Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной математики и кибернетики
______________/И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Математический анализ

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден
на заседании Ученого совета факультета ВМК
(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: основы теории вещественных чисел; основы теории числовых последовательностей; основы теории предела функции одной переменной и непрерывности; основы теории дифференциального исчисления функции одной переменной; основы теории интегрирования функций одной переменной; основы теории предела, непрерывности и дифференцируемости функций многих переменных. основы теории числовых рядов; основы теории функциональных последовательностей и рядов; основы теории степенных рядов; основы теории двойных и n-кратных интегралов и, в частности, несобственных интегралов; основы теории криволинейных и поверхностных интегралов; основы теории поля и интегральные формулы анализа. Уметь: применять на практике теоретические факты о числовых последовательностях, о

		непрерывных функциях одного и нескольких переменных, о дифференциальных свойствах функций одного и нескольких переменных; использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной для решения теоретических и практических задач; использовать аппарат дифференциального исчисления функций многих переменных для решения теоретических и практических задач. применять на практике теоретические факты о числовых последовательностях, о непрерывных функциях одного и нескольких переменных, о дифференциальных свойствах функций одного и нескольких переменных; использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной для решения теоретических и практических задач; использовать аппарат дифференциального исчисления функций многих переменных для решения теоретических и практических задач. Владеть: методами дифференциального и интегрального исчисления функций одного переменного; навыками использования аппарата дифференциального исчисления функций многих переменных. методами дифференциального и

		интегрального исчисления функций одного переменного; навыками использования аппарата дифференциального исчисления функций многих переменных.

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

коллоквиум
контрольная работа
выполнение заданий на практических (семинарски) занятиях

1 семестр

Контрольная работа № 1
1. Найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$: $x_n = \sin^2\frac{\pi n}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;   2.Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e+a}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}=0,\ (a>0)$;   3.Пользуясь критерием Коши, исследовать на сходимость : $x_n = 1+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha},\ (\alpha<1)$;   4.Доказать, что $\sqrt[n]{n}\underset{n\to\infty}{\to}1$.
Контрольная работа № 2
1.Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{1-\cos x}$;   2. Выделить у данной функции $f(x)=e^{x-2\sqrt{x}}-e^{-1}$ главный член вида: $c(x-1)^n$.   3.Определить характер точек разрыва следующей функции $f(x)=[x]\sin\pi x+e^{x+\frac{1}{x}}$.   4. Исследовать на непрерывность следующую функцию: $f(x)=\begin{cases} tg\,x, & x-рациональнo, \\ \sqrt{3}, & x-иррациональнo. \end{cases}$ 4. Исследовать на непрерывность следующую функцию: $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x-рациональнo, \\ -\frac{1}{2}, & x-иррациональнo. \end{cases}$
Контрольная работа № 3
1. Найти d^2y, если $y=\frac{\ln x}{x}\cdot\sin x$;   2. Найти $y^{(20)}$, если $y=x^3\cdot e^{2x}$;   3. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = arctg\,t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$.

4. Разложить данную функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка включительно: $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$.

5. Найти предел, пользуясь формулой Тейлора: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(\sin x)-2x\sqrt[3]{3-x^2}}{x^5}$.

6. Раскрыть неопределённость: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

Контрольная работа № 4

Вариант №1

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;
2. $\int(x\ln x)^3dx$;
3. $\int\dfrac{dx}{\sin x\cdot\cos^4 x}$;
4. $\int\dfrac{2x+1}{3x-2}dx.$

Вариант №2

Вычислить следующие интегралы:

1. $\int\dfrac{e^x dx}{\sqrt{2e^{2x}-3}}$;
2. $\int\left(x^3\ln^2(1+x)\right)dx$;
3. $\int\dfrac{dx}{\cos x\cdot\sin^4 x}$;
4. $\int\dfrac{1-2x}{4x-3}dx.$

Самостоятельная работа № 5

1) В задачах №1, 2, 3 выполнить полное исследование функции и построить её график:

1) $y=(\frac{1}{2})^{-2x}\cdot(x^2-3x+2)$; 2) $x=\dfrac{(t+1)^2}{4},\ y=\dfrac{(t-1)^2}{4}$; 3) $r=a+b\cos\varphi$;

2) Найти прямоугольник наибольшей площади, вписанный в эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Вопросы к коллоквиуму

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Темы коллоквиума:

1. Вещественные числа, правило их сравнения. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху(снизу) числового множества.
2. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.
3. Понятие об эквивалентных и неэквивалентных (равномощных и неравномощных) множествах. Счётные множества и множества мощности континуум. Доказательство их неэквивалентности. Полнота множества вещественных чисел. Аксиоматический метод задания вещественных чисел.
4. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Их взаимосвязь и свойства. Примеры.
6. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.
7. Предельный переход в неравенствах для последовательностей.
8. Расширенная числовая ось. Бесконечно удалённые точки. Понятие ε-окрестности конечных и бесконечных точек. Понятие предела последовательности в терминах окрестностей.

9. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число е.
10. Понятие предельной точки множества и предельной точки последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у бесконечного ограниченного множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности.
11. Фундаментальная последовательность и её свойства. Критерий Коши сходимости последовательности.
12. Два определения предела (предельного значения) функции: по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Единственность предела функции в данной точке. Односторонние пределы. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.
13. Критерий Коши существования предела функции.
14. Бесконечно малые функции в окрестности данной точки, сравнение порядков их малости. Бесконечно большие функции в окрестности данной точки, сравнение порядков их роста. Символы о-малое, О-большое, О-большое со звёздочкой. Понятие об эквивалентных бесконечно малых (бесконечно больших) функциях. Примеры.
15. Арифметические операции над функциями, имеющими пределы.
16. Предельный переход в функциональных неравенствах.
17. Непрерывность функции в точке. Определения непрерывности по Гейне и по Коши. Непрерывность функции в точке слева или справа. Локальные свойства непрерывных функций: ограниченность, сохранение знака.
18. Арифметические операции над непрерывными функциями. Суперпозиция функций. Непрерывность сложной функции.
19. Точки разрыва функции. Их классификация. Примеры.
20. Непрерывность функции на множестве. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теоремы о прохождении функции через нуль и через промежуточное значение.
21. Теоремы об ограниченности функции, непрерывной на отрезке (I теорема Вейерштрасса) и о достижении такой функцией точных верхней и нижней граней её значений (II теорема Вейерштрасса).
22. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке.

Типовой билет коллоквиума

1. Дать определение того, что число M является точной верхней гранью множества значений функции f(x) на отрезке [0;2].
2. Сформулировать первую теорему Вейерштрасса.
3. Дать определение по Коши того факта, что соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b+0$ неверно.
4. Дать определение точки разрыва II рода для функции одной переменной.
5. *Дать определения, формулировки всех утверждений и привести их доказательства по следующей теме:*
   Предельные точки множества и последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности.

2 семестр

Контрольная работа № 1
Вариант №1. 1. Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^q(1+x^2)}{x^n}dx$. 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\cdot arctg^p x}{1+x^q}dx$.

Вариант №2.

1.Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_0^\infty \frac{arctg(1+x^q)}{x^n}dx$.

2.Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x^p)\sin x}{1+x^q}dx$.

Контрольная работа № 2

1. Исследовать на непрерывность по каждой переменной и по совокупности:

$$f(x,y)=\frac{2y\sin x}{y^2+\sin^2 x};\ f(k\pi;0)=f(0;0)=0.$$

2. Исследовать на дифференцируемость:

$$f(x,y)=\ln(1+x^2+y^4)\sin\frac{1}{x^2+y^2};\ f(0;0)=0.$$

3. Найти $du,\ d^2u$ функции $u=f(\xi,\eta)$, если $\xi=\sin(x+y),\quad \eta=e^{xy}$.

Самостоятельная работа № 3

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $F(u,v)=0$, где

$$u=\sin(x+y+z),\ v=x^2+z^2.$$

2. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка малости функцию $u=f(x,y)$, если

$$u=\arcsin\frac{x^2+y^4}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

3. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в данной точке к следующей кривой:

$$y=x,z=x^2;\ в\,точке\ K(1;1;1).$$

Контрольная работа № 4

1. Произвести замену переменных в следующем дифференциальном выражении:

$$w=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\quad \text{при}\quad x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

2. Найти условные экстремумы функции: $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при условии: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{8}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции: $z=x^2+2xy-y^2-4$ в области $D:\{y=x+1;\ y=0;x-3=0\}$.

Вопросы к коллоквиуму (второй семестр)

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Темы коллоквиума:

Графическое исследование функции

1. Понятие локального экстремума функции. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции.
2. Понятие монотонности функции в точке и на множестве. Критерий монотонности дифференцируемой функции.
3. Первое достаточное условие локального экстремума.
4. Второе достаточное условие локального экстремума.
5. Направление выпуклости графика функции. Понятие о точках перегиба.
6. Достаточные условия локальной выпуклости графика и выпуклости его на интервале (a;b).
7. Необходимое условие перегиба графика в данной точке.
8. Первое достаточное условие перегиба в данной точке.
9. Второе достаточное условие перегиба в данной точке.

10. Отыскание асимптот к графику функции (вертикальных и наклонных).
11. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции на сегменте [a;b] (глобальный экстремум). Понятие о краевом экстремуме.

Определенный интеграл.

12. Понятие об определённом интеграле. Верхняя и нижняя интегральные суммы (суммы Дарбу), их свойства. Интегралы Дарбу.
13. Критерий интегрируемости функции.
14. Интегрируемость непрерывных, монотонных, кусочно-непрерывных функций.
15. Свойства определённого интеграла: аддитивность, линейность, интегрируемость произведения функций, сравнение интегралов от двух различных функций, интегрируемость модуля функции.
16. Свойства определённого интеграла: первая теорема о среднем, формулировка второй теоремы о среднем, интеграл с переменным верхним пределом, теорема о существовании первообразной у всякой непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница – основная формула интегрального исчисления.
17. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

Приложения определенного интеграла.

18. Квадрируемость и понятие площади плоской фигуры. Вычисление площади криволинейной трапеции и площади криволинейного сектора. Геометрический смысл определённого интеграла.
19. Кубируемость и понятие объёма тела в пространстве. Вычисление объёма тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OX. Формула (без вывода) для объёма тела , полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OY,
20. Спрямляемость кривой и понятие длины кривой. Вычисление длины дуги кривых, заданных параметрически, а также в декартовых или в полярных координатах. Понятие о дифференциале длины дуги кривой.
21. Понятие о физических приложениях определённого интеграла.
22. Приближённые методы вычисления определённого интеграла. Метод прямоугольников. Его погрешность
23. Приближённые методы вычисления определённого интеграла. Метод трапеций. Его погрешность (без доказательства).
24. Приближённые методы вычисления определённого интеграла. Метод парабол (Симпсона). Его погрешность (без доказательства).

Несобственные интегралы

25. Несобственный интеграл первого рода, его сходимость. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. I-го рода. Вычисление с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
26. Достаточные условия сходимости несобственного интеграла. I-го рода. Признаки сравнения: общие, специальные (с интегралом Дирихле), признаки сравнения в предельной формулировке.
27. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла I рода. Признак Абеля-Дирихле.
28. Исследование на абсолютную и условную сходимость интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.
29. Замена переменных и интегрирование по частям в несобственном интеграле первого рода.
30. Несобственный интеграл второго рода. Понятие о его сходимости. Критерий Коши. Признаки сравнения для несобственного интеграла II рода: общие и специальные (с интегралом Дирихле II рода).
31. Понятие о главном значении по Коши несобственных интегралов I и II рода.

Типовой билет коллоквиума

Дать определение или формулировку:

1. Второе достаточное условие локального экстремума.
2. Определённый интеграл от функции f(x) на отрезке [a;b].

3. Первая теорема о среднем для определённого интеграла.
4. Формула для объёма тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OX.

Основной вопрос (с доказательством):

5. Интеграл с переменным верхним пределом, теорема о существовании первообразной у всякой непрерывной функции.

3 семестр

<table>
<tr><th>Контрольная работа № 1</th></tr>
<tr><td>

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{3^n n!}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(3n)}{\sqrt{n^2+1}}$.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

4. Исследовать ряд на равномерную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x)\cos(nx)}{\log(n+x^2)}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

5. Определить область E существования функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ и исследовать ее на дифференцируемость во внутренних точках E.

6. Найти множество сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4+(-1)^n)^n}{n}(x-1)^n$.

Вариант 2

1. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\log\frac{n+1}{n}}\right)$.

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\ \frac{\log^{\alpha} n}{n^p}$.

3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+x^r)^n}{\sqrt{n!}}$.

4. Исследовать на равномерную сходимость на области сходимости
а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x^2}\sin(nx)$, б) последовательность $f_n(x)=nx(1-x)^n$.

5. Исследовать на непрерывность на области существования сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\log^2 n}$.

6. Определить радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

7. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x)=arctg\,x^2$, указать область сходимости ряда.

</td></tr>
<tr><th>Контрольная работа № 2</th></tr>
</table>

Вариант 1

1. Найти $\iint\limits_G \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 dx dy, \quad G = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 2x\right\}.$

2. Найти $\iiint\limits_G (x^2 - z^2) dx dy dz$, где G ограничено плоскостями $y = -x,\ z = x,\ z = y,\ z = 1.$

3. Найти $\iint\limits_S (x + y + z) ds$, где S – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \ge 0$.

4. Найти поток поля $(x + z)\, i + (y + x)\, j + (z + y)\, k$ через полную внешнюю поверхность тела $x^2 + y^2 \le R^2, \quad 0 \le z \le y$.

5. Найти циркуляцию поля $z^2\, i + x^2 j + y^2\, k$ вдоль контура $\Gamma = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\right\}.$

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми: $xy = a,\ xy = b,\ y = cx^2,\ y = dx^2,$ $0 \le a \le b, 0 \le c \le d$.

2. Найти объем тела V, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x^2 + y^2 + (z - r)^2 = R^2, \quad 0 \le r \le R,$ точка $(0,0,r) \in V$.

3. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C (y\,dx + z\,dy + x\,dz), \quad C -$ пересечение плоскости $x + y + z = 0$ и поверхности $z = x^2 + y^2$. Направление обхода – против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

5. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r^3} ds, \quad S: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} -$ направляющие косинусы внешней нормали.

6. Найти поток вектора $\overline{a} = \left\{x^3, y^3, z^3\right\}$ через поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Вопросы к коллоквиуму

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. В каждый билет входит один теоретический вопрос из списка, а также предлагается дополнительная задача. Темы коллоквиума:

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Признаки сравнения.
3. Признаки Даламбера и Коши, их сравнение.

1. Признак Коши-Маклорена.
2. Теорема Римана о перестановке членов в числовых рядах.
3. Теорема Коши о перестановке членов в числовых рядах.
4. Последовательности с ограниченным изменением и их свойства.
5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (Абеля, Дирихле-Абеля, Лейбница).
6. Теорема Мертенса.
7. Взаимосвязь между сходимостью четырех рядов: повторных, двойного и "одинарного".
8. Метод Чезаро суммирования расходящихся рядов.
9. Метод Пуассона-Абеля суммирования расходящихся рядов.
10. Бесконечные произведения и их свойства.
11. Последовательности с равномерно ограниченным изменением и их свойства.
12. Признаки Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
13. Признак Дини равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.
14. Непрерывность суммы функционального ряда.

15. Почленное интегрирование функциональных рядов.
16. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей.
17. Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью, теорема о почленном интегрировании.
18. Теорема Арцела.
19. Теорема Коши-Адамара.

Задачи для коллоквиума

1. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$ расходится.

2. Привести пример сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$, для которого $\overline{\lim_{n\to\infty}}(n a_n) > 0$.

3. Привести пример расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0$, для которого $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Пусть $f \in C^1[1,\infty)$ и $\int_1^{\infty} f'(x)\,dx$ сходится абсолютно. Доказать, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ эквивалентна сходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

5. Пусть последовательность a_n монотонна, но не является бесконечно малой. Доказать, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ расходятся при всех $\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

6. Пусть последовательность a_n монотонна и является бесконечно малой, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Доказать, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$ сходятся условно при всех $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся условно, а их произведение по Коши $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

8. Доказать, что любую последовательность с ограниченным изменением можно представить в виде разности двух монотонных ограниченных последовательностей.

9. Для любого множества $\{a_{mn}\}, m,n \in \mathbf{N}$, обозначим $\Delta_{1,0}(a_{mn}) = a_{mn} - a_{m+1,n}$, $\Delta_{0,1}(a_{mn}) = a_{mn} - a_{m,n+1}$, $\Delta_{1,1}(a_{mn}) = a_{mn} - a_{m+1,n} - a_{m,n+1} + a_{m+1,n+1}$. Проверить, что для двойных сумм имеет место *преобразование Харди*: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} S_{ij}\Delta_{1,1}(b_{ij}) + \sum_{i=1}^{m-1} S_{in}\Delta_{1,0}(b_{in}) + \sum_{j=1}^{n-1} S_{mj}\Delta_{0,1}(b_{mj}) + S_{mn} b_{mn}$, где $S_{ij} = \sum_{p=1}^{i}\sum_{q=1}^{j} a_{pq}$. В качестве применения исследовать на сходимость двойной ряд $\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$.

10. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ – произвольное множество и последовательность $f_n(x)$ непрерывных на $\overline{M}$ функций сходится равномерно на M. Доказать, что она сходится равномерно на $\overline{M}$.

11. Может ли последовательность разрывных на $[a,b]$ функций равномерно сходиться на $[a,b]$ к непрерывной функции?

12. Может ли последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций равномерно сходиться на $[a,b]$ к разрывной функции?

13. Привести пример двух последовательностей $u_n(x), v_n(x)$, равномерно сходящихся на $[0,1]$ таких, что последовательность $u_n(x)v_n(x)$ сходится на $[0,1]$ неравномерно.

14. Показать, что последовательность гладких функций $f_n(x) = \quad = n^{-1/2}\sin nx$ равномерно сходится на $\mathbf{R}$, а последовательность $f_n{}'(x)$ расходится в каждой точке $x \in \mathbf{R}$.

15. Исследовать последовательность $\{x^n\}$ на равностепенную непрерывность на множестве E, где: а) $E = [0,1/2]$; б) $E = [0,1]$.

16. Найти сумму функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$.

17. Просуммировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$ методом Пуассона-Абеля.

18. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Чезаро и $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

19. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Пуассона-Абеля, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $a_n = o((1+\varepsilon)^n)$ при $n \to \infty$.

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзамена
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

1 семестр.

1. Вещественные числа и правила их сравнения. Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани у ограниченного сверху (снизу) множества вещественных чисел.
2. Приближение вещественного числа рациональным. Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.
3. Счетные множества и множества мощности континуум. Неэквивалентность множества мощности континуум счетному множеству.
4. Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Их основные свойства.
5. Понятие сходящейся последовательности. Основные теоремы о сходящихся последовательностях (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, арифметические операции над сходящимися последовательностями).
6. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число е.
7. Понятие предельной точки последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
8. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (критерий Коши).
9. Два определения предельного значения функции (по Гейне и по Коши) и доказательство их эквивалентности. Критерий Коши существования предельного значения функции.
10. Арифметические операции над функциями, имеющими предельное значение. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие (в данной точке) функции и принципы их сравнения. Предел сложной функции.
11. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Классификация точек разрыва.
12. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции.
13. Обратная функция. Условия непрерывности монотонных функций и обратных функций.
14. Простейшие элементарные функции и их основные свойства.
15. Замечательные пределы.
16. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.
17. Ограниченность функции, непрерывной на сегменте (первая теорема Вейерштрасса).
18. О достижении функцией, непрерывной на сегменте, своих точной верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса).
19. Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора.
20. Понятие производной и дифференцируемости функции в точке.
21. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции и обратной функции. Формулы дифференцирования простейших элементарных функций.
22. Первый дифференциал функции. Инвариантность его формы. Использование дифференциала для приближенного вычисления приращения функции.
23. Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
24. Понятие возрастания (убывания) в точке и локального экстремума функции. Достаточное условие возрастания (убывания) и необходимое условие экстремума дифференцируемой в данной точке функции.

25. Теорема о нуле производной (теорема Ролля) и ее геометрический смысл.
26. Формула конечных приращений (формула Лагранжа). Следствия теоремы Лагранжа.
27. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).
28. Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталя).
29. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха-Роша).
30. Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа, Коши и Пеано. Его оценка.
31. Разложение по формуле Тейлора-Маклорена элементарных функций. Примеры приложений формулы Тейлора для приближенных вычислений элементарных функций и вычисления пределов.
32. Понятие первообразной и неопределенного интеграла функции. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.
33. Простейшие методы интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям).
34. Интегрируемость в элементарных функциях класса рациональных дробей (с вещественными коэффициентами).
35. Интегрируемость в элементарных функциях дробно-линейных иррациональностей и других классов функций.

Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

1. Исследовать на сходимость следующую числовую последовательность:
$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n-1}}$.
2. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x}$.
3. Исследовать функцию на непрерывность и дифференцируемость:
$f(x) = \ln\left(1 + x^4\right)\cos\frac{1}{x},\ f(0) = 0$.
4. Найти $du,\ d^2u$, где $u = f(v)$, а функция $v(x)$ задана так: $v = \sqrt{1+x^2}$.
5. Найти $f'_x,\ f''_{xx}$, если $y = f(x)$, и $x,\ y$ заданы следующим образом:
$$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}.$$
6. Вычислить следующие неопределённые интегралы:
а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$;
б) $\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx$;
в) $\int \arcsin x\, dx$.
7. Вычислить главный член функции $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{|x|}}$ вида: $C(1-x)^n$ при $x \to 1$.
8. Вычислить главный член функции $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{|x|}}$ вида: $C(1-x)^n$ при $x \to 1$.
9. Исследовать функцию на равномерную непрерывность: $f(x) = (\ln x)^{\alpha} \cdot \sin\frac{1}{x},\ 2 \le x < +\infty$.
10. Доказать функциональное неравенство: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x,\ (x > 0)$.
11. Разложить по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до членов III порядка следующую функцию: $f(x) = x^x - 1,\ x_0 = 1$.

Пример Билета:

1. Два определения предельного значения функции (по Гейне и по Коши) и доказательство их эквивалентности. Критерий Коши существования предельного значения функции.
2. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).
3. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x}$.

2 семестр

1. Отыскание точек локального экстремума функции. Достаточные условия экстремума.
2. Направление выпуклости графика функции и точки перегиба. Достаточные условия перегиба.
3. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования графика функции.
4. Понятие интегрируемости функции. Леммы Дарбу о верхних и нижних суммах.
5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости.
6. Классы интегрируемых функций.
7. Основные свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Формулы среднего значения.
8. Основная формула интегрального исчисления. Формулы замены переменного и интегрирования по частям.
9. Понятие длины плоской кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой.
10. Понятие квадрируемости (площади) плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
11. Понятие кубируемости (объем тела). Кубируемость некоторых классов тел.
12. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Формулы замены переменного и интегрирования по частям для несобственных интегралов.
13. Признак Абеля-Дирихле. Главное значение несобственного интеграла.
14. Метод хорд и его обоснование.
15. Метод касательных и его обоснование.
16. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (для одного из методов вывести оценку погрешности)
17. Различные множества точек и последовательности точек n-мерного пространства. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
18. Понятие функции n переменных и ее предельного значения.
19. Непрерывность функции n переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях.
20. Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Касательная плоскость к поверхности.
21. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Инвариантность формы первого дифференциала.
22. Производная по направлению. Градиент.
23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных.
24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
25. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
26. Экстремум функции нескольких переменных и его отыскание.
27. Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции.
28. Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений.

29. Понятие зависимости функций. Функциональные матрицы и их роль при исследовании зависимости функций.
30. Условный экстремум и методы его отыскания.

Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации

1. Найти длину дуги кривой: $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$;

2. Вычислить площадь $D: y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, \quad x = 2a$;

3. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{\ln^p x}{\sqrt{x}(1-x^2)}dx$;

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\int_0^\infty x^p \sin(x^5)dx$;

5. Исследовать на непрерывность по каждому аргументу и по совокупности:

$$f(x,y) = (x+y)\sin\tfrac{1}{x}\sin\tfrac{1}{y},\ f(0;0) = 0;$$

6. Исследовать на дифференцируемость:

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \text{ при } x^2+y^2 \neq 0, \text{ и } f(0;0) = 0;$$

7. Найти дифференциалы du, d^2u для функции $u = f(z)$, если $z = \sqrt{x^2+y^2}$;

8. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ неявной функции $z = z(x,y)$, если $F(u,v) = 0$, где $u = x+y+z, v = x\cdot y+z$;

9. Разложить по формуле Маклорена до членов 6-го порядка малости:

$f(x,y) = \sqrt[3]{1+\sin(x^2+y^2)}$;

Определить наибольшее и наименьшее значения функции $u = z^2 - 3xy + y^2$ в области $S: x^2+y^2 \leq 10$.

Пример билета

1. Понятие квадрируемости (площади) плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.
2. Непрерывность функции *n* переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях.
3. Вычислить площадь $D: y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, \quad x = 2a$;

3 семестр

Экзамен сдается в устной форме. В экзаменационном билете – один вопрос из приведенного ниже списка.

1. Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.

2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Коши-Маклорена).
3. Теоремы Коши и Римана о перестановке членов в числовых рядах.
4. Признаки сходимости произвольных числовых рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Лейбница).
5. Арифметические операции над сходящимися числовыми рядами. Теорема Мертенса.
6. Бесконечные произведения, критерии их сходимости.
7. Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда. Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами.
8. Абсолютная сходимость двойного ряда. Взаимосвязь между сходимостью четырех рядов: повторных, двойного и "одинарного".
9. Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов (методы Чезаро и Пуассона-Абеля).
10. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши.
11. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов (два признака Абеля, признаки Дирихле-Абеля, Вейерштрасса).
12. Признак Дини равномерной сходимости функциональных рядов и последовательностей. Почленный переход к пределу, непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов.
13. Почленное дифференцирование, существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.
14. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов (две теоремы). Сходимость в среднем, связь с равномерной сходимостью.
15. Теорема Арцела. Признак равностепенной непрерывности функциональной последовательности.
16. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.
17. Определение и доказательство существования двойного интеграла при помощи прямоугольных разбиений области. Классы интегрируемых функций. Основные свойства двойного интеграла.
18. Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области. Эквивалентность двух определений.
19. Сведение двойного интеграла к повторному однократному.
20. Кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сходимости.
21. Кратные несобственные интегралы от знакопеременных функций. Эквивалентность понятий сходимости и абсолютной сходимости.
22. Криволинейные интегралы первого и второго рода.
23. Понятие поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности. Лемма о проекции окрестности точки на касательную плоскость.
24. Площадь поверхности. Квадрируемость поверхности.
25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
26. Преобразование базисов. Инварианты линейного оператора.
27. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Повторные операции теории поля.
28. Формула Грина. Формула Остроградского-Гаусса.
29. Формула Стокса.
30. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач