Г. Темербекова[1], *Д. С. Романов*[2]

О ДЛИНЕ ЕДИНИЧНЫХ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМЕН ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ИНВЕРТОРЫ В НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ*

Введение и основные определения

В настоящей работе приводятся верхние оценки длин минимальных единичных проверяющих тестов относительно замен элементов на инверторы в схемах из функциональных элементов (СФЭ) над некоторыми конечными полными в P_2 базисами.

Пусть имеется СФЭ S, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. На схему S мог подействовать источник неисправностей U, способный преобразовать схему S в одну из схем некоторого конечного множества $H = H(U,S)$, содержащего и схему S. При воздействии на S источника неисправностей U один или несколько элементов схемы S переходят в неисправное состояние. При этом схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую, возможно, неравную f, булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$. Полученная функция $g(\tilde{x}^n)$ называется функцией неисправности схемы S.

Проверяющим тестом для схемы S относительно источника неиспрравностей U называется всякое такое множество T наборов значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что для любой неравной $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в можестве T найдётся набор α, для которого имеет место неравенство $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Число наборов в T называется длиной $L(T)$ теста T. Тест называется единичным, если в схеме может произойти не более чем одна поломка в не более чем одном элементе схемы. *Нетривиальной* будем называть неисправность СФЭ, при

[1]Аспирантка факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: gulgaisha93@mail.ru.

[2]Доцент факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: romanov@cs.msu.ru.

*Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621, а также проекта «Математические модели глобального информационно-энергетического баланса на основе циклов управления природно-антропогенными системами (на примере системы “загрязнение среды — здоровье населения”)» (код FSZZ-2020-0002).

которой хотя бы на одном входном наборе меняется (по сравнению со случаем отсутствия неисправностей) значение на выходе хотя бы одного элемента в схеме. Схема называется неизбыточной, если всякая нетривиальная неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, неравной исходной.

Пусть B — произвольный конечный схемный базис, обладающий функциональной полнотой в P_2, U_1 — источник одиночных неисправностей элементов, S — СФЭ над базисом B, а T — единичный проверяющий тест для схемы S относительно источника неисправностей U_1. Введём следующие обозначения: $L(T)$ — длина теста T; $L^{detect}(U_1, S) = \min L(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для схемы S; $L_B^{detect}(U_1, f) = \min L(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным схемам S в базисе B, реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$; $L_B^{detect}(U_1, n) = \max L_B^{detect}(U_1, f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $L_B^{detect}(U_1, f)$. Функция $L_B^{detect}(U_1, n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста относительно источника неисправностей U_1.

Обозначение для источника неисправностей в СФЭ будет иметь вид X_z^y, где X — это одна или несколько заглавных латинских букв, указывающих на место возможной неисправности (P — неисправности на входах схем, I — неисправности на входах функциональных элементов, O — неисправности на выходах функциональных элементов), y — это название типа неисправности ($const$, 0, 1, inv — константные неисправности, константные неисправности типа 0, константные неисправности типа 1 и инверсные неисправности соответственно), z указывает на ограничение возможного количества поломок элементов.

Расширением $\hat{B}$ множества булевых функций B называется множество тех и только тех булевых функций, которые могут быть получены из функций множества B переименованиями и отождествлениями переменных.

В данной работе изучаются одиночные неисправности типа «закорачивание входа элемента на его выход с инвертированием», представляющий собой *замену функционального элемента на инвертор*, реализующий отрицание одного из входов этого элемента. Источник таких одиночных неисправностей будем обозначать через $O_1^{r(\neg)}$. Источник произвольных одиночных замен элементов на элементы с теми же входами обозначим через O_1^r.

Приведем сжатый обзор основных известных результатов о функциях Шеннона длин единичных проверяющих тестов относительно близких к изучаемому здесь источников неисправностей на выходах элементов (даваемые без пояснений оценки верны при всех $n \in \mathbb{N}$). Отметим, что в работах К. А. Попкова неизбыточность схем рассматривается более строго, чем в данной работе, — без допущения тривиальных неисправностей. Обозначим $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$, $B_1 = \{x\&y, x \oplus y, 1\}$. Имеют место следующие оценки. $L^{detect}_{B_1}(IO^{const}_1, n) \leq n+3$ [5, 18]. Для произвольного полного конечного базиса B: $L^{detect}_B(O^{const}_1, n) \leq n+3$ [11, 12, 13]. $L^{detect}_{B_0}(O^0, n) = L^{detect}_{B_0}(O^1, n) = 2$ [7], $L^{detect}_{B_1}(O^1_1, n) = 1$ [17], $L^{detect}_{B_1}(O^0, n) = 1$ [9]. В произвольном полном базисе B: $2 \leq L^{detect}_B(O^{const}_1, n) \leq 4$ [20]. В базисе $B' = \{xy, x \oplus y, x \sim y\}$ $L^{detect}_{B'}(IO^{const}_1, n) \leq 16$ [21]. В любом конечном полном базисе $B \subseteq (M \cup \{\bar{x}_1\&h | h \in P_2\}) \setminus \{1\}$, при $n \geq 3$ $L^{detect}_B(O^1_1, n) \geq 2$, если же при этом отождествлениями переменных функций из в B получаются $x \vee y$ и $x\&y$, то $L^{detect}_B(O^1_1, n) = 2$; в любом конечном полном базисе $B \subseteq \{(x_1\&\bar{x}_2\&h)^\delta, (x_1^\sigma\&\ldots\&x_n^\sigma)^\delta, x_1 \oplus x_2 \oplus c | h \in P_2, \delta, \sigma, c \in \{0,1\}\}) \setminus \{1\}$, $L^{detect}_B(O^{const}_1, n) \geq 3$ $(n \geq 3)$ [14]; $L^{detect}_{\{\bar{x},xy\}}(O^p_1, n) = 3$ $(n \geq 2,\ p \in \{0,1\})$ [15]. $L^{detect}_{\{xy,\bar{x},x\oplus y\oplus z\}}(O^{const}_1, n) \leq 2$ [16]. Для произвольного полного конечного базиса B: $L^{detect}_B(O^{inv}_1, n) \leq 3$ [19], $L^{detect}_{B_1}(O^{inv}_1, n) = 1$ [10]. $L^{detect}_{\{xy,\bar{x},x\oplus y\}}(O^r_1, n) \leq 2n+3$ [17]. $L^{detect}_{B_1}(O^{r(\neg)}_1, n) = 1$, $L^{detect}_{B_0}(O^{r(\neg)}_1, n) \leq 2$ [22]. Среди современных публикаций по тестированию схем есть работы, в которых обсуждаются идеи по сокращению длины теста, по повышению качества покрытия неисправностей множествами входных наборов, предлагаются новые методы построения легкотестируемых схем и тестов для них, но улучшение известных оценок функций Шеннона длины теста не осуществляется, — выделим среди публикаций этого типа работы [1, 2, 3, 4, 6].

Формулировки и доказательства основных результатов

В данном разделе для некоторых семейств полных в P_2 базисов B будут строиться неизбыточные схемы, легкотестируемые относительно проверки на одиночную замену элемента на инвертор. В силу теоремы Поста о полноте в P_2 возможны два случая:

1) либо $\bar{x} \in \hat{B}$,

2) либо $\{0,1\} \subseteq \hat{B}$.

В первом случае можно получить инвертор, все неисправности которого тривиальны. Во втором случае для каждой булевой константы справедливо утверждение: либо в B имеется эта булева константа, либо эту константу можно получить отождествлением всех переменных одной из функций B. В последнем подслучае единственной отличной от реализуемой константы функцией неисправности функционального элемента с отождествленными входами является отрицание. Нульвходовый же реализующий константу функциональный элемент, очевидно, абсолютно надежен. Поскольку по теореме Поста в B имеется немонотонная функция φ, из нее подстановками констант и функции x можно получить $\bar{x}$. Это позволяет построить на основе элемента φ (подавая на его входы переменную x, а также выходы элементов, реализующих константы) инвертор, нетривиальные неисправности которого будут константами. В случае 2 в доказательстве теоремы 1 каждая из констант будет реализована в схеме только один раз (при необходимости). С учетом сказанного будем далее предполагать, что инверторы допускают константные неисправности на выходах (на самом деле в случае 1 инверторы, фактически, абсолютно надежны, а в случае 2 у инвертора может не оказаться одной из тождественно равных константе функции неисправности, но единичные проверяющие тесты, построенные в предположении о константных неисправностях инверторов, будут и тестами для более простых случаев).

Отметим, что в дальнейшем в целях удобства изложения схемы в ряде случаев будут модифицироваться без переименования.

Теорема 1. *Если B — полное в P_2 множество булевых функций такое, что функция xy содержится в расширении $\hat{B}$ множества B, то при любом натуральном n имеет место неравенство $L_B^{detect}(O_1^{r(\neg)},n) \leq 3$ (то есть любую булеву функцию можно реализовать неизбыточной схемой, допускающей единичный проверяющий тест длины не более трех относительно замен элементов на инверторы).*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Построим в базисе B неизбыточную схему S_f, реализующую f и допускающую единичный проверяющий тест длины не более трех относительно замен элементов на инверторы.

Допустим, полином Жегалкина функции f приводится к виду

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_t \oplus a_0,$$

где K_1, $K_2, \ldots$, K_t — попарно неэквивалентные монотонные конъюнкции, $a_0 \in \{0,1\}$. Не ограничивая общности, будем полагать, что K_1 — конъюнкция минимального натурального ранга, имеющая вид $K_1 = x_1x_2\cdots x_r$, $r \in \mathbb{N}$. Каждую конъюнкцию K_i ранга r_i, $i = \overline{1,t}$, будем традиционно реализовывать цепочкой C_i из $r_i - 1$ конъюнкторов, в которой к первому входу каждого конъюнктора, начиная со второго, ведет дуга от предыдущего конъюнктора, а к каждому из остальных r_i входов конъюнкторов ведет дуга от входа схемы, соответствующего встречающейся в K_i переменной (при этом из каждого такого входа исходит по одной дуге указанного вида). Выходом такой цепочки C_i будем считать при $r_i > 1$ выход ее последнего элемента, а при $r_i = 1$ — единственный входящий в цепочку вход схемы.

Пусть Σ — СФЭ, моделирующая формулу $A = \overline{\overline{(x \& \bar{y})} \& \overline{(y \& \bar{x})}}$. Модифицируем СФЭ Σ следующим образом. Построим входные вершины x, y новой схемы, подсоединим к каждому входу по инвертору, а затем отождествим вход x СФЭ Σ с выходом инвертора при входе x новой схемы, а вход y СФЭ Σ — с выходом инвертора при входе y новой схемы (при этом выходы смежных со входами новой схемы инверторов будут ветвиться). Полученная схема Σ' реализует функцию $x \oplus y$. Нетрудно проверить, что множество входных наборов $\{(0,0),\ (0,1),\ (1,0)\}$ образует единичный проверяющий тест для этой схемы (считается, что конъюнкторы допускают замены на инверторы, инверторы допускают константные неисправности на выходах, а неисправности элементов-констант не анализируются). Для любой тройки различных наборов значений переменных (x,y), удаляя в Σ' какие-то инверторы, смежные со входами, и, возможно, удаляя выходной инвертор, можно получить реализующую функцию $x \oplus y$ схему, для которой данная тройка наборов будет образовывать единичный проверяющий тест. Пронумеруем эти тройки от нуля до трех: номер тройки есть число, двоичная двухразрядная запись которого совпадает с последовательностью разрядов отсутствующего в тройке набора. В соответствии с этой нумерацией будем обозначать через Σ_ν ту из построенных здесь схем, для которой ν-я тройка образует единичный проверяющий тест.

При $t = 0$ функция f есть тождественная константа и легко реализуется неизбыточной схемой, допускающей единичный проверяющий тест длины не более двух; далее этот случай рассматриваться не будет.

При $t = 1$ и $a_0 = 0$ искомая схема S_f совпадает с C_1.

При $t > 1$ и $a_0 = 0$ искомая схема S_f строится добавлением цепочки C из $t-1$ реализующих функцию $x \oplus y$ подсхем: Σ_1, Σ_3, Σ_1, Σ_3, $\ldots$ (в этом порядке). В этой цепочке к первому входу каждой подсхемы, начиная со второй, ведет дуга от выхода предыдущей подсхемы, а к остальным t входам ведут t дуг от выходов цепочек C_1, C_2, $\ldots$, C_t: выход цепочки C_1 подается на первый вход первой подсхемы цепочки C, выход цепочки C_2 подается на второй вход первой подсхемы цепочки C, выход цепочки C_3 подается на второй вход второй подсхемы цепочки C и т. д. Если для реализации инверторов требуются константы, то каждая нужная константа реализуется один раз, при этом, если константы нет в базисе B, то в качестве всех входов константного элемента используется вход схемы x_1. Выходом схемы S_f объявляется выход последней подсхемы цепочки C.

При $a_0 = 1$ схема S_f для случая $a_0 = 0$ модифицируется добавлением выходного инвертора (его выход и становится выходом итоговой схемы S_f).

Ясно, что построенная схема S_f реализует в отсутствие неисправностей функцию f. Покажем, что она либо неизбыточна, либо достраивается до неизбыточной, и при этом длина единичного проверяющего теста для итоговой схемы не превосходит трех.

Рассмотрим три набора значений входных переменных $(x_1, x-2, \ldots, x_n)$: $\alpha_0 = (\tilde{0}^n)$, $\alpha_1 = (\tilde{1}^r, \tilde{0}^{n-r})$, $\alpha_2 = (\tilde{1}^n)$. На этих трех наборах на входах всех подсхем вида Σ_1 цепочки C оказываются первые тройки, а на входах всех подсхем вида Σ_3 цепочки C оказываются третьи тройки, так что одиночные неисправности всех элементов подсхем цепочки C обнаруживаются на этих наборах. На наборе α_2 обнаруживаются все неисправности конъюнкторов из цепочек C_1, $\ldots$, C_t. При $a_0 = 1$ константная неисправность выходного инвертора обнаруживается на наборах α_0, α_1, поскольку f на этих наборах принимает разные значения. Может так случиться, что на этих трех наборах обнаруживаются и неисправности элементов, реализующих тождественные константы. В этом случае модификация схемы не требуется, а теорема доказана.

Если на этих трех наборах (α_0, α_1, α_2) не обнаруживается неисправность вида $\bar{x}_1$ элемента «константа 1», то при $a_0 = 0$ от выхода схемы S_f проводится дуга к первому входу нового конъюнктора, а ко второму входу этого конъюнктора проводится дуга от элемента «константа 1», а при $a_0 = 1$ аналогичное построение производится после удаления выходного инвертора, а затем новый инвертор подсоединяется к выходу нового конъюнктора. Выходом модифицированной схемы S_f при $a_0 = 0$ становится выход добавленного конъюнктора, а при $a_0 = 1$ — выход добавленного инвертора. Ясно, что новая схема по-прежнему реализует f, но в ней на наборах α_0, α_1 обнаруживаются неисправности элемента «константа 1» и добавленных элементов; неисправности же элементов, обнаруживавшиеся на наборах α_0, α_1, α_2 до модификации, также обнаруживаются и в модифицированной схеме S_f.

Если на наборах α_0, α_1, α_2 не обнаруживается неисправность вида $\bar{x}_1$ элемента «константа 0», то при $a_0 = 1$ от выхода схемы S_f проводится дуга к первому входу нового конъюнктора, а ко второму входу этого конъюнктора проводится дуга от первого нового инвертора, на «существенные» входы которого подаются дуги, исходящие от элемента «константа 0», а при $a_0 = 0$ аналогичное построение производится после подсоединения к выходу схемы второго нового выходного инвертора, а затем третий новый выходной инвертор подсоединяется к выходу нового конъюнктора. Выходом модифицированной схемы S_f при $a_0 = 1$ становится выход добавленного конъюнктора, а при $a_0 = 0$ — выход третьего добавленного инвертора. Ясно, что новая схема по-прежнему реализует f, но в ней на наборах α_0, α_1 обнаруживаются неисправности элемента «константа 0» и добавленных элементов; неисправности же элементов, обнаруживавшиеся на наборах α_0, α_1, α_2 до модификации, также обнаруживаются и в модифицированной схеме. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если B — полное в P_2 множество булевых функций такое, что функция $\psi(x, y) = x\bar{y}$ содержится в расширении $\hat{B}$ множества B, то при* *любом натуральном n имеет место неравенство $L_B^{detect}(O_1^{r(\neg)}, n) \leq 4$ (то есть любую булеву функцию можно реализовать неизбыточной схемой, допускающей единичный проверяющий тест длины не более четырех относительно замен элементов на инверторы).*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция. Построим в базисе B неизбыточную схему S_f, реализующую f и допускающую единичный проверяющий тест длины не более четырех относительно замен элементов на инверторы.

Случаи, когда f есть константа, тождественная переменная или отрицание переменной, тривиальны и приводят к построению неизбыточных схем, допускающих единичный проверяющий тест длины не более двух. Далее будем считать, что f существенно зависит от не менее чем двух переменных. Обозначим $\bar{f}^*(\tilde{x}^n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Разложим функцию $\bar{f}^*(\tilde{x}^n)$ по переменной x_1: $\bar{f}^*(\tilde{x}^n) = \bar{x}_1 \bar{f}^*(0, x_2, \ldots, x_n) \oplus x_1 \bar{f}^*(1, x_2, \ldots, x_n)$.

Допустим, полиномы Жегалкина (возможно, с прибавлением константы 0 или двух констант 1) функций $\bar{f}^*(0, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{f}^*(1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют вид

$$\bar{f}^*(0, x_2, \ldots, x_n) = 1 \oplus K_1^{(0)} \oplus K_2^{(0)} \oplus \cdots \oplus K_{t_0}^{(0)} \oplus \bar{a}_0,$$

$$\bar{f}^*(1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \oplus K_1^{(1)} \oplus K_2^{(1)} \oplus \cdots \oplus K_{t_1}^{(1)} \oplus \bar{a}_1,$$

где $K_1^{(0)}, \ldots, K_{t_0}^{(0)}, K_1^{(1)}, \ldots, K_{t_1}^{(1)},$ — монотонные конъюнкции, $a_0, a_1 \in \{0, 1\}$.

Рассмотрим сначала случай, при котором функция $\bar{f}^*(1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно не равна константе.

Не ограничивая общности, будем полагать, что $K_1^{(1)}$ — конъюнкция минимального натурального ранга среди $K_1^{(1)}, \ldots, K_{t_1}^{(1)}$, имеющая вид $K_1^{(1)} = x_2 \cdots x_r$, $r \in \mathbb{N}$. Через $\check{K}_i^{(\sigma)}$ обозначим конъюнкцию отрицаний переменных конъюнкции $K_i^{(\sigma)}$. Тогда функция f представима в виде

$$f = (x_1(a_0 \oplus a_1) \oplus ((\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1 \check{K}_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus \bar{x}_1 \check{K}_{t_1}^{(1)}) \oplus (x_1 \oplus x_1 \check{K}_1^{(0)} \oplus$$
$$\oplus \cdots \oplus x_1 \check{K}_{t_0}^{(0)}))) \oplus \bar{a}_1. \quad (1)$$

Каждую конъюнкцию $x_1 \check{K}_i^{(0)}$ ранга $r_i^{(0)}$, $i = \overline{1, t_0}$, будем реализовывать цепочкой $C_i^{(0)}$ из $r_i^{(0)} - 1$ элементов ψ, в которой к первому входу каждого элемента ψ, начиная со второго, ведет дуга от предыдущего элемента ψ, а к каждому из остальных $r_i^{(0)}$ входов элементов ψ ведет дуга от входа схемы, соответствующего встречающейся в $x_1 \check{K}_i^{(0)}$ переменной (при этом из каждого такого входа исходит по одной дуге указанного вида, а x_1 подается на первый вход первого элемента цепочки). Выходом такой цепочки $C_i^{(0)}$ будем считать при $r_i^{(0)} > 1$ выход ее последнего элемента, а при $r_i^{(0)} = 1$ — единственный входящий в цепочку вход схемы. Конъюнкцию $\bar{x}_1\check{K}_i^{(1)}$ будем реализовывать аналогично цепочкой $C_i^{(1)}$, но на первый вход первого элемента цепочки $C_i^{(1)}$ будем подавать выход инвертора (своего для каждой цепочки), на вход которого подается x_1. Для реализации инвертора могут понадобиться (при условии $\bar{x} \notin \hat{B}$) константы. Реализуем константу 0, используя в качестве входов соответствующего функционального элемента (например, ψ) переменную x_1, а константу 1, — используя в качестве входов соответствующего функционального элемента переменную x_2. Для всех инверторов в цепочках $C_i^{(1)}$ построим один общий элемент «константа 0» и один общий элемент «константа 1».

При условии $\bar{x} \in \hat{B}$ (тогда инверторы абсолютно надежны) под Σ будем понимать СФЭ, моделирующую формулу $\overline{\psi((\overline{\psi(x,y)}), \psi(y,x))}$. При условии $\{0,1\} \subseteq \hat{B}$ под Σ будем понимать СФЭ, моделирующую формулу $\psi(1, \psi(\psi(1, \psi(x,y))), \psi(y,x))$ так, что в схеме имеется лишь один элемент «константа 1», выход которого ветвится (и, если этот элемент не нульвходовый, то на все входы этого элемента подается вход x схемы). Нетрудно проверить, что множество входных наборов $\{(0,0),\ (1,0)\}$ образует единичный проверяющий тест для этой схемы относительно замен элементов на инверторы.

Искомая схема S_f строится на основании разложения (1), где каждое сложение по модулю 2 реализуется подсхемой Σ. Так, результаты вычислений в цепочках $C_1^{(0)}, \ldots, C_{t_0}^{(0)}$ складываются с помощью цепочки $C^{(0)}$ подсхем Σ, результаты вычислений в цепочках $C_1^{(1)}, \ldots, C_{t_1}^{(1)}$ складываются с помощью цепочки $C^{(1)}$ подсхем Σ, подсхема Σ' вида Σ обеспечивает сложение результатов вычислений в цепочках $C^{(0)}$ и $C^{(1)}$, подсхема Σ'' вида Σ обеспечивает прибавление $x_1(a_0 \oplus a_1)$ (при необходимости), инвертор Σ''' вида Σ обеспечивает прибавление $\bar{a}_1$ (при необходимости, если $a_1 = 0$). Каких-то из последних двух подсхем может не быть (если соответствующие коэффициенты $(a_0 \oplus a_1)$, $\bar{a}_1$ — нулевые. Выходом схемы S_f объявляется выход последней построенной подсхемы. Для построения инвертора Σ''' могут понадобиться константы — используем константы, уже построенные для инверторов из цепочек $C_1^{(1)}$, $\ldots, C_{t_1}^{(1)}$.

Ясно, что построенная схема S_f реализует в отсутствие неисправностей функцию f. Покажем, что она либо неизбыточна, либо достраивается до неизбыточной, и при этом длина единичного проверяющего теста для итоговой схемы не превосходит четырех.

Рассмотрим четыре набора значений входных переменных $(x_1, x-2, \ldots, x_n)$: $\alpha_0 = (0, \tilde{0}^{n-1})$, $\alpha_1 = (1, \tilde{0}^{n-1})$, $\alpha_2 = (0, \tilde{0}^r, \tilde{1}^{n-r-1})$,

$\alpha_3 = (0, \tilde{1}^{n-1})$. На наборах α_0, α_1 на входах всех подсхем вида Σ цепочки $C^{(0)}$ оказываются наборы $\{(0,0), (1,0)\}$. На наборах α_3, α_2 на входах всех подсхем вида Σ цепочки $C^{(1)}$ оказываются наборы $\{(0,0), (1,0)\}$. На наборах α_3, α_2 на входах подсхемы Σ' оказываются наборы $\{(0,0), (1,0)\}$. На наборах α_3, α_2 на входах подсхемы Σ'' оказываются наборы $\{(0,0), (1,0)\}$. Это означает, что одиночные неисправности всех элементов подсхем вида Σ обнаруживаются на этих наборах. На наборах α_0, α_1 обнаруживаются все неисправности элементов из цепочек $C_1^{(0)}, \ldots, C_{t_0}^{(0)}$, $C_1^{(1)}, \ldots, C_{t_1}^{(1)}$. При $a_0 = 0$ константная неисправность выходного инвертора обнаруживается на наборах α_2, α_3, поскольку f на этих наборах принимает разные значения. Может так случиться, что на этих четырех наборах обнаруживаются и неисправности элементов, реализующих тождественные константы и не входящих в подсхемы вида Σ. В этом случае модификация схемы не требуется, а теорема доказана.

Если на этих четырех наборах (α_0, α_1, α_2, α_3) не обнаруживается неисправность вида $\bar{x}_1$ элемента «константа 0», то удаляется дуга (если она есть), исходящая из выхода подсхемы Σ', добавляется новый элемент ψ, на первый вход которого подается дуга от выхода подсхемы Σ', на второй его вход подается дуга от выхода элемента «константа 0»; если дуга удалялась, то от выхода нового элемента ψ проводится дуга к тому месту, в которое вела удаленная дуга. Выходом модифицированной схемы S_f становится выход элемента схемы, имеющего наибольшую глубину. Ясно, что новая схема по-прежнему реализует f, но в ней на наборах α_2, α_3 обнаруживаются неисправности элемента «константа 0» и добавленного элемента; неисправности же элементов, обнаруживавшиеся на наборах α_0, α_1, α_2, α_3 до модификации, также обнаруживаются и в модифицированной схеме S_f.

Если на наборах α_0, α_1, α_2, α_3 не обнаруживается неисправность вида $\bar{x}_1$ элемента «константа 1» вне подсхем вида Σ, то удаляется дуга (если она есть), исходящая из выхода подсхемы Σ', добавляется новый элемент ψ, на первый вход которого подается дуга от выхода подсхемы Σ', на второй его вход подается дуга от выхода нового инвертора, на «существенные» входы которого подается выход элемента «константа 1» (для подстановки констант при построении этого инвертора используются те же элементы «константа 0», «константа 1», что и раньше); если дуга удалялась, то от выхода нового элемента ψ проводится дуга к тому месту, в которое вела удаленная дуга. Выходом модифицированной схемы S_f становится выход элемента схемы, имеющего наибольшую глубину. Ясно, что новая схема по-прежнему реализует f, но в ней на наборах α_2, α_3 обнаруживаются неисправности элемента «константа 1» и добавленных элементов; неисправности же элементов, обнаруживавшиеся на наборах α_0, α_1, α_2, α_3 до модификации, также обнаруживаются и в модифицированной схеме.

Если же функция $\bar{f}^*(1,x_2,\ldots,x_n)$ тождественно равна константе, то функция $\bar{f}^*(0,x_2,\ldots,x_n)$ тождественно не равна константе, и аналогичное доказательство будет построено, если вместо функции $\bar{f}^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ использовать функцию $f(x_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ и не инвертировать переменную x_1. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 с помощью принципа двойственности вытекают теоремы 3 и 4 соответственно.

Теорема 3. *Если B — полное в P_2 множество булевых функций такое, что функция $x \vee y$ содержится в расширении $\hat{B}$ множества B, то при любом натуральном n имеет место неравенство $L_B^{detect}(O_1^{r(\neg)},n) \leq 3$.*

Теорема 4. *Если B — полное в P_2 множество булевых функций такое, что функция $\psi(x,y) = x \vee \bar{y}$ содержится в расширении $\hat{B}$ множества B, то при любом натуральном n имеет место неравенство $L_B^{detect}(O_1^{r(\neg)},n) \leq 4$.*

Литература

1. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Analysis of different types of faults in a class of Boolean circuits // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). 2012. Vol. 2, Iss. 4. Pp. 145–149.

2. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Single network structure for stuck-at and bridging fault analysis and diagnosis for Exclusive-OR sum of products in Reed–Muller canonical circuits // Elixir Elec. Eng. 2013. Vol. 57. Pp. 14080–14085.

3. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Network structure for testability improvement in exclusive-OR sum of products Reed–Muller canonical circuits // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, Iss. 3. Pp. 368–378.

4. *Jameil A. K.* A new single stuck fault detection algorithm for digital circiuts // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, Iss. 1. Pp. 1050–1056.

5. *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. Vol. 21, Iss. 1. Pp. 124–141.

6. *Thamarai S. M., Kuppusamy K., Meyyappan T.* Fault detection and test minimization methods for combinational circuits — A survey // International Journal of Computer Trends and Technology. 2011. Vol. 2, Iss. 2. Pp. 140–146.

7. *Бородина Ю. В.* О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2008. № 1. С. 40–44. Перевод: *Borodina Yu. V.* Synthesis of easily-tested circuits in the case of single-type constant malfunctions at the element outputs // Moscow

University Computational Mathematics and Cybernetics. 2008. Vol. 32, No. 1. Pp. 42–46. DOI: 10.3103/S0278641908010068

8. *Бородина Ю. В.* О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2008. Т. 63, № 5. С. 49–52. Перевод: *Borodina Yu. V.* Circuits admitting single-fault tests of length 1 under constant faults at outputs of elements // Moscow University Mathematics Bulletin. 2008. Vol. 63, No. 5. Pp. 202–204. DOI: 10.3103/S0027132208050069

9. *Бородина Ю. В., Бородин П. А.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа “0” на выходах элементов // Дискретная математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 127–133. Перевод: *Borodina Yu. V., Borodin P. A.* Synthesis of easily testable circuits over the Zhegalkin basis in the case of constant faults of type 0 at outputs of elements. 2010. Vol. 20, No. 4. Pp. 441–449. DOI: 10.1515/dma.2010.027

10. *Коваценко С. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2000. № 2. С. 45–47.

11. *Коляда С. С.* О единичных проверяющих тестах для константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 6. С. 47–49. Перевод: *Kolyada S. S.* Unit checking output tests under constant faults for functional elements // Moscow Univ. Math. Bull. 2011. Vol. 66. Pp. 267–269. DOI: 10.3103/S002713221106009X

12. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. Т. 20, № 2. С. 58–74.

13. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2013. № 4. С. 32–34. Перевод: *Kolyada S. S.* Single fault detection tests for circuits of functional elements // Moscow Univ. Math. Bull. 2013. Vol. 68. pp. 192–193. DOI: 10.3103/S0027132213040049

14. *Попков К. А.* Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 2. С. 53–69. Перевод: *Popkov K. A.* Lower bounds for lengths of single tests for Boolean circuits // Discrete Mathematics and Applications. 2019. Vol. 29, No. 1. Pp. 23–33. DOI: 10.1515/dma-2019-0004

15. *Попков К. А.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Прикладная дискретная математика. 2017. № 38. С. 66–88.

16. *Попков К. А.* Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 3. С. 99–116. Перевод: *Popkov K. A.* Short single tests for circuits with arbitrary stuck-at faults at outputs of gates // Discrete Mathematics and Applications. 2019. Vol. 29, No. 5. Pp. 321–333. DOI: 10.1515/dma-2019-0030

17. *Попков К. А.* О схемах, допускающих короткие единичные проверяющие тесты при произвольных неисправностях функциональных элементов // Прикладная дискретная математика. 2021. № 51. С. 85–100.

18. *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.

19. *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 217–230.

20. *Романов Д. С.* Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2014. Т. 26, вып. 2. С. 100–130. Перевод: *Romanov D. S.* Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length // Discrete Mathematics and Applications. 2014. Vol. 24, No. 4. Pp. 227–251. DOI: 10.1515/dma-2014-0021

21. *Романов Д. С., Романова Е. Ю.* Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискретная математика. 2017. Т. 29, № 4. С. 87–105. Перевод: *Romanov D. S., Romanova E. Yu.* A method of synthesis of irredundant circuits admitting single fault detection tests of constant length // Discrete Mathematics and Applications. 2019. Vol. 29, No. 1. Pp. 35–48. DOI: 10.1515/dma-2019-0005

22. *Темербекова Г. Г., Романов Д. С.* О единичных проверяющих тестах относительно замен элементов на инверторы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Том 162, книга 3. С. 359–366.