

Г. Темербекова¹, Д. С. Романов²

О ДЛИНЕ ЕДИНИЧНЫХ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМЕН ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ИНВЕРТОРЫ*

Введение и основные определения

В настоящей работе приводятся верхние оценки длин минимальных единичных проверяющих тестов относительно замен элементов на инверторы в схемах из функциональных элементов (СФЭ) над произвольными конечными полными в P_2 базисами. Статья является продолжением исследования, начатого авторами в [23, 24].

Приведем базовые определения в соответствии с [24]. Пусть имеется СФЭ S , реализующая булеву функцию $f(\vec{x}^n)$, где $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. На схему S мог подействовать источник неисправностей U , способный преобразовать схему S в одну из схем некоторого конечного множества $H = H(U, S)$, содержащего и схему S . При воздействии на S источника неисправностей U один или несколько элементов схемы S переходят в неисправное состояние. При этом схема S вместо исходной функции $f(\vec{x}^n)$ будет реализовывать некоторую, возможно, неравную f , булеву функцию $g(\vec{x}^n)$. Полученная функция $g(\vec{x}^n)$ называется функцией неисправности схемы S .

Проверяющим тестом для схемы S относительно источника неисправностей U называется всякое такое множество T наборов значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n , что для любой неравной $f(\vec{x}^n)$ функции неисправности $g(\vec{x}^n)$ схемы S в множестве T найдётся набор α , для которого имеет место неравенство $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Число наборов в T называется длиной $L(T)$ теста T . Тест называется единичным, если в

¹Аспирантка факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: gulgaisha93@mail.ru.

²Доцент факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: romanov@cs.msu.ru.

*Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621, а также проекта «Математические модели глобального информационно-энергетического баланса на основе циклов управления природно-антропогенными системами (на примере системы “загрязнение среды – здоровье населения”))» (код FSZZ-2020-0002).

схеме может произойти не более чем одна поломка в не более чем одном элементе схемы. *Нетривиальной* будем называть неисправность СФЭ, при которой хотя бы на одном входном наборе меняется (по сравнению со случаем отсутствия неисправностей) значение на выходе хотя бы одного элемента в схеме. Схема называется *неизбыточной*, если всякая нетривиальная неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, неравной исходной.

Пусть B — произвольный конечный схемный базис, обладающий функциональной полнотой в P_2 , U_1 — источник одиночных неисправностей элементов, S — СФЭ над базисом B , а T — единичный проверяющий тест для схемы S относительно источника неисправностей U_1 . Введём следующие обозначения: $L(T)$ — длина теста T ; $L^{detect}(U_1, S) = \min L(T)$, где минимум берётся по всем единичным проверяющим тестам T для схемы S ; $L_B^{detect}(U_1, f) = \min L(S)$, где минимум берётся по всем избыточным схемам S в базисе B , реализующим функцию $f(\bar{x}^n)$; $L_B^{detect}(U_1, n) = \max L_B^{detect}(U_1, f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных, для которых определено значение $L_B^{detect}(U_1, f)$. Функция $L_B^{detect}(U_1, n)$ называется *функцией Шеннона* длины единичного проверяющего теста относительно источника неисправностей U_1 .

Расширением \hat{B} множества булевых функций B называется множество тех и только тех булевых функций, которые могут быть получены из функций множества B переименованиями и отождествлениями переменных.

В данной работе изучаются одиночные неисправности типа «закорачивание входа элемента на его выход с инвертированием», представляющий собой *замену функционального элемента на инвертор*, реализующий отрицание одного из входов этого элемента. Источник таких одиночных неисправностей будем обозначать через $O_1^{r(-)}$. Источник произвольных одиночных замен элементов на элементы с теми же входами обозначим через O_1^r .

В [23] доказано, что $L_{B_1}^{detect}(O_1^{r(-)}, n) = 1$, $L_{B_0}^{detect}(O_1^{r(-)}, n) \leq 2$ ($B_0 = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$, $B_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$), в [23] получены верхние оценки величины $L_B^{detect}(O_1^{r(-)}, n)$: 3 (соответственно 4) для полных базисов B , расширение которых содержит одну из функций xu или $x \vee y$ (соответственно $x\bar{u}$ или $x \vee \bar{y}$). Сжатый обзор иных относительно близких к тематике статьи работ [5, 19, 11, 12, 13, 7, 8, 9, 21, 22, 14, 15, 16, 20, 10, 17, 1, 2, 3, 4, 6] имеется в [24].

Формулировки и доказательства основных результатов

В данном разделе для любого полного в P_2 базиса B будет установлена верхняя константная оценка величины $L_{\{x|y\}}^{detect}(O_1^{r(-)}, n)$.

Теорема 1. При любом натуральном n имеет место неравенство $L_{\{x|y\}}^{detect}(O_1^{r(-)}, n) \leq 12$.

Доказательство. Для обнаружения обеих возможных неисправностей в схеме вида $x|y$ требуются наборы $(0, 1), (1, 0)$. При отождествлении входов элемента «штрих Шеффера» получается абсолютно надежный инвертор (не подверженный действию нетривиальных неисправностей).

Для дальнейших построений потребуются подсхемы, реализующие линейные функции $x \oplus y, x \sim y$. Рассмотрим схему S^\oplus , изображенную на рис. 1 (направления дуг и ориентация элементов — слева направо). Непосредственно проверяется, что множество наборов $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ является единичным проверяющим тестом для этой схемы. Удалением некоторых инверторов среди двух верхних и нижнего в схеме S^\oplus для любой тройки различных наборов из $\{0, 1\}^2$ и для любой из функций $x \oplus y, x \sim y$ можно получить схему, реализующую выбранную функцию и обладающую единичным проверяющим тестом, совпадающим с этой тройкой наборов; множество всех таких схем обозначим через \mathcal{S}^\oplus . В дальнейшем под корректным подбором подсхемы из множества \mathcal{S}^\oplus (для некоторого фиксированного множества T' входных наборов схемы) будет подразумеваться всякое такое указание подсхемы из \mathcal{S}^\oplus , что ею реализуется требуемая функция, а на ее входах при подаче на входы схемы всех наборов из множества T' возникает не менее трех различных наборов, образующих единичный проверяющий тест для этой подсхемы относительно замен элементов на инверторы.

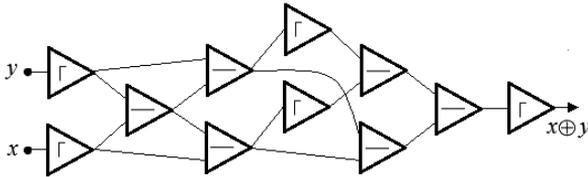


Рис. 1. Схема S^\oplus .

Пусть $f(\vec{x}^n)$ — произвольная булева функция. Требуется сконструировать в базисе $\{x|y\}$ неизбыточную схему S_f , реализующую f и допускающую единичный проверяющий тест длины не более 12 относительно замен элементов на инверторы.

Если функция f существенно зависит не более чем от 2 переменных, то построение требуемой схемы S_f не составляет труда и здесь не приводится. Далее будем считать, что функция f существенно зависит от всех своих n переменных и при этом $n \geq 3$. Поскольку f существенно зависит не менее чем от 3 переменных, по крайней мере

одна из четырех подфункций вида $f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \dots, x_n)$ ($\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}$) тождественно не равна константе.

Далее рассмотрим несколько случаев.

Случай 1 (основной). Для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}$ подфункция $f_{\sigma_1 \sigma_2}(x_3, \dots, x_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \dots, x_n)$ функции f обращается в единицу хотя бы на одном наборе.

Разложим $f(x_1, \dots, x_n)$ по первым двум переменным:

$$f = \bar{x}_1 \bar{x}_2 f_{00}^{a_{00}} \oplus \bar{x}_1 x_2 f_{01}^{a_{01}} \oplus x_1 \bar{x}_2 f_{10}^{a_{10}} \oplus x_1 x_2 f_{11}^{a_{11}} \oplus \oplus \bar{a}_{00} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \oplus \bar{a}_{01} \bar{x}_1 x_2 \oplus \bar{a}_{10} x_1 \bar{x}_2 \oplus \bar{a}_{11} x_1 x_2, \quad (1)$$

где при любых $\sigma_1, \sigma_2 \in \{0, 1\}$ выполнено равенство $a_{\sigma_1 \sigma_2} = f(\sigma_1, \sigma_2, 0, \dots, 0)$. Учет конкретных значений коэффициентов в (1) будет приводить к удалению в схемах тождественно равных 1 множителей или тождественно равных 0 слагаемых. Отметим, что если какая-то из функций $f_{\sigma_1 \sigma_2}^{a_{\sigma_1 \sigma_2}}$ есть константа, то правая часть в (1) естественным образом упрощается (пропадет множитель или слагаемое), а моделирующая функцию $f_{\sigma_1 \sigma_2}^{a_{\sigma_1 \sigma_2}}$ подсхема окажется пустой. В иных случаях функция $f_{\sigma_1 \sigma_2}^{a_{\sigma_1 \sigma_2}}$ принимает оба значения и будет моделироваться подсхемой вида $S^{\sigma_1 \sigma_2}$ (устройство подсхемы будет описано ниже), реализующей функцию $g_{\sigma_1 \sigma_2}(\bar{x}^n)$ такую, что $f_{\sigma_1 \sigma_2}^{a_{\sigma_1 \sigma_2}}(x_3, \dots, x_n) = g_{\sigma_1 \sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \dots, x_n)$.

Допустим, полином Жегалкина функции $f_{\sigma_1 \sigma_2}$ приводится к виду

$$f_{\sigma_1 \sigma_2} = K_1^{\sigma_1 \sigma_2} \oplus K_2^{\sigma_1 \sigma_2} \oplus \dots \oplus K_{t_{\sigma_1 \sigma_2}}^{\sigma_1 \sigma_2} \oplus a_{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (2)$$

где $K_1^{\sigma_1 \sigma_2}, K_2^{\sigma_1 \sigma_2}, \dots, K_{t_{\sigma_1 \sigma_2}}^{\sigma_1 \sigma_2}$ — попарно неэквивалентные монотонные конъюнкции, $a_{\sigma_1 \sigma_2} \in \{0, 1\}$. Пусть $K_1^{\sigma_1 \sigma_2}$ — конъюнкция минимального положительного ранга среди всех слагаемых в (2). Конъюнкцию $K_i^{\sigma_1 \sigma_2} = x_{i,1}^{(\sigma_1 \sigma_2)} x_{i,2}^{(\sigma_1 \sigma_2)} \dots x_{i,r_i}^{(\sigma_1 \sigma_2)}$ ранга $r_i^{(\sigma_1 \sigma_2)} > 1$, $i = \overline{1, t_{\sigma_1 \sigma_2}}$

$(\{x_{i,1}^{(\sigma_1 \sigma_2)}, x_{i,2}^{(\sigma_1 \sigma_2)}, \dots, x_{i,r_i}^{(\sigma_1 \sigma_2)}\} \subseteq \{x_3, \dots, x_n\})$ будем моделировать подсхемой

$C_i^{\sigma_1 \sigma_2}$, структура которой соответствует формуле

$$(((\dots(((x_1^{\sigma_1} | x_{i,1}^{(\sigma_1 \sigma_2)}) \oplus x_2^{\sigma_2}) | x_{i,2}^{(\sigma_1 \sigma_2)}) \oplus x_2^{\sigma_2}) | \dots) | x_{i,r_i}^{(\sigma_1 \sigma_2)}) \oplus x_2^{\sigma_2}, \quad (3)$$

оказывающейся при $x_1 = \sigma_1$ и $x_2 = \sigma_2$ эквивалентной $K_i^{\sigma_1 \sigma_2}$. Любое выражение вида x_j^σ при $\sigma = 0$ в (3) приобретает вид \bar{x}_j (при этом для каждого вхождения \bar{x}_j в формулу (3) в подсхеме $C_i^{\sigma_1 \sigma_2}$ используется «собственный» инвертор). Всякое сложение по модулю 2, встречающееся в формуле (3), реализуется в подсхеме $C_i^{\sigma_1 \sigma_2}$ с помощью некоторой подсхемы из множества \mathcal{S}^\oplus .

В таблицах 1, 2 приведены все возможные значения, появляющиеся на входах подсхем из \mathcal{S}^\oplus и на входах не лежащих в этих подсхемах элементов «штрих Шеффера» во всех подсхемах $C_i^{\sigma_1 \sigma_2}$ на восьми наборах

значений переменных вида $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ (обозначим множество из этих восьми наборов через T_1).

Табл. 1

$x_1x_2x_3 \dots x_n$	В подсхемах C_i^{11} :					В подсхемах C_i^{10} :				
		\oplus		\oplus			\oplus		\oplus	
000...0	00	10	10	10	10	00	11	00	11	00
001...1	01	10	11	00	01	01	11	01	11	01
010...0	00	11	00	11	00	00	10	10	10	10
011...1	01	11	01	11	01	01	10	11	00	01
100...0	10	10	10	10	10	10	11	00	11	00
101...1	11	00	01	10	11	11	01	11	01	11
110...0	10	11	00	11	00	10	10	10	10	10
111...1	11	01	11	01	11	11	00	01	10	11

Табл. 2

$x_1x_2x_3 \dots x_n$	В подсхемах C_i^{01} :					В подсхемах C_i^{00} :				
		\oplus		\oplus			\oplus		\oplus	
000...0	10	10	10	10	10	10	11	00	11	00
001...1	11	00	01	10	11	11	01	11	01	11
010...0	10	11	00	11	00	10	10	10	10	10
011...1	11	01	11	01	11	11	00	01	10	11
100...0	00	10	10	10	10	00	11	00	11	00
101...1	01	10	11	00	01	01	11	01	11	01
110...0	00	11	00	11	00	00	10	10	10	10
111...1	01	11	01	11	01	01	10	11	00	01

Как видно из таблиц, на входах каждой подсхемы $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$ при этом возникают по крайней мере 3 разных набора, а на входах каждого элемента «штрих Шеффера» возникают оба набора (0,1) и (1,0), а, значит, всевозможные одиночные неисправности элементов в подсхемах $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$ вызывают на этих восьми наборах изменения значений на выходах выходных элементов подсхем сложения (отметим, что тут можно было ограничиться и четырьмя наборами значений переменных, например, (0,0,0,...,0), (0,0,1,...,1), (1,0,1,...,1), (1,1,0,...,0)). Выбор вида каждой конкретной подсхемы из множества \mathcal{S}^\oplus и здесь (внутри $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$), и далее оказывается обусловленным видом какой-нибудь тройки различных наборов, возникающих на входах этой подсхемы на рассматриваемом множестве наборов значений всех переменных (скажем, для подсхем внутри $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$ достаточно рассмотреть наборы (0,0,0,...,0), (0,0,1,...,1), (1,0,1,...,1), (1,1,0,...,0)). В случае, если ранг $r_i^{(\sigma_1\sigma_2)}$ конъюнкции $K_i^{\sigma_1\sigma_2}$ равен 1, подсхема $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$ состоит только из входной вершины той единственной переменной, которая встречается в данной конъюнкции. Последнюю в порядке движения по дугам (и максимальную по глубине)

вершину в подсхеме $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$ всегда будем считать выходной вершиной $c_i^{\sigma_1\sigma_2}$ этой подсхемы. При $t_{\sigma_1\sigma_2} > 1$ построим цепочку $C^{\sigma_1\sigma_2}$ из $t_{\sigma_1\sigma_2} - 1$ подсхем сложения по модулю 2 (из множества \mathcal{S}^\oplus ; вид конкретных подсхем удастся определить позже) и одного оконечного инвертора: на первый вход каждой подсхемы (из \mathcal{S}^\oplus), начиная со второй, подается выход предыдущей подсхемы, выход последней подсхемы (из \mathcal{S}^\oplus) подается на вход оконечного инвертора цепочки, к первому и второму входам первой подсхемы, ко второму входу второй подсхемы, и т. д., ко второму входу $(t_{\sigma_1\sigma_2} - 1)$ -й подсхемы проводятся дуги от вершин $c_1^{\sigma_1\sigma_2}$, $c_2^{\sigma_1\sigma_2}$, $c_3^{\sigma_1\sigma_2}$, и т. д., $c_{t_{\sigma_1\sigma_2}}^{\sigma_1\sigma_2}$ соответственно. Оконечный инвертор считается выходным элементом построенной подсхемы $S^{\sigma_1\sigma_2}$. Пусть теперь $t_{\sigma_1\sigma_2} = 1$, тогда подсхема $S^{\sigma_1\sigma_2}$ получается из $C_1^{\sigma_1\sigma_2}$ привешиванием к выходу последней нового инвертора.

Пусть $\tilde{\beta}^{(\sigma_1\sigma_2)} = (\sigma_1, \sigma_2, \beta_3^{(\sigma_1\sigma_2)}, \dots, \beta_n^{(\sigma_1\sigma_2)})$ — такой набор, в котором $\beta_j^{(\sigma_1\sigma_2)} = 1$ тогда и только тогда, когда переменная x_j встречается в $K_1^{\sigma_1\sigma_2}$. (Положим $T_2 = \{\tilde{\beta}^{(00)}, \tilde{\beta}^{(01)}, \tilde{\beta}^{(10)}, \tilde{\beta}^{(11)}\}$). Легко видеть, что на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, 0, \dots, 0)$, $(\sigma_1, \sigma_2, 1, \dots, 1)$ и $\tilde{\beta}^{(\sigma_1\sigma_2)}$ на входах каждой подсхемы из \mathcal{S}^\oplus в $C^{\sigma_1\sigma_2}$ возникают три разных набора, по которым (как по тесту для подсхемы) определяется вид каждой подсхемы из \mathcal{S}^\oplus в $C^{\sigma_1\sigma_2}$. Будем считать, что подсхема $S^{\sigma_1\sigma_2}$ реализует функцию $g_{\sigma_1\sigma_2}(\tilde{x}^n)$. Перепишем теперь равенство (1) в виде

$$f = (\overline{(\bar{x}_1 | \bar{x}_2)} | g_{00}) \oplus (\overline{(\bar{x}_1 | x_2)} | g_{01}) \oplus (\overline{(x_1 | \bar{x}_2)} | g_{10}) \oplus (\overline{(x_1 | x_2)} | g_{11}) \oplus \bar{a}_{00}(\overline{(\bar{x}_1 | x_2)}) \oplus \bar{a}_{01}(\overline{(x_1 | \bar{x}_2)}) \oplus \bar{a}_{10}(\overline{(x_1 | \bar{x}_2)}) \oplus \bar{a}_{11}(\overline{(x_1 | x_2)}) \quad (4)$$

и построим в соответствии с (4) реализующую функцию f схему \hat{S} , используя для имплементации $g_{\sigma_1\sigma_2}$ подсхему $S^{\sigma_1\sigma_2}$ и предполагая брать для сложений по модулю 2 схемы из \mathcal{S}^\oplus (порядок выполнения сложений в правой части (4) и всюду далее — слева направо, нулевые слагаемые и единичные множители не учитываются). Нетрудно видеть, что неисправности всех не функционирующих как инверторы элементов «штрих Шеффера» из \hat{S} , лежащих вне подсхем из \mathcal{S}^\oplus и вне подсхем $S^{\sigma_1\sigma_2}$, приведут к возникновению неверных значений на выходах этих элементов на наборах $\tilde{\beta}^{(00)}$, $\tilde{\beta}^{(01)}$, $\tilde{\beta}^{(10)}$, $\tilde{\beta}^{(11)}$, $(0, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(1, 1, 0, \dots, 0)$. Прямым перебором устанавливается, что при любых значениях коэффициентов \bar{a}_{00} , \bar{a}_{01} , \bar{a}_{10} , \bar{a}_{11} при сохранении порядка следования соответствующих им ненулевых слагаемых в (4) на наборах $\tilde{\beta}^{(00)}$, $(0, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(1, 1, 0, \dots, 0)$ на входах всех подсхем, соответствующих сложениям по модулю 2 в (4), возникают тройки различных наборов, поэтому корректный подбор подсхем из \mathcal{S}^\oplus для реализации сложений по модулю 2 оказывается возможным. Схема \hat{S} , реализующая f , построена, ее единственный элемент наибольшей глубины считается выходным.

Построим три копии схемы \hat{S} , именно, $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$, у которых общими являются лишь входы; выходы этих схем обозначим через s_1, s_2, s_3 соответственно. Пусть E_1, E_2 — произвольная пара дублирующих друг друга элементов в \hat{S}_1 и \hat{S}_2 или дублирующих друг друга элементов в \hat{S}_1 и \hat{S}_3 , не работающих как инверторы и таких, что они либо не лежат в подсхемах $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$, в подсхемах $C^{\sigma_1\sigma_2}$ и в подсхемах из \mathcal{S}^\oplus , либо лежат в подсхемах $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$ и при этом являются выходными в подсхемах из \mathcal{S}^\oplus , либо являются выходными элементами подсхем $C^{\sigma_1\sigma_2}$, либо не лежат в подсхемах $C_i^{\sigma_1\sigma_2}$, в подсхемах $C^{\sigma_1\sigma_2}$ и при этом являются выходными в подсхемах из \mathcal{S}^\oplus . Для каждой такой пары E_1, E_2 построим собственную контролируемую подсхему вида S' , где S' моделирует формулу $(z_1 \oplus x_1) \oplus z_2$, причем x_1 здесь — это входная переменная x_1 , а под z_1 и z_2 подразумеваются выходы элементов E_1 и E_2 соответственно. Пусть всего оказалось построено d таких подсхем; их выходы обозначим через b_1, \dots, b_d . Определим подсхему вида S'' как подсхему, реализующую функцию $\Psi(u, x_1, x_2, y)$ такую, что

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } \alpha = \gamma \text{ и } \beta = \delta, \\ \bar{\gamma}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и моделирующую формулу

$$\Psi(u, x_1, x_2, y) = (u | y) \oplus (u | \bar{x}_1) \oplus (y | \bar{x}_2) \oplus \bar{x}_2 \oplus (\bar{x}_1 | \bar{x}_2),$$

причем для реализации сложений по модулю 2 далее предполагается осуществлять корректный подбор подсхем из \mathcal{S}^\oplus для множества наборов $T_1 \cup T_2$. Множество наборов $\{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ значений переменных (u, x_1, x_2, y) образует единичный проверяющий тест для этой схемы. Построим цепочку C'' , состоящую из d подсхем вида S' : на первый вход каждой подсхемы, начиная со второй, подается выход предыдущей подсхемы, ко второму входу каждой подсхемы проводится дуга от входа схемы x_1 , к третьему входу каждой подсхемы проводится дуга от входа схемы x_2 , к четвертому входу i -й подсхемы ($i = \overline{1, d}$) проводится дуга от i -й подсхемы S' , к первому входу первой подсхемы проводится дуга от входа схемы x_2 . Выходом подсхемы C'' будем считать выход последнего (выходного) элемента последней подсхемы S' цепочки C'' ; обозначим этот выход через b'' . Заметим: на наборах из $T_1 \cup T_2$ на входах каждой подсхемы из \mathcal{S}^\oplus в подсхемах S', S'' возникает не менее трех разных наборов. Так как при отсутствии неисправностей в строящейся схеме на первый и третий входы каждой подсхемы вида S'' подается x_2 , а на второй и четвертый входы — x_1 , то с учетом указанного выше теста для S'' получаем: корректный подбор подсхем из \mathcal{S}^\oplus в S' и S'' оказывается возможным, а одиночные неисправности во всех подсхемах вида S'' обнаруживаются на выходе b'' цепочки C'' при подаче на входы схемы наборов из $T_1 \cup T_2$. Легко продемонстрировать возможность корректного (для $T_1 \cup T_2$) подбора подсхемы Q_1 , осуществляющей

преобразование $s_1 \oplus x_1$, а также подсхемы Q_2 , осуществляющей преобразование $s_2 \oplus x_2$ (эти подсхемы подключаются к конструируемой схеме S_f в соответствии с введенными выше обозначениями); выходы подсхем Q_1 и Q_2 назовем s'_1 и s'_2 соответственно. Подсхема Q осуществляет в соответствии с введенными выше обозначениями преобразование $h(s'_1, s_2, s_3, x_1, x_2) = m(s'_1 \oplus x_1, s'_2 \oplus x_2, s_3)$ путем моделирования формулы $h = \overline{(s'_1 | s'_2)} \oplus \overline{(s'_1 | x_2)} \oplus \overline{(s'_2 | x_1)} \oplus \overline{(x_1 | x_2)} \oplus \overline{(x_1 | s_3)} \oplus \overline{(s'_2 | s_3)} \oplus \overline{(s'_1 | s_3)} \oplus \overline{(x_2 | s_3)}$, причем для реализации сложений по модулю 2 предполагается осуществлять корректный подбор подсхем из \mathcal{S}^\oplus для множества наборов $T_1 \cup T_2$. С учетом ограничений, накладываемых на функцию f в рассматриваемом случае 1, получаем: в $T_1 \cup T_2$ найдутся пять наборов, среди которых на одном функция обращается в 0, на четырех других — в 1, и у этих четырех наборов попарно различны наборы значений переменных (x_1, x_2) . Нетрудно показать, что при подаче на входы строящейся схемы S_f этих пяти наборов на выходе подсхемы Q обнаружатся все неисправности элементов Q . Выход подсхемы Q в схеме S_f обозначим через q . Легко продемонстрировать возможность корректного (для $T_1 \cup T_2$) подбора подсхем из \mathcal{S}^\oplus в подсхему Q' , осуществляющую преобразование $(q \oplus b'') \oplus x_2$. Выход подсхемы Q' обозначим через s — это выход всей построенной схемы S_f .

Ясно, что при отсутствии неисправностей схема S_f реализует f : в вершинах s_1, s_2, s_3, q реализуется функция f , на четвертые входы всех подсхем S'' подается значение переменной x_1 , вдоль цепочки C'' от подсхемы к подсхеме передается значение переменной x_2 , на выходе схемы реализуется f .

Любая нетривиальная неисправность типа одиночной замены элемента на инвертор в схеме S_f обнаруживается на множестве $T_1 \cup T_2$. Действительно, поломка в подсхеме вида $C_i^{(\sigma_1 \sigma_2)}$ приведет к возникновению неверного значения на выходе хотя бы одной подсхемы из \mathcal{S}^\oplus в $C_i^{(\sigma_1 \sigma_2)}$, поломка в цепочке вида $C^{(\sigma_1 \sigma_2)}$ приведет к возникновению неверного значения на выходе этой цепочки, поломка внутри какой-то подсхемы из \mathcal{S}^\oplus вне подсхем вида $C_i^{(\sigma_1 \sigma_2)}$ и $C^{(\sigma_1 \sigma_2)}$ приведет к возникновению неверного значения на выходе этой подсхемы из \mathcal{S}^\oplus (всюду использовалась корректность подбора подсхем из \mathcal{S}^\oplus для $T_1 \cup T_2$), наконец, поломка любого элемента, лежащего вне всех упомянутых в этом абзаце подсхем и не работающего как инвертор, приведет к возникновению неверного значения на выходе этого элемента. В результате в случае неисправностей вне подсхем Q, Q' вдоль цепи C'' будет передаваться, начиная с некоторой подсхемы вида S'' , значение \bar{x}_2 . А так как в вершине q все равно реализуется функция f , на выходе всей схемы хотя бы на одном наборе из $T_1 \cup T_2$ окажется неверное значение. В

случае же неисправностей в подсхемах Q, Q' ошибка распространится внутри подсхем Q, Q' до выхода схемы. Поэтому $T_1 \cup T_2$ — единичный проверяющий тест для избыточной схемы S_f .

Случай 2. Три подфункции вида $f_{\sigma_1\sigma_2}(x_3, \dots, x_n)$ функции f из четырех тождественно равны 0 (следовательно, четвертая — не константа). Для доказательства теоремы в этом случае достаточно в соответствии со случаем 1 построить схему $S_{\bar{f}}$ и привесить к ее выходу еще один инвертор, выход которого станет единственным выходом построенной схемы.

Случай 3. Ровно одна подфункция вида $f_{\sigma_1\sigma_2}(x_3, \dots, x_n)$ функции f из четырех тождественно равна 0. Для доказательства теоремы в этом случае достаточно в соответствии со случаем 1 построить схему $S_{f \oplus x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}}$ и привесить к ее выходу подсхему Q'' , осуществляющую преобразование $s \oplus (x_1^{\sigma_1} | x_2^{\sigma_2})$ (подсхемы из \mathcal{S}^\oplus допускают корректный подбор для множества $T_1 \cup T_2$). Выход подсхемы Q'' — это единственный выход всей построенной схемы S_f , сохранение теста $T_1 \cup T_2$ схемы $S_{f \oplus x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}}$ для схемы S_f очевидно.

Случай 4. Ровно две подфункции вида $f_{\sigma_1\sigma_2}(x_3, \dots, x_n)$ функции f из четырех тождественно равны 0 (тогда не более чем одна из оставшихся двух подфункций есть константа 1). Для доказательства теоремы в этом случае достаточно инвертировать функцию f , как в случае 2, реализовывать \bar{f} в соответствии со случаем 1 или 3, а затем привесить к выходу схемы новых выходной инвертор (как в случае 2). Сохранение теста $T_1 \cup T_2$ для схемы S_f очевидно. Теорема доказана.

Из теоремы 1 двойственным образом получаем теорему 2.

Теорема 2. *При любом натуральном n имеет место неравенство $L_{\{x \downarrow y\}}^{detect}(O_1^{r(-)}, n) \leq 12$.*

Теорема 3. *Если B — полное в P_2 множество булевых функций такое, что функция $\xi(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4$ ($a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1\}$) и некоторая константа δ содержится в расширении \hat{B} множества B , то при любом натуральном n имеет место неравенство $L_B^{detect}(O_1^{r(-)}, n) \leq 12$.*

Доказательство. *Случай 1.* $a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_4 = 0$, тогда $\xi = (10000001)$, $\delta = 1$. Заменяв в схеме S_f из доказательства теоремы 1 работы [24] каждый конъюнктор на элемент ξ , на третий вход которого подан выход упомянутого в этом доказательстве элемента «константа 1», несложно убедиться, что предложенный тест длины 3 обнаруживает и все «новые» неисправности, приводящие к замене элемента ξ константой 0.

Случай 2. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. Доказывается двойственно предыдущему со ссылкой на теорему 3 из работы [24].

Случай 3. $a_1 = a_2 = a_4 = 1, a_3 = 0$, тогда $\xi = (11010100)$. Элемент ξ с отождествленными входами — это абсолютно надежный инвертор, а

подсхема R , состоящая из элемента ξ (с входами x, y, z) и элемента «константа δ » (возможно, с входом x), выход которого подан на третий вход ξ , реализует при $\delta = 1$ функцию $x|y$, а при $\delta = 0$ — функцию $x\downarrow y$. Пусть $\delta = 1$. Заметим, что при всяком обнаружении замены элемента ξ подсхемы R на инвертор первого или второго входа автоматически обнаруживается и неисправность замены элемента ξ на инвертор третьего входа (фактически, на элемент «константа 0»). Поэтому достаточно в схему S_f из доказательства теоремы 1 добавить один «общий» элемент «константа 1» (возможно, с входом x_1), заменить каждый не работающий как инвертор элемент «штрих Шеффера» на подсхему R , на третий вход которой подается выход элемента «константа 1», и выяснить, обнаруживается ли на $T_1 \cup T_2$ неисправность типа замены элемента «константа 1» на элемент \bar{x}_1 . Если обнаруживается, то искомая схема построена. Если же нет, то выход полученной схемы следует подать на первый вход нового элемента ξ , на второй и третий входы которого подаются выходы имевшегося в схеме элемента «константа 1», а выход нового элемента ξ подать на вход нового инвертора, оказывающегося единственным выходным элементом новой схемы. Очевидно, что все неисправности в новой схеме обнаруживаются на множестве $T_1 \cup T_2$. Ситуация с $\delta = 0$ аналогична, но отсылает к теореме 2.

Случай 4. $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = 0$, тогда $\xi = (00101011)$. Подсхема R , состоящая из элемента ξ (с входами x, y, z) и элемента «константа δ » (возможно, с входом x), выход которого подан на третий вход ξ , реализует при $\delta = 1$ функцию $x\bar{y}$, а при $\delta = 0$ — функцию $x \vee y$. Пусть $\delta = 1$. Тогда все рассуждения аналогичны рассуждениям из случая 1. Ситуация с $\delta = 0$ аналогична, но отсылает к случаю 2 и теореме 2.

Случай 5. $a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_1 = 1$, тогда $\xi = (00011000)$, $\delta = 0$. Подсхема R , состоящая из элемента ξ (с входами x, y, z) и элемента «константа 0» (возможно, с входом x), выход которого подан на третий вход ξ , реализует функцию $x\bar{y}$. Заменяя в схеме S_f из доказательства теоремы 2 работы [24] каждый элемент $x\bar{y}$ на подсхему R , на третий вход элемента ξ которой подан выход упомянутого в этом доказательстве элемента «константа 0», несложно убедиться, что предложенный тест длины 4 обнаруживает и все «новые» неисправности, приводящие к замене элемента ξ константой 1.

Случай 6. $a_2 = a_3 = 0, a_1 = a_4 = 1$, тогда $\xi = (11100111)$, $\delta = 1$. Доказывается двойственно предыдущему случаю.

Случай 7. $a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1$, тогда $\xi = (11101000)$. Пусть $\delta = 0$. Элемент ξ с отождествленными входами — это абсолютно надежный инвертор, а подсхема R , состоящая из элемента ξ (с входами x, y, z) и элемента «константа 0» (возможно, с входом x), выход которого подан на третий вход ξ , реализует функцию $x|y$. Заменяя в схеме S_f из доказательства теоремы 1 каждый элемент $x|y$ на подсхему R , на третий

вход элемента ξ которой подан выход единственного добавленного к схеме элемента «константа 0», и используя вместо схем из множества \mathcal{S}^{\oplus} эквивалентные схемы, основанные на тождестве $x \oplus y = \xi(\xi(\bar{x}, y, 0), \xi(x, \bar{y}, 0), 0)$ (возможно добавление «входных» и «выходных» инверторов), несложно убедиться, что предложенный тест длины 12 обнаруживает как все «старые», так и все «новые» неисправности (приводящие к заменам возникших на месте элементов «штрих Шеффера» элементов ξ элементами «константа 1»), кроме, возможно, неисправности элемента «константа 0». Для ликвидации этого дефекта (если он имеется) выход полученной схемы следует подать на первый вход нового элемента ξ , на второй и третий входы которого подаются выходы имеющегося в схеме элемента «константа 0» и его отрицания, а выход нового элемента ξ подать на вход еще одного нового инвертора, оказывающегося единственным выходным элементом построенной схемы. Очевидно, что все неисправности в новой схеме обнаруживаются на множестве $T_1 \cup T_2$. Ситуация с $\delta = 1$ двойственна и отсылает к теореме 2.

Случай δ . $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, тогда $\xi = (00010111)$. Пусть $\delta = 0$. Подсхема R , состоящая из элемента ξ (с входами x, y, z) и элемента «константа 0» (возможно, с входом x), выход которого подан на третий вход ξ , реализует функцию xu . Используя для реализации $x \oplus y$, $x \sim y$ подсхемы из доказательства теоремы 1 из работы [24] и разлагая саму функцию f (а не \bar{f}^*), по первой переменной и действуя далее в соответствии с доказательством теоремы 2 из работы [24], установим, что существует единичный проверяющий тест из 4 наборов для неизбыточной схемы, реализующей f в базисе, расширение которого содержит xu и константу 0. Заменяв в этой схеме каждый конъюнктор на подсхему R , на третий вход элемента ξ которой подан выход имеющегося в схеме элемента «константа 0», несложно убедиться, что предложенный тест длины 4 обнаруживает и все «новые» неисправности, приводящие к замене элемента ξ константой 1. Ситуация $\delta = 1$ двойственна рассмотренной.

Все попарно неконгруэнтные варианты для функции ξ перебраны, теорема доказана.

Поскольку Н. П. Редькиным показано [18], что в расширении любого полного базиса B имеется или нелинейная функция двух аргументов, или функция вида $xu \oplus xz \oplus yz \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4$ ($a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1; 4$) и какая-то константа, то из теорем 1–4 работы [24] и теорем 1–3 настоящей статьи вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Если B — полное в P_2 множество булевых функций, то при любом натуральном n имеет место неравенство $L_B^{detect}(O_1^{r(-)}, n) \leq 12$.*

Литература

1. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Analysis of different types of faults in a class of Boolean circuits // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). 2012. Vol. 2, Iss. 4. Pp. 145–149.
2. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Single network structure for stuck-at and bridging fault analysis and diagnosis for Exclusive-OR sum of products in Reed–Muller canonical circuits // Elixir Elec. Eng. 2013. Vol. 57. Pp. 14080–14085.
3. *Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.* Network structure for testability improvement in exclusive-OR sum of products Reed–Muller canonical circuits // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, Iss. 3. Pp. 368–378.
4. *Jameil A. K.* A new single stuck fault detection algorithm for digital circuits // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, Iss. 1. Pp. 1050–1056.
5. *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. Vol. 21, Iss. 1. Pp. 124–141.
6. *Thamarai S. M., Kuppusamy K., Meyyappan T.* Fault detection and test minimization methods for combinational circuits — A survey // International Journal of Computer Trends and Technology. 2011. Vol. 2, Iss. 2. Pp. 140–146.
7. *Borodina Yu. V.* Synthesis of easily-tested circuits in the case of single-type constant malfunctions at the element outputs // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2008. Vol. 32, No. 1. Pp. 42–46. DOI: 10.3103/S0278641908010068
8. *Borodina Yu. V.* Circuits admitting single-fault tests of length 1 under constant faults at outputs of elements // Moscow University Mathematics Bulletin. 2008. Vol. 63, No. 5. Pp. 202–204. DOI: 10.3103/S0027132208050069
9. *Borodina Yu. V., Borodin P. A.* Synthesis of easily testable circuits over the Zhegalkin basis in the case of constant faults of type 0 at outputs of elements. 2010. Vol. 20, No. 4. Pp. 441–449. DOI: 10.1515/dma.2010.027
10. *Коваценок С. В.* Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2000. № 2. С. 45–47.
11. *Kolyada S. S.* Unit checking output tests under constant faults for functional elements // Moscow Univ. Math. Bull. 2011. Vol. 66. Pp. 267–269. DOI: 10.3103/S002713221106009X

12. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. Т. 20, № 2. С. 58–74.
13. *Kolyada S. S.* Single fault detection tests for circuits of functional elements // Moscow Univ. Math. Bull. 2013. Vol. 68. pp. 192–193. DOI: 10.3103/S0027132213040049
14. *Popkov K. A.* Lower bounds for lengths of single tests for Boolean circuits // Discrete Mathematics and Applications. 2019. Vol. 29, No. 1. Pp. 23–33. DOI: 10.1515/dma-2019-0004
15. *Попков К. А.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Прикладная дискретная математика. 2017. № 38. С. 66–88.
16. *Popkov K. A.* Short single tests for circuits with arbitrary stuck-at faults at outputs of gates // Discrete Mathematics and Applications. 2019. Vol. 29, No. 5. Pp. 321–333. DOI: 10.1515/dma-2019-0030
17. *Попков К. А.* О схемах, допускающих короткие единичные проверяющие тесты при произвольных неисправностях функциональных элементов // Прикладная дискретная математика. 2021. № 51. С. 85–100.
18. *Редькин Н. П.* О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 198–222.
19. *Редькин Н. П.* Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
20. *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 217–230.
21. *Romanov D. S.* Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length // Discrete Mathematics and Applications. 2014. Vol. 24, No. 4. Pp. 227–251. DOI: 10.1515/dma-2014-0021
22. *Romanov D. S., Romanova E. Yu.* A method of synthesis of irredundant circuits admitting single fault detection tests of constant length // Discrete Mathematics and Applications. 2019. Vol. 29, No. 1. Pp. 35–48. DOI: 10.1515/dma-2019-0005
23. *Темербекова Г. Г., Романов Д. С.* О единичных проверяющих тестах относительно замен элементов на инверторы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Том 162, книга 3. С. 359–366.

24. *Темербекова Г., Романов Д. С.* О длине единичных проверяющих тестов относительно замен функциональных элементов на инверторы в некоторых базисах // Прикладная математика и информатика. Вып. 67. М.: ООО «МАКС Пресс», 2021. С. 89–100. Перевод: *Temerbekova G., Romanov D. S.* On single detection test sets under replacements of gates with inverters in some basises // Computational Mathematics and Modeling. 2021. Vol. 32, No. 3. (To appear).