

А. А. Васин¹, Н. И. Цыганов²

ДИНАМИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДВУСТОРОННЕГО БОЯ

Введение

Моделирование боевых действий является важной задачей исследования операций. Данная тема актуальна ввиду наличия во всем мире большого числа вооруженных конфликтов и террористических угроз. В настоящей работе рассматривается задача расчета вероятностей побед сторон в модели двустороннего боя.

Одно из направлений исследований по данной теме рассматривает детерминированные модели боя без учета случайных факторов. Так, в классической модели «оборона-нападение» Гермейера [1], которая является модификацией модели Гросса [2], имеется несколько пунктов возможного прохода средств нападения через линию средств защиты. Обе стороны распределяют свои силы между пунктами, каждый из которых характеризуется числом средств нападения, уничтожаемых одним средством защиты. Нападение стремится увеличить общее число прошедших через защиту средств нападения. Работы [3-10] обобщают модель Гермейера. В [3-4] учитывается неоднородность ресурсов обороны. В [5-7] рассматривается многоуровневая модель обороны, в которой на каждом направлении имеется несколько рубежей защиты. В [8] предложено многошаговое обобщение модели, в котором соответствующая игра разыгрывается многократно до достижения одной из сторон заданного уровня потерь. В работах [9-10] рассматриваются модели, в которых оборона имеет сетевую структуру с ориентированными ребрами, отражающими возможные пути подхода к обороняемому объекту.

В работах [11-12] рассматривается модель эшелонированной системы противовоздушной обороны, поиск оптимальной стратегии сводится к задаче дискретного оптимального управления терминального типа. В [13] изучается задача оптимального распределения разнотипных средств обороны по разнотипным средствам нападения на дальних

¹Профессор факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: vasin@cs.msu.su.

²Аспирант факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: nikita--93@mail.ru.

подступах к обороняемым объектам, когда точная информация по целераспределению средств нападения отсутствует. Исследуется задача оптимизации в непрерывной постановке, где критерием является разность потерь сторон.

Дифференциальные уравнения Ланчестера [14-16] описывают средние численности сил сторон в модели двустороннего непрерывного боя, в котором выстрелы каждой боевой единицы любой стороны описываются пуассоновским потоком. При этом каждый выстрел является прицельным, т.е. направлен на поражение вполне определенной единицы противника, и поражает обстреливаемую единицу с заданной вероятностью. Если же боевая единица поражена, то огонь немедленно переносится на другую боевую единицу. Данные уравнения применимы при достаточно больших численностях сил сторон. Модель Ланчестера получила существенное развитие в монографии [17]. В ней получены уравнения динамики линии фронта при взаимодействии крупных соединений противоборствующих сторон. Предполагается, что численности столь велики, что можно использовать детерминированное описание и уравнения, подобные используемым в механике сплошной среды.

В работах Шумова [18-22] рассматриваются модели боя с учетом психологического фактора. Он отражается процентом потерь, при превышении которого войска данной стороны перестают сражаться. Вероятность победы в бою вычисляется с учетом численностей сторон, психологического фактора, а также показателя боевого превосходства, который характеризует всестороннее обеспечение боя, разведку, точность стрельбы и др. На исторических примерах показано, что наличие технологического превосходства над противником не гарантирует военного успеха. В [20] рассматриваются три уровня моделирования боя: нижний, средний и верхний. На нижнем уровне используется упомянутая функция для расчета вероятности победы. Модели среднего уровня являются обобщениями классических уравнений боя Осипова-Ланчестера и учитывают моральные потенциалы сторон. В моделях верхнего уровня учитываются общественные издержки, связанные с итогом военных действий.

Стоит отметить, что используемая в работах [18-22] формула подсчета вероятности победы стороны в бою не имеет достаточного формального обоснования. Согласно ей, вероятность победы не меняется при пропорциональном изменении численностей сил сторон, что является сомнительным утверждением. Неясно, в каком диапазоне параметров данная формула применима.

Цель настоящей работы - получение более точных методов расчета вероятности победы в двустороннем бою. Рассматривается динамическая модель, предназначенная для описания столкновений небольших групп

войск, численности которых не превышают 1000 единиц. Такие столкновения нередко происходят в современных условиях. Каждая сторона характеризуется начальной численностью, вероятностью уничтожения единицы противника собственной единицей за один период боя, а также критическим уровнем потерь, при достижении которого сторона прекращает бой и считается проигравшей. Ставится задача расчета вероятности победы для каждой стороны. В разделе 1 описывается формальная постановка данной задачи. Во втором разделе исследуется динамика средних численностей (ДСЧ). Изучается случай, в котором одна из сторон обнаруживает только часть единиц противника. Анализируется влияние эффективности обнаружения на исход боя. В третьем разделе исследуется изменение вероятности победы при пропорциональном увеличении начальных численностей сторон, устанавливается связь вероятности с ДСЧ. В четвертом разделе предлагается алгоритм расчета вероятности победы в общем случае. В последнем разделе находится приближенная формула, определяющая вероятность победы стороны в бою.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель боя, в котором участвуют две стороны: X и Y . Пусть $N_x(t)$ и $N_y(t)$ - численности сторон в начале периода времени t , а $l_x(t)$ и $l_y(t)$ - их потери в этот же период. Тогда динамика численностей задается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} N_x(t+1) = N_x(t) - l_x(t), \\ N_y(t+1) = N_y(t) - l_y(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $t = 1, 2, \dots$. Пусть в период t одна единица стороны X может обстреливать только одну единицу стороны Y и наоборот, при этом Π_x (соответственно Π_y) - вероятность уничтожения обстреливаемой единицы стороны Y (соответственно X) единицей стороны X (соответственно Y) за один период. Считаем, что $\Pi_x, \Pi_y \in (0, 1]$.

В условиях равновероятного поражения всех целей оптимальная стратегия целераспределения - равномерное распределение стреляющих по действующим боевым единицам противника. Тогда, если $N_x(t) \leq N_y(t)$, и $N_y(t)/N_x(t) \stackrel{def}{=} M(t)$ - натуральное число, то оптимальное с точки зрения ожидаемых потерь целераспределение для стороны Y - назначить по $M(t)$ единиц для обстрела каждой единицы X . В таком случае вероятность уничтожения каждой единицы стороны X в период t равна $\tilde{\Pi}_y(M(t))$, где

$$\tilde{\Pi}_y(M) \stackrel{def}{=} 1 - (1 - \Pi_y)^M. \quad (2)$$

Обозначим через $\lfloor a \rfloor$ наибольшее целое число, меньшее либо равное a , аналогично через $\lceil a \rceil$ - наименьшее целое число, большее либо равное a . Если $M(t)$ - не целое, то тогда оптимальное целераспределение - выбрать

$y-x[M(t)]$ единиц противника и назначить по $[M(t)]$ единиц для обстрела каждой из них, а на остальные цели назначить по $[M(t)]$ единиц. Для краткости и в этом случае будем пользоваться приближенным описанием (2). Оптимальное целераспределение для стороны X - выбрать $N_x(t)$ единиц стороны Y и обстреливать каждую из них одной единицей. Если же $N_x(t) > N_y(t)$, ситуация симметрична.

В итоге при известных численностях $N_x(t)$ и $N_y(t)$ потери сторон в период t имеют следующие распределения:

$$l_x(t) \sim \begin{cases} \text{Bin}(N_x(t), \tilde{\Pi}_y(M(t))), & M(t) \geq 1, \\ \text{Bin}(N_y(t), \Pi_y), & M(t) < 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$l_y(t) \sim \begin{cases} \text{Bin}(N_x(t), \Pi_x), & M(t) \geq 1, \\ \text{Bin}(N_y(t), \tilde{\Pi}_x(M(t))), & M(t) < 1, \end{cases} \quad (4)$$

где $\tilde{\Pi}_x(M) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - (1 - \Pi_x)^{1/M}$, а $\text{Bin}(n, p)$ - биномиальное распределение с числом испытаний n и вероятностью успеха отдельного испытания p .

Пусть $N_x(1), N_y(1) > 0$ - начальные численности сторон, $L_i \in (0, 1]$ - критический уровень потерь (порог) стороны i , при достижении которого сторона i прекращает бой и считается проигравшей, $i \in \{X, Y\}$. Таким образом, минимальные численности сил, при которых стороны продолжают бой, равны $\lfloor (1 - L_x)N_x(1) \rfloor + 1$ и $\lfloor (1 - L_y)N_y(1) \rfloor + 1$ соответственно. Если же стороны одновременно достигают своих порогов, то считаем, что бой окончился ничьей. Бой продолжается до тех пор, пока какая-либо из сторон не выйдет из боя. Если другая сторона при этом осталась в бою, то она считается победившей.

2. Динамика средних численностей

Согласно известным результатам из теории вероятностей, дисперсия относительных потерь стремится к нулю при возрастании численностей. Рассмотрим, как ведет себя модель в таком случае. Пусть потери в каждом периоде t совпадают со своими математическими ожиданиями:

$$l_x(t) = \begin{cases} N_x(t) \tilde{\Pi}_y(M(t)), & M(t) \geq 1, \\ N_y(t) \Pi_y, & M(t) < 1, \end{cases}$$

$$l_y(t) = \begin{cases} N_x(t) \Pi_x, & M(t) \geq 1, \\ N_y(t) \tilde{\Pi}_x(M(t)), & M(t) < 1. \end{cases}$$

Получаем следующую динамику средних численностей:

$$\bar{N}_x(t+1) = \begin{cases} \bar{N}_x(t)(1 - \Pi_y)^{\bar{M}(t)}, & \bar{M}(t) \geq 1, \\ \bar{N}_x(t)(1 - \Pi_y \bar{M}(t)), & \bar{M}(t) < 1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\bar{N}_y(t+1) = \begin{cases} \bar{N}_y(t) \left(1 - \frac{\Pi_x}{\bar{M}(t)}\right), & \bar{M}(t) \geq 1, \\ \bar{N}_y(t)(1 - \Pi_x)^{1/\bar{M}(t)}, & \bar{M}(t) < 1, \end{cases} \quad (6)$$

где $t = 1, 2, \dots$, $\bar{M}(t) = \bar{N}_y(t)/\bar{N}_x(t)$, $\bar{N}_x(1) = N_x(1)$, $\bar{N}_y(1) = N_y(1)$. Отметим, что если $\Pi_x = 1$ или $\Pi_y = 1$, то $\bar{M}(t)$ может принимать значения 0 или $+\infty$.

2.1. Зависимость исхода боя от эффективности обнаружения

Реализация оптимального целераспределения требует быстрого и точного управления боевыми единицами. Выясним, как влияет качество обнаружения на динамику боя. Пусть $\frac{1}{k}$, $k \geq 1$, - доля единиц стороны X , которые обнаруживаются и по которым равномерно распределяются огневые средства стороны Y . Значение $\frac{1}{k}$ характеризует качество обнаружения стороны Y . У стороны X , считаем, качество обнаружения оптимальное, т.е. она обнаруживает все единицы стороны Y . Запишем уравнение, обобщающее (5) в данном случае:

$$\bar{N}_x(t+1) = \begin{cases} \bar{N}_x(t) \left(1 - \frac{1}{k} (1 - (1 - \Pi_y)^{k\bar{M}(t)}) \right), & \bar{M}(t) \geq \frac{1}{k}, \\ \bar{N}_x(t) (1 - \Pi_y \bar{M}(t)), & \bar{M}(t) < \frac{1}{k}. \end{cases} \quad (7)$$

Теорема 1. В данных предположениях отношение численностей войск меняется согласно уравнению $\bar{M}(t+1) = \bar{M}(t)F(\bar{M}(t))$, где

$$F(M) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{\Pi_x}{M}}{1 - \frac{1}{k} (1 - (1 - \Pi_y)^{kM})}, & M \geq 1, \\ \frac{(1 - \Pi_x)^{1/M}}{1 - \frac{1}{k} (1 - (1 - \Pi_y)^{kM})}, & M \in [\frac{1}{k}, 1), \\ \frac{(1 - \Pi_x)^{1/M}}{1 - \Pi_y M}, & M < \frac{1}{k}. \end{cases} \quad (8)$$

Если для начальных численностей $N_x(1)$, $N_y(1)$ выполнено $F(M(1)) > 1$, то для соответствующего решения системы (6, 7) $\bar{M}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (победа стороны Y в ДСЧ); если же $F(M(1)) < 1$, то $\bar{M}(t) \rightarrow 0$ (победа стороны X в ДСЧ).

Доказательство. Указанное уравнение для динамики $\bar{M}(t)$ вытекает из уравнений динамики средних (6, 7). Функция $F(M)$ монотонно возрастает по M . Поэтому, если $F(M(1)) = \lambda > 1$, то $M(t) \geq M(0)\lambda^t$. Если же $F(M(1)) = \lambda \in (0, 1)$, то $M(t) \leq M(1)\lambda^t$. Отсюда следует утверждение теоремы. \square

Предположим, что $N_y(1) > N_x(1)$. Выясним, как превосходство по качеству обнаружения, а также по точности поражения, может компенсировать численное превосходство противника. Рассмотрим функцию F как функцию трех аргументов: Π_x , k , и M , полагая $\Pi_y = 0.1$, и определим $\Pi_x(k, M)$ как решение уравнения $F(\Pi_x, k, M) = 1$. Согласно теореме 1, $\Pi_x(k, M)$ - пороговое значение точности поражения, компенсирующее численное превосходство в M раз стороны Y при показателе качества обнаружения $\frac{1}{k}$: при $M(1) \leq M$ и $\Pi_x > \Pi_x(k, M)$

победу в ДСЧ одержит сторона X ; при $M(1) \geq M$ и $\Pi_x < \Pi_x(k, M)$ - сторона Y . В таблице 1 приведены значения величины $q(k, M) \stackrel{def}{=} \frac{\Pi_x(k, M)}{\Pi_y}$, показывающей, во сколько раз вероятность поражения противника должна быть выше для меньшей стороны, чтобы компенсировать превосходство противника в численности.

Табл. 1. Пороговые значения показателя превосходства в точности $q(k, M)$ для различных значений k и M

$M \backslash k$	1	2	3	4	5	6
2	3.8	3.439	3.124	2.848	2.605	2.392
3	8.13	7.028	6.126	5.382	4.765	4.25
4	—	—	9.568	8.147	7.027	6.135
5	—	—	—	—	9.282	7.985

Таблица показывает, что эффективность обнаружения существенно влияет на исход боя.

Отметим, что в общем случае из (8) пороговое значение определяется как

$$\Pi_x(\Pi_y, k, M) = \frac{M}{k} (1 - (1 - \Pi_y)^{kM}) = M^2 \left(\Pi_y - \frac{kM - 1}{2} \Pi_y^2 \right) + O(\Pi_y^3).$$

3. Случай достаточно больших начальных численностей

Обозначим через $P_i(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$ вероятность победы стороны i для заданных параметров модели, $i \in \{X, Y\}$. Выясним, как меняется вероятность победы стороны X (стороны Y) при пропорциональном увеличении начальных численностей сторон. Зафиксируем вероятности Π_x и Π_y , пороги L_x и L_y , а также начальное отношение численностей сторон $M(1) = N_y(1)/N_x(1) > 0$. Для $N_x(1) \in \{N_x \in \mathbb{N} \mid M(1)N_x \in \mathbb{N}\}$ обозначим через $\hat{P}_x(N_x(1))$ ($\hat{P}_y(N_x(1))$) вероятность победы стороны X (стороны Y) в бою в зависимости от начальной численности стороны X :

$$\begin{aligned} \hat{P}_x(N_x(1)) &= P_x(N_x(1), M(1)N_x(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y), \\ \hat{P}_y(N_x(1)) &= P_y(N_x(1), M(1)N_x(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y). \end{aligned}$$

Определим, как ведут себя вероятности $\hat{P}_x(N_x(1))$ и $\hat{P}_y(N_x(1))$ при стремлении $N_x(1)$ к бесконечности. Покажем, что данная модель тесно связана с ДСЧ.

3.1. Бой до полного уничтожения

Пусть $L_x = L_y = 1$, т.е. бой продолжается до полного уничтожения противника. Определим для фиксированных Π_x, Π_y следующие функции

на множестве положительных рациональных чисел \mathbb{Q}^+ :

$$P_x^{\text{sup}}(M) = \sup_{N_x, N_y \in \mathbb{N}; N_y = MN_x} P_x(N_x, N_y, \Pi_x, \Pi_y, 1, 1),$$

$$P_x^{\text{inf}}(M) = \inf_{N_x, N_y \in \mathbb{N}; N_y = MN_x} P_x(N_x, N_y, \Pi_x, \Pi_y, 1, 1),$$

$$P_y^{\text{sup}}(M) = \sup_{N_x, N_y \in \mathbb{N}; N_y = MN_x} P_y(N_x, N_y, \Pi_x, \Pi_y, 1, 1),$$

$$P_y^{\text{inf}}(M) = \inf_{N_x, N_y \in \mathbb{N}; N_y = MN_x} P_y(N_x, N_y, \Pi_x, \Pi_y, 1, 1).$$

Данные функции определяют наибольшие и наименьшие значения вероятности победы для каждой стороны среди всевозможных начальных численностей сторон $N_x(1)$ и $N_y(1)$, для которых $N_y(1)/N_x(1) = M$.

Лемма 1. Указанные вероятности удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} P_x^{\text{sup}}(M) = 0, \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} P_y^{\text{inf}}(M) = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} P_x^{\text{inf}}(M) = 1, \quad \lim_{M \rightarrow 0} P_y^{\text{sup}}(M) = 0. \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть для фиксированных $\Pi_x, \Pi_y, M(1)$ значение $F(M(1))$ определяется согласно (8) при $k = 1$. Тогда

1. если $F(M(1)) > 1$, то

$$\lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \widehat{P}_x(N_x(1)) = 0, \quad \lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \widehat{P}_y(N_x(1)) = 1; \quad (11)$$

2. если $F(M(1)) < 1$, то

$$\lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \widehat{P}_x(N_x(1)) = 1, \quad \lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \widehat{P}_y(N_x(1)) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, если для начального отношения численностей сторон $M(1)$ в ДСЧ побеждает некоторая сторона, то в исходной задаче вероятность победы данной стороны стремится к 1 при неограниченном пропорциональном увеличении начальных численностей сторон. Доказательства леммы 1 и теоремы 2 приведены в Приложении.

Хотя победа одной из сторон в ДСЧ и говорит о том, что при неограниченном пропорциональном увеличении начальных численностей сторон вероятность победы данной стороны стремится к 1, из этого вовсе не следует, что в случае фиксированных начальных численностей победа данной стороны более вероятна, чем победа ее противника. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть $N_x(1) = 1, N_y(1) = 5, \Pi_x = 1, \Pi_y = 1 - 0.8^{1/5} + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 0.8^{1/5})$. В таком случае

$$F(M(1)) = \frac{1 - \frac{1}{5}}{(0.8^{1/5} - \varepsilon)^5} = \frac{0.8}{0.8 - \delta_1(\varepsilon)} > 1,$$

где $\delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Поэтому, согласно теореме 1, в ДСЧ выигрывает сторона Y . Теперь найдем вероятность победы стороны X . Т.к. единица стороны X стреляет со 100% точностью, то сторона X выигрывает тогда и только тогда, когда единственная единица стороны X не уничтожается за первые 5 периодов. Т.к. в таком случае $N_y(t) = 6 - t$, $t = 1, \dots, 5$, то данная вероятность равна

$$\prod_{t=1}^5 (0.8^{1/5} - \varepsilon)^{6-t} = (0.8^{1/5} - \varepsilon)^{15} = 0.8^3 - \delta_2(\varepsilon) = 0.512 - \delta_2(\varepsilon),$$

где $\delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Таким образом, для достаточно малых ε победа стороны X более вероятна, чем Y , хотя в ДСЧ выигрывает сторона Y .

Данный пример показывает, что вероятности побед сильно зависят от абсолютных значений начальных численностей сил сторон, а не только от их отношения.

3.2. Модель с учетом критических уровней потерь

Рассмотрим теперь случай, когда $L_x < 1$ и $L_y < 1$. Значения порогов существенно влияют на исход боя. Возможна ситуация, при которой, согласно теореме 2, в бою до полного уничтожения вероятность победы одной из сторон стремится к 1 при $N_x(1) \rightarrow +\infty$, но наличие низкого порога принуждает эту сторону выйти из боя раньше противника. В таком случае уже вероятность победы противника стремится к 1. Следующая теорема определяет исход боя для данной модели.

Теорема 3. Для фиксированных $\Pi_x, \Pi_y, M(1)$ пусть $\bar{N}_x(t), \bar{N}_y(t), t = 1, \dots, -$ численности сил сторон в ДСЧ, определяемые согласно (5, 6) при $N_x(1) = 1, N_y(1) = M(1)$, а T - минимальный период боя, для которого $\bar{N}_x(T) < 1 - L_x$ или $\bar{N}_y(T) < (1 - L_y)M(1)$. Тогда

1. если $\bar{N}_x(T) < 1 - L_x$ и $\bar{N}_y(T) > (1 - L_y)M(1)$, то

$$\lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \hat{P}_x(N_x(1)) = 0, \quad \lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \hat{P}_y(N_x(1)) = 1; \quad (13)$$

2. если $\bar{N}_x(T) > 1 - L_x$ и $\bar{N}_y(T) < (1 - L_y)M(1)$, то

$$\lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \hat{P}_x(N_x(1)) = 1, \quad \lim_{N_x(1) \rightarrow +\infty} \hat{P}_y(N_x(1)) = 0. \quad (14)$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

4. Алгоритм решения исходной задачи

Вернемся к исходной задаче расчета вероятностей побед сторон. Зафиксируем параметры модели $N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y$ и опишем алгоритм вычисления $P_x(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$ и $P_y(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$. Пусть $N_x^{\min} = \lfloor (1 - L_x)N_x(1) \rfloor + 1$ и $N_y^{\min} = \lfloor (1 - L_y)N_y(1) \rfloor + 1$ - минимальные численности сил сторон, при которых бой еще не прекращается. Обозначим через $\tilde{P}_x(N_x, N_y)$ ($\tilde{P}_y(N_x, N_y)$)

вероятность победы стороны X (соответственно Y) в бою в случае, если известно, что в начале некоторого периода боя численности сил сторон X и Y равны N_x и N_y соответственно. При известных вероятностях $\tilde{P}_x(\tilde{N}_x, \tilde{N}_y)$ и $\tilde{P}_y(\tilde{N}_x, \tilde{N}_y)$ для всех $(\tilde{N}_x, \tilde{N}_y) \in \{(\tilde{N}_x, \tilde{N}_y) \mid \tilde{N}_x \in \{0, \dots, N_x - 1\}, \tilde{N}_y \in \{0, \dots, N_y - 1\}\}$ данные вероятности находятся следующим образом:

$$\tilde{P}_x(N_x, N_y) = \begin{cases} 0, & N_x < N_x^{\min}, \\ \frac{\sum_{l_x=1}^{\min(N_x, N_y)} \left(\sum_{l_y=1}^{\min(N_x, N_y)} \tilde{P}^c(l_x, l_y, N_x, N_y) \tilde{P}_x(N_x - l_x, N_y - l_y) \right)}{1 - \tilde{P}^c(0, 0, N_x, N_y)}, & N_x \geq N_x^{\min}, N_y \geq N_y^{\min}, \\ 1, & N_x \geq N_x^{\min}, N_y < N_y^{\min}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\tilde{P}_y(N_x, N_y) = \begin{cases} 0, & N_y < N_y^{\min}, \\ \frac{\sum_{l_x=1}^{\min(N_x, N_y)} \left(\sum_{l_y=1}^{\min(N_x, N_y)} \tilde{P}^c(l_x, l_y, N_x, N_y) \tilde{P}_y(N_x - l_x, N_y - l_y) \right)}{1 - \tilde{P}^c(0, 0, N_x, N_y)}, & N_y \geq N_y^{\min}, N_x \geq N_x^{\min}, \\ 1, & N_y \geq N_y^{\min}, N_x < N_x^{\min}, \end{cases} \quad (16)$$

где $\tilde{P}^c(l_x, l_y, N_x, N_y)$ - вероятность того, что при численностях N_x и N_y в начале периода потери сторон X и Y в периоде составят l_x и l_y соответственно. Т.к. существует вероятность нулевых потерь с обеих сторон, при которых численности не меняются, суммы в формулах (15,16) корректируются на величину $\frac{1}{1 - \tilde{P}^c(0, 0, N_x, N_y)}$. Вероятность $\tilde{P}^c(l_x, l_y, N_x, N_y)$ с учетом (3,4) находится согласно следующей формуле:

$$\tilde{P}^c(l_x, l_y, N_x, N_y) = \begin{cases} C_{N_x}^{l_x} (\tilde{\Pi}_y(N_y/N_x))^{l_x} \left((1 - \Pi_y)^{N_y/N_x} \right)^{N_x - l_x} \\ \cdot C_{N_x}^{l_y} \Pi_x^{l_y} (1 - \Pi_x)^{N_x - l_y}, & N_y \geq N_x, \\ C_{N_y}^{l_x} \Pi_y^{l_x} (1 - \Pi_y)^{N_y - l_x} C_{N_y}^{l_y} (\tilde{\Pi}_x(N_y/N_x))^{l_y} \\ \cdot \left((1 - \Pi_x)^{N_x/N_y} \right)^{N_y - l_y}, & N_y < N_x. \end{cases} \quad (17)$$

Алгоритм расчета вероятностей $P_x(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$ и $P_y(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$ состоит в последовательном вычислении вероятностей $\tilde{P}_x(N_x, N_y)$ и $\tilde{P}_y(N_x, N_y)$ для каждой пары

$$(N_x, N_y) \in \{(N_x, N_y) \mid N_x \in \{0, \dots, N_x(1)\}, N_y \in \{0, \dots, N_y(1)\}\}$$

согласно (15-17), причем если две пары (N_x^1, N_y^1) и (N_x^2, N_y^2) различны и выполняются неравенства $N_x^1 \leq N_x^2$ и $N_y^1 \leq N_y^2$, то для пары (N_x^1, N_y^1) вероятности должны находиться до вероятностей для пары (N_x^2, N_y^2) . Таким образом, первой парой будет $(0, 0)$, а последней - $(N_x(1), N_y(1))$. В

итоге искомые вероятности равны $\tilde{P}_x(N_x(1), N_y(1))$ и $\tilde{P}_y(N_x(1), N_y(1))$ соответственно.

Число операций алгоритма имеет порядок $O\left(N_x(1)N_y(1)\left(\min\left(N_x(1), N_y(1)\right)\right)^2\right)$. Продемонстрируем результаты работы алгоритма в следующем примере.

Пример 2. Рассмотрим бой со следующими параметрами: $\Pi_y = 0.2$, $L_x = L_y = 1$, $M(1) = 2$. Исследуем модель для различных значений Π_x , $N_x(1)$. Т.к. $F(M(1)) = F(2) = \frac{1-0.72/2}{(1-0.2)^2} = 1$ при $\Pi_x = 0.72$, то $F(M(1)) > 1$ при $\Pi_x < 0.72$ и $F(M(1)) < 1$ при $\Pi_x > 0.72$. Таким образом, согласно теореме 2, при $\Pi_x < 0.72$ ($\Pi_x > 0.72$) вероятность победы стороны Y (соответственно X) стремится к 1 при $N_x(1) \rightarrow +\infty$. Данный вывод подтверждается таблицей 2, где приведены полученные с помощью алгоритма вероятности победы стороны Y в бою для различных значений Π_x и $N_x(1)$.

Табл. 2. Вероятность победы стороны Y в бою при $\Pi_y = 0.2$, $L_x = L_y = 1$, $M(1) = 2$ для различных Π_x и $N_x(1)$

$N_x(1) \backslash \Pi_x$	0.5	0.6	0.7	0.71	0.73	0.8	0.9
1	0.6078	0.5445	0.4893	0.4841	0.4741	0.4408	0.3979
5	0.7813	0.6512	0.5174	0.5043	0.4786	0.3927	0.2844
10	0.8695	0.7167	0.5329	0.5143	0.4776	0.3561	0.2128
25	0.9637	0.8219	0.5573	0.5279	0.4695	0.2829	0.1043
50	0.9945	0.9050	0.5823	0.5409	0.4582	0.2089	0.0375
75	0.9990	0.9459	0.6008	0.5505	0.4493	0.1605	0.0146
100	0.9998	0.9683	0.6162	0.5584	0.4416	0.1259	0.0058
150	0.9999	0.9885	0.6415	0.5716	0.4287	0.0802	0.0010
200	0.9999	0.9956	0.6623	0.5826	0.4179	0.0525	0.0001
300	0.9999	0.9993	0.6961	0.6008	0.3998	0.0235	0.0000
400	0.9999	0.9998	0.7233	0.6161	0.3847	0.0109	0.0000

5. Построение аппроксимирующей функции для вероятностей побед сторон

Хотя предложенный в предыдущем разделе алгоритм и находит точные вероятности побед сторон, время его работы довольно быстро растет с увеличением начальных численностей, что делает его мало пригодным для расчетов с большими начальными численностями. Более того, алгоритм лишь находит вероятности побед сторон для фиксированных параметров модели, при этом остается неясным, как ведут себя функции $P_x(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$ и

$P_y(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$ при изменении параметров, что представляет определенный интерес.

Отметим, что в работах [18-22] предлагается использовать следующую формулу для расчета вероятности победы стороны X в модели двустороннего боя:

$$p_x(x, y) = \frac{\alpha \lambda_{x,x}}{\alpha \lambda_{x,x} + \lambda_{y,y}}. \quad (18)$$

Здесь x, y - начальные численности сторон, $\lambda_x, \lambda_y \in (0, 1)$ - доли потерь, выдерживаемыми сторонами, при превышении которых стороны выходят из боя, а $\alpha \stackrel{def}{=} \sqrt[4]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ - параметр технологического превосходства, определяющийся как среднее геометрическое следующих четырех параметров: $\alpha_1 > 0$ - параметр превосходства стороны X в опыте командования и всестороннем обеспечении; $\alpha_2 > 0$ - параметр ее превосходства в средствах разведки, связи и навигации; $\alpha_3 > 0$ - параметр превосходства в маневренности; $\alpha_4 > 0$ - параметр превосходства в огневых возможностях. За основу для данной формулы взята предложенная в [23-24] функция успеха в конфликте. Согласно (18), вероятность победы стороны X не меняется при пропорциональном изменении начальных численностей сторон: $p_x(\beta x, \beta y) = p_x(x, y) \forall \beta > 0$. Но, как уже было показано выше, вероятности побед сторон сильно зависят от абсолютных значений начальных численностей, а не только от их отношения. Так, в рассмотренном выше примере 2 при $\Pi_x = 0.6$ в рассматриваемых пределах изменения начальных численностей вероятность победы стороны Y меняется в пределах [0.5445, 0.9998], хотя согласно (18) данная вероятность является постоянной. Поэтому возникает сомнение в возможности применения формулы (18) для оценки вероятностей побед сторон.

В данном разделе постараемся определить, как в действительности ведут себя функции $P_x(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$ и $P_y(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y, L_x, L_y)$, построив их аппроксимации для случая с $L_x = L_y = 1$. Описанный в предыдущем разделе алгоритм поможет сформировать обучающие выборки для построения аппроксимаций. Отметим, что вероятность ничьи мала, и эта вероятность быстро уменьшается при увеличении начальных численностей $N_x(1)$ и $N_y(1)$. Поэтому с целью упрощения задачи построим аппроксимации для несколько измененной модели, в которой вероятность победы каждой стороны увеличивается на $\frac{P^d}{2}$, где P^d - вероятность ничьи для данных параметров в исходной модели. Обозначим искомые аппроксимирующие функции через $\hat{P}_x(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y)$ и $\hat{P}_y(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y)$ соответственно. Достаточно построить аппроксимацию последней из этих функций, положив $\hat{P}_x(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y) = 1 - \hat{P}_y(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y)$.

Обозначим через P_y вероятность победы стороны Y . Данная величина зависит от параметров $N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y$. Далее рассмотрим введенную в (8) величину F для расчета победы в ДСЧ как функцию от трех переменных M, Π_x, Π_y , где $M = N_y(1)/N_x(1)$ - начальное отношение численностей сторон. Согласно теореме 2, при $F < 1$ величина P_y стремится к нулю при пропорциональном увеличении начальных численностей сторон $N_x(1), N_y(1)$, т.е. при увеличении «масштаба» боя. При $F > 1$ аналогично ведет себя величина $1 - P_y$. Определим показатель масштаба боя как корень из среднего геометрического начальных численностей:

$$S(N_x(1), N_y(1)) = \sqrt[4]{N_x(1)N_y(1)}.$$

Проведенные вычисления показали, что при фиксированных параметрах Π_x, Π_y при пропорциональном увеличении начальных численностей сторон $N_x(1), N_y(1)$ зависимость величины P_y от $S(N_x(1), N_y(1))$ в целом обладает следующими свойствами при $F < 1$ (рис. 1): $P_y \rightarrow 1/2$ при $S(N_x(1), N_y(1)) \rightarrow 0$, $P_y \rightarrow 0$ при $S(N_x(1), N_y(1)) \rightarrow +\infty$, при этом $\ln(P_y)$ - вогнутая функция, что говорит о том, что величина P_y стремится к нулю не медленнее, чем экспонента. При $F > 1$ аналогичные свойства демонстрирует величина $1 - P_y$.

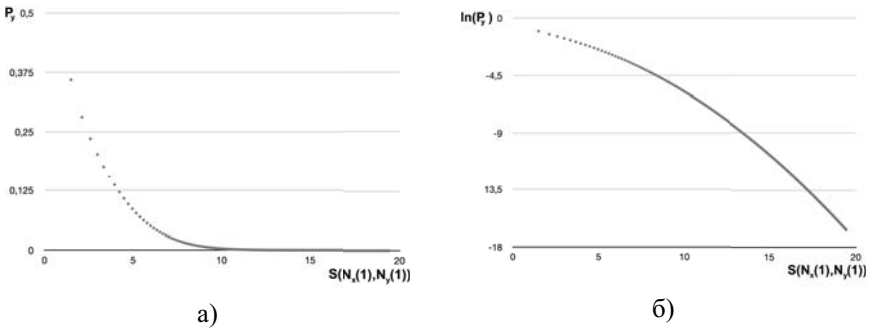


Рис. 1. Расчетные значения величин P_y и $\ln(P_y)$ в зависимости от показателя масштаба $S(N_x(1), N_y(1))$ при пропорциональном увеличении начальных численностей сторон ($M(1) = 2, \Pi_x = 0.6, \Pi_y = 0.1$, при этих значениях $F \approx 0.864$)

Выясним, как ведет себя величина P_y при изменении других параметров. Расчеты показывают, что $P_y \approx 1/2$ при $F \approx 1$. Пусть $\bar{N}_x(2), \bar{N}_y(2)$ - ожидаемые численности сторон в начале второго периода, определяемые согласно (5, 6). Введем следующие величины: $\alpha_x = \bar{N}_x(2)/N_x(1), \alpha_y = \bar{N}_y(2)/N_y(1)$ - средние доли не пораженных в первом периоде единиц сторон. Согласно теореме 1, $F = \alpha_y/\alpha_x$, поэтому $F < 1 \Leftrightarrow \alpha_y/\alpha_x < 1 \Leftrightarrow (1 - \alpha_x)/(1 - \alpha_y) < 1$. Величина $\beta_1 = \alpha_y/\alpha_x$ является

ожидаемым увеличением численного превосходства стороны Y в первом периоде, а величина $\beta_2 = (1 - \alpha_x)/(1 - \alpha_y)$ - ожидаемым превышением относительных потерь стороны X над относительными потерями стороны Y в первом периоде. Каждая из этих величин теоретически может быть использована как показатель превосходства стороны Y над стороной X : при увеличении величины β_1 увеличивается P_y , причем $P_y \approx 1/2$ при $\beta_1 \approx 1$ (аналогична зависимость от β_2). По отдельности данные величины не позволяют однозначно определить P_y (рис. 2), однако их произведение для фиксированной пары $(N_x(1), N_y(1))$ с минимальной погрешностью предсказывает P_y (рис. 3), в том числе и при близких к нулю вероятностях (рис. 3б).

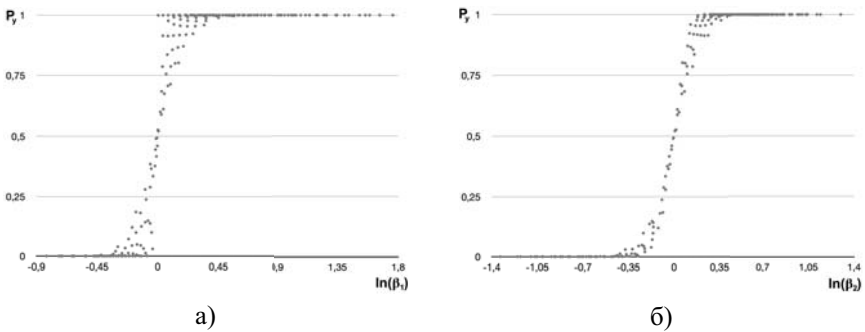


Рис. 2. Расчетные значения величины P_y для $N_x(1) = 50$, $N_y(1) = 70$ при варьировании величин Π_x , Π_y : а) в зависимости от $\ln(\beta_1)$; б) в зависимости от $\ln(\beta_2)$

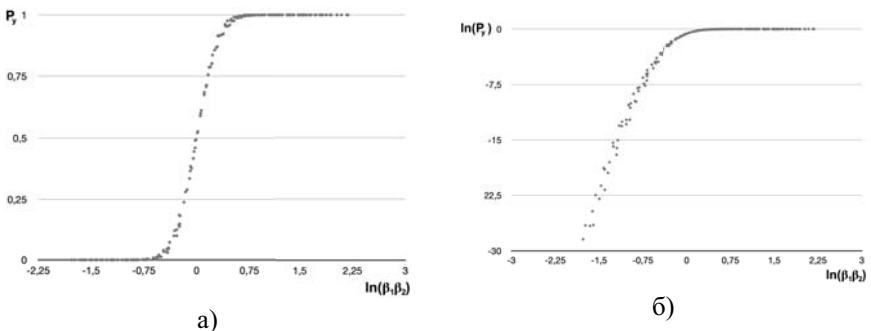


Рис. 3. Расчетные значения величин P_y и $\ln(P_y)$ в зависимости от $\ln(\beta_1\beta_2)$ для $N_x(1) = 50$, $N_y(1) = 70$ при варьировании величин Π_x , Π_y : а) P_y ; б) $\ln(P_y)$

Зависимость P_y от $\ln(\beta_1\beta_2)$ при фиксированной паре начальных численностей $(N_x(1), N_y(1))$ хорошо описывается некоторой сигмоидой,

симметричной относительно точки $(0, 1/2)$ (рис. 3). При этом $\ln(P_y)$ - вогнутая функция (рис. 3б), поэтому величина P_y стремится к нулю при $\ln(\beta_1\beta_2) \rightarrow -\infty$ не медленнее, чем экспонента. Отметим, что при рассмотрении различных пар $(N_x(1), N_y(1))$ данная зависимость остается практически неизменной, однако графики на рис. 3 растягиваются либо сжимаются относительно оси абсцисс.

Исходя из вышесказанного, определим показатель превосходства стороны Y над стороной X следующим образом:

$$E(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y) = \ln(\beta_1\beta_2) = \ln\left(\frac{N_x(1)/\bar{N}_x(2) - 1}{N_y(1)/\bar{N}_y(2) - 1}\right).$$

Среди различных классов сигмоидных функций зависимость величин P_y от показателя превосходства стороны Y довольно точно приближает функция $f(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(kz) + \frac{1}{2}$, где $k > 0$ - некоторый зависящий от $N_x(1)$, $N_y(1)$ параметр, а $\operatorname{erf}(z)$ - функция, широко используемая в теории вероятностей и статистике ([25], функция ошибок):

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Функция $\operatorname{erf}(z)$ нечетна и меняется от -1 до 1 при изменении z от $-\infty$ до $+\infty$. Т.к. она не является элементарной, то для расчета ее значений можно использовать известное разложение в виде бесконечного ряда или специальную таблицу [25]. Функция такого же вида также довольно точно приближает зависимость P_y от показателя масштаба $S(N_x(1), N_y(1))$ (рис. 1), при этом параметр k не зависит от $M = N_y(1)/N_x(1)$.

В итоге следующая функция может быть использована для оценки вероятности победы стороны Y в бою:

$$\hat{P}_y(N_x(1), N_y(1), \Pi_x, \Pi_y) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(aES) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{aES} e^{-t^2} dt + \frac{1}{2}, \quad (19)$$

где

$$E = \ln\left(\frac{N_x(1)/\bar{N}_x(2) - 1}{N_y(1)/\bar{N}_y(2) - 1}\right) = \begin{cases} \ln\left(\frac{(1-\Pi_y)^{-N_y(1)/N_x(1)} - 1}{(1-\Pi_x)^{\frac{N_x(1)}{N_y(1)}} - 1}\right), & \frac{N_y(1)}{N_x(1)} \geq 1, \\ \ln\left(\frac{(1-\Pi_y)^{\frac{N_y(1)}{N_x(1)}} - 1}{(1-\Pi_x)^{-N_x(1)/N_y(1)} - 1}\right), & \frac{N_y(1)}{N_x(1)} < 1 \end{cases}$$

- показатель превосходства стороны Y над стороной X ; $S = \sqrt[4]{N_x(1)N_y(1)}$ - показатель масштаба; $a > 0$ - некоторый фиксированный коэффициент.

Для определения коэффициента a проведем расчет величин P_y с помощью алгоритма из предыдущего раздела на сетке, заданной таблицей 3, в результате чего для каждой четверки исходных параметров $(N_x^l(1), N_y^l(1), \Pi_x^l, \Pi_y^l)$ находится соответствующая вероятность P_y^l . Далее

для каждой пятерки $(N_x^l(1), N_y^l(1), \Pi_x^l, \Pi_y^l, P_y^l)$, для которой $P_y^l \neq 1/2$, однозначно определяется коэффициент a^l согласно (19). Пусть A - множество всех полученных таким образом коэффициентов. Искомый коэффициент полагается равным среднему от найденных коэффициентов: $a = \frac{1}{|A|} \sum_{a^l \in A} a^l$. Для указанных данных было получено значение $a \approx 0.37$.

Таким образом, для приближенного расчета вероятности победы стороны Y может быть использована формула (19) с этим значением.

Табл. 3. Сетка для расчета коэффициента a

параметр	минимальное значение	максимальное значение	шаг
$N_x(1)$	1	99	2
$N_y(1)$	1	99	2
Π_x	0.1	0.9	0.2
Π_y	0.1	0.9	0.2

На рис. 4 представлены результаты сравнения предсказанных согласно (19) \hat{P}_y и расчетных вероятностей победы P_y стороны Y для сетки с увеличенным до 7 шагом для параметров $N_x(1)$ и $N_y(1)$ (около 2000 точек). Из рисунка видно, что полученная аппроксимация с высокой степенью точности позволяет оценить вероятность победы стороны Y , при этом коэффициент детерминации R^2 равен 0.9990. Отметим, что при $P_y \approx 0$ относительная погрешность может достигать несколько порядков, однако в целом поведение вероятности описывается верно.

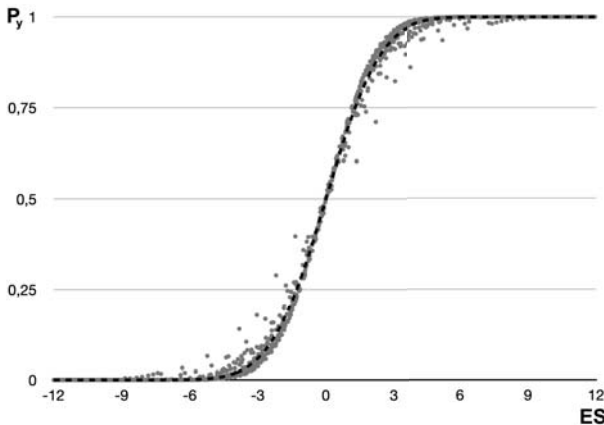


Рис. 4. Сравнение предсказанных \hat{P}_y (пунктирная линия) и расчетных вероятностей победы P_y (точки) стороны Y для различных значений величины ES

Стоит отметить, что точность формулы (19) может быть улучшена, если конкретизировать диапазон возможного изменения исходных параметров $N_x(1)$, $N_y(1)$, Π_x , Π_y . В этом случае для измененной сетки следует пересчитать коэффициент a способом, описанным выше.

Заключение

Основные результаты работы следующие. Для ДСЧ выведен критерий, позволяющий определить победителя в бою, при этом учитывается влияние эффективности обнаружения на исход боя. Исследована асимптотика вероятности победы стороны в бою при пропорциональном увеличении начальных численностей. Разработан алгоритм, точно определяющий эту вероятность в зависимости от исходных параметров. Получена приближенная формула для ее расчета. В качестве проблемы для дальнейших исследований отметим обобщение данной зависимости в случае, когда учитываются критические уровни потерь сторон.

Литература

1. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Мир. 1971. 384 с.
2. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир. 1964. 839 с.
3. *Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Яночкин И. Е.* Модель «нападение-оборона» с неоднородными ресурсами сторон // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 1. С. 42–51.
4. *Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Лесик А. И.* Неоднородная игра «нападение-оборона» на основе обобщенного принципа уравнивания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 89–106.
5. *Решетов В. Ю., Перевозчиков А. Г., Лесик И. А.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова / Под ред. В. И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс. 2015. № 49. С. 80–96.
6. *Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Шаповалов Т. Г.* Многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона» // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 57–69.
7. *Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Шаповалов Т. Г.* Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападения с несколькими фазовыми ограничениями // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2017. № 1. С. 26–32.

8. *Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Лесик А. И.* Многошаговое обобщение модели «нападение-оборона» // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 89–100.
9. *Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Яночкин И. Е.* Многорубежная модель «нападение-оборона» на сетях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1448–1456.
10. *R. Hohzaki, V. Tanaka.* The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network // Proceedings of 27th European conference on Operation Research (EURO2015). 12-15 July 2015, University of Strathclyde.
11. *Перевозчиков А. Г., Лесик И. А.* Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3 (30). С. 83–95.
12. *Перевозчиков А. Г., Лесик И. А., Яночкин И. Е.* Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 65–83.
13. *Перевозчиков А. Г., Решетов В. Ю., Лесик А. И.* К задаче распределения разнотипных средств обороны по критерию разности потерь // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 26–41.
14. *F.W. Lanchester.* Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. London: Constable and Co, Ltd. 1916. 243 p.
15. *Вентцель Е. С.* Введение в исследование операций. Советское радио. 1964. 390 с.
16. *James G. Taylor.* Lanchester Models of Warfare // Operations Research Society of America. Military Applications Section. March, 1983. 797 p.
17. *Краснощечков П. С., Петров А. А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ. 1983. 264 с.
18. *Шумов В. В.* Анализ социально-информационного влияния на примере войн США в Корее, Вьетнаме и Ираке // Компьютерное исследование и моделирование. 2014. Т. 6. № 1. С. 167–184.
19. *Шумов В. В.* Учет психологических факторов в моделях боя (конфликта) // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. № 6. С. 951–964.
20. *Шумов В. В.* Иерархия моделей боевых действий и пограничных конфликтов // Управление большими системами. Выпуск 79. М.: ИПУ РАН. 2019. С. 86–111.

21. Шумов В. В., Корепанов В. О. Математические модели боевых и военных действий // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 1. С. 217–242.
22. Шумов В. В. Расширение модели «наступление–оборона» // Пробл. управл. 2020. № 1. С. 59–70.
23. Skarpedas S. Contest success functions // Economic Theory. — 1996. — No. 7. — P. 283–290.
24. Garfinkel M., Skaperdas S. Economics of conflict: An Overview / In T. Sandler and K. Hartley (Eds.), Handbook of Defense Economics, 2006. Chapter 3.
25. Dayan Adionel Guimaraes. Digital Transmission - A Simulation-Aided Introduction with VisSim/Comm. Signals and Communication Technology. Springer. Berlin, Heidelberg. 2009. 863 p.

Приложение

Доказательство леммы 1. Докажем соотношение (9). Соотношение (10) доказывается аналогично. Достаточно доказать справедливость второго равенства (9), т.к. из него следует справедливость первого равенства (9).

Если $\Pi_x = \Pi_y = 1$, то при $M > 1$, очевидно, $P_y^{\text{inf}}(M) = 1$, поскольку сторона X полностью уничтожается в первый период боя, в отличие от стороны Y , поэтому для этого случая (9) выполняется.

Пусть $\Pi_x < 1$ или $\Pi_y < 1$. Отметим, что в этом случае для любых начальных численностей $N_x(1), N_y(1) > 0$ вероятность ничьи не превосходит $\Pi_x \Pi_y < 1$. Это можно легко показать, рассмотрев всевозможные ничейные исходы боя. Для каждого такого исхода в предфинальном периоде $T - 1$ численности сил сторон X и Y , очевидно, совпадают, иначе стороны не смогут одновременно уничтожить друг друга за один период. А при фиксированных численностях $N_x(T - 1) = N_y(T - 1) > 0$ в предфинальном периоде условная вероятность полного уничтожения друг друга в следующем периоде равна $\Pi_x^{N_x(T-1)} \Pi_y^{N_y(T-1)} \leq \Pi_x \Pi_y$.

Докажем, что $\exists \bar{M} > 0, \bar{P}_y > 0$ такие, что $\forall N_x, N_y \in \mathbb{N}$, для которых $N_y/N_x \geq \bar{M}$, выполняется неравенство $P_y(N_x, N_y, \Pi_x, \Pi_y, 1, 1) \geq \bar{P}_y$. Т.к. вероятность ничьи ограничена сверху числом $\Pi_x \Pi_y < 1$, то для этого достаточно показать, что для достаточно больших начальных отношений численностей сторон $M(1)$ вероятность победы стороны Y не меньше, чем вероятность победы стороны X , вне зависимости от абсолютных значений начальных численностей $N_x(1), N_y(1)$. Если $\Pi_y \geq \Pi_x$, то достаточно выбрать $\bar{M} = 1$, т.к. в таком случае при $M(1) = \bar{M}$ силы сторон будут полностью одинаковыми, а следовательно, вероятности их побед

совпадают. При увеличении $M(1)$, очевидно, вероятность победы стороны Y может только возрасти. Если же $\Pi_y < \Pi_x$, то возьмем $\bar{M} = \left\lceil \log_{(1-\Pi_y)}(1-\Pi_x) + 1 \right\rceil > 1$, в этом случае $\Pi_x < 1 - (1 - \Pi_y)^{\bar{M}}$, поэтому при $M(1) \geq \bar{M}$ в начале боя на каждую единицу стороны X , которая стреляет с вероятностью поражения Π_x , приходится как минимум $\bar{M} > 1$ единиц стороны Y , которые вместе поражают единицу стороны X с вероятностью, большей либо равной $1 - (1 - \Pi_y)^{\bar{M}} > \Pi_x$, что говорит о полном превосходстве стороны Y в начале боя: и по численности, и по ожидаемым потерям противника. Поэтому при $M(1) \geq \bar{M}$ вероятность победы стороны Y не меньше, чем вероятность победы стороны X .

Зафиксируем найденные \bar{M} , \bar{P}_y . Рассмотрим произвольные $N_x(1), N_y(1) \in \mathbb{N}$, для которых выполняется $N_y(1)/N_x(1) \geq \bar{M}$. При этом вероятность того, что сторона Y не выиграет бой, не превосходит $1 - \bar{P}_y$. Если же увеличить численность стороны Y в $k \in \mathbb{N}$ раз, то вероятность того, что сторона Y не выиграет бой, будет не превосходить $(1 - \bar{P}_y)^k$ (это понятно, достаточно представить, что сторона Y пускает в бой не все свои войска сразу, а группами численностью по $N_y(1)$ единиц, причем следующая группа вступает в бой только после полного уничтожения предыдущей; при такой модификации модели, очевидно, вероятность победы стороны Y может только уменьшиться). А это означает, что $P_y(N_x(1), kN_y(1), \Pi_x, \Pi_y, 1, 1) \geq 1 - (1 - \bar{P}_y)^k$ для любых $k, N_x(1), N_y(1) \in \mathbb{N}$, для которых выполняется $N_y(1)/N_x(1) \geq \bar{M}$. Следовательно, $P_y^{\text{inf}}(kM) \geq 1 - (1 - \bar{P}_y)^k$ для любых $k, M \in \mathbb{N}$, $M \geq \bar{M}$. Устремив k к бесконечности, с учетом того, что $\bar{P}_y > 0$, и того, что функция $P_y(N_x, N_y, \Pi_x, \Pi_y, 1, 1)$ не возрастает по N_x и не убывает по N_y (что очевидно), получаем второе равенство (9). \square

Доказательство теоремы 2. Докажем пункт 1). Пункт 2) доказывается аналогично. Достаточно доказать справедливость второго равенства (11), т.к. из него следует справедливость первого равенства (11).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Докажем, что $\exists \bar{N}_x \in \mathbb{N}$ такое, что для $\forall N_x(1) \geq \bar{N}_x$ выполняется $\hat{P}_y(N_x(1)) \in [1 - \varepsilon, 1]$.

Обозначим через $\alpha_x = \bar{N}_x(2)/\bar{N}_x(1)$, $\alpha_y = \bar{N}_y(2)/\bar{N}_y(1)$ относительные изменения численностей сторон X и Y соответственно в первом периоде ДСЧ. Данные величины находятся через (5, 6). При этом $\alpha_y/\alpha_x = \bar{M}(2)/\bar{M}(1) = F(M(1)) > 1$ (согласно теореме 1), т.е. $\alpha_y > \alpha_x \geq 0$. Т.к. $\Pi_x, \Pi_y > 0$, то $\alpha_x, \alpha_y < 1$. Зафиксируем произвольные $\bar{\alpha}_x, \bar{\alpha}_y$, для которых выполняются неравенства $0 \leq \alpha_x < \bar{\alpha}_x < \bar{\alpha}_y < \alpha_y < 1$.

Согласно лемме 1, $\exists \bar{M} > 0$ такое, что $P_y(N_x, N_y, \Pi_x, \Pi_y, 1, 1) \geq \sqrt{1 - \varepsilon}$ для любых $N_x, N_y \in \mathbb{N}$, $N_y/N_x \geq \bar{M}$.

Обобщим исходную динамику (1) на случай бесконечного числа периодов, положив, что $N_x(t) = N_x(\bar{T})$, $N_y(t) = N_y(\bar{T})$, $t > \bar{T}$, где $\bar{T} -$

последний период боя в исходной постановке. Обозначим через A событие, при котором $N_x(t) \leq (\bar{\alpha}_x)^{t-1}N_x(1)$, $N_y(t) \geq (\bar{\alpha}_y)^{t-1}N_y(1)$, $t = 2, \dots, T$, где $T = \lceil \log_{\bar{\alpha}_y/\bar{\alpha}_x}(\bar{M}/M(1)) \rceil$. При реализации данного события $M(T+1) \geq M(1)(\bar{\alpha}_y/\bar{\alpha}_x)^{\lceil \log_{\bar{\alpha}_y/\bar{\alpha}_x}(\bar{M}/M(1)) \rceil} \geq \bar{M}$, поэтому вероятность победы стороны Y не меньше, чем $P(A)\sqrt{1-\varepsilon}$, при этом

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(N_x(t) \leq (\bar{\alpha}_x)^{t-1}N_x(1), N_y(t) \geq (\bar{\alpha}_y)^{t-1}N_y(1), t = 2, \dots, T+1) = \\
&= \prod_{t=2}^{T+1} P(N_x(t) \leq (\bar{\alpha}_x)^{t-1}N_x(1), N_y(t) \geq (\bar{\alpha}_y)^{t-1}N_y(1) \mid \\
&N_x(\tau) \leq (\bar{\alpha}_x)^{\tau-1}N_x(1), N_y(\tau) \geq (\bar{\alpha}_y)^{\tau-1}N_y(1), \tau = 2, \dots, t-1) \geq \\
&\geq \prod_{t=2}^{T+1} P(N_x(t) \leq (\bar{\alpha}_x)^{t-1}N_x(1), N_y(t) \geq (\bar{\alpha}_y)^{t-1}N_y(1) \mid \\
&N_x(t-1) = \lfloor (\bar{\alpha}_x)^{t-2}N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil (\bar{\alpha}_y)^{t-2}N_y(1) \rceil) = \\
&= \prod_{t=2}^{T+1} P\left(\frac{N_x(t)}{N_x(1)} \leq (\bar{\alpha}_x)^{t-1}, \frac{N_y(t)}{M(1)N_x(1)} \geq (\bar{\alpha}_y)^{t-1} \mid \right. \\
&N_x(t-1) = \lfloor (\bar{\alpha}_x)^{t-2}N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil (\bar{\alpha}_y)^{t-2}M(1)N_x(1) \rceil) \geq \\
&\geq \prod_{t=2}^{T+1} P\left(\frac{N_x(t)}{N_x(t-1)} \leq \bar{\alpha}_x, \frac{N_y(t)}{N_y(t-1)} \geq \bar{\alpha}_y \mid \right. \\
&N_x(t-1) = \lfloor (\bar{\alpha}_x)^{t-2}N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil (\bar{\alpha}_y)^{t-2}M(1)N_x(1) \rceil) \geq
\end{aligned} \tag{20}$$

Докажем, что условные вероятности в последнем выражении для каждого $t \leq T+1$ стремятся к 1 при $N_x(1) \rightarrow +\infty$. В этом случае $\exists \bar{N}_x \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $t \leq T+1$, $N_x(1) \geq \bar{N}_x$ данная условная вероятность не меньше $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2T}}$, т.е. $P(A) \geq \sqrt{1-\varepsilon}$, а значит $\hat{P}_y(N_x(1)) \geq 1-\varepsilon$.

Рассмотрим следующие условные математические ожидания:

$$E_1 \stackrel{def}{=} E(N_x(t) \mid N_x(t-1) = \lfloor (\bar{\alpha}_x)^{t-2}N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil (\bar{\alpha}_y)^{t-2}M(1)N_x(1) \rceil);$$

$$E_2 \stackrel{def}{=} E(N_y(t) \mid N_x(t-1) = \lfloor (\bar{\alpha}_x)^{t-2}N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil (\bar{\alpha}_y)^{t-2}M(1)N_x(1) \rceil).$$

Заметим, что согласно определению ДСЧ данные математические ожидания совпадают с $\bar{N}_x(t)$, $\bar{N}_y(t)$ при $\bar{N}_x(t-1) = \lfloor (\bar{\alpha}_x)^{t-2}N_x(1) \rfloor$, $\bar{N}_y(t-1) = \lceil (\bar{\alpha}_y)^{t-2}M(1)N_x(1) \rceil$ из (5, 6). Если учесть, что правая часть (5) как функция от $\bar{M}(t)$ не возрастает, правая часть (6) как функция от $\bar{M}(t)$ не убывает, а $\bar{M}(t-1) = \frac{\bar{N}_y(t-1)}{\bar{N}_x(t-1)} \geq (\bar{\alpha}_y/\bar{\alpha}_x)^{t-2}M(1) \geq M(1)$, то получим, что

$$E_1 \leq \alpha_x \lfloor (\bar{\alpha}_x)^{t-2}N_x(1) \rfloor; \quad E_2 \geq \alpha_y \lceil (\bar{\alpha}_y)^{t-2}M(1)N_x(1) \rceil.$$

Т.к. в (20) $N_x(t-1) \rightarrow +\infty$ и $N_y(t-1) \rightarrow +\infty$ при $N_x(1) \rightarrow +\infty$ для любых $t = 2, \dots, T+1$, можно применить закон больших чисел, учтя (1-4). Получаем, что в (20) случайные величины $\frac{N_x(t)}{N_x(t-1)}$ и $\frac{N_y(t)}{N_y(t-1)}$ сходятся по

вероятности к своим математическим ожиданиям $\frac{E_1}{N_x(t-1)} \leq \alpha_x < \bar{\alpha}_x$ и $\frac{E_2}{N_y(t-1)} \geq \alpha_y > \bar{\alpha}_y$ соответственно при $N_x(1) \rightarrow +\infty$, а значит условные вероятности в (20) стремятся к 1 при $N_x(1) \rightarrow +\infty$, поэтому и $P(A) \rightarrow 1$ при $N_x(1) \rightarrow +\infty$. \square

Доказательство теоремы 3. Докажем пункт 1. Пункт 2 доказывается аналогично. Достаточно доказать справедливость второго равенства (13), т.к. из него следует справедливость первого равенства (13).

Рассмотрим уравнения ДСЧ (5, 6). Рассмотрим численности $\bar{N}_x(t+1)$ и $\bar{N}_y(t+1)$ как функции от $\bar{N}_x(t)$ и $\bar{N}_y(t)$. Обозначим данные функции через $\tilde{N}_x(N_x, N_y)$ и $\tilde{N}_y(N_x, N_y)$ соответственно. Они удовлетворяют следующим свойствам:

- $\tilde{N}_x(N_x, N_y)$ и $\tilde{N}_y(N_x, N_y)$ непрерывны по N_x и N_y ;
- Для любого $\alpha > 0$ $\tilde{N}_x(\alpha N_x, \alpha N_y) = \alpha \tilde{N}_x(N_x, N_y)$,
 $\tilde{N}_y(\alpha N_x, \alpha N_y) = \alpha \tilde{N}_y(N_x, N_y)$;
- $\tilde{N}_x(N_x, N_y)$ не убывает по N_x и не возрастает по N_y ;
- $\tilde{N}_y(N_x, N_y)$ не убывает по N_y и не возрастает по N_x ;
- $\tilde{N}_x(0, N_y) = 0$, $\tilde{N}_y(N_x, 0) = 0$;
- $\lim_{N_x \rightarrow +\infty} \tilde{N}_x(N_x, N_y) = +\infty$, $\lim_{N_y \rightarrow +\infty} \tilde{N}_y(N_x, N_y) = +\infty$.

Еще одно важное свойство этих функций состоит в том, что для $\forall \hat{N}_x, \hat{N}_y > 0 \exists N_x, N_y > 0$, для которых $\tilde{N}_x(N_x, N_y) = \hat{N}_x$, $\tilde{N}_y(N_x, N_y) = \hat{N}_y$. Докажем это. Согласно (8), функция $F(M)$ непрерывна, возрастает, а также $F(0) = 0$, $\lim_{M \rightarrow +\infty} F(M) = +\infty$, поэтому $\exists \bar{M} > 0$, для которого

$\bar{M}F(\bar{M}) = \hat{N}_y/\hat{N}_x$. Покажем, что искомые численности равны $N'_x = \frac{\hat{N}_x}{\bar{N}_x(1, \bar{M})}$,

$N'_y = \frac{\bar{M} \hat{N}_x}{\bar{N}_x(1, \bar{M})}$. Действительно,

$\tilde{N}_x(N'_x, N'_y) = \tilde{N}_x\left(\frac{\hat{N}_x}{\bar{N}_x(1, \bar{M})}, \bar{M} \frac{\hat{N}_x}{\bar{N}_x(1, \bar{M})}\right) = \frac{\hat{N}_x}{\bar{N}_x(1, \bar{M})} \tilde{N}_x(1, \bar{M}) = \hat{N}_x$, а согласно

теореме 1, $\frac{\tilde{N}_y(N'_x, N'_y)}{\bar{N}_x(N'_x, N'_y)} = \frac{N'_y}{N'_x} F\left(\frac{N'_y}{N'_x}\right) = \bar{M}F(\bar{M}) = \hat{N}_y/\hat{N}_x$, т.е.

$\tilde{N}_y(N'_x, N'_y) = \hat{N}_y \frac{\bar{N}_x(N'_x, N'_y)}{\hat{N}_x} = \hat{N}_y$.

Численности сил сторон в условии теоремы определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{N}_x(t) = \tilde{N}_x(\bar{N}_x(t-1), \bar{N}_y(t-1)), & t = 2, \dots, T, \\ \bar{N}_y(t) = \tilde{N}_y(\bar{N}_x(t-1), \bar{N}_y(t-1)), & t = 2, \dots, T, \\ \bar{N}_x(1) = 1, \bar{N}_y(1) = M(1). \end{cases}$$

Определим рекурсивно величины $N_x^g(t)$, $N_y^g(t)$, $N_x^a(t)$, $N_y^a(t)$, $t = 1, \dots, T$, следующим образом:

$$\begin{cases} N_x^g(T) = 1 - L_x, N_y^g(T) = (1 - L_y)M(1), N_x^g(1) = 1, N_y^g(1) = M(1), \\ (N_x^g(t), N_y^g(t)) \in \{(N_x, N_y) \mid \\ \tilde{N}_x(N_x, N_y) = N_x^a(t+1), \tilde{N}_y(N_x, N_y) = N_y^a(t+1)\}, t = 2, \dots, T-1, \\ N_x^a(t) = \frac{\bar{N}_x(t) + N_x^g(t)}{2}, N_y^a(t) = \frac{N_y^g(t) + \bar{N}_y(t)}{2}, t = 3, \dots, T, \\ N_x^a(2) = \bar{N}_x(2), N_y^a(2) = \bar{N}_y(2). \end{cases}$$

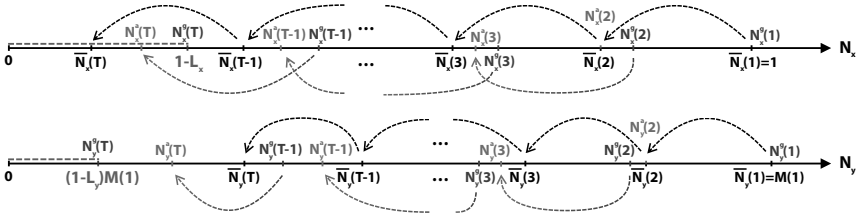


Рис. 5. Взаимное расположение величин $\bar{N}_x(t)$, $N_x^g(t)$, $N_x^a(t)$ и $\bar{N}_y(t)$, $N_y^g(t)$, $N_y^a(t)$

На рис. 5 показано взаимное расположение величин $\bar{N}_x(t)$, $N_x^g(t)$, $N_x^a(t)$ и $\bar{N}_y(t)$, $N_y^g(t)$, $N_y^a(t)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{N}_x(T) < N_x^a(T) < N_x^g(T) = 1 - L_x < \bar{N}_x(T-1) < N_x^a(T-1) < \\ < N_x^g(T-1) < \dots < \bar{N}_x(2) = N_x^a(2) < N_x^g(2) < \bar{N}_x(1) = N_x^g(1) = 1, \\ 0 < (1 - L_y)M(1) = N_y^g(T) < N_y^a(T) < \bar{N}_y(T) < N_y^g(T-1) < \\ < N_y^a(T-1) < \bar{N}_y(T-1) < \dots < N_y^g(2) < N_y^a(2) = \bar{N}_y(2) < \bar{N}_y(1) = \\ = N_y^g(1) = M(1). \end{aligned}$$

Это расположение следует из определения данных величин и указанных выше свойств функций $\tilde{N}_x(N_x, N_y)$ и $\tilde{N}_y(N_x, N_y)$. Стрелками на рисунке показаны связи данных величин через функции $\tilde{N}_x(N_x, N_y)$ и $\tilde{N}_y(N_x, N_y)$.

Обозначим через A событие, при котором $N_x(t) < N_x^g(t)N_x(1)$, $N_y(t) > N_y^g(t)N_x(1)$, $t = 2, \dots, T$. При реализации данного события $N_x(T) < (1 - L_x)N_x(1)$, $N_y(T) > (1 - L_y)M(1)N_x(1) = (1 - L_y)N_y(1)$, поэтому сторона Y выигрывает бой. Найдем вероятность наступления события A :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N_x(t) < N_x^g(t)N_x(1), N_y(t) > N_y^g(t)N_x(1), t = 2, \dots, T) = \\ &= \prod_{t=2}^T P(N_x(t) < N_x^g(t)N_x(1), N_y(t) > N_y^g(t)N_x(1) \mid \\ &N_x(\tau) < N_x^g(\tau)N_x(1), N_y(\tau) > N_y^g(\tau)N_x(1), \tau = 2, \dots, t-1) \geq \\ &\geq \prod_{t=2}^T P(N_x(t) < N_x^g(t)N_x(1), N_y(t) > N_y^g(t)N_x(1) \mid \\ &N_x(t-1) = \lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{t=2}^T P \left(\frac{N_x(t)}{N_x(1)} < N_x^g(t), \frac{N_y(t)}{N_x(1)} > N_y^g(t) \mid \right. \\
&N_x(t-1) = \lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil \Big) \geq \\
&\geq \prod_{t=2}^T P \left(\frac{N_x(t)}{N_x(t-1)} < \frac{N_x^g(t)}{N_x^g(t-1)}, \frac{N_y(t)}{N_y(t-1)} > \frac{N_y^g(t)}{N_y^g(t-1)} \mid \right. \\
&N_x(t-1) = \lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil \Big). \tag{21}
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие условные математические ожидания:

$$\begin{aligned}
&E_1 \stackrel{def}{=} E(N_x(t) \mid \\
&N_x(t-1) = \lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil); \\
&E_2 \stackrel{def}{=} E(N_y(t) \mid \\
&N_x(t-1) = \lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor, N_y(t-1) = \lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil).
\end{aligned}$$

Заметим, что согласно определению ДСЧ данные математические ожидания как раз совпадают со значениями функций $\tilde{N}_x(N_x, N_y)$ и $\tilde{N}_y(N_x, N_y)$ в соответствующих точках:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \tilde{N}_x(\lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor, \lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil) \leq \\
&\leq \tilde{N}_x(N_x^g(t-1)N_x(1), N_y^g(t-1)N_x(1)) = \\
&= N_x(1)\tilde{N}_x(N_x^g(t-1), N_y^g(t-1)) = N_x(1)N_x^a(t) < N_x^g(t)N_x(1), \\
E_2 &= \tilde{N}_y(\lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor, \lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil) \geq \\
&\geq \tilde{N}_y(N_x^g(t-1)N_x(1), N_y^g(t-1)N_x(1)) = \\
&= N_x(1)\tilde{N}_y(N_x^g(t-1), N_y^g(t-1)) = N_x(1)N_y^a(t) > N_y^g(t)N_x(1).
\end{aligned}$$

Поэтому, т.к. в (21) $N_x(t-1) \rightarrow +\infty$ и $N_y(t-1) \rightarrow +\infty$ при $N_x(1) \rightarrow +\infty$ для любых $t = 2, \dots, T$, то применив закон больших чисел и учтя (1-4), можно сделать вывод, что в (21) случайные величины $\frac{N_x(t)}{N_x(t-1)}$ и

$\frac{N_y(t)}{N_y(t-1)}$ сходятся по вероятности к своим математическим ожиданиям $\frac{E_1}{N_x(t-1)} \leq \frac{N_x^a(t)N_x(1)}{\lfloor N_x^g(t-1)N_x(1) \rfloor} < \frac{N_x^g(t)N_x(1)}{\lceil N_x^g(t-1)N_x(1) \rceil}$ и $\frac{E_2}{N_y(t-1)} \geq \frac{N_y^a(t)N_x(1)}{\lceil N_y^g(t-1)N_x(1) \rceil} > \frac{N_y^g(t)N_x(1)}{\lfloor N_y^g(t-1)N_x(1) \rfloor}$ соответственно при $N_x(1) \rightarrow +\infty$, а

т.к., начиная с некоторого $N_x(1)$, выполняется $\frac{E_1}{N_x(t-1)} < \frac{N_x^g(t)}{N_x^g(t-1)}$, $\frac{E_2}{N_y(t-1)} > \frac{N_y^g(t)}{N_y^g(t-1)}$, то условные вероятности в (21) стремятся к 1 при $N_x(1) \rightarrow +\infty$, поэтому и $P(A) \rightarrow 1$ при $N_x(1) \rightarrow +\infty$, из чего следует справедливость второго равенства (13). \square