А.М. Денисов[1]

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛУЧАЕ МАЛОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОЕМКОСТИ

Введение

Теория обратных задач и ее приложения представляют собой одно из интенсивно развивающихся направлений современной прикладной математики. Важным разделом этой теории является исследование обратных задач для уравнения теплопроводности, имеющих большое теоретическое и практическое значение. К настоящему времени обратные задачи для уравнения теплопроводности изучены во многих работах (см,например, [1]-[8] и имеющуюся там библиографию). Одним из направлений теории обратных задач для уравнения теплопроводности являются обратные задачи для сингулярно возмущенных уравнений. Его развитие началось с метода квазиобращения, который был предложен в монографии [9] и получил далее развитие в целом ряде других работ [10]-[13] . Другим аспектам исследования обратных задач для сингулярно возмущенных уравнений математической физики посвящены в работы [14]-[17]. Как правило, в постановках обратных задач для уравнения теплопроводности предполагается, что неизвестной является одна функция. Однако в ряде случаев возникают обратные задачи, в которых неизвестны две или более функций. Такого типа обратные задачи для уравнения теплопроводности изучались в работах [18]-[23]. Данная работа посвящена обратной задаче для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением, соответствующим малому коэффициенту теплоемкости. Неизвестными являются две функции, одна из них определяет краевое условие, а другая временное изменение источника. Предложены методы построения приближенного решения обратной задачи и даны оценки его близости к точному решению при малых значениях коэффициента теплоемкости.

Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в случае малого коэффициента теплоемкости ε^2

$$\varepsilon^2 u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + F(x)p(t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

[1] профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: den@cs.msu.ru .

$$u(0,t)=\mu(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2}$$
$$u_x(\pi,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$
$$u(x,0)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi, \tag{4}$$
где $\varepsilon\in(0,1)$, $Q_T=\{(x,t):0<x<\pi, 0<t\leqslant T\}$.

Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)-(4) от ε, будем обозначать его $u(x,t;\varepsilon)$.

Предположим, что функции $\mu(t)$, $F(x)$ и $p(t)$ удовлетворяют следующим условиям: $\mu\in C^1[0,T]$, $\mu(0)=0$; $F\in C^1[0,\pi]$, $F(0)=F'(\pi)=0$; $p\in C^1[0,T]$, $p(0)=0$. Из метода разделения переменных следует формула для решения задачи (1)-(4)

$$u(x,t;\varepsilon)=\mu(t)-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\mu'(\tau)d\tau\sin\frac{2n+1}{2}x+$$
$$+(\varepsilon)^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}_n\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)p(\tau)d\tau\sin\frac{2n+1}{2}x, \tag{5}$$
где
$$\hat{F}_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}F(s)\sin\frac{2n+1}{2}sds.$$
Сформулируем обратную задачу. Пусть функция $F(x)$ и число ε заданы, а функции $\mu(t)$ и $p(t)$ неизвестны. Требуется определить $\mu(t)$ и $p(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(4)
$$u(x_1,t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon), \quad u(x_2,t;\varepsilon)=h(t;\varepsilon), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{6}$$
где $g(t;\varepsilon),h(t;\varepsilon)$ - известные функции, а x_1,x_2 -заданные точки, $x_1,x_2\in(0,\pi]$.

Дадим определение решения обратной задачи. Так как при неизвестных $\mu(t)$ и $p(t)$ функция $u(x,t;\varepsilon)$ также неизвестна, то решением обратной задачи будем считать функции $\mu(t),p(t),u(x,t;\varepsilon)$

Определение. Функции $\{\mu(t),p(t),u(x,t;\varepsilon)\}$ называются решением обратной задачи (1)-(4),(6), если: $\mu\in C^1[0,T]$, $\mu(0)=0$; $p\in C^1[0,T]$, $p(0)=0$; $u\in C(\bar{Q}_T)$, $u\in C^{2,1}(Q_T)$ и $\mu(t),p(t),u(x,t;\varepsilon)$ удовлетворяют (1)-(4),(6).

Цель этой работы состоит в построении приближенных решений обратной задачи на основе использования разложения $u(x,t;\varepsilon)$ по малому параметру ε. Подобный подход к приближенному решению обратных задач, в случае одной неизвестной функции, применялся в работах [24],[25].

Приближенные решения обратной задачи

Пусть функции $\{\mu(t), p(t), u(x,t;\varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи (1)-(4),(6).Предположим, что кроме того функции $\mu(t)$ и $p(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu \in C^{m+1}[0,T], \quad \mu^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,...m; \tag{7}$$

$$p \in C^{m+1}[0,T], \quad p^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,...m, \tag{8}$$

где m целое число , $m \geq 0$. Рассмотрим последовательности функций $f_k(x)$ и $F_k(x)$, являющихся решениями краевых задач:

$$f_k''(x) = f_{k-1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$f_k(0) = f_k'(\pi) = 0, \quad k = 1,2,...,m, \quad f_0(x) = 1,$$

$$F_k''(x) = F_{k-1}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$F_k(0) = F_k'(\pi) = 0, \quad k = 0,1,...,m, \quad F_{-1}(x) = -F(x),$$

Интегрируя по частям интегралы, входящие в формулу (5), получим следующее разложение функции $u(x,t;\varepsilon)$ по малому параметру

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{2k}\mu^{(k)}(t) f_k(x) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{2k} F_k(x) p^{(k)}(t) +$$

$$+\varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x,t;\varepsilon) + \varepsilon^{2(m+1)} w_{m+1}(x,t;\varepsilon), \tag{9}$$

где

$$v_{m+1}(x,t;\varepsilon) = (\varepsilon)^{-2}(-1)^{m+1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{m+1}}{\pi(2n+1)^{2m+1}} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right) \mu^{(m+1)}(\tau) d\tau \sin\frac{2n+1}{2}x, \tag{10}$$

$$w_{m+1}(x,t;\varepsilon) = (\varepsilon)^{-2}(-1)^{m+1} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{F}_n 4^{m+1}}{(2n+1)^{2(m+1)}} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right) p^{(m+1)}(\tau) d\tau \sin\frac{2n+1}{2}x, \tag{11}$$

а

$$\tilde{F}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin\frac{2n+1}{2}x dx.$$

Используем разложение (9) для построения приближенного решения обратной задачи, опустив в нем остаточные члены $\varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x,t;\varepsilon)$ и $\varepsilon^{2(m+1)} w_{m+1}(x,t;\varepsilon)$.

Начнем с простого случая $m = 0$. Тогда $\mu \in C^1[0,T]$, $\mu(0) = 0$ и $p \in C^1[0,T]$, $p(0) = 0$. Учитывая формулу (9) и условия (6) определим приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$, $\tilde{p}_0(t;\varepsilon)$ как решение системы уравнений

$$\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon) + F_0(x_1)\tilde{p}_0(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12}$$

$$\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)+F_0(x_2)\tilde{p}_0(t;\varepsilon)=h(t;\varepsilon),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{13}$$

Если $F_0(x_1)\neq F_0(x_2)$, то решение системы (12),(13) существует, единственно и определяется следующими формулами

$$\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon)-F_0(x_1)\frac{g(t;\varepsilon)-h(t;\varepsilon)}{F_0(x_1)-F_0(x_2)},\quad \tilde{p}_0(t;\varepsilon)=\frac{g(t;\varepsilon)-h(t;\varepsilon)}{F_0(x_1)-F_0(x_2)}$$

Оценим погрешность между функциями $\mu(t),p(t)$ и $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon),\tilde{p}_0(t;\varepsilon)$. Записывая разложение (9) при $m=0$, $x=x_1$, $x=x_2$ и используя условия (6), имеем

$$\mu(t)+F_0(x_1)p(t)+\varepsilon^2 v_1(x_1,t;\varepsilon)+\varepsilon^2 w_1(x_1,t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon), \tag{14}$$

$$\mu(t)+F_0(x_2)p(t)+\varepsilon^2 v_1(x_2,t;\varepsilon)+\varepsilon^2 w_1(x_2,t;\varepsilon)=h(t;\varepsilon). \tag{15}$$

Из формул (10) и (11) следует, что

$$\max_{\bar{Q}_T}|v_1(x,t;\varepsilon)|\leqslant c_1,\quad \max_{\bar{Q}_T}|w_1(x,t;\varepsilon)|\leqslant c_2, \tag{16}$$

где постоянные c_1,c_2 не зависят от $(x,t)\in\bar{Q}_T$. Далее через c_i обозначаются постоянные независящие от x и t.

Так как функции $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon),\tilde{p}_0(t;\varepsilon)$ являются решением системы уравнений (12),(13), а $\mu(t),p(t)$ удовлетворяют (14),(15), то учитывая оценки (16) получим, что

$$\max_{[0,T]}|\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)-\mu(t)|\leqslant c_3\varepsilon^2,\quad \max_{[0,T]}|\tilde{p}_0(t;\varepsilon)-p(t)|\leqslant c_4\varepsilon^2. \tag{17}$$

Из этих оценок следует, что при малых ε функции $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon),\tilde{p}_0(t;\varepsilon)$ можно рассматривать в качестве приближенных решений обратной задачи.

Рассмотрим вопрос о построении приближенных решений с более высоким порядком аппроксимации чем оценки (17).

Пусть функции $\mu(t),p(t)$ удовлетворяют условиям (7), (8) при $m=1$. Учитывая разложение (9) и условия (6) , определим приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon),\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$ как функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 f_1(x_1)\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon)+F_0(x_1)\tilde{p}_1(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 F_1(x_1)\tilde{p}_1'(t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{18}$$

$$\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 f_1(x_2)\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon)+F_0(x_2)\tilde{p}_1(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 F_1(x_2)\tilde{p}_1'(t;\varepsilon)=h(t;\varepsilon),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{19}$$

Это система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon),\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$ с малым параметром при старших производных. Поведение ее решений существенно зависит от коэффициентов системы, а также дополнительных условий, обеспечивающих единственность решения.

Рассмотрим в начале пример построения приближенных решений $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon),\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$ для достаточно простого случая.

Пусть функция $F(x)=9/4\sin(3x/2)$, а $x_1=2\pi/3$, $x_2=\pi$. Тогда $F_0(x)=\sin(3x/2)$, $F_1(x)=-4/9\sin(3x/2)$ и $F_0(x_1)=F_1(x_1)=0$,

$F_0(x_2) = -1$, $F_1(x_2) = 4/9$. Так как $f_1(x) = x^2/2 - \pi x$, то $f_1(x_1) = -4\pi^2/9$, $f_1(x_2) = -\pi^2/2$.

В этом случае уравнение (18) не содержит функцию $\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$ и записывается следующим образом

$$\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon) + (\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1}\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) = (\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1} g(t,\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{20}$$

Так как $f_1(x_1) < 0$, то решения этого уравнения с начальным условием в нуле будут стремиться к бесконечности при $\varepsilon \to 0$. Следовательно для получения приближенного решения обратной задачи нужно привлекать дополнительную информацию об искомой функции, а именно предполагать известным значение $\mu(T) = \mu_T$. Определив функцию $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ как решение уравнения (20) с условием $\tilde{\mu}_1(T;\varepsilon) = \mu_T$, получим, что

$$\begin{gathered}\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) = \mu_T \exp\left\{-(\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1}(t-T)\right\} - \\ -(\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1}\int_t^T \exp\left\{-(\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1}(t-\tau)\right\} g(\tau;\varepsilon)d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{21}$$

Из этой формулы и уравнения (19) следует, что функция $\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$ является решением дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 F_1(x_2)\tilde{p}_1'(t;\varepsilon) + F_0(x_2)\tilde{p}_1(t;\varepsilon) = r_1(t;\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered} r_1(t;\varepsilon) = h(t;\varepsilon) - f_1(x_2)(f_1(x_1))^{-1} g(t;\varepsilon) - \\ -\mu_T\left[1 - f_1(x_2)(f_1(x_1))^{-1}\right]\exp\left\{-(\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1}(t-T)\right\} + \\ +(\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1}\left[1 - f_1(x_2)(f_1(x_1))^{-1}\right] \times \\ \times \int_t^T \exp\left\{-(\varepsilon^2 f_1(x_1))^{-1}(t-\tau)\right\} g(\tau;\varepsilon)d\tau. \end{gathered} \tag{23}$$

Так как $F_1(x_2)F_0(x_2) < 0$, то будем предполагать, что известно значение искомой функции $p(T) = p_T$. Определив приближенное решение обратной задачи как решение уравнения (22) с условием $\tilde{p}_1(T;\varepsilon) = p_T$, имеем

$$\begin{gathered}\tilde{p}_1(t;\varepsilon) = p_T \exp\left\{-(\varepsilon^2 F_1(x_2))^{-1} F_0(x_2)(t-T\right\} - \\ -(\varepsilon^2 F_1(x_2))^{-1}\int_t^T \exp\left\{-(\varepsilon^2 F_1(x_2))^{-1} F_0(x_2)(t-\tau)\right\} r_1(\tau;\varepsilon)d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{24}$$

Формулы (21) и (24) определяют приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon), \tilde{p}_1(t;\varepsilon)$. Покажем, что эти функции аппроксимируют точное решение обратной задачи $\mu(t), p(t)$ с порядком $O(\varepsilon^4)$.

Из разложения (9), формул (10),(11) и условий (6) следует, что

$$\begin{gathered}\mu(t) + \varepsilon^2 f_1(x_1)\mu'(t) + F_0(x_1)p(t) + \varepsilon^2 F_1(x_1)p'(t) = g(t;\varepsilon) - \\ -\varepsilon^4(v_2(x_1,t;\varepsilon) + w_2(x_1,t;\varepsilon)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{gathered} \tag{25}$$

$$\mu(t)+\varepsilon^2 f_1(x_2)\mu_1'(t)+F_0(x_2)p(t)+\varepsilon^2 F_1(x_2)p'(t)=h(t;\varepsilon)-$$
$$-\varepsilon^4(v_2(x_2,t;\varepsilon)+w_2(x_2,t;\varepsilon)),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{26}$$
где
$$\max_{[0,T]}|v_2(x_1,t;\varepsilon)+w_2(x_1,t;\varepsilon)|\leqslant c_5,\quad \max_{[0,T]}|v_2(x_2,t;\varepsilon)+w_2(x_2,t;\varepsilon)|\leqslant c_6. \tag{27}$$

Рассмотрим функции
$$y(t;\varepsilon)=\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)-\mu(t),\quad z(t;\varepsilon)=\tilde{p}_1(t;\varepsilon)-p(t).$$
Из уравнений (18),(19), (25),(26) и условий $\tilde{\mu}_1(T;\varepsilon)=\mu(T)=\mu_T$, $\tilde{p}_1(T;\varepsilon)=p(T)=p_T$ следует, что функции $y(t;\varepsilon), z(t;\varepsilon)$ являются при $t\in[0,T]$ решениями системы дифференциальных уравнений
$$y(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 f_1(x_1)y'(t;\varepsilon)+F_0(x_1)z(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 F_1(x_1)z'(t;\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon^4(v_2(x_1,t;\varepsilon)+w_2(x_1,t;\varepsilon)),$$
$$y(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 f_1(x_2)y'(t;\varepsilon)+F_0(x_2)z(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 F_1(x_2)z(t;\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon^4(v_2(x_2,t;\varepsilon)+w_2(x_2,t;\varepsilon)),$$
удовлетворяющими условиям $y(T;\varepsilon)=z(T;\varepsilon)=0$. Используя для решения этой задачи формулы аналогичные (21),(24) и учитывая оценки (27), получим
$$\max_{[0,T]}|\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)-\mu(t)|\leqslant c_7\varepsilon^4,\quad \max_{[0,T]}|\tilde{p}_1(t;\varepsilon)-p(t)|\leqslant c_8\varepsilon^4. \tag{28}$$
Таким образом, формулы формулы (21),(24) определяют приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$, $\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$, аппроксимирующее точное решение обратной задачи с порядком $O(\varepsilon^4)$.

Вернемся к общему случаю системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18),(19) для приближенных решений $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$, $\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$. Так как $f_1(x_1)\neq f_1(x_1)$ для любых $x_1,x_2\in(0,\pi]$, то эту систему можно разрешить относительно $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$, а именно
$$\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)=A\tilde{p}_1(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 B\tilde{p}_1'(t;\varepsilon)+r_2(t;\varepsilon), \tag{29}$$
где
$$A=(F_0(x_1)f_1(x_2)-F_0(x_2)f_1(x_1))D,\quad D=(f_1(x_1)-f_1(x_2))^{-1},$$
$$B=(F_1(x_1)f_1(x_2)-F_1(x_2)f_1(x_1))D,$$
$$r_2(t;\varepsilon)=(h(t;\varepsilon)f_1(x_1)-g(t;\varepsilon)f_1(x_2))D.$$
Подставив представление (29) для функции $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ в уравнение (18), получим дифференциальное уравнение для функции $\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$
$$\varepsilon^4 a\tilde{p}_1''(t;\varepsilon)+\varepsilon^2 b\tilde{p}_1'(t;\varepsilon)+c\tilde{p}_1(t;\varepsilon)=r_3(t;\varepsilon),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{30}$$
где $a=f_1(x_1)B,\quad b=f_1(x_1)A+B+F_1(x_1),\quad c=A+F_0(x_1)$,
$$r_3(t;\varepsilon)=g(t;\varepsilon)-r_2(t;\varepsilon)-\varepsilon^2 f_1(x_1)r_2'(t;\varepsilon).$$
Уравнение (30) является дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром при старшей производной. Для регулярного поведения решения этого уравнения при $\varepsilon\to 0$ нужно согласовывать

выбор начальных или краевых условий с значениями корней уравнения характеристического для уравнения (30). Ограничимся рассмотрением случая, когда корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ действительны, различны и положительны. Он реализуется , например, при $F(x) = 9/4\sin(3/2x)$, $x_1 = \pi/3$, $x_2 = \pi$. В этом случае будем предполагать, что известны значения искомой функции $p(t)$ и ее производной при $t = T$: $p(T) = p_{0T}$, $p'(T) = p_{1T}$. Определим приближенное решение обратной задачи $\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$ как решение уравнения (30), удовлетворяющее условиям

$$\tilde{p}_1(T;\varepsilon) = p_{0T}, \quad \tilde{p}_1'(T;\varepsilon) = p_{1T}. \tag{31}$$

Решение задачи (30),(31) определяется формулой

$$\tilde{p}_1(t;\varepsilon) = \frac{p_{0T}\lambda_2 - \varepsilon^2 p_{1T}}{\lambda_2 - \lambda_1}\exp\left(\frac{\lambda_1(t-T)}{\varepsilon^2}\right) +$$

$$+\frac{p_{0T}\lambda_1 - \varepsilon^2 p_{1T}}{\lambda_1 - \lambda_2}\exp\left(\frac{\lambda_2(t-T)}{\varepsilon^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{a\varepsilon^2(\lambda_2-\lambda_1)}\int\limits_t^T\left[\exp\left(\frac{\lambda_1(t-\tau)}{\varepsilon^2}\right) - \exp\left(\frac{\lambda_2(t-\tau)}{\varepsilon^2}\right)\right] r_3(\tau;\varepsilon)d\tau,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Подставив это представление для функции $\tilde{p}_1(t;\varepsilon)$ в формулу (29), определим однознчно функцию $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ и в итоге получим приближенное решение обратной задачи $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon), \tilde{p}_1(t;\varepsilon)$. Доказательство того, что эти функции аппроксимируют точное решение обратной задачи с порядком $O(\varepsilon^4)$ проводится аналогично предыдущему.

Заключение

В статье предложены методы построения приближенных решений обратной задачи для уравнения теплопроводности в случае малого коэффициента теплоемкости. Методы основаны на использовании разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру. Получены явные представления для приближенных решений и даны оценки их близости к точному решению обратной задачи в равномерной метрике. Возможность получения равномерных оценок связана с использованием дополнительной информации о значении точного решения обратной задачи на конце отрезка. Формулы для приближенных решений обратной задачи существенно усложняются при увеличении порядка аппроксимации, поскольку возрастает сложность определяющих их решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.

Финансирование работы

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-2.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Доклады академии наук СССР, 1935. Т. 1, № 5, С. 294–300.

2. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики // М.: Наука, 1984.

3. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена // М.: Машиностроение. 1988.

4. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач // М.: МГУ. 1994.

5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics // New York: Marcel Dekker. 2000.

6. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations // New York: Springer. 2006.

7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи // Новосибиск: Сибирское научное издательство. 2008.

8. *Hasanov A., Romanov V.G.* Introduction to inverse problems for differential equations // New York: Springer. 2017.

9. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения // М.: Мир. 1970.

10. *Иванов В.К.* Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике. // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 4, С. 652–658.

11. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики // М.: Едиториал УРСС. 2004.

12. *Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е.* Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Известия уральского университета. 2008. № 58, С. 78–87.

13. *Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д.* О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестник ЮУГУ, серия Математика, Механика, Физика. 2012. № 6, С. 8–13.

14. *Belov Yury Ya., Kopylova Vera G.* Determination of source function in composite type system of equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2014. Т. 7, № 3, С. 275–288.

15. *Denisov A.M., Solov'eva S.I.* Numerical determination of the initial condition in Cauchy problem for hyperbolic equation with a small parameter// Comp. Math. and Modeling. 2018. V. 29, N. 1, P. 1–9.

16. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // Journal Inverse and Ill posed Problems. 2019. V. 27, N. 5, P. 745–758.

17. *Lukyanenko D.V.,Borzunov A.A., Shishlenin M.A.* Solving coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed equations of the reaction-diffusion-advection type with data on the position of reaction front // Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation. 2021. V. 99, 105824.

18. *Музылев Н.В.* О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23, № 1, С. 102–108.

19. *Fatullayev A.C., Gasilov N., Yusubov I.* Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation // Applicable Analysis. 2008. V. 87, N. 10, P. 1167–1177.

20. *Hussein M.S., Lesnic D., Ivanchov M.I.* Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation // Computer and Mathematics with Applications. 2014. V. 67, N. 5. P. 1065–1091.

21. *Su L.D., Vabishechevish P.N., Vasil'ev V.I.* The inverse problem of simultaneous determination of right-hand side and the lowest coefficients in parabolic equations // in book Numerical Analysis and Its Applications (ed. Dimov I.,Farago I.,Vulkov I.) Springer 2017. P. 633–639.

22. *Камынин В.Л.* Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости // Математические заметки. 2020. Т. 107, № 1, С. 74–86.

23. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения задачи определения коэффициента и источника в уравнении теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 6, С. 756–762.

24. *Денисов А.М.* Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журнал

вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61. № 12, С. 2040–2049.

25. *Денисов А.М.* Аппроксимация решения обратной задачи для сингулярно возмущенной системы уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 6, С. 746–751.