Секция: *Обратные задачи*
УДК: 519.634

Восстановление двух коэффициентов в модели колебаний струны с упруго закрепленным концом

Щеглов А. Ю.[1,2*], Андреянова О. А.[2]

[1*]Факультет ВМК, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Guojidaxueyuan st., Shenzhen, 518172, Longgang, China.
[2]Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия.

*Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s): shcheg@cs.msu.ru;
Соавторы: oksashka@gmail.com;

Аннотация

Рассматривается обратная задача одновременного определения двух коэффициентов в модели малых поперечных колебаний однородной ограниченной струны, на один конец которой действует упругая сила, а другой конец не закреплен. Процесс колебаний моделируется неоднородным уравнением гиперболического типа с неоднородностью в уравнении, представленной множителями, зависящими от различных аргументов. Дополнительной информацией для решения обратной задачи являются заданные значения решения прямой задачи на свободном конце струны. При этом в рамках постановки обратной задачи определения требуют функция в краевом условии третьего рода и функциональный множитель в неоднородности уравнения. В работе устанавливаются условия разрешимости обратной задачи, некоторые свойства ее решения и предлагается алгоритм для численного приближения решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнение колебаний, малые поперечные колебания, смешанная краевая задача, обратная задача.

Получено редакцией 19.05.2024; внесены авторские правки 15.07.2024; принята к публикации 09.08.2024

1 Введение

Пусть прямая задача состоит в определении функции $u(x,t)$, удовлетворяющей при $(x,t) \in \Delta_{(l,T)} = \{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant T - (l-x)/a;\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$, где $0 < l < aT$, уравнению и граничным условиям

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x)g(t), \qquad (x,t) \in \Delta_{(l,T)}, \tag{1}$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} - \beta\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \widehat{T} = T - \frac{l}{a}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{4}$$

Обратная задача состоит в восстановлении функций $f(s)$, $\mu(\tau)$, $u(x,t)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T - (l/a)$, $(x,t) \in \Delta_(l,T)$, удовлетворяющих задаче (1) – (4) и дополнительному условию

$$h(t) = u(l,t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

при известном значении $\beta > 0$ и заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$.

Идентификация функциональных коэффициентов и параметров в задачах для уравнений гиперболического типа привлекает внимание при анализе геофизических моделей [1], [2], [3], в задачах оптимального управления: в работах В. А. Ильина [4], [5], А. А. Холомеевой [6], [7], при исследовании решений обратных задач: в работах В Г. Романова [8], [9], [10], [11], [12], в работах С. И. Кабанихина [13], [14], [15], [16], [17], [18], в работах А. М. Денисова [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], в работах А. В. Баева [38], [39], [40], [41], [42], и в работах других авторов [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58]. Теоретический анализ большинства обратных задач, как правило, сопровождается численными расчетами с использованием проработанных алгоритмов [59], [60], ориентированных на компьютерную обработку экспериментальных данных при решении некорректно поставленных задач.

2 Прямая задача

На множестве $\Pi_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ для смешанной краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x)g(t), \qquad (x,t) \in \Pi_T, \tag{6}$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} - \beta\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

с граничными условиями (3), (4) справедлива [61] следующая теорема.

Теорема 1. *Если положительные значения l, T, a, β и функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, $g(t)$, $\mu(t)$ таковы, что $l < aT$, существует значение $\mu'(0)$, и*

$$\varphi(x) \in C^2[0,l], \quad \psi(x) \in C^1[0,l], \quad \varphi'(l) = \psi'(l) = 0, \tag{8}$$

$$f(x) \in C[0,l], \quad g(t) \in C^1[0,T], \tag{9}$$

$$\mu(t) \in C^1[0,T], \quad \mu(0) = \varphi(0) - \beta\varphi'(0), \quad \mu'(0) = \psi(0) - \beta\psi'(0), \tag{10}$$

то задача (6), (7), (3), (4) имеет единственное решение $u(x,t) \in C^2\left(\Pi_T\right)$.

При этом решение $u(x,t)$ задачи (6), (7), (3), (4) на отдельных подмножествах области Π_T имеет однозначное представление, получаемое из формулы Даламбера [61] для неоднородного уравнения (6). Так, например,

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a} f(s)\,ds\,d\tau, (x,t) \in \Delta^1 = \Delta_{\left(\frac{l}{2}\right),\left(\frac{l}{2a}\right)}, \tag{11}$$

где $\Delta^1 = \Delta_{(l/2),(l/2a)}$ – характеристический для уравнения (6) треугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(l,0)$, $\big((l/2), l/(2a)\big)$ на плоскости с координатами (x,t):

$$\Delta^1 = \Delta_{\left(\frac{l}{2}\right),\left(\frac{l}{2a}\right)} = \left\{(x,t) : \frac{l}{2} - at \leqslant x \leqslant \frac{l}{2} - at,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{l}{2a}\right\}.$$

Также начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из условий (4) и функция $f(x)$ из уравнения (1) могут быть продолжены с начального отрезка $[0,l]$ на отрезок $[-aT, l+aT]$ функциями $\widehat{\varphi}(x)$, $\widehat{\psi}(x)$, $\widehat{f}(x)$, четным образом относительно прямой $x = l$ так, чтобы выполнялось краевое условие (3), при $T \in (0,(l/a)]$ в виде

$$\widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} z(x), & x \in [-aT,0), \\ \varphi(x), & x \in [0,l], \\ \varphi(2l-x), & x \in (l, l+aT], \end{cases} \quad \widehat{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(0)+\psi'(0)x, & x \in [-aT,0), \\ \psi(x), & x \in [0,l], \\ \psi(2l-x), & x \in (l, l+aT], \end{cases}$$

$$\widehat{f}(x)=\begin{cases} f(0), & x\in[-aT,0),\\ f(x), & x\in[0,l],\\ f(2l-x), & x\in(l,l+aT],\end{cases}$$

и при $T>(l/a)$ в виде

$$\widehat{\varphi}(x)=\begin{cases} z(x), & x\in[-aT,0),\\ \varphi(x), & x\in[0,l],\\ \varphi(2l-x), & x\in(l,2l],\\ z(2l-x), & x\in(2l+l+aT],\end{cases}$$

$$\widehat{\psi}(x)=\begin{cases} \psi(0)+\psi'(0)x, & x\in[-aT,0),\\ \psi(x), & x\in[0,l],\\ \psi(2l-x), & x\in(l,2l],\\ \psi(0)-\psi'(0)(x-2l), & x\in(2l,l+aT],\end{cases}$$

$$\widehat{f}(x)=\begin{cases} f(0), & x\in(-aT,0],\\ f(x), & x\in[0,l],\\ f(2l-x), & x\in(l,2l],\\ f(0), & x\in(2l,l+aT],\end{cases}$$

где функция $z(x)$ является решением задачи Коши для получаемого из условия (2) обыкновенного линейного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} z'(s)-\dfrac{1}{\beta}z(s)=F_1(s)-\dfrac{2}{\beta}\,\mu\left(\dfrac{-s}{a}\right), \quad s\in[-\,aT_1,0]\,,\\ z(0)=\varphi(0),\end{cases} \tag{12}$$

с $T_1=\min\{T,2l/a\}$ и с функцией $F_1(s)$, $s\in[-aT_1,0]$, исходя из условия (2), имеет вид

$$F_1(s)=\frac{\widehat{\varphi}(-s)}{\beta}-\widehat{\varphi}'(-s)+\frac{\beta-s}{a\,\beta}\psi(0)+\frac{2\beta-s}{a\,\beta}\psi'(0)-\frac{1}{a}\widehat{\psi}(-s)+$$

$$+\frac{1}{a\beta}\int_0^{-s}\widehat{\psi}(\xi)\,d\xi+\frac{f(0)}{a\beta}\int_0^{-s/a}(\beta-a\tau-s)g(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int_0^{-s}g\left(-\frac{s+\xi}{a}\right)\widehat{f}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{a\beta}\int_0^{-s/a}g(\tau)\int_0^{-s-a\tau}\widehat{f}(\xi)\,d\xi\,d\tau. \tag{13}$$

При этом задача Коши (12) имеет [62] единственное решение $z(s)=z_1(s)$:

$$z_1(s)=\varphi(0)e^{\frac{s}{\beta}}-\int_s^0 e^{\frac{s-\xi}{\beta}}\left(-\frac{2}{\beta}\,\mu\Big(\frac{-\xi}{a}\Big)+F_1(\xi)\right)d\xi, \quad s\in[-aT_1,0]\,. \tag{14}$$

При значениях l, T, a таких, что $2l<aT$, с $T_1=\min\{T,2l/a\}=2l/a$, после получения функции $z_1(s)$ на отрезке $[-2l,0]=[-\,aT_1,0]$, краевое условие (2) с подстановкой в него функции $u(x,t)$ и ее производной

$u_x(x,t)$ при $x=0$, представленных по формуле Даламбера через исходные функции, продолженные на отрезок $[-aT, l+aT]$ в виде $\widehat{\varphi}(x)$, $\widehat{\psi}(x)$, $\widehat{f}(x)$, принимает вид линейного ОДУ:

$$z'(s) - \frac{z(s)}{\beta} = z'(s+2l) - \frac{z(s+2l)}{\beta} + F_2(s) - \frac{2}{\beta}\,\mu\Big(\frac{-s}{a}\Big),\ s\in[-aT,-2l], \quad (15)$$

образующего вместе с условием $z(-2l) = z_1(-2l)$ задачу Коши относительно функции $z(s)$, $s\in[-aT,-2l]$ при

$$F_2(s) = \frac{-2(l+s)}{a\,\beta}\psi(s) - \frac{2}{a\beta}\Big(l\beta + l^2 + ls + \frac{1}{2}s^2\Big)\widehat{\psi}'(0) + + \frac{2}{a\beta}\int_0^l \psi(\xi)\,d\xi -$$

$$- \frac{2}{\beta}f(0)\int_{2l/a}^{-s/a}\Big(\frac{s}{a}+\tau\Big)\,g(\tau)\,d\tau - \frac{f(0)}{a\beta}\int_0^{2l/a}\big(s + a\tau + 2l\big)g(\tau)\,d\tau -$$

$$- \frac{1}{a\beta}\int_0^{2l/a} g(\tau)\int_0^{2l-a\tau}\widehat{f}(s)\,ds\,d\tau - \frac{1}{a}\int_{-(s+2l)/a}^{-s/a} g(\tau)\Big(\widehat{f}(-\,s - a\tau) - \widehat{f}(0)\Big)\,d\tau.$$

Такая задача Коши с уравнением (15) имеет [62] единственное решение $z(s) = z_2(s)$ для $s\in\big[\max\{-aT,-4l\},-2l\big]$:

$$z_2(s) = \varphi(0)e^{s/\beta} - \int_{-2l}^{0} e^{(s-\xi)/\beta}\left(\frac{-2}{\beta}\mu\Big(\frac{-\,\xi}{a}\Big) + F_1(\xi)\right)\,d\xi -$$

$$- \int_s^{-2l} e^{(s-\xi)/\beta}\left(\frac{-2}{\beta}\mu\Big(\frac{-\,\xi}{a}\Big) + F_2(\xi) - z_1'(\xi+2l) + \frac{1}{\beta}z_1(\xi+2l)\right)\,d\xi. \quad (16)$$

При значениях l, T, a таких, что $4\,l < aT \leqslant 6\,l$, задача с ОДУ первого порядка (15) относительно функции $z(s)$ с запаздывающим аргументом имеет решение для $s\in[-\,aT,-\,4l]$:

$$z(s) = z_3(s) = \varphi(0)e^{s}\beta - \int_{-2l}^{0} e^{(s-\xi)/\beta}\left(-\,\frac{2}{\beta}\mu\Big(-\,\frac{\xi}{a}\Big) + F_1(\xi)\right)\,d\xi -$$

$$- \int_{-4l}^{-2l} e^{(s-\xi)/\beta}\left(-\,\frac{2}{\beta}\mu\Big(-\,\frac{\xi}{a}\Big) + F_2(\xi) - z_1'(\xi+2l) + \frac{1}{\beta}z_1(\xi+2l)\right)\,d\xi -$$

$$- \int_s^{-4l} e^{(s-\xi)/\beta}\left(-\,\frac{2}{\beta}\mu\Big(-\,\frac{\xi}{a}\Big) + F_2(\xi) - z_2'(\xi+2l) + \frac{1}{\beta}z_2(\xi+2l)\right)\,d\xi. \quad (17)$$

Тогда, используя значения функции $z(s)$ из формул (14), (16), (17), с учетом продления заданных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ за пределы отрезка $[0,l]$ функциями $\widehat{\varphi}(x)$, $\widehat{\psi}(x)$, $\widehat{f}(x)$ описанным выше образом, с помощью формулы Даламбера (11) получаем решение $u(x,t)$ задачи (6), (7), (3),

(4) на некоторых других частях области Π_T в виде:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(2l-x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{l}\psi(s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{2l-x-at}^{l}\psi(s)\,ds+\frac{1}{2a}\int_{0}^{t-(l-x)/a}g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{l}f(s)\,ds\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{0}^{t-(l-x)/a}g(\tau)\int_{l}^{x+(t-\tau)a}f(2l-s)\,ds\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{t-(l-x)/a}^{t}g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a}f(s)\,ds\,d\tau,\qquad (x,t)\in\Delta^2, \tag{18}$$

где

$$\Delta^2=\Delta_{l,\left(\frac{l}{a}\right)}\setminus\Delta_{\left(\frac{l}{2}\right),\left(\frac{l}{2a}\right)}=\left\{(x,t):\ \frac{l-x}{a}\leqslant t\leqslant\frac{x}{a},\ \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\right\}$$

– треугольник с вершинами в точках $(l,0)$, $(l,l/a)$, $(l/2,l/(2a))$ на плоскости с координатами (x,t). И с продлением начальных условий и функции $f(x)$ за пределы отрезка $[0,l]$ на отрезок $[-2l,4l]$ так, чтобы выполнялись краевые условия (2), (3):

$$u(x,t)=\frac{\varphi(0)}{2}\left(e^{\frac{x-at}{\beta}}+e^{\frac{2l-x-at}{\beta}}\right)-\int_{x-at}^{0}e^{\frac{x-at-s}{\beta}}\left(\frac{1}{2}F_1(s)-\frac{1}{\beta}\mu\Big(\frac{-s}{a}\Big)\right)ds-$$

$$-\int_{2l-x-at}^{0}e^{\frac{2l-x-at-s}{\beta}}\left(\frac{F_1(s)}{2}-\frac{1}{\beta}\mu\Big(\frac{-s}{a}\Big)\right)ds+\frac{at-l}{2}\psi(0)+\int_0^l\frac{\psi(s)}{a}\,ds-$$

$$-\frac{(l-x)^2+(at-l)^2}{2a}\psi'(0)+\frac{f(0)}{2a}\int_0^{t-(2l-x)/a}\big(x+(t-\tau)a-2l\big)g(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{f(0)}{2a}\int_0^{t-(x/a)}\big((t-\tau)a-x\big)g(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2a}\int_0^x f(s)\int_0^{t-(x-s)/a}g(\tau)\,d\tau\,ds+$$

$$+\int_x^l\frac{f(s)}{2a}\int_0^{t+(x-s)/a}g(\tau)\,d\tau\,ds+\int_l^{2l}\frac{f(2l-s)}{2a}\int_0^{t+(x-s)/a}g(\tau)\,d\tau\,ds, \tag{19}$$

$$(x,t)\in\Delta^3=\Delta_{l,\left(\frac{3l}{a}\right)}\setminus\Delta_{0,\left(\frac{2l}{a}\right)}=\left\{(x,t):\ \frac{2l-x}{a}\leqslant t\leqslant\frac{x+2l}{a},\ 0\leqslant x\leqslant l\right\},$$

— треугольник с вершинами в точках $(0,2l/a)$, $(l,3l/a)$, $(l,l/a)$.

Формулы (18), (19) дают решение задачи (6), (7), (3), (4) в виде зависимости от заданных функций, получаемой из формулы Даламбера на тех подмножествах области определения решения $u(x,t)$, где $x=l$ для всех $t\in[0,T]$, при $T\leqslant 3l/a$. В случае исходных значений l, T, a таких, что $T>3l/a$ построение решения $u(x,t)$ для $t\in[(3l/a),T]$ в окрестности значений $x=l$ может быть продолжено по аналогичному с формулами (18), (19) принципу. При этом справедливо [56] следующее утверждение.

Замечание 1. *При выполнении условий теоремы 1 смешанная краевая задача (1) – (4) имеет единственное решение* $u(x,t) \in C^2\left(\Delta_(l,T)\right)$, *представимое формулой*

$$u(x,t) = \frac{\widehat{\varphi}(x-at)+\widehat{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\widehat{\psi}'(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a}\widehat{f}(s)\,ds\,d\tau, \qquad (x,t)\in\Delta_{l,T}.$$

3 Обратная задача и единственность ее решения

Определение 1. *Три функции* $f(s)$, $\mu(\tau)$, $u(x,t)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant \widehat{T}$ *с* $\widehat{T} = T - l/a$ *и* $(x,t) \in \Delta_{l,T} = \left\{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant \widehat{T} + x/a,\, 0 \leqslant x \leqslant l\right\}$, *называются решением обратной задачи (1) – (5), если при заданных положительных значениях* l, T, a, β *таких, что* $l < aT$, *и функциях* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, *удовлетворяющих условиям на них из ограничений (8), (9), и условиям*

$$h(t) \in C[0,T], \quad h(0) = \varphi(l), \quad h'(0) = \psi(l), \quad g(0) \neq 0, \qquad (20)$$

функции $u(x,t) \in C^2\left(\Delta_{l,T}\right)$, $f(s)$, $\mu(\tau)$ *удовлетворяют условиям на них из ограничений (9), (10), а также уравнению (1) на множестве* $\Delta_{l,T}$, *условию (2) на отрезке* $\left[0,\widehat{T}\right]$ *и условиям (3) – (5).*

Теорема 2. *Пусть заданы положительные значения* l, T, a, β *такие, что* $l < aT$, *и известны функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, *удовлетворяющие условиям на них из ограничений (9), (10), (20). Тогда обратная задача (1) – (5) не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, от противного, существование двух различных решений обратной задачи (1) – (5): трех функций $f_1(s)$, $\mu_1(\tau)$, $u_1(x,t)$ и трех функций $f_2(s)$, $\mu_2(\tau)$, $u_2(x,t)$. Тогда при заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$ с учетом условия (5) для аргументов $t \in [0, l/a]$ формула (18) при $x = l$ получает вид уравнения относительно функции $f(s)$:

$$h(t) = \varphi(l-at) + \frac{1}{a}\int_{l-at}^{l}\psi(s)\,ds + \frac{1}{a}\int_{l-at}^{l} f(s)\int_0^{t-(l-s)/a} g(\tau)\,d\tau\,ds. \quad (21)$$

Вычитая из уравнения (21) с функцией $f_1(s)$ на месте $f(s)$ это же уравнение (21) с функцией $f_2(s)$ на месте $f(s)$, получаем для разности $\Delta f(s) = f_1(s) - f_2(s)$, $s \in [0,l]$, уравнение

$$\frac{1}{a}\int_{l-at}^{l}\left(\int_0^{t-(l-s)/a} g(\tau)\,d\tau\right)\Delta f(s)\,ds = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{l}{a}. \qquad (22)$$

Дифференцируя уравнение (22) дважды по t, выполняя замену $x = l - at$, имеем

$$\Delta f(x) + \int_x^l K_1(x,s)\Delta f(s)\,ds = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

– линейное однородное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода относительно функции $\Delta f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, в котором ядро $K_1(x,s)$ имеет вид

$$K_1(x,s) = \frac{1}{ag(0)}\,g'\left(\frac{s-x}{a}\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant l. \tag{24}$$

В силу непрерывности ядра (24), следующей из условий (10) и (20), уравнение (23) имеет [63] только тождественно нулевое решение $\Delta f(s) \equiv 0$, из чего получаем, что $f_1(s) = f_2(s)$, $s \in [0,l]$. Пусть теперь $f(x) = f_j(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $j = 1,2$.

При заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$ с учетом установленных выше равенств $f(x) = f_1(x) = f_2(x)$ и условия (5), формула (19) для значений аргумента $t \in [(l/a), T_2]$, где $T_2 = \min\{T, 3l/a\}$, при $x = l$ принимает вид уравнения относительно функции $\mu(s)$:

$$h(t) = \varphi(0)e^{(l-at)/\beta} + \frac{1}{a}\Bigg[\int_0^l \psi(s)\,ds + (at-l)\psi(0) - \frac{1}{2}(at-l)^2\psi'(0) +$$

$$+ f(0)\int_0^{t-(l/a)}\big((t-\tau)a - l\big)g(\tau)\,d\tau + \int_0^l f(s)\int_0^{t-(l-s)/a} g(\tau)\,d\tau\,ds\Bigg] -$$

$$- \int_{l-at}^0 e^{\frac{l-at-s}{\beta}}\left(F_1(s) - \frac{2}{\beta}\mu\left(\frac{-s}{a}\right)\right)ds, \qquad \frac{l}{a} \leqslant t \leqslant T_2. \tag{25}$$

Вычитая из уравнения (25) с функцией $\mu_1(s)$ на месте $\mu(s)$ это же уравнение (25) с $\mu_1(s)$ на месте $\mu(s)$, получаем относительно разности $\Delta\mu(s) = \mu_1(s) - \mu_2(s)$, $s \in [0, T_2 - l/a]$, уравнение, имеющее после замен $\tau = t - l/a$ и $\xi = -s/a$ вид

$$\int_0^\tau e^{-\frac{a}{\beta}(\tau-\xi)}\Delta\mu(\xi)\,d\xi = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T_2 - \frac{l}{a}. \tag{26}$$

Дифференцируя уравнение Вольтерра 1-го рода (26) по аргументу τ, получаем

$$\mu(\tau) - \frac{a}{\beta}\int_0^\tau e^{-\frac{a}{\beta}(\tau-\xi)}\Delta\mu(\xi)\,d\xi = 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T_2 - \frac{l}{a}, \tag{27}$$

— линейное однородное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, имеющее [63] единственное решение $\Delta\mu(\tau) \equiv 0$, из чего следует равенство $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau) = \mu(\tau)$ при $\tau \in [0, T_2 - l/a]$.

Если при этом $T \in [l/a, (2l)/a]$, то для данных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $f(x) = f_1(x) = f_2(x)$ и $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau) = \mu(\tau)$ с аргументами $x \in [0,l]$,

$t \in [0,T]$, $\tau \in [0, T - l/a]$, в соответствии со следствием 1 существует единственное решение $u(x,t) = u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $(x,t) \in \Delta_{l,T} \subset \Pi_T$, задачи (1) – (4). Таким образом, при $T \in [l/a, (2l)/a]$ решения $f_1(s)$, $\mu_1(\tau)$, $u_1(x,t)$ и $f_2(s)$, $\mu_2(\tau)$, $u_2(x,t)$ обратной задачи (1) – (5) попарно совпадают, и теорема 2 была бы доказана в случае $T \in [l/a, (2l)/a]$.

Если же $T > 2l/a$, то после получения двух равенств $f_1(x) = f_2(x)$ и $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau)$ для $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0, l/a]$, построение уравнений (26) и (27) продолжается для $\tau \in \big[l/a, \min\{\widehat{T}, (2l/a)\}\big]$ с получением функции $z(x)$ на расширяемой области и с получением равенства $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau)$ для $\tau \in \big[l/a, \min\{\widehat{T}, (2l/a)\}\big]$. При $T > 3l/a$ расширение области продолжается с шагом, не превышающим значения l/a, до исчерпания всего отрезка $\big[0, \widehat{T}\,\big]$, как области решения уравнения (27), с однозначным определением функции $\Delta\mu(\tau) \equiv 0$ из уравнения (27). Доказательство теоремы 2 завершается получением однозначного решения $u(x,t)$ прямой задачи на множестве $\Delta_{l,T}$ по формуле вида (19) в соответствии с следствием 1. □

4 Существование решения обратной задачи

Теорема 3. *Пусть заданы положительные значения l, T, a, β такие, что $l < aT$, и известны функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, удовлетворяющие условиям на них из ограничений (8), (9), (19), и условию $h(t) \in C^2[0,T]$. Тогда существует решение обратной задачи (1) – (5).*

Доказательство. Дифференцируя дважды по аргументу t уравнение (21), имеем

$$f(x) + \int_x^l K_1(x,s) f(s)\, ds = \chi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{28}$$

– линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода относительно функции $f(x)$, в котором ядро $K_1(x,s)$ непрерывно и определяется формулой (24), и

$$\chi(x) = \frac{1}{g(0)} \left(h''\left(\frac{l-x}{a}\right) - a^2 \varphi''(x) + a\psi'(x) \right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{29}$$

Из ограничений на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$ в условиях теоремы 3 следует непрерывность правой части интегрального уравнения (28) функции $\chi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, определяемой формулой (29). Следовательно, уравнение (28) имеет [63] единственное решение $f(x) \in C[0,l]$. Выполняя в уравнении (25) замены: подынтегрального аргумента $s = -a\xi$ в последнем интеграле равенства (25) и затем основного аргумента $t = \tau + l/a$, и дифференцируя после замен уравнение по τ, имеем

$$\mu(\tau) - \frac{a}{\beta}\int_0^\tau e^{-\frac{a}{\beta}(\tau-\xi)}\mu(\xi)\,d\xi = \sigma(\tau), \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T_2 - \frac{l}{a}, \tag{30}$$

— линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода относительно функции $\mu(\tau)$, где $T_2 = \min\{T, (3l/a)\}$, и

$$\sigma(\tau) = \frac{\beta}{2a}h'\left(\tau + \frac{l}{a}\right) + \frac{\varphi(0)}{2}e^{-\frac{a}{\beta}\tau} - \frac{\beta}{2a}\psi(0) + \frac{\beta}{2a}\psi'(0)\tau +$$

$$-\frac{\beta}{2a}f(0)\int_0^\tau g(\theta)\,d\theta - \frac{\beta}{2a^2}\int_0^l f(s)g\left(\tau + \frac{s}{a}\right)\,ds + \frac{\beta}{2}F_1(-a\tau) -$$

$$-\frac{a}{2}\int_0^\tau F_1(-a\xi)\,d\xi, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T_2 - \frac{l}{a}. \tag{31}$$

Из условий теоремы 3 и в силу $f(x) \in C[0,l]$ имеем непрерывность правой части (31) уравнения (30) при $\tau \in [0, T_2 - (l/a)]$. Отсюда уравнение (30) имеет [63] единственное решение $\mu(\tau) \in C\,[0, T_2 - (l/a)]$, где $T_2 = \min\{T, (3l/a)\}$.

Из формулы (13) и уравнения (30) следуют равенства

$$F_1(0) = \frac{\varphi(0)}{\beta} - \varphi'(0), \qquad F_1'(0) = \varphi''(0) - \frac{\varphi'(0)}{\beta} + \frac{2}{a}\psi'(0) - \frac{2}{a\beta}\psi(0),$$

$$\mu(0) = \sigma(0) = \frac{\beta}{2a}h'\left(\frac{l}{a}\right) + \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{\beta}{2a}\psi(0) - \frac{\beta}{2a^2}\int_0^l f(s)g\left(\frac{s}{a}\right)\,ds +$$

$$+\frac{\beta}{2a^2}F_1(0) = \varphi(0) - \beta\varphi'(0),$$

$$\mu'(0) = \sigma'(0) + \frac{a}{\beta}\,\mu(0) = \frac{\beta}{2a}h''\left(\frac{l}{a}\right) + \frac{\beta}{2}\psi'(0) - \frac{\beta}{2a^2}\int_0^l f(s)g'\left(\frac{s}{a}\right)\,ds -$$

$$-\frac{\beta}{2a}f(0)g(0) - \frac{a}{2}F_1(0) - \frac{a\beta}{2}F_1'(0) + \frac{a}{2\beta}\varphi(0) - a\varphi'(0) = \psi(0) - \beta\psi'(0).$$

Последние два из полученных равенств свидетельствуют о выполнении условий на значения $\mu(0)$ и $\mu'(0)$ из ограничений (10), входящих в условия теоремы 1 и определения решения обратной задачи. Таким образом, определенные как решения уравнений (28) и (30) функции $f(x)$, $x \in [0,l]$, и $\mu(t)$, $t \in [0, T_2 - l/a]$, удовлетворяют условиям теоремы 1 и следствия 1, в соответствии с которым существует единственное решение задачи (1) – (4) функция $u(x,t) \in C^2\left(\Delta_{l,T_2}\right)$. При этом три функции $f(s)$ при $s \in [0,l]$, $\mu(\tau)$ при $\tau \in [0, T_2 - l/a]$, и $u(x,t)$ при $(x,t) \in \Delta_{l,T_2}$, удовлетворяют условиям определения 1 и являются решением обратной задачи (1) – (5) в соответствии с определением 1 в случае T такого, что $l/a < T \leqslant 3l/a$.

В случае $T > 3l/a$ существование решения обратной задачи (1) – (5) устанавливается аналогичным продлением функции $z(x)$ с отрезка $[-2l, 4l]$ на отрезок $[-aT, l + aT]$ с учетом выполнения следствия 1. Теорема 3 доказана. $\square$

5 Итерационный метод решения обратной задачи

Для приближенного решения обратной задачи (1) – (5) при известных исходных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, удовлетворяющих ограничениям на них из условий (8), (9), (20), и заданных вместо функции $h(t)$ значении $\delta > 0$ и функции $h_\delta(t) \in C[0, T]$, для которых выполняется неравенство $\|h(t) - h_\delta(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \delta$ и равенство $h_\delta(0) = \varphi(l)$, а также существует значение $h'_\delta(0) = \psi(l)$, могут быть использованы различные регуляризирующие алгоритмы [59], [60]. Однако, также можно применить итерационный метод приближенного решения обратной задачи (1) – (5), основанный на использовании уравнений (28) и (30) в роли рекуррентных формул для последовательного определения приближающих искомые функции $f(x)$, $\mu(t)$ последовательностей $\left\{\widetilde{f}^{(n)}(x)\right\}$ и $\left\{\widetilde{\mu}^{(n)}(t)\right\}$ в виде

$$\widetilde{f}^{(n+1)}(x) = \chi(x) - \int_x^l K_1(x,s)\,\widetilde{f}^{(n)}(s)\,ds, \quad \widetilde{f}^{(1)}(x) = \chi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\widetilde{\mu}^{(n+1)}(t) = \sigma(t) + \frac{a}{\beta}\int_0^t e^{-\frac{a}{\beta}(t-\tau)}\,\widetilde{\mu}^{(n)}(\tau)\,d\tau,$$
$$\widetilde{\mu}^{(n)}(t) = \sigma(t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant T_2 - \frac{l}{a}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где функции $K_1(x,s)$, $\chi(x)$, $\sigma(t)$ определяются формулами (24), (29) и (31). При выполнении условий теоремы 3 на исходные функции, последовательности $\left\{\widetilde{f}^{(n)}(x)\right\}$ и $\left\{\widetilde{\mu}^{(n)}(t)\right\}$ сходятся [63]. Для использования рекуррентных формул и построения на их основе итерационного алгоритма решения обратной задачи регуляризировать потребуется лишь процедуру численного дифференцирования приближенно заданной функции $h_\delta(t) \in C[0, T]$, первые две производные которой используются для проведения вычислений по формулам (29) и (31) при получении значений функций $\chi(x)$ и $\sigma(t)$. Затем получаемые значения приближенных пределов

$$\widetilde{f}(x) \approx \lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}^{(n)}(x), \quad \widetilde{\mu}(t) \approx \lim_{n\to+\infty} \widetilde{\mu}^{(n)}(t), \quad x \in [0, l], \quad t \in \left[\,0, \widehat{T}\,\right],$$

дают возможность определить значения функции $z(s)$, $s \in [-aT, 0)$, и использовать ее значения для продолжения начальных условий на отрезок $[-aT, l + aT]$, после чего по формуле из следствия 1 получить значения функции $\widetilde{u}(x,t)$, $(x,t) \in \Delta_{l,T}$. В результате функции $\widetilde{f}(x)$, $\widetilde{\mu}(t)$, $\widetilde{u}(x,t)$ составляют приближенное решение обратной задачи (1) – (5), которое при регуляризованном вычислении производных первого и второго порядков функции $h_\delta(t)$ оказывается близким к однозначному решению обратной задачи (1) – (5), соответствующему исходным функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$.

При использовании такого итерационного алгоритма некорректность обратной задачи (1) – (5) оказывается связанной лишь с необходимостью двукратного численного дифференцирования приближенно заданной непрерывной функции $h_\delta(t)$ при известном значении $\delta > 0$.

6 Авторские декларации

6.1 Финансирование

Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

6.2 Конфликт интересов

Отсутствует.

6.3 Вклад авторов

А. Ю. Щеглов – постановка задач, исследование решений, написание текста статьи.
О. А. Андреянова – постановка задач, исследование решений, написание текста статьи.

Список литературы

[1] *Yanovskaya T. B., Asbel I.* The determination of velocities in the upper mantle from the observations on p-waves // *Geop. J. Royal Astr. Soc.* — 1964. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 313–318.

[2] *Glasko V. B.* On the unique determination of the Earth's core structure from Rayleigh surface waves // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* — 1971. — Vol. 11, no. 6. — Pp. 173–188.

[3] *Glasko V. B., Kulik N. I., Tikhonov A. N.* Determination of the geoelectric cross-section by the regularization // *Comput. Math. Math. Phys.* — 1972. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 174–186.

[4] *Il'in V. A., Tikhomirov V. V.* The wave equation with a boundary control at both endpoints and the complete vibration damping problem // *Differential Equations.* — 1999. — Vol. 35, no. 5. — Pp. 697–708.

[5] *Il'in V. A., Moiseev E. I.* Optimization of boundary controls of string vibrations // *Russian mathematical surveys.* — 2005. — Vol. 60, no. 6. — Pp. 1093–1119.

[6] *Kholomeeva A. A.* Optimal boundary control of string vibrations with a nonlocal boundary condition of one of two types // *Dokl. Math.* — 2011. — Vol. 83, no. 2. — Pp. 171–174.

[7] *Kapustin N. Yu., Kholomeeva A. A.* Spectral solution of a boundary value problem for equation of mixed type // *Lobachevskii J. Math.* — 2019. — Vol. 40, no. 7. — Pp. 981–983.

[8] *Lavrentiev M. M., Romanov V. G.* Three linearized inverse problems for hyperbolic equations // *Soviet Mathematics.* — 1966. — Vol. 7, no. 6. — Pp. 1650–1652.

[9] *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. — Новосибирск: Наука, 1972.

[10] *Romanov V. G.* On the problem of determining the coefficients in the lowest order terms of a hyperbolic equation // *Siberian Math. J.* — 1992. — Vol. 33, no. 3. — Pp. 497–500.

[11] *Romanov V. G., Yamamoto M.* On the determination of wave speed and potential in a hyperbolic equation by two measurements // *Inverse Probl. Spectr. Theory.* — 2004. — Vol. 348. — Pp. 1–10.

[12] *Romanov V. G.* An inverse problem for a semilinear wave equation // *Dokl. Math.* — 2022. — Vol. 105, no. 3. — Pp. 166–170.

[13] *Kabanikhin S. I.* A finite-difference method of finding the coefficients of a hyperbolic equation // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* — 1979. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 150–159.

[14] *Kabanikhin S. I.* Linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations // *Dokl. Math.* — 1990. — Vol. 40, no. 3. — Pp. 579–583.

[15] *Kabanikhin S. I., Kowar R., Scherzer O.* On the Landweber iteration for the solution of parameter identification problem in a hyperbolic partial differential equation of second order // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* —

1998. — Vol. 6, no. 5. — Pp. 403–430.

[16] *Kabanikhin S. I., Iskakov K. T.* Generalized solution to an inverse problem for the wave equation // *Dokl. Math.* — 2000. — Vol. 62, no. 3. — Pp. 406–408.

[17] *Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A.* Direct methods of solving inverse multidimensional hyperbolic problems. — Utrecht: VSP, 2005.

[18] *Kabanikhin S. I., Krivorot'ko O. I.* Singular value decomposition in an inverse source problem // *Num. Analysis Appl.* — 2012. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 168–174.

[19] *Denisov A. M.* Determination of a nonlinear coefficient in a hyperbolic equation for the Goursat problem // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* — 1998. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 327–334.

[20] *Denisov A. M.* An inverse problem for a hyperbolic equation // *Differential Equations.* — 2000. — Vol. 36, no. 10. — Pp. 1575–1578.

[21] *Denisov A. M.* Solvability of the inverse problem for a quasilinear hyperbolic equation // *Differential Equations.* — 2002. — Vol. 38, no. 9. — Pp. 1229–1238.

[22] *M. Denisov A.* An existence theorem for an inverse problem for a semilinear hyperbolic system // *Differential Equations.* — 2004. — Vol. 40, no. 9. — Pp. 1221–1232.

[23] *Denisov A. M.* Existence and uniqueness of solution to the problem of determining source term in a semilinear wave equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* — 2006. — Vol. 14, no. 8. — Pp. 767–784.

[24] *Golovina S. G., Denisov A. M., Dmitriev V. I.* The inverse problem of determining low-permeability zones in an oil-bearing layer // *Comput. Math. Modeling.* — 2006. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 191–198.

[25] *Denisov A. M.* Integro-functional equations in the inverse source problem for the wave equation // *Differential Equations.* — 2006. — Vol. 42, no. 9. — Pp. 1221–1232.

[26] *Denisov A. M.* Inverse problem for a semilinear functional-differential wave equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* — 2008. — Vol. 16, no. 9. — Pp. 837–848.

[27] *Denisov A. M.* Inverse problems for a quasilinear hyperbolic equation in the case of moving observation point // *Differential Equations.* — 2009. — Vol. 45, no. 11. — Pp. 1577–1587.

[28] *Denisov A. M.* Asymptotic expantions of solution to inverse problems for a hyperbolic equation with a small parameter multiplying the highest derivative // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2013. — Vol. 53, no. 5. — Pp. 580–587.

[29] *Denisov A. M.* Inverse problem for a hyperbolic equation with nonlocal boundary condition containing a delay argument // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2013. — Vol. 280. — Pp. 80–87.

[30] *Denisov A. M., Shirkova E. Y.* Inverse problem for a quasilinear hyperbolic equation with a nonlocal boundary condition containing a delay argument // *Differential Equations.* — 2013. — Vol. 49, no. 9. — Pp. 1053–1061.

[31] *Denisov A. M.* Problems of determining the unknown source in parabolic and hyperbolic equations // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2015. — Vol. 55, no. 5. — Pp. 829–833.

[32] *Denisov A. M.* Iterative method for solving an inverse coefficient problem for a hyperbolic equation // *Differential Equations.* — 2017. — Vol. 53, no. 7. — Pp. 916–922.

[33] *Denisov A. M., Solov'eva S. I.* Numerical determination of the initial condition in Cauchy problems for a hyperbolic equation with a small parameter // *Comput. Math. Modeling.* — 2018. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 1–9.

[34] *Denisov A. M., Solov'eva S. I.* Numerical solution of inverse problems for a hyperbolic equation with a small parameter multiplying the highest derivative // *Differential Equations.* — 2018. — Vol. 54, no. 7. — Pp. 900–910.

[35] *Denisov A. M.* Existence of a solution of the inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2019. — Vol. 59, no. 4. — Pp. 550–558.

[36] *Denisov A. M.* EIterative method for solving an inverse problem for a hyperbolic equation with a small parameter multiplying the highest derivative // *Differential Equations.* — 2019. — Vol. 55, no. 7. — Pp. 921–929.

[37] *Denisov A. M.* System of integral equations for solving an inverse problem for a quasilinear hyperbolic equation // *Differential Equations.* — 2019. — Vol. 55, no. 9. — Pp. 1143–1149.

[38] *Baev A. V., Glasko V. B.* The solution of the inverse kinematic problem of seismology by means of a regularizing algorithm // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* — 1976. — Vol. 16, no. 4. — Pp. 96–106.

[39] *Baev A. V.* On the solution of an inverse problem for the wave equation with a regularizing algorithm // *J. Comput. Math. Math. Phys.* — 1985. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 93–97.

[40] *Баев А. В.* О решении обратной задачи для волнового уравнения по информации, заданной в точке // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.15: Вычисл. матем. и киберн.* — 1989. — № 4. — С. 28–33.

[41] *Baev A. V.* Numerical solution of the inverse scattering problem for the acoustic equation in an absorptive layered medium // *Comput. Math. Modeling.* — 2018. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 83–95.

[42] *Baev A. V.* Solution of inverse problems for wave equation with a nonlinear coefficient // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2021. — Vol. 61, no. 9. — Pp. 1511–1520.

[43] *Cannon J. R., DuChateau P.* An inverse problem for an unknown source term in a wave equation // *SIAM J. Appl. Math.* — 1983. — Vol. 43, no. 3. — Pp. 553–564.

[44] *Cavaterra C.* An inverse problem for semilinear wave equation // *Boll. Un. Mat. Ital. (B).* — 1988. — Vol. 2, no. 3. — Pp. 695–711.

[45] *Graselli M.* Local existence and uniqueness for a quasilinear hyperbolic inverse problem // *Appl. Anal.* — 1989. — Vol. 32, no. 1. — Pp. 15–30.

[46] *Shcheglov A. Yu.* The inverse problem of determination of a nonlinear source in a hyperbolic equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* — 1998. — Vol. 6, no. 6. — Pp. 625–444.

[47] *Shcheglov A. Yu.* Inverse problem solution uniqueness for a nonlinear hyperbolic equation in a rectangular domain // *J. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics.* — 1999. — no. 1. — Pp. 8–12.

[48] *Shcheglov A. Yu.* A method for approximate solution in C^2 of a hyperbolic equation with Lipschitz nonlinearity // *Comput. Math. Math.*

Phys. — 2001. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 420–435.

[49] *Shcheglov A. Yu.* Iterative method for recovery a nonlinear source in a hyperbolic equation with final overdetermination // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* — 2002. — Vol. 10, no. 6. — Pp. 629–641.

[50] *Shcheglov A. Yu.* A method for approximate solution of an inverse problem for a semilinear hyperbolic equation // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2003. — Vol. 43, no. 1. — Pp. 108–123.

[51] *Щеглов А. Ю.* Приближенное решение обратной коэффициентной задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа // *Вестн. Моск. ун-та. Сер.15: Вычисл. матем. и киберн.* — 2004. — № 2. — С. 13–19.

[52] *Shcheglov A. Yu., Viktorova I. V.* Numerical reconstitution of a nonlinear source in a hyperbolic equation // *Num. Func. Analysis Optimiz.* — 2004. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 137–150.

[53] *Drozhzhina O. V., Shcheglov A. Yu.* Approximate solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with a nonlinear source // *Comput. Math. Modeling.* — 2006. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 32–44.

[54] *Shcheglov A. Yu.* Inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation with final overdetermination // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2006. — Vol. 46, no. 4. — Pp. 616–635.

[55] *Shcheglov A. Yu.* A method for finding coefficients of a quasilinear hyperbolic equation // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2006. — Vol. 46, no. 5. — Pp. 776–795.

[56] *Shcheglov A. Yu., Andreyanova O. A.* The inverse problem for the nonhomogeneous oscillation equation on a half-line with a boundary condition of the third kind // *Comput. Math. Modeling.* — 2022. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 9–23.

[57] *Almohamed M., Tikhonov I. V.* Specific cases of one general inverse problem for abstract differential equations // *Lobachevskii J. Math.* — 2023. — Vol. 44, no. 2. — Pp. 502–509.

[58] *Andreyanova O. A., Shcheglov A. Yu.* Reconstruction of two functions in the model of vibrations of a string one end of which is placed in a moving medium // *Comput. Math. Math. Phys.* — 2023. — Vol. 63, no. 5. — Pp. 808–820.

[59] Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. — М.: Наука, 1983.

[60] *Denisov A. M.* Elements of the theory of inverse problems. — Utrecht: VSP, 1999.

[61] *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993.

[62] *Денисов А. М., Разгулин А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МАКС Пресс, МГУ, 2019.

[63] *Polyanin A. D., Manzhirov A. V.* Handbook of integral equations. — New York, Washington, Boca Raton, London: CRC Press, 1998.