Секция: *Оптимальное управление*
УДК: 519.886.2

Задача оптимального потребления для риск-нейтрального инвестора

Морозов В. В.[1*], Ковяшев Р. А.[1]

[1*]Кафедра исследования операций, Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия.

*Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s): vmorosov@mail.ru;
Соавторы: koviashev@gmail.com;

Аннотация

Работа посвящена построению ε-оптимальных функций потребления и инвестирования финансового портфеля инвестором, имеющим нейтральное отношение к риску. Найдены функция выигрыша и оптимальный порог для стоимости портфеля, при превышении которого инвестор потребляет с максимальной интенсивностью.

Ключевые слова: Финансовый портфель, Геометрическое броуновское движение, Оптимальное потребление, Риск-нейтральный инвестор.

Получено редакцией 16.06.2025; внесены авторские правки 11.11.2025; принята к публикации 17.11.2025

1 Введение

Моделям оптимального потребления при управлении финансовым портфелем посвящена обширная литература. Отметим работы [1–3]. Особенность их состоит в использовании возрастающих строго вогнутых функций полезности потребления, что означает осторожность инвестора, т. е. его отрицательное отношение к риску. В настоящей статье предполагается нейтральное отношение инвестора к риску. В случае разорения он получает фиксированную сумму в качестве компенсации. С моделями оптимального потребления, учитывающими разорение остророжного инвестора, можно ознакомиться по монографии [4].

2 Постановка задачи

Пусть процесс стоимости рискового актива $S(t),\ t \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению геометрического броуновского движения $dS(t) = S(t)(\alpha dt + \sigma z(t))$, где α — математическое ожидание доходности актива, $\sigma > 0$ — волатильность (σ^2 — дисперсия доходности), а $z(t)$ — винеровский процесс, $z(0) = 0$. На рынке также имеется безрисковый актив с доходностью $r > 0$.

Обозначим $w(t)$ — стоимость портфеля, состоящего из рискового и безрискового активов, $\pi(t)$ — долю рискового актива в стоимости портфеля, а $c(t)$ — интенсивность потребления в момент t. Последнее означает, что потребление за отрезок времени $[t, t+dt]$ равно величине $c(t)dt$. Следуя [1], составим уравнение для процесса $w(t)$. Приращение стоимости портфеля

$$dw(t) = r(1 - \pi(t))w(t)dt - c(t)dt + \pi(t)w(t)(\alpha dt + \sigma dz(t))$$

перепишем в виде

$$dw(t) = w(t)((\alpha - r)\pi(t) + r)dt - c(t)dt + \pi(t)w(t)\sigma dz(t),\ w(0) = w. \quad (1)$$

Если процесс $(\pi(t), c(t))$ задан, то (1) представляет собой стохастическое уравнение для $w(t)$. Решение уравнения (1) понимается как процесс $w(t)$, удовлетворяющий интегральному уравнению

$$w(t) = w + \int_0^t w(s)((\alpha - r)\pi(s) + r)ds - \int_0^t c(s)ds + \sigma \int_0^t \pi(s)w(s)dz(s).$$

Предположим, что процесс $(\pi(t), c(t))$ согласован с фильтрацией, порожденной процессом $z(t)$, и удовлетворяет ограничениям

$$\int_0^t \pi^2(s)ds < +\infty,\ \ 0 \leqslant c(t) \leqslant \bar{c},\ \ \forall t \geqslant 0, \quad (2)$$

где $\bar{c}$ — максимальная интенсивность потребления. При этих условиях интегралы Ито в правой части интегрального уравнения существуют.

Стратегия инвестора определяется двумя функциями потребления $C(w)$ и инвестирования $\Pi(w)$. Стратегии такого вида называются марковскими. Функция $\Pi(w)$ предполагается непрерывной, что означает плавное изменение структуры портфеля. Стратегия $(\Pi(w), C(w))$ порождает процесс $(\pi(t), c(t)) = (\Pi(w(t), C(w(t)))$. После подстановки его в уравнение (1) получаем стохастическое уравнение, для которого предполагается существование решения $w(t)$. Процессы $(\pi(t), c(t))$, порожденные стратегиями инвестора и удовлетворяющими (2), будем называть допустимыми.

Для допустимого процесса $(\pi(t), c(t))$ определим случайную величину момента разорения $\tau = \min\{t \mid w(t) = \hat{w}\}$, где $w(t)$ — решение уравнения (1), а $\hat{w} > 0$ — стоимость портфеля, при достижении которой инвестор получает сумму $P > 0$ в виде компенсации. В [4] предполагалось, что $\hat{w} = 0$. Определим целевую функцию инвестора

$$J_{(\pi(\cdot),c(\cdot))}(w) = E_w\Big[\int\limits_0^\tau e^{-\beta t}c(t)dt + Pe^{-\beta\tau}\Big],$$

где E_w — символ математического ожидания при условии $w(0) = w$, а величина $\beta > 0$ — ставка дисконтирования. Отметим, что для осторожного инвестора в последней формуле вместо $c(t)$ фигурирует $U(c(t))$, где $U(c)$ — возрастающая строго вогнутая функция полезности потребления (см. [4]).

Функция $J(w) = \sup\limits_{(\pi(\cdot),c(\cdot))} J_{(\pi(\cdot),c(\cdot))}$, где верхняя грань берется по всем допустимым процессам $(\pi(\cdot), c(\cdot))$, называется функцией выигрыша [5]. Стратегию инвестора будем называть ε-оптимальной, если она реализует значение целевой функции, близкое к значению функции выигрыша, для всех $w > \hat{w}$.

3 Оптимизация потребления инвестора

3.1 Частные случаи

Укажем два случая, когда нетрудно указать ε-оптимальные стратегии.

Пусть $P \geqslant \bar{c}/\beta$. Тогда для стратегии $C(w) \equiv 0$, $\Pi(w) \equiv \pi$ с большим положительным π стохастическое уравнение (1) имеет решение $w(t) = w\exp(((\alpha - r)\pi + r - \sigma^2\pi^2/2)t + \sigma\pi z(t))$, которое с вероятностью, близкой к 1, за малое время достигнет уровня $\hat{w}$. При этом инвестор получит выигрыш, близкий к P. Для любого другого допустимого процесса $(\pi(t), c(t))$ имеем

$$J_{(\pi(\cdot),c(\cdot))} \leqslant E_w\Big[\int\limits_0^\tau e^{-\beta t}\bar{c}dt + Pe^{-\beta\tau}\Big] = E_w\Big[\frac{\bar{c}}{\beta} + e^{-\beta\tau}\Big(P - \frac{\bar{c}}{\beta}\Big)\Big] \leqslant P.$$

Далее считаем, что $P < \bar{c}/\beta$. Тогда из последних неравенств следует, что $J_{(\pi(\cdot),c(\cdot))}(w) \leqslant \bar{c}/\beta$ для любого допустимого процесса $(\pi(t), c(t))$. Отсюда $J(w) \leqslant \bar{c}/\beta$ для всех $w > \hat{w}$.

Покажем, что $J(w) = \bar{c}/\beta$, если $w \geqslant \bar{c}/r$. Пусть инвестор использует стратегию $C(w) \equiv \bar{c}$, $\Pi(w) \equiv 0$. При этом (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение $dw(t) = (rw(t) - \bar{c})dt$, $w(0) = w$ с неотрицательной правой частью. Поэтому инвестор может осуществить потребление с максимальной интенсивностью неограниченно долго и, тем самым, получить выигрыш, сколь угодно близкий к $\bar{c}/\beta$.

Исходя из сказанного, ε-оптимальную стратегию и функцию выигрыша инвестора достаточно определить только при $w \in (\hat{w}, \bar{c}/r)$.

3.2 Семейство решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

Предположим, что функция $J(w)$ принадлежит классу C^2 (дважды непрерывно дифференцируема). Тогда она удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана [3]

$$\beta J(w) = \max_{0 \leqslant c \leqslant \bar{c},\, \pi} \Big[(\alpha - r)\pi w J'(w) + (rw - c)J'(w) + c + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 w^2 J''(w)\Big], \quad (3)$$

где $J(\hat{w}) = P,\ J(\bar{c}/r) = \bar{c}/\beta,\ w = w(t) \in [\hat{w}, \bar{c}/r]$ — стоимость портфеля, $c = c(t) \geqslant 0$ — интенсивность потребления, а $\pi = \pi(t)$ — доля рискового актива в портфеле в текущий момент времени t. На долю рискового актива π нет ограничений и по нему возможна короткая позиция, когда $\pi < 0$.

Найдем семейство решений уравнения (3) в виде возрастающих строго вогнутых функций $J(w),\ w \in (\hat{w}, \bar{c}/r)$ класса C^2. Из уравнения (3), учитывая, что $J''(w) < 0$, получаем соответствующие этим функциям стратегии инвестора (см. [1])

$$\Pi(w) = -\frac{(\alpha - r)J'(w)}{\sigma^2 w J''(w)},\ C(w) = \bar{c}\, 1_{\{J'(w)<1\}},\ \hat{w} \leqslant w \leqslant \bar{c}/r, \quad (4)$$

где 1_M — индикатор множества M. Функцию потребления $C(w)$ можно представить в следующем виде. Обозначим через $\bar{w}$ корень уравнения $J'(w) = 1$. Тогда из убывания функции $J'(w)$ следует, что $C(w) = \bar{c}\, 1_{\{w > \overline{w}\}}$. Таким образом, потребление максимально, если стоимость портфеля превышает уровень $\bar{w}$. В противном случае потребление отсутствует.

Обозначим $\gamma = \frac{1}{2}\frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2}$. Далее будем рассматривать невырожденный случай, когда $\gamma > 0$. Подставим найденные формулы для $\Pi(w)$ и $C(w)$ в уравнение (3). В результате получим два уравнения

$$\beta J(w) = -\gamma\frac{(J'(w))^2}{J''(w)} + rwJ'(w),\ \hat{w} < w \leqslant \bar{w},\ J(\hat{w}) = P. \quad (5)$$

$$\beta J(w) = -\gamma\frac{(J'(w))^2}{J''(w)} + (rw - \bar{c})J'(w) + \bar{c},\ \bar{w} < w < \beta/r. \quad (6)$$

Построим семейство решений уравнения (5), а потом их продолжим как решения уравнения (6) с сохранением дифференцируемости в точке $\bar{w}$. Одним из решений уравнения (5) является функция [1]

$$J(w) = P\Big(\frac{w}{\hat{w}}\Big)^{\theta_2},\ \hat{w} \leqslant w \leqslant \bar{w},\ \bar{w} = \Big(\frac{P\theta_2}{\hat{w}^{\theta_2}}\Big)^{1/(1-\theta_2)},$$

где

$$\theta_1 = \frac{d+\sqrt{D}}{2r}, \ \ \theta_2 = \frac{d-\sqrt{D}}{2r}, \ d = r+\gamma+\beta, \ D = d^2 - 4r\beta$$

— корни квадратного уравнения $r\theta^2 - (r+\gamma+\beta)\theta + \beta = 0$. Справедливы неравенства $\theta_1 > 1, \ \ 0 < \theta_2 < 1, \ \ \theta_2 < \beta/r < \theta_1$.

Построим другие решения. Сделаем в уравнении (5) замену (см. [6]) $\eta(\xi) = wJ'(w)/J(w), \ \xi = \ln w$. Получим уравнение

$$\eta'(\xi) = \frac{r\eta(\xi)(\eta(\xi)-\theta_1)(\eta(\xi)-\theta_2)}{\beta - r\eta(\xi)}, \tag{7}$$

имеющее интеграл $\eta^r(\xi)|\eta(\xi)-\theta_1|^A|\eta(\xi)-\theta_2|^B = C_1 e^{r\xi} = C_1 w^r, \ C_1 > 0$, где

$$A = \frac{\gamma+\beta-r\theta_1}{\theta_1-\theta_2} < 0, \ B = \frac{r\theta_2-\gamma-\beta}{\theta_1-\theta_2} < 0.$$

Отметим, что $\eta(\xi) \equiv \theta_2$ является решением уравнения (7). Найдем другие его решения. Определим на множестве $\{\eta \in \mathbb{R}_+ \,|\, \eta \neq \theta_{1,2}\}$ следующую функцию: $g(\eta) = \eta^r|\eta-\theta_1|^A|\eta-\theta_2|^B$. Ее график изображен на Рис. 1.

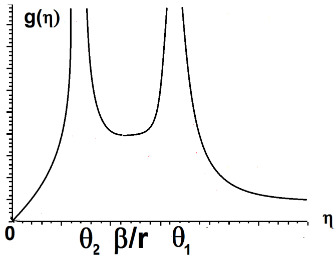

Рис. 1: График функции $g(\eta)$.

Минимум функции $g(\eta)$ на интервале (θ_2, θ_1) достигается в точке β/r. Пусть $\bar{c}/\beta > P > \hat{w}r/\beta$. Введем параметр $\hat{\eta}$, удовлетворяющий неравенствам $\hat{w}/P < \hat{\eta} < \beta/r, \ \ \hat{\eta} \neq \theta_2$. Решение уравнения (7) $\eta_1(\xi) = \eta_1(\ln w) < \beta/r$ с условием $\eta_1(\ln \hat{w}) = \hat{\eta}$ построим как функцию, обратную к $g(\eta_1) = g(\hat{\eta})(w/\hat{w})^r, \ \hat{w} \leqslant w \leqslant \bar{w}$. При этом, если $\hat{\eta} < \theta_2$ $(\hat{\eta} > \theta_2)$, то используется левая (средняя до точки β/r) ветвь графика функции g. Соответствующее решение уравнения (5) имеет вид

$$J(w) = P\exp\Big(\int\limits_{\hat{w}}^{w} \frac{\eta_1(\ln x)}{x}dx\Big), \ \ \hat{w} \leqslant w \leqslant \bar{w}. \tag{8}$$

Параметр $\hat\eta$ задает производную $J'(\hat w) = P\hat\eta/\hat w > 1$. Величина $\bar w$ находится из уравнения $J'(\bar w) = J(\bar w)\eta_1(\ln\bar w)/\bar w = 1$. Будем рассматривать такие значения параметра $\hat\eta$, при которых $\hat w < \bar w < \bar c/r$.

Займемся продолжением функции $J(w)$ на интервал $(\bar w, \bar c/r)$. Найдем решение $J_0(w)$ соответствующего (6) однородного уравнения

$$\beta J_0(w) = -\gamma\frac{(J_0'(w))^2}{J_0''(w)} + (rw - \bar c)J_0'(w). \tag{9}$$

Решением уравнения (6) будет $J(w) = J_0(w) + \bar c/\beta$, где $J_0(w) < 0$.

Сделаем в (9) замену $\eta(\xi) = (w - \bar c/r)J_0'(w)/J_0(w)$, $\xi = \ln(\bar c/r - w)$. Функция $\eta(\xi)$ удовлетворяет уравнению (7).

Из (9) следует, что

$$J''(w) = J_0''(w) = -\frac{\gamma\eta^2(\xi)J_0(w)}{(\beta - r\eta(\xi))(w - \bar c/r)^2},\ \bar w < w < \bar c/r. \tag{10}$$

Поскольку $J_0''(w) < 0$, $J_0(w) < 0$, должно быть выполнено неравенство $\eta(\xi) > \beta/r$. Обозначим $\bar\xi = \ln(\bar c/r - \bar w)$, $\bar\eta = (\bar w - \bar c/r)J_0'(\bar w)/J_0(\bar w)$, $\bar\eta_1 = \eta_1(\ln\bar w)$. Из равенств $J_0(\bar w) = J(\bar w) - \bar c/\beta$ и $J_0'(\bar w) = J'(\bar w) = J(\bar w)\bar\eta_1/\bar w = 1$ следует, что

$$\bar\eta = \frac{\bar w - \bar c/r}{J_0(\bar w)} = \frac{\bar w - \bar c/r}{J(\bar w) - \bar c/\beta} = \frac{\bar w - \bar c/r}{\bar w/\bar\eta_1 - \bar c/\beta} > \beta/r.$$

Решение уравнения (7) $\eta_2(\xi) > \beta/r$ с условием $\eta_2(\bar\xi) = \bar\eta$ построим как функцию, обратную к $g(\eta_2) = g(\bar\eta)((\bar c/r - w)/(\bar c/r - \bar w))^r$, $\bar w < w < \bar c/r$. В результате получим

$$J_0(w) = (J(\bar w) - \bar c/\beta)\exp\Big(-\int\limits_{\bar c/r - w}^{\bar c/r - \bar w}\frac{\eta_2(\ln x)}{x}dx\Big),\ \ \bar w < w < \bar c/r. \tag{11}$$

Заметим, что $\lim\limits_{w\to\bar c/r} J_0(w) = 0$, поскольку при $w = \bar c/r$ интеграл в формуле для $J_0(w)$ расходится. Поэтому функция $J(w) = J_0(w) + \bar c/\beta$ непрерывна в точке $\bar c/r$.

По построению функция $J(w)$ непрерывно дифференцируема в точке $\bar w$. Покажем, что вторая производная $J''(w)$ также непрерывна в этой точке. Для этого проверим равенство левой производной $J_-''(\bar w)$ и $J_0''(\bar w)$. Используя формулу (10) для $J_0''(w)$ и аналогичную формулу для $J''(w)$ функции $J(w)$ из (8), имеем

$$J_-''(\bar w) = -\frac{\gamma\bar\eta_1^2 J(\bar w)}{(\beta - r\bar\eta_1)\bar w^2},\quad J_0''(\bar w) = -\frac{\gamma\bar\eta^2(J(\bar w) - \bar c/\beta)}{(\beta - r\bar\eta)(\bar w - \bar c/r)^2}.$$

Исключая из этих формул $\bar{\eta}_1 = \bar{w}/J(\bar{w})$ и $\bar{\eta} = (\bar{w} - \bar{c}/r)/(J(\bar{w}) - \bar{c}/\beta)$, получим, что обе производные равны $-\gamma/(\beta J(\bar{w}) - r\bar{w})$. Соответствующая построенной функции $J(w)$ стратегия имеет вид

$$C(w) = 1_{\{w>\overline{w}\}},\ \Pi(w) = \frac{2(\beta - r\eta_1(\xi))}{(\alpha - r)\eta_1(\xi)},\ \xi = \ln w,\ \hat{w} \leqslant w \leqslant \bar{w}, \tag{12}$$

$$\Pi(w) = \frac{2(w - \bar{c}/r)(\beta - r\eta_2(\xi))}{(\alpha - r)w\eta_2(\xi)},\ \xi = \ln(\bar{c}/r - w),\ \bar{w} < w < \bar{c}/r. \tag{13}$$

Нетрудно показать, что функция $\Pi(w)$ непрерывна в точке $\bar{w}$.

3.3 Оптимальная стратегия инвестора

Укажем выбор $\hat{\eta} < \beta/r$, определяющий решение $J(w)$ уравнения (3).

Пусть найдется значение $\hat{\eta} \in (\hat{w}/P, \beta/r)$, при котором $\bar{w} \geqslant \bar{c}/r$. Учитывая неравенство $\bar{\eta}_1 < \beta/r$, имеем $J(\bar{w}) = \bar{w}/\bar{\eta}_1 > \bar{c}/\beta$, что означает недопустимость функции $J(w)$. Уменьшим значение $\hat{\eta}$ на столько, чтобы $J(\bar{w}) < \bar{c}/\beta$ и разность $\bar{c}/\beta - J(\bar{w})$ была мала.

Предположим, что для всех $\hat{\eta} \in (\hat{w}/P, \beta/r)$ выполнено неравенство $\bar{w} < \bar{c}/\beta$. Тогда $\hat{\eta}$ следует выбрать близким к β/r.

Наконец, рассмотрим случай, когда $\beta/r \leqslant \hat{w}/P$. Здесь также нужно взять $\hat{\eta} < \beta/r$ близким к β/r, а функцию $J(w)$ равной $J_0(w) + \bar{c}/\beta$, где $J_0(w)$ определяется по формуле (11) с заменой $\bar{w}$ на $\hat{w}$.

Во всех трех случаях стратегия инвестора (12), (13) ε-оптимальна, а функция $J(w)$ на интервале $(\hat{w}, \bar{c}/r)$ поточечно больше других решений уравнения (3), определяемых меньшими значениями параметра $\hat{\eta}$.

Функция потребления $C(w)$ разрывна в точке $\bar{w}$. После подстановки процесса $(\pi(t), c(t)) = (\Pi(w(t)), C(w(t)))$ в (1) получим стохастическое уравнение диффузионного типа с разрывным коэффициентом при dt

$$dw(t) = w(t)((\alpha - r)\Pi(w(t)) + r)dt - \bar{c}1_{\{w(t)>\overline{w}\}}dt +$$
$$+\Pi(w(t))w(t)\sigma dz(t)),\ w(t) \geqslant \hat{w},\ w(0) = w.$$

Доказательство существования его решения см. в [7].

4 Заключение

Рассмотрена задача оптимизации потребления при управлении финансовым портфелем, состоящем из рискового и безрискового активов. В отличие от классических моделей полезность задается линейной, а не строго вогнутой функцией. Инвестор оптимизирует суммарное дисконтированное потребление вплоть до момента разорения. Он использует функции инвестирования и потребления, зависящие от текущей стоимости портфеля. При этом предполагается, что функции инвестирования непрерывны, а интенсивность потребления ограничена сверху константой. Оптимальная функция потребления имеет разрыв в единственной точке

— величине стоимости портфеля $\bar{w}$, выше которой инвестор потребляет с максимальной интенсивностью. В работе найдено возрастающее строго вогнутое дважды непрерывно дифференцируемое решение $J(w)$ уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, по которому определяется ε-оптимальная стратегия инвестора.

Авторские декларации

Финансирование

Работа поддержана госбюджетной темой НИР № 5.3.21 ВМК МГУ.

Конфликт интересов

Отсутствует.

Вклад авторов

В. В. Морозов – постановка задачи, написание текста статьи, вывод уравнений и их решение.
Р. А. Ковяшев – поиск оптимальных стратегий, написание текста статьи.

Список литературы

[1] *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // *J. Econ. Theory.* — 1971. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 373–413.

[2] *Lehoczky J., Sethi S., Shreve S.* Optimal consumption and investment policies allowing consumption constraints and bankruptcy // *Math. Oper. Res.* — 1983. — Vol. 8, no. 4. — Pp. 613–636.

[3] *Karatzas I. et al.* Explicit solution of a general consumption/investment problem // *Math. Oper. Res.* — 1986. — Vol. 11, no. 4. — Pp. 261–294.

[4] *Sethi S. P.* Optimal Consumption and Investment with Bankruptcy. — Norwell, MA: Kluver, 1997.

[5] *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977.

[6] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.

[7] *Гирсанов И. В.* О стохастическом уравнении Ито // *Доклады АН СССР.* — 1961. — Т. 138. — № 1. — С. 18–21.