А.Ю. Щеглов[1], *С.В. Нетесов*[2]

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ С ВОЗРАСТНЫМ СТРУКТУРИРОВАНИЕМ*

Введение

Рассмотрим для функции $u(a,t)$ задачу, предложенную в качестве модели развития популяции однотипных биологических организмов с учётом их возрастной структуры [1]. Пусть уравнение имеет правую часть со степенной зависимостью от решения [2, 3], что позволяет учесть в модели нелинейную зависимость роста популяции от её размера:

$$u_t(a,t) + u_a(a,t) = -\,\mu(a)|u(a,t)|^{\beta}\,, \qquad (a,t) \in \Pi_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \int_0^l \rho(s)u(s,t)\,ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(a,0) = \varphi(a), \qquad 0 < a \leqslant l, \tag{3}$$

где $\Pi_T = \{(a,t)\colon a \neq t,\ 0 \leqslant a \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$; a – возраст особей; t – время; $u(a,t)$ – количество или плотность особей возраста a в популяции в момент t; $\mu(a)$ – коэффициент смертности; $\rho(a)$ – интенсивность рождаемости особей нулевого возраста, зависящая от возраста a родителя; число β постоянно и таково, что $\beta \in (1,2]$.

Пусть задача определения функции $u(a,t)$ по заданным параметру β и функциям $\varphi(a)$, $\mu(a)$, $\rho(a)$ рассматривается в качестве прямой задачи.

В рамках обратной задачи требуется восстановить постоянное значение $\beta \in (1,2]$ и функции $\mu(a)$, $u(a,t)$, $0 \leqslant a \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие задаче (1) – (3). Функции $\varphi(a)$, $\rho(a)$ полагаются заданными. Рассматриваются два варианта дополнительных условий, обеспечивающих единственность решения обратной задачи. В постановке обратной задачи I известными полагаются функции $g_0(t)$ и $g_l(t)$, такие, что при известном фиксированном значении $\lambda \in (0,T]$ выполняются равенства

$$g_0(t) = u(0,t), \qquad 0 \leqslant t < \lambda; \qquad g_l(t) = u(l,t), \qquad 0 \leqslant t < l + \lambda. \tag{4}$$

---

[1] Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, МГУ имени М.В. Ломоносова, shcheg@cs.msu.ru

[2] МГУ имени М.В. Ломоносова, sv954@yandex.ru

* Работа выполнена при частичной поддержке Национального фонда естественных наук Китая (National Natural Science Foundation of China, No. 12171036) и Пекинского фонда естественных наук (Beijing Natural Science Foundation, key project No. Z210001).

В обратной задаче II дополнительными условиями являются заданная функция

$$g_l(t) = u(l,t), \qquad 0 \leqslant t < l, \tag{5}$$

и известное значение $\hat{\mu}$ функции $\mu(a)$ при аргументе $a = l$:

$$\hat{\mu} = \mu(l). \tag{6}$$

Модели динамики однородных популяций, учитывающие возрастную структуру особей, составляют активно развивающуюся область [2-11] математической биологии. Часть моделей базируется на использовании квазилинейных и нелинейных уравнений. Обратные задачи, позволяющие восстанавливать параметры моделей динамики популяций, исследовались в работах [12-18]. Разноплановое изучение обратных задач и методов их решения проводится в настоящее время для самого широкого круга разнообразных моделей, задач и уравнений [19-29].

Прямая задача

Условия разрешимости прямой задачи (1) – (3) представляют интерес в связи с нелинейностью уравнения (1) и интегральным видом нелокального граничного условия (2).

Теорема 1. *Пусть заданы значения* $T > 0,\ l > 0$ *и* $\beta \in (1,2]$, *и функции* $\varphi(a)$, $\mu(a)$, $\rho(a)$, *такие, что*

$$\varphi(a) \in C^1[0,l], \qquad \mu(a) \in C[0,l], \qquad \rho(a) \in C[0,l], \tag{7}$$

$$\varphi(a) \geqslant 0, \qquad \mu(a) \geqslant 0, \qquad \rho(a) \geqslant 0 \qquad \forall a \in [0,l], \tag{8}$$

$$\varphi\,(0) = \int_0^l \rho(s)\,\varphi(s)\,ds > 0. \tag{9}$$

Тогда задача (1) – (3) *имеет единственное решение* $u(a,t) \in C^1(\Pi_T)$.

Доказательство. Для точек области $Q_T^- = \{(a,t)\colon t < a \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ решение $u(a,t)$ задачи (1) – (3) определяется формулой

$$u(a,t) = \hat{u}(a,t) = \Big(\big(\varphi(a-t)\big)^{1-\beta} - - (1-\beta)\int_{a-t}^{a} \mu(\xi)\,d\xi\Big)^{1/(1-\beta)} \qquad \forall (a,t) \in Q_T^-, \tag{10}$$

получаемой интегрированием уравнения (1) на его характеристиках. Из условий (7) следует, что $\hat{u}(a,t) \in C^1(Q_T^-)$. Из условий (8), (9) следует, что $\hat{u}(a,t) \geqslant 0\ \forall (a,t) \in Q_T^-$.

Для точек (a,t) области $Q_T^+ = \{(a,t)\colon a \leqslant t \leqslant T;\ 0 \leqslant a \leqslant l\}$, интегрируя уравнение (1) на его характеристиках, имеем

$$u(a,t) = \left(\big(u(0,t-a)\big)^{1-\beta} - (1-\beta)\int_0^a \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)} \qquad \forall (a,t) \in Q_T^-. \tag{11}$$

Из условий (8), (9) следует выполнение для решения $u(a,t)$ неравенств $0 \leqslant u(a,t) \leqslant u(0,t-a)$ $\forall (a,t) \in Q_T^+$, при неотрицательной функции $u(0,t-a)$ $\forall (t-a) \in [0,T]$.

Пусть $\psi(t) = u(0,t)$ $\forall t \in [0,T]$, и $T_1 = \min\{l,T\}$. Тогда из условия (2) с учётом представлений (10) и (11) в областях Q_T^- и Q_T^+ получаем

$$\psi(t) = \int_0^t \rho(s)\left(\left(\psi(t-s)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^s \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{1-\beta}} ds + \\ + \int_t^l \rho(s)\hat{u}(s,t)\,ds \qquad \forall t \in [0,T_1]. \qquad (12)$$

Последний интеграл в равенстве (12) известен, так как функция $\rho(s)$ задаётся при постановке задачи, а решение $\hat{u}(s,t)$ определяется формулой (10). Замена в первом интеграле (12): $s = t - \tau$, даёт

$$\psi(t) = \int_0^t \rho(t-\tau)\left(\left(\psi(\tau)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)} d\tau + \\ + \int_t^l \rho(s)\hat{u}(s,t)\,ds \qquad \forall t \in [0,T_1] \qquad (13)$$

— нелинейное интегральное уравнение Вольтерра II рода относительно функции $\psi(t)$, $t \in [0,T_1]$. Если рассматривать при $\theta \in (0,T_1]$ правую часть уравнения (13) как отображение $V: C[0,\theta] \to C[0,\theta]$ с аргументом $\psi(t)$, то оператор

$$V\psi = \int_0^t \rho(t-\tau)\left(\left(\psi(\tau)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)} d\tau + \\ + \int_t^l \rho(s)\hat{u}(s,t)\,ds$$

непрерывен, положительно определён на положительно определённых, непрерывных функциях $\psi(\tau)$ в силу непрерывности и неотрицательности всех известных при решении задачи (1) – (3) функций $\varphi(a)$, $\mu(a)$, $\rho(a)$ при заданном числовом значении $\beta \in (1,2]$. При этом, с учётом получаемого из условий (2), (9) положительного начального числового значения

$$\psi(0) = \varphi(0) = \int_0^l \rho(s)\,\varphi(s)\,ds > 0$$

от противного устанавливается положительная определённость значений оператора $(V\psi)(t)$ $\forall t \in [0,\theta]$. Таким образом, $\forall \theta \in (0,T_1]$ оператор V действует из множества

$$\Psi_\theta^+ = \{\psi(\tau): \psi(\tau) \in C[0,\theta], \quad \psi(\tau) \geqslant 0 \ \ \forall \tau \in [0,\theta], \quad \psi(0) = \varphi(0)\}$$

в это же множество Ψ_θ^+.

Для использования формулы Лагранжа при установлении сжимаемости оператора V получим и оценим из условий (8) и $\beta \in (1,2]$ производную:

$$\frac{d}{ds}\left(s^{1-\beta} + (\beta - 1)\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)} =$$

$$= \left(1 + (\beta - 1)\,s^{\beta-1}\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(1-\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + (\beta - 1)s^{\beta-1}\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(\beta-1)}} \leqslant 1 \quad \forall s \in [0, +\infty).$$

С учётом этой оценки оператор V является сжимающим при некотором значении $\theta \in (0, T_1]$, для которого найдётся число $q \in (0,1)$, такое, что

$$\|V\psi_1 - V\psi_2\|_{C[0,\theta]} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int_0^t \rho(t-\tau)\left(\big(\psi_1(\tau)\big)^{1-\beta} + (\beta - 1)\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)} d\tau -\right.$$

$$\left. - \int_0^t \rho(t-\tau)\left(\big(\psi_2(\tau)\big)^{1-\beta} + (\beta - 1)\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)} d\tau\right\|_{C[0,\theta]} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int_0^t \rho(t-\tau)\left(1 + (\beta - 1)\big(\psi_*(\tau)\big)^{\beta-1}\int_0^{t-\tau} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(1-\beta)} \times\right.$$

$$\left.\times |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)|\,d\tau\right\|_{C[0,\theta]} \leqslant \theta\|\rho\|_{C[0,\theta]} \times \|\psi_1 - \psi_2\|_{C[0,\theta]} \leqslant$$

$$\leqslant \theta\|\rho\|_{C[0,T_1]} \times \|\psi_1 - \psi_2\|_{C[0,\theta]} \leqslant q\|\psi_1 - \psi_2\|_{C[0,\theta]},$$

где значение $\psi_*(\tau)$, выбирается из формулы Лагранжа и располагается между числами $\psi_1(\tau)$ и $\psi_2(\tau)$ $\forall \tau \in [0, \theta]$. Сжимаемость оператора V реализуется при

$$\theta \in \left(0, \frac{q}{\|\rho\|_{C[0,T_1]}}\right).$$

Следовательно, уравнение (13) имеет единственное решение $\psi(\tau) = \hat{\psi}(\tau)$ [30] из множества Ψ_θ^+. Из однозначности непрерывного решения уравнения (13) последовательно на отрезках $[0, \theta]$, $[\theta, 2\theta]$, …, $[(j-1)\theta, j\theta]$, $[j\theta, T_1]$, где $j = \max\limits_{i\theta \leqslant T_1, i \in \mathbb{N}} i$, следует существование у уравнения (13) единственного решения $\psi(\tau) = \hat{\psi}(\tau) \in \Psi_{T_1}^+$.

Дифференцируя уравнение (12) и производя замену аргумента в первом интеграле получаемого равенства: $s = t - \tau$, с учётом равенства $\psi(0) = \varphi(0)$ имеем

$$\psi'(t)=\int_0^t \frac{\rho(t-\tau)}{\big(\psi(\tau)\big)^{\beta}}\left(\big(\psi(\tau)\big)^{1-\beta}+(\beta-1)\int_0^{t-\tau}\mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(1-\beta)}\times$$
$$\times\,\psi'(\tau)\,d\tau+\rho(t)\left(\big(\varphi(0)\big)^{1-\beta}+(\beta-1)\int_0^{t}\mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)}-$$
$$-\rho(t)\hat{u}(t+0,t)+\int_t^l \rho(s)\hat{u}_t(s,t)\,ds\quad \forall t\in[0,T_1]$$

— линейное относительно функции $\psi'(t)$ интегральное уравнение Вольтерра II рода с решением $\hat{\psi}'(t)\in C[0,T_1]$ [30]. И таким образом получаем $\hat{\psi}(\tau)\in C^1[0,T_1]\cap\Psi^+_{T_1}$.

Подставляя полученную функцию $\hat{\psi}(t)=u(0,t), t\in[0,T_1]$, в формулу (11), имеем решение задачи (1) – (3) в области $Q^+_{T_1}$:

$$\hat{u}(a,t)=\left(\big(\hat{\psi}(t-a)\big)^{1-\beta}+(\beta-1)\int_0^{a}\mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)}\quad \forall(a,t)\in Q^+_{T_1}. \quad (14)$$

Если $T\leqslant l$, то с использованием решения $\hat{\psi}(t)$ уравнения (13) на отрезке $[0,T]$ решение задачи (1) – (3) завершается получением функции $\hat{u}(a,t)$ в области Q^+_T по формуле (14).

Если же $T>l$, то начальное условие с отрезка $[0,l]$, на котором изменяется аргумент a при $t=0$, переносим на отрезок $[0,l]$ при $t=l$ с определением начальной функции в виде $u(a,l)=\varphi_1(a)=\hat{u}(a,l)$, $0\leqslant a\leqslant l$. Затем решаем задачу (1), (2) уже для аргументов (a,t) в области $a\in[0,l]$ и $t\in[0,T_2], T_2=\min\{2l,T\}$, с новым начальным условием $u(a,l)=\varphi_1(a)$, $a\in[0,l]$, и с выписыванием решения по формуле (11), и решаем уравнение (13) для $t\in[l,T_2]$. Так можем увеличивать временной отрезок пошагово на величину l несколько раз до исчерпания всего отрезка $[0,T]$.

Итак, решение задачи (1) – (3) на всей области определения Π_T представимо сначала в области Q^-_T формулой (10). Затем в Q^+_T решение задачи (1) – (3) задаётся для областей

$$Q^{j+}_{T_j}=\{(a,t)\colon a+(j-1)l\leqslant t\leqslant T_j;\ 0\leqslant a\leqslant l\}$$

формулой (14) для $j=1,2,\dots,n$, при $n=\max\limits_{j\in\mathbb{N},\ jl\leq T} j$, и $T_j=\min\{jl,T\}$, с подстановкой в формулу (14) решений $\hat{\psi}(t)$ уравнения (13) на отрезках $[0,l]$, $[l,2l]$, …, $[(n-1)l,T]$, последовательно при $j=1,2,\dots,n$. При этом каждый раз при очередном решении уравнения (13) относительно функции $\psi(t)$ на отрезке $[T_{j-1},T_j]=[(j-1)l,jl]$ в последний интеграл уравнения (13) подставляется найденное ранее по формуле (14) решение $\hat{u}(a,t)$ задачи (1) – (3) в области

$$Q^{j-}_{T_j}=\{(a,t)\colon t-T_{j-1}\leqslant a\leqslant l;\ T_{j-1}\leqslant t\leqslant T_j\}.$$

Существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения задачи (1) – (3) в области Q_T^- при выполнении условий (7) – (9) теоремы на функцию $\varphi(a)$ следует из формулы (10), так как правая часть формулы (10) непрерывно дифференцируема в области Q_T^-. Значение решения $u(a,t)$ в точке $(0,0)$ удовлетворяет условию (2) и условию (9). Тогда

$$\hat{u}(0,0) = \hat{\psi}(0) = \int_0^l \rho(s)\,\varphi(s)ds = \varphi\,(0) = \hat{u}(0+0,0) = \lim_{a\to 0+0} \varphi(a)\,. \quad (15)$$

Решение $u(a,t)$ в области Q_T^+, в том числе и в точках $(t,t) \in Q_T^+$, непрерывно дифференцируемо в силу непрерывной дифференцируемости и правой части формулы (14) и неоднородности уравнения (13) с решением $\hat{\psi}(t) \in C^1[0,T] \cap \Psi_T^+$. При этом $\forall t \in (0,T_1]$

$$\hat{u}(t,t) = \hat{u}(t-0,t) = \left(\left(\hat{\psi}(0)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)}$$

на множестве Δ, и также из области Q_T^+:

$$\hat{u}(0,0) = \hat{\psi}(0) = \lim_{t\to 0+0} \hat{\psi}(t) = \hat{u}(0,0+0).$$

Аналогично и при предельном переходе справа к точкам множества Δ из области $Q_{T_1}^-$ получаем

$$\hat{u}(t+0,t) = \left(\left(\varphi(0)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)} \quad \forall t \in [0,T_1)\,,$$

$$\hat{u}(T_1,T_1-0) = \left(\left(\varphi(0)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^{T_1} \mu(\xi)\,d\xi\right)^{1/(1-\beta)}.$$

В силу равенства $\hat{\psi}(0) = \varphi(0)$ в цепочке (15) значения $\hat{u}(t-0,t)$ и $\hat{u}(t+0,t)$ совпадают. Следовательно, функция $\hat{u}(a,t)$ является непрерывной на множестве Δ.

Из формулы (10) следует, что

$$\hat{u}_a(a,t) = \frac{\varphi'(a-t)\left(\varphi(a-t)\right)^{-\beta} - \mu(a) + \mu(a-t)}{\left(\left(\varphi(a-t)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_{a-t}^a \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(\beta-1)}} \quad \forall (a,t) \in Q_T^-,$$

$$\hat{u}_a(t+0,t) = \frac{\varphi'(0)\left(\varphi(0)\right)^{-\beta} - \mu(t) + \mu(0)}{\left(\left(\varphi(0)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(\beta-1)}} \quad \forall\, t \in [0,T_1]. \quad (16)$$

Из формулы (14) следует, что

$$\hat{u}_a(a,t) = \frac{-\,\psi'(t-a)\left(\psi(t-a)\right)^{-\beta} - \mu(a)}{\left(\left(\psi(t-a)\right)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^a \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(\beta-1)}} \quad \forall (a,t) \in Q_T^+,$$

$$\hat{u}_a(t-0,t) = \frac{-\psi'(0)\big(\psi(0)\big)^{-\beta} - \mu(t)}{\left(\big(\psi(0)\big)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(\beta-1)}} \quad \forall\, t \in (0,T_1]. \quad (17)$$

Для производных $\hat{u}_a(t-0,t)$ и $\hat{u}_a(t+0,t)$ $\forall\, t \in [0,T_1]$ с учётом предельного перехода при $x,t \to 0+0$ от уравнения (1) и равенства (15) к равенству

$$\psi'(0) + \varphi'(0) = -\mu(0)(\varphi(0))^{\beta}$$

из формул (16) и (17) следует, что $\hat{u}_a(t-0,t) = \hat{u}_a(t+0,t)$ $\forall\, t \in (0,T_1)$, и тем самым $\hat{u}_a(a,t) \in C\big(\Pi_{T_1}\big)$. Аналогично

$$\hat{u}_t(t+0,t) = \frac{-\varphi'(0)\big(\varphi(0)\big)^{-\beta} - \mu(0)}{\left(\big(\varphi(0)\big)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(\beta-1)}} \quad \forall t \in [0,T_1]; \quad (18)$$

$$\hat{u}_t(t-0,t) = \frac{\psi'(0)\big(\psi(0)\big)^{-\beta}}{\left(\big(\psi(0)\big)^{1-\beta} + (\beta-1)\int_0^t \mu(\xi)\,d\xi\right)^{\beta/(\beta-1)}} \quad \forall t \in (0,T_1]. \quad (19)$$

Из формул (18), (19), как и выше, следует, что $\hat{u}_t(t-0,t) = \hat{u}_t(t+0,t)$ $\forall\, t \in (0,T_1)$, и тем самым $\hat{u}_t(a,t) \in C\big(\Pi_{T_1}\big)$.

В итоге решение $u(a,t)$ задачи (1) – (3) имеет область определения, состоящую из двух подобластей: Q_T^- и $Q_T^+ \setminus \Delta$. Так как в каждой из двух областей Q_T^- и $Q_T^+ \setminus \Delta$ решение $u(a,t)$ непрерывно дифференцируемо, а на общей границе подобластей: множестве Δ, имеет непрерывные частные производные первого порядка, то $u(a,t) \in C^1(\Pi_T)$. Теорема 1 доказана. □

Обратная задача I

Пусть известны значения $T > 0$ и $l > 0$, такие, что $l < T$, а также заданы функции $\varphi(a) \in C^1[0,l]$, $\rho(a) \in C[0,l]$, $\varphi(a), \rho(a) \geqslant 0$ $\forall a \in [0,l]$, удовлетворяющие условию (9), и заданы значение $\lambda \in (0, T-l]$, и функции $g_0(t) \in C^1[0,\lambda)$, $g_l(t) \in C^1[0,l+\lambda)$, удовлетворяющие условиям (4).

Определение 1. *Параметр β и функции $\mu(a)$, $u(a,t)$ называются решением обратной задачи* I, *если при известных значениях $T > 0$, $l \in (0,T)$, $\lambda \in (0,T-l]$ и заданных функциях $\varphi(a)$, $\rho(a)$, $a \in [0,l]$, $g_0(t)$, $t \in [0,\lambda)$, $g_l(t)$, $t \in [0,l+\lambda)$, определяемые число β и функции $\mu(a)$, $u(a,t)$ таковы, что $\mu(a) \in C[0,l]$, $u(a,t) \in C^1(\Pi_T)$, $\beta \in (1,2]$, при $\mu(a) \geqslant 0$ $\forall a \in [0,l]$, а также β и функции $\mu(a)$, $\rho(a)$, $u(a,t)$ удовлетворяют уравнению* (1) *и условиям* (2) – (4).

Теорема 2. *Пусть заданные значения $T > 0$, $l \in (0,T)$, $\lambda \in (0,T-l]$, и пусть известные функции $\varphi(a) \in C^1[0,l]$, $\rho(a) \in C[0,l]$, $g_0(t) \in C^1[0,\lambda)$, $g_l(t) \in C^1[0,l+\lambda)$ таковы, что*

$$g_0(t) > 0 \ \ \forall t \in [0,\lambda), \ \ g_l(t) > 0 \ \forall t \in [0,l+\lambda), \ \ g_0'(t) \not\equiv 0, t \in [0,\lambda); \quad (20)$$

$$\varphi(a) > 0, \quad \rho(a) \geqslant 0 \quad \forall a \in [0, l], \qquad g_0(0) = \varphi(0), \qquad g_l(0) = \varphi(l). \quad (21)$$

Тогда, если существуют β_1, $\mu_1(a)$, $u_1(a,t)$ и β_2, $\mu_2(a)$, $u_2(a,t)$ — *два решения обратной задачи* I *с одинаковыми исходными данными, то* $\beta_1 = \beta_2$, $\mu_1(a) = \mu_2(a) \quad \forall a \in [0, l]$, *и* $u_1(a,t) = u_2(a,t) \ \forall (a,t) \in \Pi_T$.

Доказательство. Рассмотрим β, $\mu(a)$, $u(a,t)$ — решение обратной задачи I. Из формулы (10) при $a = l$ следует, что

$$g_l(t) = \left(\left(\varphi(l-t)\right)^{1-\beta} + (\beta - 1) \int_{l-t}^{l} \mu(\xi)\, d\xi \right)^{1/(1-\beta)} \qquad \forall t \in [0, l).$$

Разрешая это равенство относительно функции $\mu(a)$, с учётом условий (20), (21) имеем

$$\mu(a) = -\frac{\varphi'(a)}{\left(\varphi(a)\right)^{\beta}} - \frac{g_l'(l-a)}{\left(g_l(l-a)\right)^{\beta}} \qquad \forall a \in (0, l]. \qquad (22)$$

Из формулы (11) при $a = l$ следует, что

$$g_l(t+l) = \left(\left(g_0(t)\right)^{1-\beta} + (\beta - 1) \int_{0}^{l} \mu(\xi)\, d\xi \right)^{1/(1-\beta)} \qquad \forall t \in [0, \lambda).$$

Дифференцируя полученное равенство по t для значений $t \in [0, \lambda)$, при которых по условию (20) теоремы выполняется неравенство $g_0'(t) \neq 0$ и соответственно неравенство $g_l'(t+l) \neq 0$, а затем разрешая получаемое относительно числового значения β, имеем

$$\beta = \hat{\beta} = \ln\left(\frac{-\, g_l'(t+l)}{g_0'(t)}\right) \Big/ \ln\left(\frac{g_l(t+l)}{g_0(t)}\right) \qquad \forall t \in [0, \lambda): \ g_0'(t) \neq 0. \quad (23)$$

Формула (23) однозначно определяет число $\beta = \hat{\beta} = \beta_1 = \beta_2$ по значениям известных функций $g_0(t)$, $g_l(t)$. Исходя из однозначности β формула (22) однозначно определяет значения функции $\mu(a) = \mu_1(a) = \mu_2(a)$ $\forall a \in (0, l]$. Переходя к пределу при $a \to 0 + 0$ в формуле (22), имеем продолжающее функцию $\mu(a)$ значение

$$\mu(0) = -\frac{\varphi'(0) + g_l'(l)}{\left(\varphi(0)\right)^{\beta}},$$

которое доопределяет функцию $\mu(a) = \mu_1(a) = \mu_2(a)$ на отрезке $[0, l]$. Для задачи (1) – (3) при определённом значении $\beta = \hat{\beta} = \beta_1 = \beta_2$ с коэффициентами $\varphi(a)$, $\rho(a)$, $\mu(a) = \mu_1(a) = \mu_2(a)$ по теореме 1 решение задачи (1) – (3) единственно, что даёт и доказываемое равенство $u_1(a,t) = u_2(a,t)$ $\forall (a,t) \in \Pi_T$. Теорема 2 доказана. □

Обратная задача II

Пусть заданы значения $T > 0$ и $l > 0$, такие, что $l \leqslant T$, и функции $\varphi(a) \in C^1[0, l]$, $\rho(a) \in C[0, l]$, $\varphi(a), \rho(a) \geqslant 0 \ \forall a \in [0, l]$, удовлетворяющие условию (9), а также дополнительно заданы значение $\hat{\mu} > 0$, удовлетворяющее условию (6), и функция $g_l(t) \in C^1[0,l]$, удовлетворяющая условию (5).

Определение 2. *Число β и функции $\mu(a)$, $u(a,t)$ называются решением обратной задачи* II, *если при заданных значениях $T > 0$, $l \in (0,T]$, $\hat{\mu} > 0$ и функциях $\varphi(a)$, $\rho(a)$, $a \in [0,l]$, $g_l(t)$, $t \in [0,l]$, число β и функции $\mu(a)$, $u(a,t)$ таковы, что $\mu(a) \in C[0,l]$, $u(a,t) \in C^1(\Pi_T)$, $\beta \in (1,2]$, $\mu(a) \geqslant 0$ $\forall a \in [0,l]$, и значение β и функции $\mu(a)$, $\rho(a)$, $u(a,t)$ удовлетворяют уравнению* (1) *и условиям* (2), (3), (5), (6).

Теорема 3. *Пусть заданные числа $T > 0$, $l \in (0,T]$, $\hat{\mu} > 0$, и заданные функции $\varphi(a) \in C^1[0,l]$, $\rho(a) \in C[0,l]$, $g_l(t) \in C^1[0,l]$ таковы, что*

$$\varphi(a) > 0,\ \ \rho(a) \geqslant 0\ \ \forall a \in [0,l],\quad g_l(t) > 0\ \ \forall t \in [0,l],\ \ g_l(0) = \varphi(l). \tag{24}$$

Тогда, если существуют β_1, $\mu_1(a)$, $u_1(a,t)$ и *β_2, $\mu_2(a)$, $u_2(a,t)$ — два решения обратной задачи* II *при одинаковых исходных данных, то $\beta_1 = \beta_2$, $\mu_1(a) = \mu_2(a)$ $\forall a \in [0,l]$, $u_1(a,t) = u_2(a,t)$ $\forall (a,t) \in \Pi_T$.*

Доказательство. Рассмотрим β, $\mu(a)$, $u(a,t)$ — решение обратной задачи II. Тогда, как и при доказательстве предыдущей теоремы, для решения обратной задачи II выполняется равенство (22). При $a = l$ из (22) имеем

$$\mu(l) = \hat{\mu} = -\frac{\varphi'(l) + g_l'(0)}{\left(\varphi(l)\right)^{\beta}},$$

$$\beta = \hat{\beta} = \ln\left(\frac{\varphi'(l) + g_l'(0)}{-\hat{\mu}}\right)/\ln\left(\varphi(l)\right), \tag{25}$$

и параметр $\beta = \hat{\beta} = \beta_1 = \beta_2$ однозначно определяется формулой (25). После этого при $\beta = \hat{\beta}$ по формуле (22) однозначно определяется функция $\mu(a) = \mu_1(a) = \mu_2(a)$ при $a \in [0,l]$. Далее по теореме 1 и решение задачи (1) – (3) определяется однозначно: $u_1(a,t) = u_2(a,t)$ $\forall (a,t) \in \Pi_T$. Теорема 3 доказана. □

Литература

1. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* Contributions to the mathematical theory of epidemics. I // Proceedings of Royal Society, 1927, v.115A, p.700-721.
2. *Iannelli M., Milner F.* The basic approach to age-structured population dynamics. Models, methods and numerics. – Dordrecht: Springer, 2017. 350 p.
3. *Inaba H.* Age-structured population dynamics in demography and epidemiology. – Singapore: Springer Science + Bus. Media, 2017. 555 p.
4. *Lotka A.J.* Population analysis: a theorem regarding the stable age distribution // J. Washington Acad. Sci., 1937, v.27, №7, p.299-303.
5. *Колмогоров А.Н.* Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики, 1972, №5, с.100-106.

6. *Inaba H*. Age-structured homogeneous epidemic systems with application to the MSEIR epidemic model // J. Math. Biol., 2007, v.54, №1, p.101-146.
7. *Bodrov A.G., Nikitin A.A*. Examining the biological species steady-state density equation in spaces with different dimensions // J. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2015, v.39, №4, p.157-162.
8. *Liu Z., Guo C., Yang J.* Steady states analysis of a nonlinear age-structured tumor cell population model with quiescence and bidirectional transition // Acta Appl. Math., 2020, v.169, p.455-474.
9. *Ediev D.M.* On the existence and uniqueness of the remaining life expectancy in the model of a stable population // Mathematical Models and Computer Simulations, 2021, v.13, №6, p.964-970.
10. *Mitkowski P.J.* Mathematical structures of ergodicity and chaos in population dynamics. – Cham: Springer, 2021. 97 p.
11. *Semendyaeva N.L., Orlov M.V., Tang Rui, Yang Enping.* Analytical and numerical investigation of the SIR mathematical model // J. Computational Mathematics and Modeling, 2022, v.33, №3, p.284-299.
12. *Denisov A.M., Makeev A.S.* Iterative methods for solving an inverse problem for a population model // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2004, v.44, №8, p.1404-1413.
13. *Denisov A.M., Makeev A.S.* Numerical method for solving an inverse problem for a population model // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, v.46, №3, p. 470-480.
14. *Makeev A.S.* Application of Tikhonov's regularization method to solve inverse problems for two population models // J. Computational Mathematics and Modeling, 2007, v.18, №1, p.1-9.
15. *Чурбанов Д.В.* Единственность определения коэффициента при производной в нелинейном уравнении первого порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн., 2013, №1, с.9-14.
16. *Clement F., Laroche B., Robin F.* Analysis and numerical simulation of an inverse problem for a structured cell population dynamics model // J. Math. Biosciences and Engineering, 2019, v.16, №4, p.3018-3046.
17. *Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I.* Mathematical modeling of the Wuhan COVID-2019 epidemic and inverse problems // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2020, v.60, №11, p.1889-1899
18. *Krivorotko O.I., Sosnovskaia M.A., Kabanikhin S.I.* Agent-based mathematical model of COVID-19 spread in Novosibirsk region: Identifiability, optimization and forecasting // J. of Inverse and Ill-posed Problems, 2023, v.31, №3, p.409-425.
19. *Golovina S.G., Razborov A.G.* Reconstruction of the discontinuity line of a piecewise-constant coefficient in the two-dimensional internal initial–

boundary value problem for the homogeneous heat equation // J. Computational Mathematics and Modeling, 2014, v.25, №1, p.49-56.
20. *Solov'eva S.I., Tuikina S.R.* Numerical solution of the inverse problem for the mathematical model of cardiac excitation // J. Computational Mathematics and Modeling, 2014, v.27, №2, p.162-171.
21. *Baev A.V., Gavrilov S.V.* An iterative way of solving the inverse scattering problem for an acoustic system of equations in an absorptive layered nonhomogeneous medium // J. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2018, v.42, №2, p.55-62.
22. *Denisov A.M., Efimov A.A.* The inverse problem for an integro-differential equation and its solution method // J. Computational Mathematics and Modeling, 2019, v.30. №4, p.403-412.
23. *Golovina S.G., Zakharov E.V.* A numerical method for a system of integral equations determining the boundaries of local nonhomogeneities // J. Computational Mathematics and Modeling, 2020, v.31, №1, p.8-12.
24. *Tuikina S.R.* A numerical method for the solution of two inverse problems in the mathematical model of redox sorption // J. Computational Mathematics and Modeling, 2020, v.31, №1, p.96-103.
25. *Gavrilov S.V.* A numerical method for determining the inhomogeneity boundary in the electrical impedance tomography problem in the case of piecewise-constant conductivity // J. Mathematical Models and Computer Simulations, 2021, v.13, №4, p.579-585.
26. *Denisov A.M., Zhu Dongqin*. Inverse problem for a mathematical of sorption dynamics with variable kinetic coefficient // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2022, v.46, №4, p.174-182.
27. *Denisov A.M., Solov'eva S.I.* Determining the intensity variation of the heat sources in the heat equation // J. Computational Mathematics and Modeling, 2022, v.33, №1, p.1-8.
28. *Almohamed M., Tikhonov I.V.* Specific cases of one general inverse problem for abstract differential equations // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, v.44, №2, p.502-509.
29. *Denisov A.M.* Approximate solution of an inverse for a singularly perturbed integro-differential heat equation // J. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, v.63, №5, p.837-844.
30. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of integral equations. – New York, Washington, Boca Raton, London: CRC Press, 1998. 798 p.