Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
декан факультета вычислительной математики и кибернетики

_____________/И.А. Соколов /
«27» сентября 2022г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине

Дифференциальные уравнения

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки / специальность:

01.03.02 "Прикладная математика и информатика" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения:

очная

Рассмотрен и утвержден

на заседании Ученого совета факультета ВМК

(протокол №7, от 27 сентября 2022 года)

Москва 2022

1. ФОРМЫ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

В процессе и по завершении изучения дисциплины оценивается формирование у студентов следующих компетенций:

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 – Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2 – Умеет использовать их в профессиональной деятельности ОПК-1.3 – Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: методологию вывода и анализа основных моделей, приводящих к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ); основные классы интегрируемых ОДУ и методы их решения; общую теорию и методы решения линейных ОДУ и линейных систем ОДУ; основы теории существования, единственности и зависимости от параметров решений задачи Коши, а также связанные с ними методы приближённого решения ОДУ; основы теории устойчивости по Ляпунову и методы исследования устойчивости; классификацию положений равновесия автономных систем на плоскости; основы теории и стандартные методы решения краевых задач и задач Штурма-Лиувилля для линейных ОДУ второго порядка; основы теории и классические методы интегрирования уравнений в частных производных первого порядка; основы теории вариационного исчисления, их связь с краевыми задачами и задачей Штурма-Лиувилля. Уметь: применять на практике общую теорию и методы

		решения линейных ОДУ и систем ОДУ, в том числе, метод вариации постоянных, а также находить частное решение в виде квазимногочлена; находить приближённые решения ОДУ в виде степенных рядов, применять теорию зависимости решений ОДУ от параметров для приближённого решения ОДУ; применять первый метод Ляпунова для исследования устойчивости решений систем ОДУ; классифицировать положения равновесия автономных систем ОДУ на плоскости, исследовать поведение фазовых траекторий в окрестности положений равновесия и изображать эскизы типичных фазовых портретов; решать краевые задачи для линейных ОДУ (в том числе с использованием функции Грина), а также задачи Штурма-Лиувилля для линейных ОДУ; формулировать простейшие прикладные вариационные задачи, применять на практике необходимые условия экстремума для поиска экстремалей в основных задачах вариационного исчисления. Владеть: навыками интегрирования основных классов ОДУ и уравнений в частных производных первого порядка; навыками применения теорем о существовании и единственности решения задачи Коши для качественного исследования ОДУ; навыками использования

		определения устойчивости по Ляпунову, а также построения функций Ляпунова, для исследования устойчивости решений систем ОДУ;

1.1. Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости осуществляется путем оценки результатов выполнения заданий практических (семинарских) занятий, самостоятельной работы, предусмотренных учебным планом и посещения занятий/активность на занятиях.

В качестве оценочных средств текущего контроля успеваемости предусмотрены:

контрольная работа

5 семестр

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Контрольная работа № 1</td></tr>
<tr><td align="center">Вариант 1</td><td align="center">Вариант 2</td></tr>
<tr><td>1. Решить уравнение и найти особые решения, если они есть:
$5y + y'^2 = x(x + y')$.
2. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = y'^2 + (1 - y)y', \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1. \end{cases}$
Решить уравнения:
3. $(3x^2y^2 + 1)y' + 3xy^3 = 0$.
4. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x + 4y^2\sin x = 0$.
5. $(2x + y)(1 - 2y') = 9y' - 2$.</td><td>1. Решить уравнение и найти особые решения, если они есть:
$y'^2 - 4y' + 4y = 8x - 12$.
2. Решить задачу Коши:
$\begin{cases} xyy'' + (1 + x^2)yy' + xy^2 = xy'^2, \\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1. \end{cases}$
Решить уравнения:
3. $y^3 + 2y^2xy' = 2y'\ln y$.
4. $2yy' - y^{-1} = x^{-2}y - (xy^{-2} + x^{-1})y'$.
5. $yy' - 3x = 6 - (2x + 5)y'$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Контрольная работа № 2</td></tr>
<tr><td align="center">Вариант 1</td><td align="center">Вариант 2</td></tr>
<tr><td>Найти решения линейных ОДУ и их систем:
1. $y'' + 9y = 12\sin 3x$
2. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x - 3}$.
3. $\begin{cases} x' = -3x - z \\ y' = -4x - 2y - 3z \\ z' = 4x + 2y + 3z \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y + \frac{1}{\sin t} \end{cases}$
5. $(2x - x^2)y'' + 2y' - 2x^{-1}y = 0$</td><td>Найти решения линейных ОДУ и их систем:
1. $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$
2. $y'' - 6y' + 10y = \dfrac{e^{3x}}{\cos x}$.
3. $\begin{cases} x' = x + 2y + 2z \\ y' = -y - 2z \\ z' = y + z \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 6x - 9y + \cos t \\ y' = 4x - 6y \end{cases}$
5. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 4x^2$</td></tr>
</table>

6 семестр

Контрольная работа № 3	
Вариант 1	Вариант 2
1. Найти $y'_\mu\big\vert_{\mu=0}$: $\begin{cases} y' = e^{x-y} + \mu y, \\ y(0) = \mu. \end{cases}$ 2. Решить систему нелинейных ОДУ $\dfrac{\mathrm{d}x}{y^2+z^2} = \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{z}} = \dfrac{\mathrm{dz}}{\mathrm{y}}.$ 3. Исследовать на устойчивость: $\begin{cases} t^3x' - t^2x = t^2 - 3 \\ x(1) = 0 \end{cases}$ 4. Найти a и b, при которых асимптотически устойчиво нулевое решение уравнения $2y^{(IV)} + ay''' + y'' + 2y' + 2by = 0$ 5. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = y + \sqrt{1 + 2x^2} \end{cases}$	1. Найти $y'_\mu\big\vert_{\mu=0}$: $\begin{cases} y' = \mu x^{-2}y^{-1} - yx^{-1}, \\ y(1) = 1 + 2\mu. \end{cases}$ 2. Решить систему нелинейных ОДУ $\dfrac{\mathrm{d}x}{2yz} = \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} = \dfrac{\mathrm{dz}}{\mathrm{z}}.$ 3. Исследовать на устойчивость: $\begin{cases} x' + x\tan t = e^t\cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ 4. Найти a и b, при которых асимптотически устойчиво нулевое решение уравнения $y^{(IV)} + ay''' + by'' + y' + 2y = 0$ 5. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы $\begin{cases} x' = \ln(2 - y^2) \\ y' = e^x - e^y \end{cases}$

Контрольная работа № 4	
Вариант 1	Вариант 2
1. Изобразить эскиз траекторий решений системы в окрестности положения равновесия системы ОДУ $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ 2. Решить краевую задачу $\begin{cases} x^2y'' - 2y = -2x^3, \\ \lim_{x\to 0} y(x) = 0, \\ y'(1) = 1/2. \end{cases}$ 3. Построить функцию Грина: $\begin{cases} y'' + y = f(x), \\ y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{5\pi}{2}) = 0. \end{cases}$ 4. Решить задачу Коши для ДУ в частных производных 1-го порядка $x(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} = y,\ \ 2\mathrm{y}^2 = z^2, \mathrm{x} = \mathrm{y}^2e^{z-y}.$ 5. Найти стационарные кривые функционала $\int_0^1 (y^2 + y'^2)dx,\ y(0) = 0, y(1) = 1$	1. Изобразить эскиз траекторий решений системы в окрестности положения равновесия системы ОДУ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -3x - 4y \end{cases}$ 2. Решить краевую задачу $\begin{cases} x^2y'' - 2y = 4x^{-2}, \\ y(1) = 5, \\ \lim_{x\to +\infty} y(x) = 0. \end{cases}$ 3. Построить функцию Грина: $\begin{cases} y'' - y = f(x), \\ y'(-\infty) = y'(0) = 0. \end{cases}$ 4. Решить задачу Коши для ДУ в частных производных 1-го порядка $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz,\ \ \mathrm{y} = z^2, \mathrm{x}^2 + 2z = 0.$ 5. Найти стационарные кривые функционала $\int_{-1}^1 (2xy - y'^2)dx,\ y(-1) = -1, y(1) = 1$

1.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме зачета (5 семестр) экзамена (6 семестр)
В качестве средств, используемых на промежуточной аттестации предусматривается:
Билеты

1.3. Типовые задания для проведения промежуточной аттестации

5 семестр

Вопросы к зачету.

1. Понятие дифференциального уравнения, примеры. Редукция ОДУ n-го прядка, разрешенного относительно старшей производной, к нормальной системе ОДУ. Определение решения общего ОДУ n-го прядка и его интегральной кривой. Определение решения, интегральной кривой и фазовой траектории нормальной системы ОДУ, примеры.
2. Примеры математических моделей, использующих дифференциальные уравнения: движение материальной точки в пространстве под действием силы, зависящей от времени, положения точки и ее скорости; динамика популяций в рамках модели «хищник-жертва».
3. ОДУ 1 порядка в симметричном виде, определение параметрического решения. Интеграл и общий интеграл, примеры. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема об общем интеграле УПД.
4. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема о необходимом и достаточном условии того, что ОДУ в симметричном виде является УПД.
5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Теорема о существовании интегрирующего множителя.
6. Лемма Гронуолла-Беллмана.
7. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной. Лемма о редукции этой задачи к интегральному уравнению. Условие Липшица по переменной y для скалярной функции $f(t, y)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
8. Теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
9. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной, примеры. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение ОДУ 1-го порядка, примеры.
10. Постановка задачи Коши для нормальной системы ОДУ. Условие Липшица по переменным $(y_1, \dots, y_n)$ для функции $f(t, y_1, \dots, y_n)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.
11. Теорема о существовании решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ на произвольном отрезке.
12. Постановка задачи Коши для ОДУ n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Теорема о существовании и единственности решения этой задачи на произвольной отрезке.
13. Постановка задач Коши для линейного ОДУ n-го порядка и линейной системы ОДУ. Теоремы о существовании и единственности решения этих задач на произвольной отрезке.
14. Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородного линейного ОДУ n-ого порядка.
15. Фундаментальная система решений линейного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородного линейного ОДУ n-ого порядка.

16. Теорема об общем решении неоднородного линейного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.
17. Теорема о построении ФСР однородного линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Пример построения однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами по заданным решениям.
18. Теорема о единственности однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданную ФСР.
19. Теорема о построении однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданный набор решений, пример. Формула Остроградского-Лиувилля.
20. Линейная зависимость и независимость векторных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородной линейной системы ОДУ.
21. Фундаментальная система решений однородной линейной системы ОДУ. Фундаментальная матрица. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородной линейной системы ОДУ.
22. Теорема об общем решении неоднородной линейной системы ОДУ. Матрицант. Теорема о частном решении неоднородной линейной системы ОДУ (метод вариации постоянных).
23. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае существования n линейно независимых собственных векторов матрицы системы.
24. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае отсутствия n линейно независимых собственных векторов матрицы системы.

Билет для зачета содержит 4 вопроса, например:

1. Сформулировать и доказать теорему о необходимом и достаточном условии того, что обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка в симметричном виде является уравнением в полных дифференциалах.
2. Сформулировать теорему об альтернативе для определителя Вронского для решений линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Сформулировать постановку задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной.
4. Функции $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t^3$, $y_3(t) = |t|^3$ являются решениями линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $t^2 y'' - 3ty' + 3y = 0$. Исследовать их на линейную зависимость на отрезке $[-1,3]$ и объяснить результат.

Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Зачетная работа	
Вариант 1	Вариант 2
Решить уравнения 1. $y'^2 - 8xy' + 8x^2 + 4y = 0$ 2. $xy' = y(1 - \ln x + \ln y)$ 3. $2x + 2yy' = x^{-2}\sin^2 y - x^{-1}y'\sin 2y$ 4. $y' + 2xy^3 = y$ 5. $y'' + 3y' - 4y = 5e^{-4x}$. 6. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.	Решить уравнения 1. $x^4 y'^2 + xy' + y = 0$ 2. $1 + 3y^2 y' = x^3 y^{-1} y' + 3x^2 \ln y$ 3. $(2x + y)y' = 3y' - y - 1$ 4. $2xy' = 3y - 4xy^3$ 5. $y'' - y = 2e^x$. 6. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Решить системы уравнений	Решить системы уравнений
7. $\begin{cases} x' = 2x + 2y - 2z \\ y' = 2x + 5y - 4z \\ z' = -2x - 4y + 5z \end{cases}$	7. $\begin{cases} x' = x + 2y + 2z \\ y' = 2x + y + 2z \\ z' = 2x + 2y + z \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = -3x - 3y + 1 \\ y' = 6x + 6y \end{cases}$	8. $\begin{cases} x' = -4x - 4y \\ y' = 6x + 6y - 1 \end{cases}$

6 семестр

Вопросы к экзамену.

1. Понятие дифференциального уравнения, примеры. Редукция ОДУ n-го прядка, разрешенного относительно старшей производной, к нормальной системе ОДУ. Определение решения общего ОДУ n-го прядка и его интегральной кривой. Определение решения, интегральной кривой и фазовой траектории нормальной системы ОДУ, примеры.
2. Примеры математических моделей, использующих дифференциальные уравнения: движение материальной точки в пространстве под действием силы, зависящей от времени, положения точки и ее скорости; динамика популяций в рамках модели «хищник-жертва».
3. ОДУ 1 порядка в симметричном виде, определение параметрического решения. Интеграл и общий интеграл, примеры. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема об общем интеграле УПД.
4. Уравнения в полных дифференциалах (УПД). Теорема о необходимом и достаточном условии того, что ОДУ в симметричном виде является УПД.
5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Теорема о существовании интегрирующего множителя.
6. Лемма Гронуолла-Беллмана. Условие Липшица для скалярной функции от 1-й переменной. Примеры, иллюстрирующие соотношения между множествами липшицевых, непрерывных и дифференцируемых функций; поведение липшицевых функций на бесконечности.
7. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной. Лемма о редукции этой задачи к интегральному уравнению. Условие Липшица по переменной y для скалярной функции $f(t, y)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
8. Теорема о существовании решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, разрешенного относительно производной.
9. Постановка задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной, примеры. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение ОДУ 1-го порядка, примеры.
10. Постановка задачи Коши для нормальной системы ОДУ. Условие Липшица по переменным $(y_1, \dots, y_n)$ для функции $f(t, y_1, \dots, y_n)$. Теорема о единственности решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ.
11. Теорема о существовании решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ на произвольном отрезке.
12. Постановка задачи Коши для ОДУ n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Теорема о существовании и единственности решения этой задачи на произвольной отрезке.
13. Постановка задач Коши для линейного ОДУ n-го порядка и линейной системы ОДУ. Теоремы о существовании и единственности решения этих задач на произвольной отрезке.

14. Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородного линейного ОДУ n-ого порядка.
15. Фундаментальная система решений линейного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородного линейного ОДУ n-ого порядка.
16. Теорема об общем решении неоднородного линейного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.
17. Теорема о построении ФСР однородного линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами. Пример построения однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами по заданным решениям.
18. Теорема о единственности однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданную ФСР.
19. Теорема о построении однородного линейного ОДУ n-ого порядка, имеющего заданный набор решений, пример. Формула Остроградского-Лиувилля.
20. Линейная зависимость и независимость векторных функций. Определитель Вронского и его свойства. Примеры. Теорема об альтернативе для определителя Вронского для решений однородной линейной системы ОДУ.
21. Фундаментальная система решений однородной линейной системы ОДУ. Фундаментальная матрица. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении однородной линейной системы ОДУ.
22. Теорема об общем решении неоднородной линейной системы ОДУ. Матрицант. Теорема о частном решении неоднородной линейной системы ОДУ (метод вариации постоянных).
23. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае существования n линейно независимых собственных векторов матрицы системы. Обоснование возможности перехода к действительнозначной ФСР в случае вещественной матрицы системы.
24. Теорема о построении ФСР однородной линейной системы ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами в случае отсутствия n линейно независимых собственных векторов матрицы системы.
25. Теорема о зависимости от правой части и начального условия решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Теорема о непрерывной зависимости от параметра решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.
26. Теорема сравнения решений задач Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной (неравенство Чаплыгина).
27. Теорема о дифференцируемости по параметру решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Метод малого параметра.
28. Основные понятия теории устойчивости, примеры. Редукция общей задачи к задаче для нулевого решения.
29. Лемма об устойчивости нулевого решения однородной линейной системы.
30. Теорема об устойчивости нулевого решения однородной линейной системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Теорема об устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова, только формулировка).
31. Положительно определенные функции и их свойства, примеры. Функция Ляпунова для нормальной системы ОДУ.
32. Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения нормальной системы ОДУ (второй метод Ляпунова). Пример.
33. Теорема Четаева о неустойчивости нулевого решения нормальной системы ОДУ. Пример.

34. Точки покоя (положения равновесия) нормальной автономной системы ОДУ. Классификация точек покоя (с эскизами фазовых траекторий и обоснованием эскиза узла) линейной однородной системы ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и невырожденной матрицей. Грубые точки покоя, поведение фазовых траекторий нормальной автономной системы ОДУ 2-го порядка в окрестности грубой точки покоя.
35. Постановка краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка, редукция к дивергентному виду и однородным краевым условиям. Тождество Лагранжа, формула Грина, следствия из них.
36. Определение функции Грина краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка, теорема о существовании и единственности функции Грина.
37. Теорема о представлении решения краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка через функцию Грина.
38. Задача Штурма-Лиувилля, теоремы о свойствах собственных значений и собственных функций. Теорема Стеклова (только формулировка).
39. Первые интегралы (ПИ) нормальной системы ОДУ, лемма о производной в силу системы. Геометрический смысл ПИ, теорема о представлении решения задачи Коши для нормальной системы ОДУ с помощью функционально независимых ПИ.
40. Линейное однородное уравнение в частных производных (УЧП) 1-го порядка и соответствующая ему система характеристик. Теорема о связи между решениями линейного однородного УЧП 1-го порядка и первыми интегралами системы характеристик. Теорема об общем решении линейного однородного УЧП 1-го порядка.
41. Квазилинейное неоднородное УЧП 1-го порядка и соответствующая ему система характеристик Теорема о связи между решениями квазилинейного неоднородного УЧП 1-го порядка и первыми интегралами системы характеристик.
42. Квазилинейное неоднородное УЧП 1-го порядка и соответствующая ему система характеристик. Теорема о геометрическом смысле квазилинейного УЧП 1-го порядка.
43. Определение функционала, локального экстремума функционала, допустимой вариации функции, вариации функционала. Теорема о необходимом условии экстремума функционала.
44. Основная лемма вариационного исчисления. Теорема о необходимом условии экстремума функционала вида $\int \mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}')\mathrm{dx}$, уравнение Эйлера.
45. Основная лемма вариационного исчисления. Теорема о необходимом условии экстремума функционала вида $\int \mathrm{F}\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{y}', \dots \mathrm{y}^{(\mathrm{n})}\right)\mathrm{dx}$.
46. Основная лемма вариационного исчисления в двумерном случае. Теорема о необходимом условии экстремума для функционала вида $\iint F\left(x, y, u(x, y), u_x, u_y\right)dxdy$.
47. Вариационная задача на условный экстремум, теорема о необходимом условии экстремума в этой задаче.
48. Вариационное свойство собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Типовые задачи для экзамена.

1. Найти $y'_\mu\big|_{\mu=0}$: $\begin{cases} y' = y\,x^{-1} + \mu y^2, \\ y(1) = 1 + \mu. \end{cases}$

2. Решить систему нелинейных ОДУ $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{x^2+z^2} = \dfrac{dz}{x}$

3. Исследовать на устойчивость:

6. Изобразить эскиз траекторий решений системы в окрестности
положения равновесия системы ОДУ
$\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = x - y \end{cases}$

7. Решить краевую задачу $\begin{cases} x^2 y'' - 6y = 8x^2, \\ \lim_{x\to 0} y(x) = 0, \\ y(1) = -1. \end{cases}$

8. Построить функцию Грина:

$$\begin{cases} x' = 2e^t - x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

4. Найти a и b, при которых асимптотически устойчиво нулевое
решение уравнения
$$y^{(IV)} + by''' + ay'' + 2y' + y = 0$$

5. Исследовать на устойчивость все положения равновесия системы
$$\begin{cases} x' = 1 - 2x - y^2 \\ y' = e^{-4x} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(x), \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

9. Решить задачу Коши для ДУ в частных производных 1-го порядка
$$x(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad y = z^2, \; x = ze^{z+y}.$$

10. Найти стационарные кривые функционала
$$\int_0^1 (xy' + y'^2)dx, \; y(0) = 0, y(1) = 1$$

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов и задачи, например

1. Теорема об общем решении неоднородной линейной системы ОДУ. Матрицант. Теорема о частном решении неоднородной линейной системы ОДУ (метод вариации постоянных).
2. Теорема о дифференцируемости по параметру решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Метод малого параметра.
3. Построить функцию Грина: $\begin{cases} y'' + 9y = f(x), \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка виды оценочных средств	**2 (не зачтено)**	**3 (зачтено)**	**4 (зачтено)**	**5 (зачтено)**
Знания (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2.)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: приведены в п. 1.2..)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач