

Единственность восстановления коэффициента в модели развития популяции с возрастным и миграционным структурированием

Щеглов А. Ю.^{1,2*}, Шэнь Цин^{1,2}

^{1*} Факультет ВМК, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне,
Guojidaxueyuan st., 1, Shenzhen, 518172, Longgang, China.

² Факультет ВМК, МГУ имени М.В. Ломоносова, Воробьевы
горы, 1, Москва, 119991, Россия.

* Автор(ы), ответственный(ые) за переписку. E-mail(s):
shcheg@cs.msu.ru;
Соавторы: shengqing@smbu.edu.cn;

Аннотация

Рассматривается обратная задача восстановления коэффициента в дифференциальном уравнении модели развития однородной биологической популяции организмов, структурированных по возрасту, с учетом влияния миграционных потоков на жизнедеятельность популяции. Устанавливаются условия, обеспечивающие единственность решения обратной задачи, и предлагается алгоритм для ее численного решения.

Ключевые слова: обратная задача, модель популяционной динамики, возрастное структурирование, миграционные потоки, интегральное уравнение Вольтерра.

Получено редакцией 25.02.2025; внесены авторские правки 18.03.2025;
принята к публикации 07.04.2025

1 Введение

Начало математических исследований популяций с учетом роста организмов можно связать с работой Л.Эйлера [1]. Анализ популяций с возрастным структурированием получил развитие в большом цикле публикаций А.Лотки и А.МакКендрика (см., например, [2], [3]). В настоящее время модели биологических сообществ с возрастным и миграционным структурированием привлекают к себе внимание [4], [5], [6],

и используются при изучении различных микроорганизмов. Обратные задачи для популяционных моделей исследовались в работах [7], [8], [9]. Математическая модель динамики популяции с возрастной структурой и учетом миграции, выбираемая здесь для формализации обратной задачи, была представлена в работах [5] (стр. 2) и [6] (стр. 73):

$$u_x(x, t) + u_t(x, t) + \mu(x) u(x, t) = m(x) \eta(t) - e(x) u(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \int_0^l \beta(\xi) u(\xi, t) d\xi, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

где $Q_T = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, и $\overline{Q}_T$ – замыкание области Q_T . Функция $u(x, t)$ определяет число особей возраста x (или их плотность) в популяции в момент времени t ; функции $\mu(x)$, $m(x)\eta(t)$, $e(x)$ – интенсивности смертности, въездной миграции (иммиграции) и выездной миграции (эмиграции), соответственно; функция $\beta(x)$ – плотность репродуктивности (появления новорожденных у родителя возраста x); функция $\varphi(x)$ – начальное распределение в популяции. Неотрицательность всех функций является естественным ограничением в модели.

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x, t)$ по заданным значениям l , T и заданным функциям $\mu(x)$, $m(x)$, $\eta(t)$, $e(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $x \in [0, l]$ и $t \in [0, T]$.

В рамках обратной задачи при известных значениях $l > 0$ и $T \geq l$ и функциях $\mu(x)$, $e(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $\eta(t)$, $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$, требуется восстановить две функции $m(x)$ и $u(x, t)$ при заданных дополнительных значениях

$$g(t) = u(l, t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

2 Прямая задача и условия ее разрешимости

При выполнении условий

$$\mu(x), m(x), e(x) \in C[0, l], \quad \beta(x), \varphi(x) \in C^1[0, l], \quad \eta(t) \in C^1[0, T], \quad (5)$$

$$\mu(x), m(x), e(x), \beta(x), \varphi(x), \eta(t) \geq 0 \quad \forall x \in [0, l], t \in [0, T], \quad (6)$$

$$\varphi(0) = \int_0^l \beta(s) \varphi(s) ds, \quad (7)$$

аналогично [9], где использовались условия $m(x) \in C^1[0, l]$, $\eta(t) \in C[0, T]$, существует единственное решение $u(x, t) \in C^1(\overline{Q}_T)$ прямой задачи (1)–(3), что следует из представляемых далее построений.

Интегрирование дифференциального уравнения (1) с использованием решений его характеристической системы и с учетом условия (3) дает

[10] формулу для решения прямой задачи (1)–(3) на части области $\overline{Q}_T$ определения искомой функции $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \widehat{u}(x, t) = \varphi(x - t) e^{-\int_{x-t}^x (\mu(s) + e(s)) ds} + \\ + \int_{x-t}^x m(\theta) \eta(\theta + t - x) e^{-\int_{\theta}^x (\mu(s) + e(s)) ds} d\theta, \quad 0 < t < x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

При введении функции $\psi(t) = u(0, t)$, $t \in [0, T]$, и интегрировании уравнения (1) на его характеристиках для остальных точек (x, t) из области $\overline{Q}_T$, для решения $u(x, t)$ имеем [10] формулу

$$u(x, t) = \psi(t - x) e^{-\int_0^x (\mu(s) + e(s)) ds} + \\ + \int_0^x m(\theta) \eta(\theta + t - x) e^{-\int_{\theta}^x (\mu(s) + e(s)) ds} d\theta, \quad 0 < x \leq \min\{l, t\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

в которой функция $\psi(t)$, $t \in [0, T]$, является решением построенных на основе условия (2) и формул (8), (9) интегральных уравнений Вольтерра II рода, одно из которых определяется для $t \in [0, T_1]$, где $T_1 = \min\{l, T\}$, а другое, используемое в случае исходных значений l и T таких, что $T > l$, позволяет получить функцию $\psi(t)$ при $t \in (l, T]$:

$$\psi(t) = \int_0^t K(t, s) \psi(s) ds + H_1(t), \quad 0 \leq t \leq T_1 = \min\{l, T\}, \quad (10)$$

где

$$K(t, s) = \beta(t - s) e^{-\int_0^{t-s} (\mu(\xi) + e(\xi)) d\xi}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T_1, \quad (11)$$

$$H_1(t) = \int_0^t \beta(s) \int_{t-s}^t m(\tau - t + s) \eta(\tau) e^{-\int_{\tau-t+s}^s (\mu(\xi) + e(\xi)) d\xi} d\tau ds + \\ + \int_t^l \beta(s) \widehat{u}(s, t) ds, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad (12)$$

со значениями функции $\widehat{u}(s, t)$, полученными по формуле (8), и

$$\psi(t) = \int_{t-l}^t K(t, s) \psi(s) ds + \\ + \int_{t-l}^t \beta(t - \tau) \int_0^{t-\tau} m(\xi) \eta(\xi + \tau) e^{-\int_{\xi}^{t-\tau} (\mu(s) + e(s)) ds} d\xi d\tau, \quad l < t \leq T. \quad (13)$$

Получаем, что задача (1)–(3) редуцируется (см. теорему 4.2.2 [10]) для $t \in [0, T]$ к линейным интегральным уравнениям Вольтерра II рода (10) и (13) относительно функции $\psi(t)$ с последующим вычислением значений решения $u(x, t)$ по формулам (8), (9). При выполнении условий (5)–(7)

единственное решение $\psi(t) \in C[0, T]$ уравнений (10), (13) существует [11]. Исходя из уравнения (10) при $t = 0$, выполняется условие

$$\psi(0) = \varphi(0) = \int_0^l \beta(s) \varphi(s) ds. \quad (14)$$

Сравнивая при $t = x \in [0, T_1]$ значения функции $u(x, t)$, вычисляемые по формулам (8) и (9), с учетом равенств (14) получаем равенство значений $u(x, t)|_{x=t-0} = u(x, t)|_{x=t+0}$ при $t \in (0, T_1)$. Затем, дифференцируя формулы (8), (9) и сравнивая получаемые значения производных при $x = t \pm 0$, получаем, что при выполнении условий (5)–(7) вычисления по формулам (8) и (9) дают $u(x, t) \in C^1(\overline{Q}_{T_1})$ аналогично [9].

При $T > l$ однозначное решение $u(x, t)$ с значением $t = T_1 = l$ может также использоваться как начальное условие в начально-краевой постановке задачи с аргументом $t \in [l, T_2]$, где $T_2 = \min\{2l, T\}$, аналогичной задаче (1)–(3). Это позволяет установить разрешимость такой задачи (1)–(3) для аргументов $(x, t) \in \overline{Q}_{T_2}$. Затем, продлевая область изменения переменной t последовательно на отрезки $[(j-1)l, jl]$, где $j = 3, 4, \dots, N$ для $N = \arg \max_{j \in \mathbb{N}} ((j-1)l < T \leq jl)$, и при этом $T_N = T$, и устанавливая однозначную разрешимость задачи (1)–(3) последовательно на областях $\overline{Q}_{T_j}$, $j = 2, 3, \dots, N$, получаем за N однотипных шагов единственное решение $u(x, t) \in C^1(\overline{Q}_T)$ задачи (1)–(3) на всей области его определения $\overline{Q}_{T_N} = \overline{Q}_T$.

3 Обратная задача

Определение 1. Решением обратной задачи (1)–(4) пусть называются две функции $m(x)$ и $u(x, t)$ такие, что

$$m(x) \in C[0, l], \quad m(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, l], \quad u(x, t) \in C^1(\overline{Q}_T),$$

при заданных положительных значениях l, T и при заданных функциях $\mu(x), e(x), \beta(x), \varphi(x), \eta(t), g(t)$, удовлетворяющих условиям:

$$g(t) \in C[0, l], \quad \mu(x), e(x) \in C[0, l], \quad \beta(x), \varphi(x) \in C^1[0, l], \quad \eta(t) \in C^1[0, T], \quad (15)$$

$$\mu(x), e(x), \beta(x), \varphi(x), \eta(t), g(\tau) \geq 0 \quad \forall x, \tau \in [0, l], \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

$$\varphi(0) = \int_0^l \beta(s) \varphi(s) ds, \quad g(0) = \varphi(l), \quad 0 < l \leq T, \quad (17)$$

выполняются уравнения (1)–(3) и дополнительное условие (4).

Теорема 1. При известных значениях $l > 0, T > 0$ и заданных функциях $\mu(x), e(x), \beta(x), \varphi(x), \eta(t), g(\tau)$, удовлетворяющих условиям (15)–(17) и

$$g(\tau) \in C^1[0, l], \quad \eta(0) > 0, \quad (18)$$

обратная задача (1)–(4) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть при выполнении условий (15)–(18) пара функций $m_1(x)$, $u_1(x, t)$ и другая пара функций $m_2(x)$, $u_2(x, t)$ являются двумя решениями обратной задачи (1)–(4). Из формулы (8) при $x = l$ и условия (4) следует, что функция $m(x)$ из любого решения обратной задачи удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерра I рода

$$\int_{l-t}^l e^{-\int_{\theta}^l (\mu(s)+e(s)) ds} \eta(\theta+t-l) m(\theta) d\theta = g(t) - \\ - \varphi(l-t) e^{-\int_{l-t}^l (\mu(s)+e(s)) ds}, \quad 0 \leq t \leq l. \quad (19)$$

Дифференцируя равенство (19) по t и производя замену $t = l - \tau$, получаем уравнение

$$m(\tau) = \int_{\tau}^l G(\tau, \theta) m(\theta) d\theta + H_2(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq l, \quad (20)$$

где ядро $G(\tau, \theta)$ и неоднородность $H_2(\theta)$ уравнения (20) имеют вид

$$G(\tau, \theta) = \frac{1}{\eta(0)} \eta'(\theta - \tau) e^{\int_{\tau}^{\theta} (\mu(s)+e(s)) ds}, \quad 0 \leq \tau \leq \theta \leq l, \quad (21)$$

$$H_2(\tau) = \frac{\varphi'(\tau) + \varphi(\tau)(\mu(\tau) + e(\tau))}{\eta(0)} + \frac{g'(l-\tau)}{\eta(0)} e^{\int_{\tau}^l (\mu(s)+e(s)) ds}, \quad 0 \leq \tau \leq l. \quad (22)$$

При выполнении условий (15)–(18) теоремы определяемые формулами (21), (22) функции $G(\tau, \theta)$ и $H_2(\tau)$ являются непрерывными на областях их определения. В силу этого линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода (20) имеет [11] единственное решение $m(x) \in C[0, l]$. Соответственно, функции $m_1(x)$ и $m_2(x)$ из различных решений обратной задачи (1)–(4) совпадают: $m_1(x) \equiv m_2(x) \equiv m(x)$ при $x \in [0, l]$. Отсюда в силу выполнения условий (5)–(7) существует единственное решение прямой задачи (1)–(3) $u(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T)$. Тогда и решения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ задачи (1)–(3) совпадают: $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t) \equiv u(x, t)$ на множестве $\bar{Q}_T$. Это опровергает сделанное в начале доказательства предположение о существовании двух различных решений обратной задачи (1)–(4). $\square$

4 Алгоритм численного решения обратной задачи

Для приближенного решения обратной задачи (1)–(4) восстановления функций $m(s)$, $u(x, t)$, при заданных исходных значениях l , T , при известных функциях $\mu(x)$, $e(x)$, $\beta(x)$, $\varphi(x)$, $\eta(t)$, удовлетворяющих условиям определения, и при известных вместо функции $g(t)$ значениях уровня погрешности $\delta > 0$ и функции $g_{\delta}(t) \in C[0, l]$, такой, что

$$\|g_{\delta}(t) - g(t)\|_{C[0, l]} \leq \delta,$$

могут быть использованы общие регуляризирующие алгоритмы [12].

Помимо общих методов регуляризации с учетом того, что полученное решение обратной задачи (1)–(4) эквивалентно по существу решению интегрального уравнения Вольтерра II рода (20) или интегрального уравнения Вольтерра I рода (19), редуцируемых из условий обратной задачи, для решения обратной задачи можно использовать два следующих алгоритма, сохраняющих эволюционную особенность уравнений (19), (20).

Во-первых, для восстановления функции $m(x)$ может быть использован итерационный алгоритм, основанный на решении линейного интегрального уравнения Вольтерра II рода (20) с получением элементов равномерно сходящейся [11] к функции $m(x)$ последовательности $\{m^{(n)}(x)\}$ по формируемой на основе уравнения (20) рекуррентной формуле

$$m^{(n+1)}(x) = \int_x^l G(x, \theta) m^{(n)}(\theta) d\theta + H_2^\delta(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

с начальным элементом

$$m^{(1)}(x) = H_2^\delta(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (24)$$

Функция $G(x, \theta)$ определяется формулой (21), а функция $H_2^\delta(x)$, исходя из формулы (22) для значений функции $H_2(x)$, включающей теперь использование данных с погрешностью, имеет вид

$$H_2^\delta(x) = \frac{\varphi'(x) + \varphi(x)(\mu(x) + e(x))}{\eta(0)} + \frac{g'_\delta(l-x)}{\eta(0)} e^{\int_x^l (\mu(s) + e(s)) ds}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Некорректность задачи восстановления функции $m(x)$ при использовании итерационного алгоритма (23), (24) связана лишь с необходимостью предварительного численного дифференцирования [12] приближенно заданной на отрезке $[0, T]$ непрерывной функции $g_\delta(t)$ для получения значений $g'_\delta(t)$. Численное дифференцирование непрерывной функции $g_\delta(t)$ представляет собой решение простой, подробно исследованной в литературе и детально алгоритмизированной некорректной задачи [10], [12], [13].

После получения приближенного решения $m_\delta(x)$ уравнения (20) при помощи алгоритма (23), (24), завершающим шагом в решении обратной задачи является восстановление значений функции $u(x, t)$ – решения прямой задачи (1)–(3) с приближенно известными, полученными из уравнения (20) значениями функции $m_\delta(x)$. При этом, исходя из формулы (8), приближенные значения функции $u(x, t)$ для аргументов (x, t) из области, в которой $0 < t < x \leq l$, рассчитываются по формуле

$$u^\delta(x, t) = \hat{u}^\delta(x, t) = \varphi(x-t) e^{-\int_{x-t}^x (\mu(s) + e(s)) ds} +$$

$$+ \int_{x-t}^x m_\delta(\theta) \eta(\theta + t - x) e^{-\int_\theta^x (\mu(s) + e(s)) ds} d\theta, \quad 0 < t < x \leq l. \quad (25)$$

Затем приближенные значения функции $u(x, t)$ для остальных точек области $(x, t) \in Q_T$ могут быть получены опять с помощью итерационного приближения решения линейных интегральных уравнений Вольтерра II рода (10), (13) относительно функции $\psi(t)$, на основе рекуррентных формул, получаемых из уравнений (10), (13):

$$\begin{aligned} \psi^{(n+1)}(t) &= \int_0^t K(t, s) \psi^{(n)}(s) ds + \\ &+ \int_0^t \beta(s) \int_0^s m_\delta(\sigma) \eta(\sigma - s + t) e^{-\int_\sigma^s (\mu(\xi) + e(\xi)) d\xi} d\sigma ds + \\ &+ \int_t^l \beta(s) \widehat{u}^\delta(s, t) ds, \quad 0 \leq t \leq l, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(n+1)}(t) &= \int_0^t K(t, s) \psi^{(n)}(s) ds + \\ &+ \int_0^t \beta(s) \int_0^s m_\delta(\sigma) \eta(\sigma - s + t) e^{-\int_\sigma^s (\mu(\xi) + e(\xi)) d\xi} d\sigma ds, \quad l < t \leq T, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (27)$$

с начальным элементом последовательности $\{\psi^{(n)}(t)\}$, определяемым формулами

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(t) &= \varphi(0) \int_0^t K(t, s) ds + \\ &+ \int_0^t \beta(s) \int_0^s m_\delta(\sigma) \eta(\sigma - s + t) e^{-\int_\sigma^s (\mu(\xi) + e(\xi)) d\xi} d\sigma ds + \\ &+ \int_t^l \beta(s) \widehat{u}^\delta(s, t) ds, \quad 0 \leq t \leq l, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(t) &= \varphi(0) \int_0^t K(t, s) ds + \\ &+ \int_0^t \beta(s) \int_0^s m_\delta(\sigma) \eta(\sigma - s + t) e^{-\int_\sigma^s (\mu(\xi) + e(\xi)) d\xi} d\sigma ds, \quad l < t \leq T, \end{aligned} \quad (29)$$

где функция $K(t, s)$ определяется формулой (11). Получаемая по рекуррентным формулам (26), (27) последовательность $\{\psi^{(n)}(t)\}$ равномерно сходится [11] на отрезке $[0, T]$, к единственному решению $\psi_\delta(t)$ линейных интегральных уравнений Вольтерра II рода (10), (13), в правые части которых подставлена функция $m_\delta(x)$ на место значений $m(x)$.

С определенными с помощью итерационной процедуры (26)–(29) значениями $\psi_\delta(t)$, после вычисления значений $u^\delta(x, t) = \widehat{u}^\delta(x, t)$ по формуле (25), восстановление функции $u^\delta(x, t)$ в оставшихся точках области $\overline{Q}_T$ производится на основе уравнения (9) по формуле

$$u^{(\delta)}(x, t) = \psi_\delta(t - x) e^{-\int_0^x (\mu(s) + e(s)) ds} +$$

$$+ \int_0^x \eta(\theta + t - x) e^{-\int_\theta^x (\mu(s) + e(s)) ds} m_\delta(\theta) d\theta, \quad 0 < x \leq \min\{l, T\}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (30)$$

Вводимая в задачу (1)–(4), в систему уравнений (10), (13) и в итерационный алгоритм (26)–(29) функция $\psi(t)$ и ее приближения носят вспомогательный, технический характер при решении обратной задачи.

Второй вариант получения приближенных значений функции $m(x)$ может быть связан с использованием алгоритмов из работ [14], [15], [16], [17], ориентированных на решение именно линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода таких, каким в данном случае является уравнение (19). Предлагаемые в этих работах алгоритмы основаны на различных подходах к получению устойчивых приближенных решений интегральных уравнений Вольтерра I рода за счет введения регуляризирующих параметров, согласуемых с уровнем погрешности δ исходных данных.

Так, например, в работе [16] для решения уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^x B(x, \xi) f(\xi) d\xi = y(x), \quad x \in [0, l], \quad (31)$$

у которого предполагается существование единственного неизвестного решения $f(x) \in C^1[0, l]$, с повторяющим структуру уравнения (19) ядром

$$B(x, \xi) \in C^{2,0}(\Delta_l), \quad B(x, x) = 1 \quad \forall x \in [0, l], \quad (32)$$

где $\Delta_l = \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x \leq l\}$, и с заданными вместо неизвестной в правой части уравнения (31) функции $y(x)$ известного значения уровня погрешности $\delta > 0$ и известной функции $y_\delta(x)$, может быть использован, как наиболее показательный и простой по структуре, предложенный в работе [16] переход от уравнения (31) к решению интегрального уравнения Вольтерра II рода с параметром $\alpha > 0$ при искомой функции $f_\alpha(x)$ в дополнительно вводимом в уравнение (31) внеинтегральном слагаемом:

$$\alpha f_\alpha(x) + \int_0^x B(x, \xi) f_\alpha(\xi) d\xi = y_\delta(x), \quad x \in [0, l], \quad (33)$$

где

$$\|y_\delta(x) - y(x)\|_{C[0, l]} \leq \delta.$$

В этом случае сходимость решения $f_{\alpha(\delta)}(x)$ уравнения (33) к точному решению $f(x)$ уравнения (31) обуславливается [16] оценкой

$$\|f_{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\|_{C[0, l]} < k \cdot \left(\alpha(\delta) + \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \right),$$

при $k = \text{const} > 0$, с согласованием уровня погрешности $\delta > 0$ задания исходных данных со значением параметра $\alpha(\delta) > 0$ в уравнении (33) в

форме выполнения при $\delta \rightarrow 0$ условий

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0.$$

В другой работе [15] для получения регуляризованного приближения к точному решению $f(x)$ уравнения (31) при выполнении условий

$$B(x, \xi) \in C^{1,0}(\Delta_l), \quad \left| \min_{(x, \xi) \in \Delta_l} B(x, \xi) \right| = b > 0, \quad \left| \max_{(x, t) \in \Delta_l} B_x(x, \xi) \right| = B > 0, \quad (34)$$

предлагается использовать разностную аппроксимацию функции $f(x)$ на равномерной сетке на отрезке $[0, l]$ с решением системы линейных алгебраических уравнений относительно вектора значений $f_h(x_{i-1/2})$:

$$h \sum_{j=1}^i B(x_i, x_{j-1/2}) f_h(x_{j-1/2}) = y_\delta(x_i), \quad x_i = ih, \quad x_{i-1/2} = ih - \frac{h}{2}, \quad h = \frac{l}{n}, \quad (35)$$

при $i = 1, 2, \dots, n$. Решение $f_{h(\delta)}(x_{j-1/2})$ линейной алгебраической системы уравнений (35) может рассматриваться [15] в виде аппроксимации значений точного решения $f(x)$ уравнения (31) в точках сетки $x = x_{i-1/2}$. При этом

$$\|f_{h(\delta)}(x_{i-1/2}) - f(x_{i-1/2})\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0,$$

при $\delta \rightarrow 0$ с согласованием уровня погрешности $\delta > 0$ задания функции $y_\delta(x)$ со значением параметра $h(\delta) > 0$ в системе (33) с выполнением [15] при $\delta \rightarrow 0$ условий

$$h(\delta) \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{(h(\delta))^3} = A = \text{const.}$$

Достаточно простые по структуре уравнение (33) и система (35) при выполнении на ядро $B(x, \xi)$ условий (32) или (34) соответственно, удобны для регуляризованного приближенного решения уравнения (31).

После получения приближенного решения $m_\delta(x)$, $x \in [0, l]$ уравнения (19) путем его сведения к уравнению вида (33) или к системе уравнений вида (35) необходимое для завершения решения обратной задачи (1)–(4) вычисление значений функции $u^\delta(x, t)$ может быть осуществлено итерационной процедурой (26)–(29) с формулами (25), (30).

Подводя итог, можно заметить, что первый подход с восстановлением функции $m(x)$ в обратной задаче (1)–(4) итерационным методом (23), (24) решения уравнения II рода (20) представляется более простым по сравнению с приближенным решением уравнения I рода (19) введением регуляризирующего параметра в рамках второго подхода с переходом от уравнения (19) к уравнению вида (33) из [16] или к системе вида (35) из [15]. Это можно объяснить тем, что для решения уравнения (20) в

рамках первого подхода требуется лишь численно продифференцировать функцию $g_\delta(t)$. В литературе представлены и подробно детализированы различные виды вычислительных схем численного дифференцирования: с использованием регуляризации функционала Тихонова [10], или разностным дифференцированием [12], или сплайн-аппроксимацией [18], [19], [20], или одним из серии специальных алгоритмов [13], или методами из работ [15], [16] при $B(x, \xi) \equiv 1$ в уравнении (31). Зачастую подробное исследование предлагаемых методов в перечисленных источниках сопровождается представлением качественных программ для компьютерных вычислений и примерами решений. В то время как при решении уравнения I рода (19) с ядром более сложного вида, чем $B(x, \xi) \equiv 1$, по второй схеме потребуются реализация по крайней мере одного из регуляризирующих, ориентированных на конкретное ядро $B(x, \xi) \neq 1$, алгоритмов из числа предложенных в работах [16], [15] или схожих с ними из статей [14], [17] с согласованием регуляризирующего параметра в этих алгоритмах с уровнем погрешности δ задания исходных данных в обратной задаче (1)–(4).

5 Авторские декларации

5.1 Финансирование

Работа выполнена при частичной поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

5.2 Конфликт интересов

Отсутствует.

5.3 Вклад авторов

А. Ю. Щеглов – постановка задач, исследование решений, написание текста статьи.

Шэнь Цин – постановка задач, исследование решений, написание текста статьи.

Список литературы

- [1] *Euler L. Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humaine // Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres.* — 1760. — Vol. 16. — Pp. 144–164.
- [2] *Lotka A. Elements of mathematical biology.* — N.-Y.: Dover Publ., 1924.

- [3] *McKendrick A. G.* Application of mathematics to medical problems // *Proc. Edinb. Math. Soc.* — 1926. — Vol. 44. — Pp. 98–130.
- [4] *Espenshade T. J., Bouvier L. F., Arthur W. B.* Immigration and the stable population model // *Demography.* — 1982. — Vol. 19, no. 1. — Pp. 125–133.
- [5] *N. Bacaer.* The asymptotic behavior of the McKendrick equation with immigration // *Math. Popul. Stud.* — 2003. — Vol. 10. — Pp. 1–20.
- [6] *Iannelli M., Milner F.* The basic approach to age-structured population dynamics. Models, methods and numerics. — Cham: Springer, 2017.
- [7] *Denisov A. M., Makeev A. S.* Iterative methods for solving an inverse problem for a population model // *J. Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2004. — Vol. 44, no. 8. — Pp. 1404–1413.
- [8] *Perthame B., Zubelli J.* On the inverse problem for a size-structured population model // *Inverse Problems.* — 2007. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 1037–1052.
- [9] *Shcheglov A. Yu., Netessov S. V.* An inverse problem for an age-structured population dynamics model with migration flows // *Numer. Analys. Appl.* — 2024. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 93–98.
- [10] *Денисов А. М., Разгулин А. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МАКС Пресс, МГУ, 2009.
- [11] *Polyanin A. D., Manzhirov A. V.* Handbook of integral equations. — New York, Washington, Boca Raton, London: CRC Press, 1998.
- [12] *Денисов А. М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1994.
- [13] *Демидович В. Б.* Восстановление функции и ее производных по экспериментальной информации // *Вычислительные методы и программирование.* — 1967. — Т. 8, № 4. — С. 96–102.
- [14] *Sergeev V. O.* Regularization of the Volterra equation of the first kind // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* — 1971. — Vol. 197, no. 3. — Pp. 531–534.
- [15] *Апарцин А. С., Бакушинский А. Б.* Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // *Дифференциальные и интегральные уравнения.* — 1972. — № 1. — С. 120–128.

- [16] *Denisov A. M.* On approximate solution of Volterra equation of the first kind // *Comp. Math. and Math. Physics.* — 1975. — Vol. 15, no. 4. — Pp. 237–239.
- [17] *Magnitskii N. A.* A method of regularizing Volterra equations of the first kind // *Comp. Math. and Math. Physics.* — 1975. — Vol. 15, no. 5. — Pp. 221–228.
- [18] *Гребенников А. И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1983.
- [19] *Dmitriev V. I., Ingtem J. G.* Numerical differentiation using spline functions // *Comput. Math. Model.* — 2012. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 312–318.
- [20] *Dmitriev V. I., Ingtem J. G.* Using spline approximation to differentiate a function defined with errors // *Comput. Math. Model.* — 2013. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 65–72.