Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной математики и кибернетики

_______________/И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Алгебра и геометрия

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден

на заседании Ученого совета факультета ВМК

(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	**Знать:** 1. основные понятия, определения и факты аналитической геометрии, общей и линейной алгебры; 2. базовые алгоритмы алгебры; 3. основы теории исследования систем линейных алгебраических уравнений; 4. основы теории конечномерных пространств; 5. основы теории операторов и квадратичных форм в конечномерных пространствах. **Уметь:** 1. применять на практике общую теорию и базовые алгоритмы решения задач алгебры и геометрии; 2. использовать алгебраический аппарат при решении задач в конечномерных пространствах; 3. анализировать структуру линейных операторов, характеристики квадратичных форм. **Владеть:** 1. методами аналитической геометрии, общей и линейной алгебры, проблемно-задачной формой представления математических знаний; 2. навыками использования базовых алгоритмов алгебры и их

		анализа при решении задач.

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

коллоквиум
контрольная работа

1 семестр
Примеры заданий контрольной работы

Контрольная работа № 1
1. Может ли определитель матрицы $$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \cdots & & & \\ 3 & 3 & 2 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & & 1 & 3 & 2 \\ & & & & & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ n-го порядка ($n \leq 3$) быть равен 69 и, если да, то при каком значении n ? 2. Исследовать и найти общее решение системы $$\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 - \lambda x_2 - x_3 = 2 + \lambda, \\ 4x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = -8 \end{cases}$$ в зависимости от значения λ. 3. Найти первый столбец матрицы, обратной к матрице $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & 2 & 0 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ n-го порядка. 4. Известно, что векторы a, b, c, d линейного пространства V линейно независимы. Выяснить, при каких значениях λ линейно независимы векторы $x = a + b - 2c + d,\ y = a + 2b + \lambda d,$ $z = -3a - b + 10c + 4d$. 5. Пусть A, B — квадратные матрицы одинакового порядка и $C = AB$. Доказать, что присоединённые матрицы удовлетворяют соотношению $\hat{C} = \hat{B}\hat{A}$. 6. Доказать, что если ранг квадратной матрицы A равен единице, то существует число $\lambda \in R$ такое что $A^2 = \lambda A$.
Контрольная работа № 2
1. Известно, что объём параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c равен 2. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах $a + b - c,\ a - b$ и $c + b$. 2. Найти все векторы x, удовлетворяющие равенству $[a, x] = b$, где $a = \{3, -2{,}5\}$, $b = \{1, -1, -1\}$. 3. В треугольнике ABC известны его вершина $C(5{,}3)$ и уравнения двух высот $3x - 2y = 0$ и $3x + 2y - 25 = 0$. Составить уравнение стороны AB.

4. Составить уравнение биссекторной плоскости двугранного угла между плоскостями $6x - 3z + 2 = 0$, $2x - 5y + 4z - 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1,1,-1)$.
5. Составить уравнение общего перпендикуляра к прямым
$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z+6}{-4}, \qquad \frac{x}{0} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{2}.$$
6. Центр окружности, описанной около правильного треугольника ABC, расположен в точке $(1,3)$. Найти координаты вершин B и C, если известно, что $A(5,1)$.
7. Плоский выпуклый четырёхугольник задан своими вершинами в пространстве: $M_i(r_i)$, $i = \overline{1,4}$. Найти необходимые и достаточные условия того, что заданная точка $M_0(r_0)$ является его внутренней точкой.

Контрольная работа № 3

1. Решить уравнение $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$.
2. Найти геометрическое место точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию
$$|z - i| + |z + i| = 4.$$
3. Пользуясь методом Лагранжа, определить вид линии второго порядка $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 3y - 5 = 0$.
4. Составить уравнения касательных к эллипсу $4x^2 + y^2 = 4$, перпендикулярных прямой $x - y + 2 = 0$.
5. Найти смежные классы
    a. мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе положительных действительных чисел;
    b. мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе чисел, равных по модулю единице.

Примеры заданий коллоквиума

Вопросы к коллоквиуму (первый семестр)

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Для не сдавших коллоквиум зачёт (и зачётная комиссия) начинается с вопросов по теоретическому материалу коллоквиума. Билет коллоквиума содержит один вопрос из следующего списка:

1. Перестановки.
2. Определитель, свойства определителя.
3. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
4. Разложение определителя по строке (столбцу). Определитель произведения матриц.
5. Обратная матрица. Критерий обратимости.
6. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
7. Ранг матрицы и линейная зависимость её строк (и столбцов).
8. Ранг произведения матриц. Инвариантность ранга относительно элементарных преобразований.
9. Системы линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Правило Крамера.
10. Критерий совместности и определённости системы линейных алгебраических уравнений.
11. Исследование и решение системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Общее решение.
12. Эквивалентность систем линейных алгебраических уравнений. Элементарные преобразования систем.
13. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений.
14. Линейное пространство. Арифметическое пространство.
15. Линейная зависимость в линейном пространстве.
16. Базис и размерность линейного пространства.

17. Линейное подпространство и линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Определение и простейшие свойства.
18. Геометрические свойства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.
19. Геометрические свойства решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

2 семестр

Примеры заданий контрольной работы

Контрольная работа № 4

1. Найти базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2 , где $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$, $a_1 = (1,2,1,1)$, $a_2 = (2,3,1,0)$, $a_3 = (3,1,1,-2)$, а $L_2 = \{x \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.
2. Доказать, что множество $L = \{p(t) \in M_3 \mid p(1) = 0, p'(1) + p(0) = 0\}$ образует линейное подпространство пространства M_3 . Найти два различных дополнительных подпространства к L .
3. Построить какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки матриц $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Найти ортогональную проекцию вектора $g = (2,2,0,1)$ на подпространство
$$L = \{x \in R^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$
5. Определить расстояние от многочлена $g(t) = 3t^3 - 3t^2 - t + 2$ до многообразия $P = \{p(t) \in M_3 \mid p(1) = 2, p'(0) = 1\}$.
6. Доказать, что если две гиперплоскости не пересекаются, то они параллельны.

Контрольная работа № 5

1. Оператор A действует в пространстве M_3 по правилу $Af(t) = f(2t) - f(t+1)$. Построить матрицу этого оператора в базисе $e_1(t) = 1, e_2(t) = 1 - t, e_3(t) = t + t^2, e_4(t) = t^2 - t^3$ и указать какие-либо базисы его ядра $\ker A$ и образа $\operatorname{im} A$.
2. Найти все собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
3. Показать, что матрица $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ диагонализуема, и привести её к диагональной подходящим преобразованием подобия.
4. Найти жорданову форму следующей матрицы и построить соответствующий канонический базис:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$
5. Оператор H задан матрицей $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ в базисе $f_1 = (1,1,0), f_2 = (0,1,0), f_3 = (0,0,1)$ пространства R^3 со стандартным скалярным произведением. Найти матрицу сопряжённого оператора H^* в этом же базисе f_1, f_2, f_3 .
6. Найти квадратный корень из матрицы $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
7. Известно, что операторы $A \in \mathcal{L}(V, W), B \in \mathcal{L}(W, V)$ удовлетворяют условию: произведение BA является тождественным оператором в пространстве V. Доказать, что если пространства V и W имеют разную размерность, то произведение AB не может быть тождественным

операторoм в пространстве W.

Контрольная работа № 6

1. Линейный оператор задан в некотором ортонормированном базисе матрицей
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
Построить ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора и найти его матрицу в построенном базисе.
2. Найти канонический вид B матрицы
$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$
и указать ортогональную матрицу Q, такую что $A = Q^{-1}BQ$.
3. Пусть A – положительно определённый линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве E. Доказать, что существует положительное число d такое, что для любого вектора $x \in E$ справедливо неравенство $(Ax, x) \geq d\ (x, x)$.
4. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму
$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$
к каноническому виду и написать этот канонический вид.
5. Найти нормальное псевдорешение системы линейных алгебраических уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Примеры заданий коллоквиума

Вопросы к коллоквиуму (второй семестр)

Коллоквиум проводится в форме устного собеседования. Для не сдавших коллоквиум зачёт (и зачётная комиссия) начинается с вопросов по теоретическому материалу коллоквиума. Билет коллоквиума содержит один вопрос из следующего списка:

1. Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.
2. Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и матрицами.
3. Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.
4. Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.
5. Матрицы линейного оператора в различных базисах.
6. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
7. Образ и ядро линейного оператора.
8. Произведение линейных операторов. Матрица произведения.
9. Обратный оператор. Критерий обратимости.
10. Инвариантные подпространства. Индуцированный оператор.
11. Инвариантные подпространства минимальной размерности (в комплексном и вещественном случаях).
12. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение и простейшие свойства. Примеры.
13. Характеристический многочлен линейного оператора. Определение и простейшие свойства.
14. Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.
15. Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения.

16. Операторы простой структуры. Критерий простой структуры.
17. Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.
18. Нильпотентный оператор. Определение, простейшие свойства, примеры.
19. Расщепление линейного оператора.
20. Корневые векторы. Канонический базис корневого подпространства.
21. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический базис.
22. Теорема Гамильтона-Кэли.
23. Подобные матрицы. Критерий подобия.

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзамена
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

1 семестр
Вопросы к экзамену

Линейная алгебра
1. Операции над матрицами и их свойства.
2. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Приведение к диагональному виду.
3. Перестановки, транспозиции, чётность.
4. Определитель и его свойства как функции столбцов (строк).
5. Определитель транспонированной матрицы.
6. Определитель произведения матриц.
7. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
8. Невырожденные матрицы. Обратные матрицы. Критерий обратимости матрицы.
9. Линейное пространство. Определение и примеры. Арифметическое пространство.
10. Линейная зависимость в линейном пространстве.
11. Базис и размерность линейного пространства.
12. Переход к другому базису, матрица перехода.
13. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
14. Ранг матрицы и линейная зависимость строк и столбцов.
15. Ранг произведения матриц. Ранг матрицы и элементарные преобразования.
16. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
17. Системы линейных алгебраических уравнений. Эквивалентность систем. Элементарные преобразования систем.
18. Системы с невырожденной матрицей. Правило Крамера.
19. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Критерий единственности решения.
20. Исследование системы линейных алгебраических уравнений общего вида. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы.
21. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений. Число арифметических операций в методе Гаусса.
22. Линейное подпространство. Геометрические свойства множества решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение.
23. Линейное многообразие. Геометрические свойства множества решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение.

Аналитическая геометрия
1. Направленные отрезки. Свободный вектор.
2. Линейные операции над векторами. Координаты вектора.
3. Проекции вектора. Свойства линейности проекций.
4. Линейная зависимость векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.
5. Аффинная система координат. Преобразование координат.
6. Преобразования прямоугольных декартовых координат. Ортогональные матрицы.
7. Скалярное произведение геометрических векторов. Скалярное произведение в прямоугольных декартовых координатах.
8. Векторное произведение векторов.
9. Смешанное произведение векторов.

10. Векторное и смешанное произведения в прямоугольных декартовых координатах.
11. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка линии (поверхности).
12. Параметрические уравнения прямой на плоскости и плоскости в пространстве.
13. Общее уравнение прямой на плоскости в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора прямой.
14. Общее уравнение плоскости в пространстве в аффинной системе координат. Критерий параллельности вектора плоскости.
15. Взаимное расположение двух прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
16. Пучок прямых на плоскости и плоскостей в пространстве.
17. Полуплоскости и полупространства.
18. Уравнения прямой в пространстве.
19. Взаимное расположение прямых в пространстве.
20. Метрические задачи на прямую и плоскость в прямоугольных координатах.
21. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части.
22. Приведённые уравнения линии второго порядка на плоскости. Метод вращений.
23. Классификация линий второго порядка на плоскости.
24. Эллипс. Фокусы и директрисы.
25. Гипербола. Фокусы и директрисы.
26. Парабола. Фокус и директриса.
27. Общее уравнение поверхности второго порядка в пространстве. Матричная запись общего уравнения и его квадратичной части.
28. Приведённые уравнения поверхности второго порядка. Метод вращений.
29. Классификация поверхностей второго порядка. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндрические поверхности.
30. Прямолинейные образующие алгебраических поверхностей второго порядка.

Общая алгебра

1. Декартово произведение множеств и бинарное отношение. Отношение эквивалентности. Фактор-множество.
2. Отображения. Обратное отображение.
3. Алгебраические операции. Обобщённый закон ассоциативности.
4. Группы. Основные свойства.
5. Подгруппы. Симметрическая и знакопеременная группы.
6. Группа невырожденных матриц. Группа невырожденных треугольных матриц. Группа ортогональных матриц.
7. Конечные группы. Теорема Лагранжа.
8. Степени элемента. Циклические группы. Подгруппы циклической группы.
9. Подгруппы, смежные классы, нормальные делители.
10. Изоморфизм групп.
11. Гомоморфизм групп.
12. Кольцо.
13. Поле. Характеристика поля. Алгебраическое расширение поля.
14. Кольцо вычетов. Поле вычетов по простому модулю.
15. Линейное пространство над полем. Число элементов в конечном поле.
16. Поле комплексных чисел. Комплексная плоскость.
17. Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент произведения комплексных чисел.
18. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра.
19. Извлечение корня из комплексного числа.
20. Группа корней из единицы. Первообразные корни.
21. Кольцо многочленов. Деление с остатком.
22. Наибольший общий делитель, его свойства. Алгоритм Евклида.
23. Значения многочлена и корни. Теорема Безу.

24. Многочлены как формальные выражения и как функции. Эквивалентность двух определений равенства многочленов.
25. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители.
26. Каноническое разложение многочлена над полем комплексных чисел. Кратность корня.
27. Каноническое разложение многочленов над полем вещественных чисел.
28. Формулы Виета. Симметрические многочлены.

Задачи к экзамену

1. Вычислить определитель n-го порядка
$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & x & x & \cdots & x & x \\ y & 0 & x & \cdots & x & x \\ y & y & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & y & 0 \end{bmatrix},$$
где $x \neq y$.
2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений λ
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$
3. В аффинной системе координат написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,3)$ и равноудалённой от точек $A(-2,1)$ и $B(-4,3)$.
4. Составить параметрическое уравнение прямой, параллельной прямой
$$l_1: \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0, \end{cases}$$
и пересекающей прямые $l_2: x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = -t$ и $l_3: x = -2t, y = -5 + 3t, z = 4$.
5. Построить однородную систему уравнений $Ax = 0$ по заданной фундаментальной системе решений: $e_1 = (-2,1,1,1), e_2 = (0,1,2,0), e_3 = (1,-1,0,1)$.
6. Вычислить объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зная его вершину $A(1,2,3)$ и координаты концов выходящий из неё рёбер: $B(9,6,4), D(3,0,4), A_1(5,2,5)$.
7. На плоскости заданы две системы координат: $\{O; e_1, e_2\}$ и $\{O'; e_1', e_2'\}$. Вторая система получена из первой поворотом вокруг точки $A(1,1)$ на угол $\varphi = 45^o$ в направлении кратчайшего поворота от e_1' к e_2'. Найти координаты (x, y) точки в первой системе координат, если известны её координаты (x', y') во второй системе координат.
8. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0$ и $3x - y + 5 = 0$.
9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5,2,0)$ и удаленной от точки $B(6,1,-1)$ на расстояние 1, а от точки $C(0,5,4)$ на расстояние 3.
10. Решить уравнение в комплексных числах: $|z| + z = 8 + 4i$.
11. Найти все образующие элементы циклической группы 11-го порядка.
12. Определить тип кривой, заданной уравнением
$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$
и найти уравнения осей ее канонической системы координат.

Пример экзаменационного билета

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Метрические задачи на прямую и плоскость в прямоугольных координатах.
3. Решить уравнение в комплексных числах: $|z| + z = 8 + 4i$.

2 семестр

Вопросы к экзамену

1. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.
2. Изоморфизм линейных пространств.
3. Сумма и пересечение линейных пространств.
4. Прямая сумма линейных пространств.
5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
6. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.
7. Изометрия.
8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.
9. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.
10. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.
11. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы.
12. Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.
13. Линейные операторы. Матрица линейного оператора.
14. Матрица линейного оператора при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.
15. Линейное пространство линейных операторов и матриц.
16. Произведение линейных операторов и его матрица.
17. Ядро и образ линейного оператора. Каноническая пара базисов.
18. Линейные функционалы. Сопряжённое пространство. Линейные функционалы и гиперплоскости.
19. Обратный оператор. Критерии обратимости.
20. Собственные значения и собственные векторы. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы.
21. Характеристический многочлен линейного оператора. Условие существования собственных значений.
22. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собственных значений.
23. Инвариантные подпространства. Сужение оператора.
24. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.
25. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.
26. Корневые подпространства. Расщепление линейного пространства в прямую сумму корневых подпространств.
27. Жорданов базис и жорданова матрица линейного оператора в комплексном пространстве.
28. Критерий подобия матриц.
29. Теорема Гамильтона-Кэли. Минимальный многочлен.
30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.
31. Вещественный аналог жордановой формы.
32. Сопряжённый оператор. Существование и единственность. Матрица сопряжённого оператора.
33. Нормальный оператор и нормальная матрица.
34. Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы.
35. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы. Эрмитово разложение линейного оператора.
36. Симметрические операторы и симметрические матрицы.
37. Унитарные операторы и унитарные матрицы.
38. Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы.
39. Знакоопределённые операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.
40. Сингулярные числа и сингулярные векторы. Полярное разложение оператора (матрицы).
41. Ортогональные дополнения ядра и образа линейного оператора. Теорема и альтернатива Фредгольма.

42. Билинейные и квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Конгруэнтность и эрмитова конгруэнтность.
43. Закон инерции квадратичных форм.
44. Приведение квадратичной формы к главным осям.
45. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.
46. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
47. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом и унитарном пространствах.
48. Гиперповерхность второго порядка в евклидовом пространстве. Приведённые уравнения.
49. Нормированное пространство. Нормы Гёльдера.
50. Длина вектора. Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.
51. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.
52. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном пространстве.
53. Линейный оператор в нормированных пространствах. Непрерывность и ограниченность. Норма линейного оператора.
54. Матричные нормы. Унитарно инвариантные нормы.
55. Сингулярное разложение матрицы и обобщённое решение линейных систем.
56. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений самосопряжённого оператора (матрицы).
57. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел.
58. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел матриц и подматриц.

Задачи к экзамену

1. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств $L_1 = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3)$ и $L_2 = \mathcal{L}(b_1, b_2, b_3)$ где $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,1,-1,-1)$, $a_3 = (1,-1,1,-1)$; $b_1 = (1,-1,-1,1)$, $b_2 = (1,-1,0,0)$, $b_3 = (3,-1,1,1)$.
2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейной оболочки векторов $x_1 = (2,3,-4,-6)$, $x_2 = (1,8,-2,-16)$, $x_3 = (12,5,-14,5)$, $x_4 = (3,11,4,-7)$.
3. Найти угол между вектором $a = (-3,15,1,-5)$ и линейной оболочкой векторов $b_1 = (2,3,-4,-6)$, $b_2 = (1,8.-2,-16)$, $b_3 = (1,-5,-2,10)$.
4. Найти канонический базис и жорданову форму матрицы
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
5. Доказать, что неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда вектор-столбец b ортогонален всем решениям сопряженной однородной системы $A^*y = 0$.
6. В пространстве многочленов M_2 со стандартным скалярным произведением задан ортогональный оператор A с определителем, равным -1, который переводит многочлен $1 + t + t^2$ в $1 - t + t^2$, а многочлен $1 - t^2$ в $1 - t$. Найти матрицу оператора A в базисе $1, t, t^2$.
7. Найти нормальный вид квадратичной формы
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$
и приводящее к нему треугольное преобразование координат.
8. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$
9. В пространстве M_2 введено скалярное произведение
$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Найти матрицу оператора, сопряженного к оператору дифференцирования, в базисе $1, t, t^2$.

10. Доказать, что пространство M_3 является прямой суммой подпространств L_1 и L_2, и найти проекцию многочлена $p(t) = t^3 + 1$ на L_1 параллельно L_2, если $L_1 = \{f(t) \in M_3 \mid f(0) = f(1)\}$, $L_2 = \{f(t) \in M_3 \mid f(2t) = 2f(t), \forall t \in R\}$.

Пример экзаменационного билета

1. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства..
2. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.
3. Найти нормальное псевдорешение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач