно следующее неравенство:

$$L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{1}{8}(|\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}|) + k - 2.$$

При этом из работы [12] известно, что сложность минимальной схемы, реализующей мультиплексорную функцию порядка n в классе параллельно-последовательных схем (следовательно, и в классе контактных схем), не превосходит $2^{n+1} + \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right)$. Откуда следует неравенство

$$|\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}| \leq 8\frac{2^n}{n} - 8k + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right).$$

Что завершает доказательство, так как $|\mathfrak{B}| + |\mathfrak{C}|$ является искомым числом.

3. Доказательство теоремы

Пусть Σ — минимальная корректная контактная схема, реализующая мультиплексорную ФАЛ μ_n.

Рассмотрим те информационные переменные ФАЛ μ_n, число вхождений контактов которых в схему Σ больше или равно трем. Пусть число таких переменных равно k. Число информационных БП, у которых ровно два контакта в схеме Σ, обозначим как R. Следуя утверждению леммы:

$$R \leq 8\frac{2^n}{n} - 8k + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right). \qquad (5)$$

Подставим константу 0 вместо всех информационных БП, у которых число контактов в схеме Σ больше одного. Полученную схему обозначим как Σ_1. При этом выполняется следующее неравенство:

$$L(\Sigma) \geq L(\Sigma_1) + 3k + 2R \qquad (6)$$

Построим на основе схемы Σ_1 схему Σ_1', в которой к каждой вершине, инцидентной хотя бы одному контакту информационной переменной, присоединен ровно один контакт адресной переменной. Для этого преобразуем схему Σ_1 следующим образом. Пусть к некоторой вершине v, для которой множество Y всех контактов информационных переменных инцидентных этой вершине не является пустым, присоединено $s,\ s \geq 2$, контактов адресных переменных (причем, по условию теоремы, все проводящие цепи, содержащие данную вершину, проходят через некоторый контакт информационной переменной, который инцидентен этой вершине). Тогда, каждый такой контакт α_j, будет связан только с некоторым подмножеством $Y_j, j = \overline{1,s}$, множества Y, причем объединение этих подмножеств равно самому множеству Y, так как иначе контакты из множества $Y \setminus \bigcup_{j=1}^{s} Y_j$ не будут влиять на функционирование схемы. Пересечение же этих подмножеств, очевидно, пустое. Разобьем вершину v на вершины $v_1, v_2, \dots, v_s$, к каждой из которых присоединим контакты информационных переменных из множества Y_j. Проведя данную операцию над каждой вершиной, инцидентной хотя бы одному контакту информационной переменной, закончим построение схемы Σ_1'.

Схема Σ_1' эквивалентна схеме Σ_1, так как проделанные преобразования не добавляли новых проводящих цепей, и, очевидно, все необходимые для мультиплексорной функции цепи сохранены. Заметим, что число контактов не увеличилось.

Рассмотрим контактную схему Σ_2, построенную на основе схемы Σ_1' при помощи удаления всех контактов адресных переменных.

Заметим, что в схеме Σ_2 как в графе, есть m связных компонент $G_1, G_2, \dots, G_m$. Пусть в компоненте G_i число информационных переменных равно p_i, где $i = 1,2, \dots, m$.

Докажем, что в любой связной компоненте из контактов информационных переменных не может быть циклов. Пусть это не так, тогда существует связная компонента G_i, в которой есть цикл из контактов информационных переменных. В таком случае, в схеме Σ_1' вместо информационных переменных связной компоненты G_i, кроме одной, подставим константу 1. При этом мы получим висячий цикл из одного контакта информационной переменной. Так как этот висячий цикл не будет влиять на функционирование схемы, то получаем противоречие незабиваемости множества информационных переменных.

Теперь покажем, что к каждой вершине связной компоненты присоединен хотя бы один контакт адресной переменной, либо это вершина является полюсом схемы.

Пусть существует вершина v, не являющаяся полюсом схемы, к которой не присоединены контакты адресных переменных. Тогда, подставим константу 0 вместо всех информационных переменных кроме одной, контакт которой присоединен к этой вершине. В полученной после подстановки схеме существует висячая цепь с контактом информационной переменной, это противоречит незабиваемости множества информационных переменных. Пусть теперь v является полюсом схемы и число инцидентных контактов меньше $2^n - k - R$. Тогда подставив константу 0 вместо всех информационных переменных, контакты которых присоединены к вершине v, мы получим схему, реализующую ФАЛ тождественно равную 0. Это противоречит незабиваемости множества информационных переменных. Таким образом, только к одному полюсу схемы может быть не присоединен контакт адресной переменной.

Очевидно, что так как внутри связных компонент нет циклов, то число вершин в G_i компоненте равно $p_i + 1$. Следовательно, число вершин в связных компонентах равно $\sum_{i=1}^{m} p_i + m = 2^n - k - R + m$, а значит, минимально возможное число контактов адресных переменных, которые присоединены к этим вершинам, равно $2^n - k - R + m - 1$.

Теперь рассмотрим контакт адресной переменной, который присоединен к некоторой вершине компоненты G_i. Этот контакт не может быть инцидентен двум вершинам из G_i. Иначе, подставив константу 0 вместо всех информационных переменных, кроме тех, контакты которых связаны с данным контактом адресной переменной, получим, что оставшиеся контакты информационных переменных из компоненты G_i никак не связаны с полюсами схемы (так как по построению к каждой вершине связной компоненты присоединено не более одного контакта адресной переменной), а это противоречит незабиваемости множества информационных переменных. Таким образом, данный контакт адресной переменной может соединять связную компоненту G_i либо с вершиной другой компоненты, либо с некоторой вершиной, лежащей вне связных компонент (будем называть такие вершины *узлами*). Если при этом данный контакт адресной переменной соединяет G_i компоненту с вершиной v из другой связной компоненты, то обязательно должен найтись еще один контакт адресной переменной, который соединен с вершиной v, чего не может быть по построению схемы Σ_1'.

Рассмотрим множество контактов, которые могут быть присоединены к произвольному узлу. К такому узлу не могут быть соединены два или более одинаковых контакта одной адресной переменной от одной связной компоненты. Допустим, что это не так, то есть существуют два одинаковых контакта, соединяющих узел и две вершины связной компоненты.

Случай 1. Пусть эти контакты идут в одну и ту же вершину связной компоненты из информационных переменных. Этот случай невозможен, так как в схеме Σ_1' к каждой вершине связной компоненты присоединено не более одного контакта адресной переменной.

Случай 2. Пусть эти контакты идут в две различные вершины v_1 и v_2 связной компоненты G из контактов информационных переменных. Тогда подставим константу 1 вместо всех информационных переменных связной компоненты, кроме одной, контакт которой лежит на цепи, соединяющей вершину v_1 с v_2. Отсюда следует, что оставшийся контакт информационной переменной не влияет на функционирование схемы, а это противоречит незабиваемости множества информационных переменных.

Таким образом, любой узел соединен с любой связной компонентой из информационных переменных не более, чем одним контактом одного типа (замыкающего или размыкающего) одной и той же адресной переменной.

Далее, пусть число узлов в схеме равно l. Для каждого из $2n$ типов (n различных адресных переменных и каждый контакт данной переменной может быть либо размыкающим, либо замыкающим) контактов адресных переменных, обозначим за l_i^1 число узлов, которые содержат только один контакт i-го типа, $i = \overline{1,2n}$. Так же обозначим за l_i^2 число узлов, которые содержат не менее двух контактов i-го типа, $i = \overline{1,2n}$. Число контактов i-го типа, в j-ом узле, который содержит два или более контакта данного типа, обозначим за $q_{i,j}$, $i = \overline{1,2n}, j = \overline{1,l_i^2}$. Учитывая введенные обозначения, общее число контактов адресных переменных, соединяющих узлы и связные компоненты из контактов информационных переменных равно:

$$\sum_{i=1}^{2n}\left(l_i^1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l_i^2} q_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{2n} l_i^1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{l_i^2} q_{i,j}.$$

Пусть $l^1 = \max 1_{i=\overline{1,2n}}\, l_i^1$. Очевидно, что

$$l \geq l^1. \tag{7}$$

Теперь покажем, что для любого $i, i = \overline{1,2n}$, верно:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{l_i^2} q_{i,j} \leq 2(m-1). \tag{8}$$

Пусть это не так, то есть существует m одинаковых контактов одной адресной переменной, соединяющих узлы (при этом каждый узел инцидентен не менее двум таким контактам) и связные компоненты из контактов информационных переменных. Учитывая, что любой узел соединен с любой связной компонентой из информационных переменных не более, чем одним контактом, в контактной схеме Σ_1' будет цикл, состоящий из одинаковых контактов адресной переменной и контактов информационных переменных, что противоречит незабиваемости множества информационных переменных, так как при подстановке константы 1 вместо всех информационных переменных, которые содержаться в этом цикле, за исключением одной, получим контакт информационной переменной, который не влияет на функционирование схемы. Таким образом, неравенство (8) доказано.

Учитывая неравенство (8), справедливо следующее:

$$\sum_{i=1}^{2n} l_i^1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{l_i^2} q_{i,j} \leq 2nl^1 + 2n(m-1)$$

При этом

$$\sum_{i=1}^{2n} l_i^1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{l_i^2} q_{i,j} = 2^n - k - R + m,$$

так как к каждой вершине связной компоненты из контактов информационных переменных присоединен один и только один контакт адресной переменной (за исключением, возможно, одного из полюсов схемы), и всего таких вершин $2^n - k - R + m - 1$. Следовательно, справедливо неравенство

$$2^n - k - R + m - 1 \leq 2nl^1 + 4n(m-1),$$

из которого следует, что

$$m \geq \frac{2^n - k - R - 2nl^1 - 2n - 1}{2n-1} \geq \frac{2^n - k - R - 2nl^1 - 2n - 1}{2n},$$

то есть

$$m \geq \frac{2^n}{2n} - \frac{l^1}{2} - 1 - \frac{k}{2n} - \frac{R}{2n} - \frac{1}{2n}. \qquad (9)$$

Заметим, что все узлы должны быть связаны между собой и для этого требуется как минимум $l-2$ контакта адресных переменных. Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$L(\Sigma_1') \geq 2^n - k - R + 2^n - k - R + m + l - 3.$$

При этом, учитывая неравенство (7):

$$L(\Sigma_1') \geq 2^{n+1} - 2k - 2R + m + l^1 - 3. \qquad (10)$$

Таким образом, из неравенств (9) и (10) следует:

$$L(\Sigma_1') \geq 2^{n+1} - 2k - k\frac{1}{2n} - 2R - R\frac{1}{2n} + \frac{2^n}{2n} - \frac{l^1}{2} - 1 + l^1 - 3 - \frac{1}{2n}$$

$$L(\Sigma_1') \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} + \frac{l^1}{2} - 4 - k\left(2 + \frac{1}{2n}\right) - R\left(2 + \frac{1}{2n}\right).$$

Из равенства $L(\Sigma_1) = L(\Sigma_1')$ и неравенства (6) получаем:

$$L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} + \frac{l^1}{2} - 4 - k\left(2 + \frac{1}{2n}\right) - R\left(2 + \frac{1}{2n}\right) + 3k + 2R,$$
$$L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} - 4 - R\frac{1}{2n} + k\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Учитывая полученную оценку числа R из неравенства (5):

$$L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} - 4\frac{2^n}{n^2} - O\left(\frac{2^n}{n^2 \log n}\right) + k\left(1 + \frac{4}{n} - \frac{1}{2n}\right).$$

Таким образом, получаем:

$$L(\Sigma) \geq 2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} - 4\frac{2^n}{n^2} - O\left(\frac{2^n}{n^2 \log n}\right). \qquad (11)$$

Сопоставив неравенства (11) и (2), завершим доказательство.

Заключение

Заметим, что класс параллельно-последовательных схем является частным случаем класса контактных схем. Следовательно, верхняя оценка сложности мультиплексорной ФАЛ в классе контактных схем не превосходит верхней оценки сложности мультиплексорной ФАЛ в классе параллельно-последовательных схем, то есть следуя неравенству (1):

$$L^K(\mu_n) \leq 2^{n+1} + \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right).$$

Данная оценка достигается построением корректной контактной схемы, реализующей мультиплексорную ФАЛ. Таким образом, верны следующие неравенства:

$$2^{n+1} + \frac{2^n}{2n} - O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) \leq L^{K'}(\mu_n) \leq 2^{n+1} + \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n \log n}\right).$$

Литература

1. *Shannon C.E.* A symbolic analysis of relay and switching circuits. Trans. AIEE, 1938, v. 57, pp. 713-723.
2. *Shannon C.E.* The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell Syst. Techn. J, 1949, v. 28, pp. 59-98.
3. *Lamagna E.A., Savage J.E.* On the logical complexity of symmetric switching functions in monotone and complete bases. Tech. rep. Rhode Island: Brown University, 1973.
4. *Клосс Б.М., Малышев В.А.* Оценки сложности некоторых классов функций //Вестник Моск. ун.-та сер. матем. мех. 1965. т.94. с.44-51.
5. *Schnorr C.P.* A 3n-lower bound on the network complexity of Boolean functions //Theoretical computer science. 1980. т.10. №. 1. с.83-92.
6. *Алексеев В.Б., Ложкин С.А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ, 2000. 58 с.

7. *Ложкин С.А., Кошкин М.А.* О сложности реализации некоторых систем функций алгебры логики контактными многополюсниками //Доклады Академии наук. Российская академия наук, 1988. т.298. №. 4. с.807-811.
8. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. // Изд-во МГУ, Москва. 1984.
9. *Липатова А.Е.* Об одном покрытии множества двоичных наборов и реализации конъюнкций контактными схемами //Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит. 1989. №. 2. с.161.
10. *Tardos G., Zwick U.* The communication complexity of the universal relation. Proceedings of the 12th Annual IEEE Conference on Computational Complexity (CCC), 1997, pp. 247-259.
11. *Wegener I.* The complexity of Boolean functions. Teubner, Stuttgart: John Wiley \& Sons Ltd, and B. G, 1987, 458 pp.
12. *Ложкин С.А., Власов Н.В.* О сложности мультиплексорной функции в классе π-схем, Физико-математические науки, Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 151, № 2, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2009, 98–106.
13. *Paul W.J.* A 2,5n lower bound on the combinational complexity of Boolean functions. SIAM, Philadelphia: SIAM Journal on Computing, 1977, v. 6, pp. 427-443.
14. *Klein P., Paterson M.S.* Asymptotically optimal circuit for a storage access function. IEEE Trans, on Computers, IEEE Computer Society, 1980, v. 29, N-8, pp. 737-738.
15. *Коровин В.В.* О сложности реализации универсальной функции схемами из функциональных элементов //Дискретная математика. 1995, т.7, вып. 2. с.95-102.
16. *Румянцев П.В.* О сложности реализации мультиплексорной функции схемами из функциональных элементов. Тезисы докладов XIV международной конференции (Пенза, 23-28 мая 2005 г.). 2005. с.133.
17. *Ложкин С.А., Власов Н.В.* О сложности мультиплексорной функции в классе схем из функциональных элементов // М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ, 18-23 июня 2012 г.). 2012, с.100-101.
18. *Ложкин С.А.* Лекции по основам кибернетики. М.: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ 2004. 256 с.
19. *Ложкин С.А.* Дополнительные главы кибернетики и теории управляющих систем [Электронный ресурс]//2013. 76с. Способ доступа: https://mk.cs.msu.ru/images/3/39/Лекции_ДГКТУС_Часть_1-2.pdf